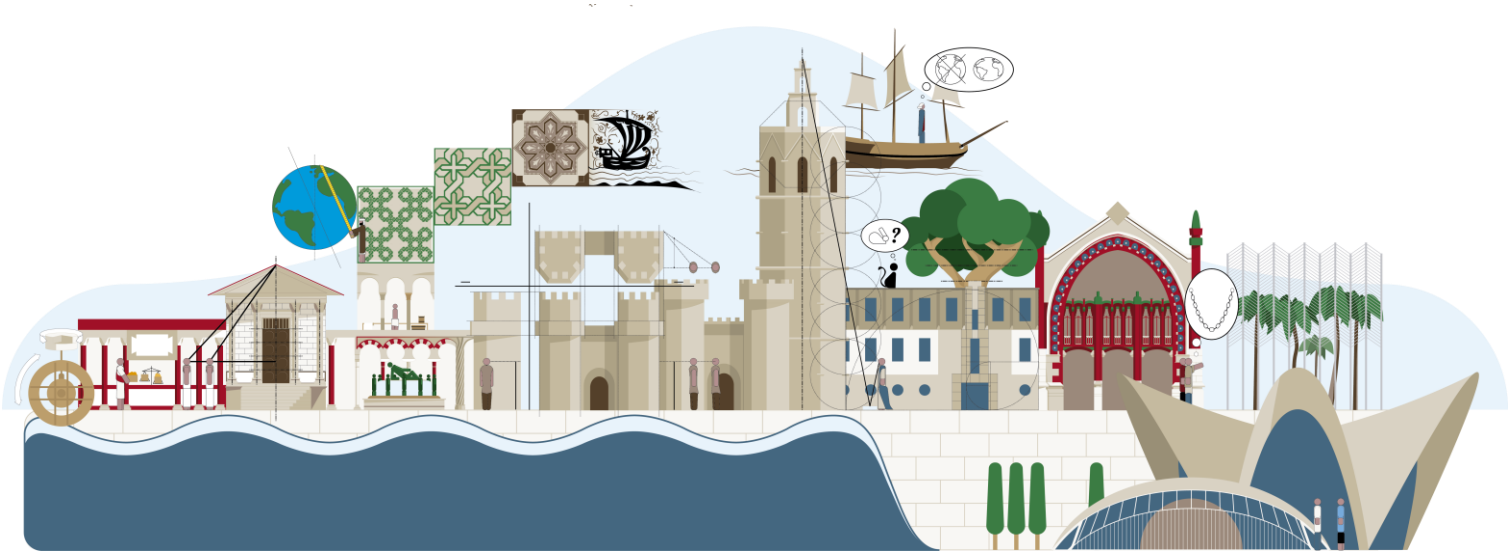
LIBRO DE ACTAS

JAEM 20

Matemáticas para construir el mundo



XX JAEM: València del 3 al 6 de julio 2022

Societat
d´Educació
Matemàtica de la
Comunitat
Valenciana "al - Khwārizmī"

Comité organizador
Coordinador: Tomás Queralt Llopis (SEMCV)
Fernando Arenas Planelles (SEMCV)
Lluís Bonet Juan (SEMCV)
Adrián Cuenca Avi (SEMCV)
Vicente Diago Ortells (SEMCV)
Óscar Forner Gumbau (SEMCV)
Gregori García Ferri (SEMCV)
Raül Martínez Sendra (SEMCV)
Onofre Monzó del Olmo (SEMCV)
José Antonio Mora Sánchez (SEMCV)
Julia Muñoz Martínez (SEMCV)
Maite Navarro Moncho (SEMCV)
Vicent Perales Mateu (SEMCV)
José Aurelio Pina Romero (SEMCV)
Silvia Quilis i Marco (SEMCV)

Comité científico
Agustín Carrillo de Albornoz Torres (SAEM Thales)
Carmen Espeso (SMPC)
Maite Navarro Moncho (SEMCV)
Cristina Naya Riveiro (AGAPEMA)
Tomás Queralt Llopis (SEMCV)
Julio Rodríguez Taboada (AGAPEMA)
Dani Ruiz Aguilera (SBM-XEIX)

Diseño página web
José Aurelio Pina Romero (SEMCV)

Diseño logos e imagen
Fernando Domínguez Navarro

Maquetación
Fernando Arenas Planelles (SEMCV)
José Antonio Mora (SEMCV)

ISBN: 978-84-122154-0-3
Primera edición:
Editor: FESPM

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización del editor.

NOTA EDITORIAL: Las opiniones y contenidos de los textos publicados en esta obra son de responsabilidad exclusiva de sus autores.

CONVOCA:

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

ORGANIZA

Societat d´Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al - Khwārizmī"

PATROCINAN:

GENERALITAT VALENCIANA | TOTS A UNA veu
Presidència

GENERALITAT VALENCIANA | TOTS A UNA veu
Conselleria d'Educació, Cultura i Esport

CORTS VALENCIANES

AJUNTAMENT DE VALÈNCIA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

COLABORAN:

GOBIERNO DE ESPAÑA | MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y FORMACIÓN PROFESIONAL

CASIO
División Educativa

EL CUADRADO MÁGICO
Materiales Didácticos

1880 el lobo DOÑA JIMENA

innovamat

tekman
REVOLUCIÓN Y APRENDIZAJE

EXCLUSIVAS Ediciones LIFER

ÍNDICE

Bienvenida del Presidente de la SEMCV 1

CONFERENCIAS PLENARIAS 3

C1 2022: La odisea de las Matemáticas 4
Lluís Bonet Juan

C2 No hagas cuentos, haz Matemáticas 9
M. Magdalena Martí Pons
M. Susanna Morell Torrens
Maria Àngels Portilla Rueda

C3 JAEM 2022 - Enriquecer las Mátematicas 25
Charlie Gilderdale

C4 Bayes: Un teorema para abordarlo todo 28
Anabel Forte Deltell

PONENCIAS 42

PoP1 Nuevo currículo, ¿nuevas metodologías? 43
Antonio Moreno Verdejo

PoP2 El proceso de matematización en el estudio del patrimonio histórico-artístico: Matemáticas para la armonía. 56
Constantino de la Fuente Martínez

PoC1 En busca de la conexión perdida 78
Lluís Mora Cañellas

PoA1 La evaluación externa en el nuevo marco legislativo de la LOMLOE 102
Ruth María Martín Escanilla

PoA2 Evaluando la evaluación 116
Maite Gorriz Farré

PoR1 Los materiales manipulativos y las buenas preguntas: el binomio perfecto 136
Marcos Marrero Cárdenas

PoR2 Con GeoGebra, ¡también podemos jugar! 139
Laura Sombra del Río

PoF1 De la formación del profesorado en currículum y evaluación competencial al asesoramiento a centros 147
Iolanda Guevara Casanova

PoF2 Resolviendo problemas en primaria 165
José Ángel Murcia Carrión
PoD2 ¿Qué podemos esperar de las redes sociales? 178
Pablo Beltrán-Pellicer
PoI1 Unus Pro Omnibus (Et Omnia Pro Uno) 190
Covadonga Rodríguez-Moldes Rey
PoI2 Matemáticas inclusivas: eliminando barreras y creando facilitadores desde la evidencia 212
Concha Barceló
Begoña De la Iglesia Mayol

COMUNICACIONES 220

CoP001 ¿Cómo explican los estudiantes de bachillerato su imagen intuitiva de límite de una función? 221
Joan Pons Tomàs
Julia Valls González
CoP004 Identificación de estrategias de resolución de problemas en un contexto de olimpiada matemática: un estudio de casos 239
Fernando Arenas Planelles
Julia Muñoz Martínez
Joan Pons Tomàs
CoP006 Trabajamos con la estrella mudéjar 267
Felisa Gil Meléndez
CoP009 Identidades algebraicas doblando papel 280
Fernando Blasco Contreras.
Álvaro Sánchez González.
CoP013 Pensar antes de calcular, antes de actuar… y volver a pensar después..... 286
Xavier Vilella Miró 286
CoP018 El potencial de los ejemplos genéricos para desarrollar demostraciones en la Educación Secundaria 300
Georgina Cerqueda Santacreu
Yolanda Colom Torrens
Jordi Deulofeu Piquet
CoP024 El tour de mates: la carrera de cálculo mental 318
Diego Alonso Santamaría

CoP025 Introducir y desarrollar el sentido estocástico mediante la resolución de problemas 328

Mireia de Cervelló Minyana i Pastor

M. Pedro Huerta Palau

CoP027 ¿Cómo llevar juegos de mesa al aula de matemáticas? 353

Tere Longueira Guerrero

Pol San Barón

CoP029 Funciones y curvas con GeoGebra por toda la ciudad 360

María del Carmen García González

CoP030 Retos en un entorno virtual de aprendizaje de matemáticas propedéuticas para adultos 375

Joana Villalonga Pons

Mireia Besalú

Rosa Presas

Teresa Sancho

CoP031 ¿La covid-19 afecta por igual a hombres y a mujeres?: una experiencia con alumnado de educación secundaria 392

Pablo Giadas

Pedro Alonso

Laura Muñiz-Rodríguez

Luis J. Rodríguez-Muñiz

CoP032 Funciones y gráficas con GeoGebra 409

Débora Pereiro Carbajo

CoP033 Maquinando en Educación Primaria Proyecto STEAM – Cómo hacer matemáticas en Steam. 423

Fraile Rey, Arantzazu

CoC001 Maquetem Mataró. Un proyecto de trabajo en red 438

Roser Garcia Ferrer

CoC002 Educar la mirada matemática, enseñar a mirar: La potencialidad didáctica de los microrrelatos matemáticos a partir de fotografías 456

María del Pilar Menoyo Díaz

CoC003 El secreto mejor guardado. Aprendiz de hacker. 485

Joan Gómez i Urgellés

CoC004 ¿Por qué entonan las guitarras sin trastes paralelos? 495

Miquel Albertí Palmer

CoC006 Secuencia didáctica interdisciplinar: las matemáticas y las ciencias naturales en el huerto escolar con alumnado de 4 años 510
Salvador-Beltri, Andrea
Lorenzo-Valentín, Gil
Santágueda-Villanueva, Maria
Monferrer-Sales, Lidón
CoC011 Conexiones entre las Matemáticas y el fútbol del siglo XXI 531
Diego Alonso Santamaría
CoC014 Matemáticas en una lata: “Proyecto STEAM Cansat” 545
Alicia Prieto Martín
CoC015 Midiendo edificios del Mundo: Google Earth para Enseñar Geometría..... 557
Mª Luisa Cuadrado Sáez
Naiara Izaskun Arteta De La Hoz
CoC018 Una experiencia con BlocksCAD para el desarrollo del pensamiento computacional en alumnado con talento matemático..... 569
Juan Miguel Ribera Puchades
Lucía Rotger García
CoC020 Ajedrez educativo 581
María Alicia Hernández Fernández
CoA003 Diseño de un taller matemático con alumnos con TDHA y sin TDHA 604
Yolanda Colom Torrens
Núria Rosich Sala
CoR002 “Cazadores de sombras” 623
Eugenia Torres Martín
CoR005 Geomaniguras: Un nuevo material didáctico para la enseñanza de la geometría. 646
José L. González-Fernández
José A. Núñez-López
David Molina-García
CoR006 Laboratorio de Matemáticas 667
Enric Castellà
Sílvia Margelí
Montserrat Torra
CoR008 Biografías de grandes matemáticos 682
Juan Francisco Hernández Rodríguez

CoR009 Descubriendo el Teorema de Pick 697
Mireia Vinyoles Serra
CoR013 Contextos reales para desarrollar la alfabetización estadística de 3 a 12 años 712
Ángel Alsina
CoR016 Una actividad rica sobre funciones usando GeoGebra 732
Laura Morera Úbeda
Ignasi Segura Renau
CoR018 Televisión y publicidad. Contextualizando las Matemáticas 740
Carlos Moreno Borrallo
CoR023 Provocaciones de suelo bajo y techo alto 746
Cecilia Calvo Pesce
CoR026 Espacios y materiales para desarrollar las matemáticas intuitivas e informales en la escuela infantil (0-3 años) 753
Gloria Olmos Martínez
Àngel Alsina
CoR027 Las Matemáticas en el aula de 0-1 año 771
Iolanda Torralba Palmero
Mercè Saavedra Gandia
CoR028 El lenguaje Matemático en el primer ciclo de educación infantil (0-3 años) 781
Mercè Saavedra Gandia
Goretti Torrent Tort
CoR033 Geometría esférica en un aula de ESO 789
Alba Blasco Estrada
Josep Costa Riu
CoR036 “Lo que el viento nos dejó”. Experiencia de clases no presenciales en la etapa de secundaria. Recursos digitales utilizados y su continuidad hoy 795
Juan Francisco González Carreras
Antonio Sánchez Carmona
CoR037 Fotografía geométrica en la vida cotidiana. Tarea con GeoGebra en 3º de ESO 814
Antonio Sánchez Carmona
CoR038 Cuentos que cuentan 832
Paula López-Serentill
Marta Ruiz Cárcel
Anna Rodríguez Casas

CoR040 Contamos y hablamos. Descubrimos el Numicon 852
Ester Bosch i Casas
Anna Rodríguez Casas
CoR041 Situación de aprendizaje. Tu solución fotovoltaica 864
Patricia Díez Ortego
José Luis Muñoz Casado
CoR043 GeoGebra Discovery en la EGMO 2022 872
Belén Ariño Morera
CoR044 Una experiencia de pensamiento computacional en la etapa 3-6 años con BEE-BOT® 882
Álvaro Aguilar González
Laura Muñiz Rodríguez
Luis J. Rodríguez Muniz
Nair Fernández Monforte
CoR046 EDUMATICUS: EDUcación MATemática con TIC en Universidad y Secundaria 899
Galán García, José Luis
Padilla Domínguez, Yolanda
Rodríguez Cielos, Pedro
Rodríguez Padilla, Pablo
CoR050 Trabajando las operaciones con enteros usando juegos de mesa. 908
Luis Cros Lombarte
CoR052 El diseño del Tangram Egipcio 914
Carlos Luna-Mota
CoR054 Curso 0 Online de Aspectos Básicos de Matemáticas para alumnado de la Escuela de Ingenierías Industriales de la Universidad de Málaga 930
Galán García, Mª Ángeles
Padilla Domínguez, Yolanda
Rodríguez Cielos, Pedro
Rodríguez Padilla, Pablo
CoF001 Un acercamiento al pensamiento probabilístico en alumnado con trastorno del espectro autista 941
Mª del Pilar Sabariego Arenas
Irene Polo-Blanco
Melody García-Moya
Juncal Goñi-Cervera

CoF002 Percepciones de los y las maestras en formación inicial durante sus prácticas externas en tiempos del covid-19 sobre la resolución de problemas matemáticos 957

María Santágueda Villanueva

Gil Lorenzo Valentín

CoF003 Una tarea de alta demanda cognitiva para introducir la paridad en 1º de primaria 974

Rocío Pérez Guzmán

Juan Pedro Martín Díaz

Alice Díez Fernández

Nuria Climent Rodríguez

CoF004 Razonamiento espacial y educación matemática entre 0 y 6 - 7 años..... 988

Montserrat Torra Bitlloch

Maria Roca Parpal

CoF006 Cuéntame un cuento: una nueva forma de construir el conocimiento lógico-matemático 996

Juan Antonio Antequera-Barroso

Enrique Carmona Medeiro

CoF007 Cuatro fases para aprender a medir. 1011

Teresa Calabuig i Serra

CoF012 Estadística en conexión con la sostenibilidad a través de cuentos: una experiencia con futuro profesorado de primaria 1027

Claudia Vásquez

Ángel Alsina

CoF013 La cátedra de didáctica de las matemáticas M. Antònia Canals y el Gamar: el legado de una maestra de maestros 1045

Ángel Alsina

Ester Bosch

Xavier Fernández

CoD005 Matemáticas y ciencias en la educación escolar en europa 1056

Ana Martín Martínez

Jaime Vaquero Jiménez

CoD007 Calle Matemáticas Sevilla 1077

José Carlos Gámez Pérez

Alberto César Barbero

José Luis Ríos Calle

CoD009 La comunicación en la enseñanza en línea de las Matemàticas durante el confinamiento por COVID-19 1086

Adoración Medina-Albós

Dra. Núria Rosich Sala

Dra. Yolanda Colom Torrens

Ana Rosa Díaz Rodríguez

María Nila Pérez Francisco

José Manuel Vidal González

CoI001 Actuaciones en el aula de matemáticas con un enfoque inclusivo 1112

Arturo Prieto Pérez

CoI002 Diseño y validación de una *checklist* para detectar los síntomas de riesgo de discalculia dirigida al profesorado de educación primaria 1126

Estefanía Espina

José M. Marbán

Ana Maroto

CoI003 Matemáticas para todos 1143

Montserrat Torra Bitlloch

Sílvia Margeli Voelp

Enric Castellá Carlos

CoI005 Actividades manipulativas y figurativas para la comprensión profunda en Educación Primaria 1150

Juan José Santaengracia

Belén Palop

CoI006 Paisajes de aprendizaje en Matemáticas. 1173

Maria Rosario Lorenzo Sáez

Maria Luisa Cuadrado Sáez

Edgar Lorenzo-Saez

CoE205 “Sliceforms” o Superficies seccionadas 1188

María García Monera

CoE206 Fotografía matemática: Títulos, concurso y exposición itinerante 1201

Salvador Caballero Rubio

CoE207 El Museu Campus Escultòric (MUCAES) de la UPV. La visita guiada como herramienta para la construcción patrimonial y conservación 1213

Antoni Colomina Subiela

Beatriz Doménech García

CoE208 Visita al Museo de Telecomunicaciones Vicente Miralles 1219
María Carmen Bachiller Martín
CoE210 Visita guiada Museo de Informática 1226
Damián López
Eliseo Marzal
RuR011 Paseo matemático por Teruel 1227
Felisa Gil Meléndez

TALLERES 1234

TaP002 Materiales manipulativos para resolver problemas a cualquier edad 1235
Francisco Morales Villegas
TaP003 Creatividad y tareas 1242
Guido Angelo Ramellini
TaP007 Proporcionalidad sin regla de tres 1247
José Manuel Vidal González
María Nila Pérez Francisco
Ana Rosa Díaz Rodríguez
TaP008 La propuesta de razonamiento lógico en el proyecto matemáticas newton canarias en educación infantil 1254
Nisamar Hernández Rodríguez
Ana Rosa Díaz Rodríguez
Carmen Rosa Mesa González
TaP014 Distancia entre dos puntos: cómo influye el contexto y las condiciones en la resolución de un problema..... 1257
Xavier Vilella Miró
TaP015 Medida del TIEMPO de los 3 a los 16 años: sugerencias para una secuencia didáctica coherente 1261
Margarita Fuentes Cabezas
Esther Vargas Ibáñez
José Gallegos Fernández
TaP017 Desarrollo del pensamiento geométrico a partir de la Visualización del Espacio y las Formas que nos rodean..... 1265
Mònica Rodríguez Pedragosa
Roser Garcia Ferrer
Berta Mas Pons
Marta Goitia Bigorda

TaP019 El uso de diagramas en la resolución de problemas. Matemáticas Newton Canarias. 1270
Bruno Manuel Rivero Pérez
Ana Rosa Díaz Rodríguez
José Manuel Vidal González
TaP021 La estructura multiplicativa 1276
José Manuel Vidal González
María Nila Pérez Francisco
TaP023 Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas 1284
Abraham de la Fuente
Paula López-Serentill
TaP026 Pensamiento computacional con SNAP! 1305
Enric Castellà Carlos
Raül Fernández Hernández
Arnau Sánchez Farreras
TaP035 El aprendizaje basado en juegos (ABJ) en el aula de Matemáticas 1324
Mª de los Reyes Gallardo Gutiérrez
Ana María Martín Carballo
TaP036 Matemáticas en el tablero 1329
María Alicia Hernández Fernández
TaP101 Experimentar el aprendizaje - hacer un viaje matemático 1345
Charlie Gilderdale
TaP102 Aquí tenemos más cuentos que calleja 1346
Martí Pons, M. Magdalena
Morell Torrens, M Susanna
Portilla Rueda, Maria Àngels
TaC007 FotoGebra: explorando imágenes con GeoGebra 1358
Karina Amalia Rizzo
TaC008 Matemáticas y literatura, una oportunidad 1363
Xavi Roca Martínez
TaC009 El mágico legado de John Conway 1370
Pedro Alegría Ezquerra
José Muñoz Santonja

TaC016 ¡Las matemáticas también se comen! 1379
Anna Gómez Ausina
Sergi Muria Maldonado
TaC021 La recta numérica para conocer el mundo 1389
Xavier Fernàndez
Tània Costa
Marta Aragüés
Laura Gallego
TaC022 Gincana matemática 1395
Joan Folguera Farré
TaC101 Magia para enseñar Matemáticas o viceversa 1405
Sergio Belmonte Palmero
TaA002 Geogebra y Evaluación 1420
Juan Francisco Hernández Rodríguez
TaR003 Quien tiene un algoritmo, tiene un tesoro 1430
Joan Jareño Ruiz
TaR007 Taller: laboratorio de Matemáticas 1440
Enric Castellà
Joan Jareño
Sílvia Margelí
Montserrat Torra
TaR010 En búsqueda de la afinación 20JAEM. La escala musical, un problema competencial abierto. 1450
Santi Vilches
Maite Gorriz
TaR012 CAMINOS: Juegos de mesa para trabajar Geometría 1465
Narcís Matas Tortosa
Ana Belén Petro Balaguer
TaR015 Origami: ángulos y otras historias con papiroflexia 1475
Belén Garrido Garrido
TaR019 Cómo construimos matemáticas con piezas de cartón en Educación Infantil 1480
Myriam Codes Valcarce
Rocío Pérez Guzmán
Luisa Mª Martínez del Valle
Ángeles Chico Gómez

TaR022 Web portal Math4u 1488
Juan Seguí de Miguel
Marta Mínguez Luján
TaR024 La vida oculta del cubo 1499
Antonio Ledesma López
José Muñoz Santonja
Juan Antonio Hans Martín
Antonio Fernández-Aliseda Redondo
TaR025 Resolución de problemas en infantil y primer ciclo 1519
Nisamar Hernández Rodríguez
Lucía Santamaría Grúa
María Nila Pérez Francisco
TaR029 Superficies de revolución y regladas: A clase con GeoGebra 1522
Bernat Ancochea Millet
José Manuel Arranz San José
José Muñoz Santonja
TaR032 Usando la calculadora para aprender matemáticas en primaria 1543
Ángel A. García Marrero
TaR034 La calculadora en la escuela 1550
Maria Salgado Somoza
M Assumpció Comalat Navarra
TaR035 Puedo mejorar mi didáctica con calculadora gráfica 1554
Lluís Bonet Juan
Ricard Peiró i Estruch
TaR039 Juegos de mesa para el aprendizaje de las matemáticas 1567
Jordi Deulofeu Piquet
Pol San Barón
Luis Cros Lombarte
Teresa Longueira Guerrero
TaR042 GeoGebra...Problem? Estrategia específica 1576
Juan Agustín Noda Gómez
Ángel A. García Marrero
TaR045 Realidad Aumentada e impresión 3D. Construcciones de Félix Candela.. 1581
José Aurelio Pina Romero
Bernat Ancochea Millet

TaR048 Medida en educación infantil 1609
Ester Solves Garcia
TaR051 Geometría del doblado de papel: una propuesta para la enseñanza de la demostración en la clase de geometría 1614
Camilo Sua Flórez
TaR053 Pensamiento computacional geométrico 1618
Goyo Lekuona Muxika
José Manuel López Irastorza
TaR101 Las Regletas Cuiseanire: desde las líneas poligonales hasta los problemas de optimización 1623
Marcos Marrero Cárdenas
TaR102 Algoritmos OAOA para el desarrollo del cálculo mental 1630
Marcos Marrero Cárdenas
TaR103 StatWars: Recursos para enseñar probabilidad 1636
Anabel Forte Deltell
TaR105 Los datos sugieren… 1637
Lluís Mora Cañellas
TaR106 Diseño de tareas para el desarrollo del pensamiento algebraico 1638
Antonio Javier Moreno Verdejo
TaD001 "Matemáticas en la calle": materiales para enseñar divulgando 1639
Mª Elvira García Montenegro
Lorenzo Lozano Jiménez
Victor Monterreal Blázquez
Purificación Montesinos Comino
TaD002 Con las matemáticas yo resuelvo situaciones 1647
Lluís Bonet Juan
José Luis Gavilán Ortega
Domingo Rueda Morales
TaD10 La vida es una tómbola 1659
Esther Roquette
Tere Valdecantos Dema
TaI004 La enseñanza estructurada en la resolución de problemas desde la perspectiva inclusiva 1665
Ángeles Chico Gómez
Nuria Climent Rodríguez
Inmaculada Gómez Hurtado

TaI008 Paseo inclusivo por el mundo 3D: del modelado a la RA pasando por la RV. 1677
Lucía Rotger García
Juan Miguel Ribera Puchades
Mª Luisa Cuadrado Sáez
TaI101 Taller de creación de actividades Matemáticas inclusivas 1694
Concha Barceló
Begoña de la Iglesia Mayol
TaE201 Arte cinético con Realidad Aumentada. Los móviles de Eusebio Sempere 1698
José Aurelio Pina Romero
Adrián Cuenca Avi
José Antonio Mora Sánchez
TaE202 Construcción de un omnipoliedro 1714
José Antonio Mora Sánchez
José Aurelio Pina Romero
Fernando Arenas Planelles
TaE203 Las cúpulas de Leonardo 1725
Guido Ramellini
TaE204 Made in MMACA: nuevas ideas 1727
Guido Ramellini
Carlos Luna Mota
TaE209 Taller de criptografía de clave pública 1730
Damián López
Eliseo Marzal

MESAS DE EXPERIENCIAS 1731

MeP020 Problemas ambientados 1732
Juan Lebrija Vega
MeP037 Las estimaciones y su relación con las Matemáticas 1736
Pedro Berjas Sepúlveda
MeA001 Evaluación formativa en matemáticas, resolución de problemas y coherencia 1743
Pablo Beltrán-Pellicer
Ana Isabel Martínez Pérez

MeR047 Nueva versión de Neotrie VR para el dispositivo de realidad virtual Meta Quest 1745
Rodríguez Blancas, José Luis
Hernández Sánchez, Rubén
Cangas Moldes, Diego
MeR104 Una fracción inesperada. 1754
José Ángel Murcia Carrión

PECHAKUCHAS 1755

PeP016 La mirada matemàtica a la escola Bressol 1756
Amanda Figuerola Garcia
Maria Roca Parpal
PeR030 El lenguaje matemático en el primer ciclo de educación infantil (0-3 años) 1759
Mercè Saavedra Gandia
Goretti Torrent Tort
Iolanda Torralba Palmero
Mercè Saavedra Gandia

PÓSTERES 1762

PoP005 Modelización del step back de Luka Doncic 1763
Roberto Cerrato Ortega
M. Carmen Escribano Ródenas
Gabriela M. Fernández Barberís
PoP028 Movilización del pensamiento estadístico en maestros. Propuesta de lectura más allá de los datos. 1764
Belén Palop
Juan José Santaengracia
PoC005 Geometría y arquitectura histórica 1765
Mónica Soler Montaner
Manuel Antonio Cerdá Larrosa
PoC010 Construcción de una pirámide holográfica para el alumnado de secundaria 1766
José Jaime Noguera Noguera
Natividd Risueño Bañuls
PoR014 Los virus nos enseñan geometría: cápsidas de virus de papiroflexia 1767
Belén Garrido Garrido

PoR049 Jugando con el sentido algebraico:una experiencia con Hurry Count en 5º y 6º de primaria 1768
Rocío Garrido Martos
Rocío Blazquez
Andrea de la Fuente
PoD006 Árbol matemático para una navidad responsable 1769
Ana M. Pilar Martín Puebla
Gema Rosa Quintana Portilla
PoD008 Comprobación viviente del teorema de Pitágoras 1770
Gema Rosa Quintana Portilla
Ana M. Pilar Martín Puebla
PoI007 Quizziz en talleres para estudiantes de talento matemático con distinto nivel 1771
Pablo Gutierrez Jaime
Jeison Camilo Sua Florez
David Ariza Ruiz
Adela Jaime Pastor

Bienvenida del Presidente de la SEMCV

Una vez más nos encontramos en los prolegómenos de unas JAEM, su vigésima edición. Treinta años después de que su quinta edición se celebrara en Castelló vuelven a tierras valencianas. Del 3 al 6 de julio de 2022 celebraremos en València las 20 JAEM con el lema Matemáticas para construir el Mundo.

Queremos agradecer a la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) la confianza en nuestra sociedad para su organización.

València es una ciudad de acogida como demuestra la variedad de pueblos que han pasado por ella desde su fundación por el cónsul romano Décimo Junio Bruto Galaico en el año 616 desde la fundación de Roma (138 a.C.).

Hecho recordado en una inscripción en la plaza de la Virgen:

ANNO DCXVI AB URBE CONDITA

CXXXVIII ANTECHRISTUM

IUNIUS BRUTUS CONSUL IN HISPANIA IS QUI SUB VIRIATHO

MILITAVERANT AGROS ET OPPIDUM

DEDIT QUOD VOCATUM EST VALENTIA

SIC XXI SIC PLURIMA SAECULA

FELICITER SENATUS POPULUS

QUE VALENTINUS XXI SAECULO

EXPLETO

En el año 616 desde la fundación de Roma, el año 138 a.C. el cónsul Décimo Junio Bruto, a los que habían luchado en Hispania en tiempos de Viriato dio campos y una ciudad fortificada que se llamó Valencia. Así 21 siglos, así muchos siglos más felizmente, el senado y el pueblo valenciano, terminado el siglo 21

Valentia, ciudad de los valientes, como recoge la inscripción sobre su fundación, fundada por los romanos se levanta sobre el denominado Centro Histórico y Barrio del Carmen. El yacimiento de l'Almoina recuerda la época visigoda, y el barrio de Ruzafa la época musulmana. Tras una época convulsa, el Cid Campeador la conquista por un corto período, pero Jaume I en 1238 la reconquista y la puebla con familias catalanas y aragonesas. Se promulgan Els Furs, las leyes del Reino de Valencia y El llibre Consolat del Mar.

El crecimiento demográfico experimentado en el denominado Siglo de Oro sitúa a Valencia como la ciudad más poblada de la Corona de Aragón.

Todos estos pueblos, desde su fundación hasta la actualidad, que han pasado por València han contribuido a construir esta maravillosa ciudad del arco mediterráneo que hoy conocemos.

València tiene unas características urbanísticas y naturales que son puntos fuertes para explotar. Como ciudad de tamaño medio y de clima amable que te invita a

descubrirla paseando. En estos paseos podemos descubrir cómo estos pueblos han dejado su impronta en la ciudad y preguntarnos si sin las matemáticas hubieran sido posibles esas aportaciones o si las matemáticas nos ayudan a entender por qué fueron así.

La red de acequias, l'Almoina, el barrio judío, la Lonja, la Catedral, el Miguelete, el Mercado central, la Generalitat, les Corts, el museo San Pio V, el IVAM, el palacio del Marqués de Dos Aguas… la ciudad de las Artes y las Ciencias.

El comité organizador asume la responsabilidad de organizar este evento con una actitud positiva, y a la vez cargada de emocionantes retos.

La Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al-Khwārizmī" (SEMCV) nos invita a participar activamente en las 20 JAEM, que son las de todas y todos, lugar de encuentro entre diferentes generaciones y niveles educativos. Os animo a participar, seguro de que la experiencia volverá a ser inolvidable, gratificante y que nos reafirmará en nuestro compromiso con la enseñanza de matemáticas. Nos vemos en València.

Onofre Monzó del Olmo - **Presidente de la SEMCV**

CONFERENCIAS PLENARIAS

C1 2022: La odisea de las Matemáticas

Lluís Bonet Juan
l.bonetjuan@edu.gva.es
CEFIRE Alacant

Núcleo temático: Procesos y recursos para el aula.

Modalidad: Conferencia plenaria.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad.

RESUMEN

La historia de la humanidad se ha caracterizado por saltos evolutivos a largo de varios miles de años. Tal vez en algún momento, alguien ha podido pensar que dichos saltos vienen siendo dirigidos por algún tipo de inteligencia extraterrestre.

No sé si resulta fácil manipular nuestra inteligencia, la principal característica de las personas y que nos hace diferentes y menos aun cuando se trata de una mente matemática habituada a la curiosidad, al análisis, a la indagación, a la profundización y a ser especialmente crítica con todo lo que nos rodea.

Nos encontramos en la recta final de una etapa muy complicada. La irrupción de pleno de la tecnología como herramienta para la mejora del aprendizaje o la implementación de una nueva Ley Educativa son indicios claros que señalan a estas JAEM 2022 como **el quinto monolito negro: la revolución metodológica de las matemáticas**.

Con la Agenda del 2030 como objetivo, las matemáticas se ponen, más que nunca, al servicio de la sociedad para construir un mundo mejor. HAL 9000 se encuentra nuevamente ante dos alternativas inciertas: confiarlo al criterio y a la decisión que tome cada persona en su aula o provocar pequeños giros de tuerca que supongan la implementación efectiva del nuevo currículum en las aulas.

¿Qué hacer para salvaguardar el éxito de esta misión junto con otros aspectos que vienen preocupando desde hace muchos años?

La historia de la evolución humana se ha caracterizado por esos saltos a largo de varios miles de años. Unos saltos evolutivos que seguro que en algún momento alguien ha podido pensar que vienen siendo dirigidos por algún tipo de inteligencia extraterrestre.

No sé si resulta fácil manipular nuestra inteligencia y mucho menos la de las personas que trabajamos con las matemáticas que tenemos entre otros, el estereotipo de “cerebritos” y … alguno más.

Existen muchos indicios que estas JAEM 2022 pueden ser el comienzo de **la revolución metodológica de las matemáticas**, y seguro que los vamos a poder descubrir.

Por una parte, en la recta final de esta etapa complicada, la tecnología ha irrumpido más de lleno si cabe en nuestras vidas y en nuestras aulas aportando herramientas de apoyo para la mejora del aprendizaje de nuestro alumnado.

Imagen 1.- Herramientas tecnológicas al servicio de la educación.

Por otro lado, una nueva Ley Educativa, la LOMLOE, se abre como una nueva oportunidad en la que incorporar conocimientos, capacidades, valores y actitudes que necesitamos las personas para resolver los problemas que nos afectan a todos por igual: metodologías que conecten las matemáticas con la realidad actual, investigación, resolución, debate, comprobación, refutación, presentación, … e inclusión.

Imagen 2.- La nueva Ley educativa.

Tal vez, es el momento de llevar a cabo un cambio metodológico en nuestras aulas. No es que hasta ahora no se hayan hecho las cosas bien, ni mucho menos, pero los acontecimientos proponen una oportunidad y puede ser que estemos, sin darnos cuenta, ante *el* ***quinto monolito negro***.

La sociedad reclama un sistema educativo moderno y abierto en el que nuestra juventud pueda desarrollar todo su potencial y talento. ¿Por qué no dar ahora un paso? No debe ser un salto al abismo, porque como docentes no solo tenemos la capacidad de aprender, además la posibilidad de estar siempre en formación continua y disponer de los apoyos y recursos necesarios.

Se pueden dar pequeños pasos que no provoquen una ruptura radical con el modelo anterior (**Backfire**) diseñando planteamientos multidisciplinares que con el uso de herramientas innovadoras se conviertan en **situaciones de aprendizaje** que favorezcan la adquisición de diversas competencias. Es el paso del ejercicio, a la resolución de un problema contextualizado para llegar a una situación de aprendizaje más compleja.

Imagen 3.- El efecto backfire.

Para llevar a cabo su resolución se requerirá movilizar diferentes estrategias, habilidades, creatividad, saberes básicos, toma de decisiones, etc. Es la didáctica del **metaaprendizaje** que posibilitará al alumnado gestionar de forma eficiente la adquisición de conceptos y procedimientos para aprender a ser más reflexivos y poder resolver por sí mismos estas situaciones más complejas.

Imagen 4.- Situaciones de aprendizaje.

En estos momentos y con la Agenda del 2030 ponemos las matemáticas más que nunca al servicio de la sociedad para construir un mundo mejor. Yo me conformaría con no destruir lo que tenemos. El agua, la contaminación, la energía, la seguridad en el trabajo o las guerras son aspectos que nos muestran cuan de frágil es nuestro planeta.

En un momento crucial, como el presente, donde la búsqueda de ecuaciones de equilibrio no resulta sencilla, las matemáticas también nos pueden proporcionan otras facetas. Belleza y fragilidad como la que nos proporciona una inmensa pompa de jabón que al contemplarla nos transporta a esos momentos de niñez con ojos de admiración y asombro. Sensibilidad que sentimos al mirar estos bellos objetos que desde el instante de su creación buscan su equilibrio para mantenerse y no romper esos instantes llenos de vida.

El artista italiano afincado en Alicante ha recibido el correspondiente certificado Guinness tras resultar confirmado el récord.

INFORMACIÓN

VICTORIA BUENO

■ «Las matemáticas sirven para muchas cosas, y en este caso lo han hecho para ayudar a conseguir un récord Guiness. Medir una pompa de jabón forma parte de la belleza de las matemáticas». Apasionado de las matemáticas, el profesor Lluís Bonet ha contribuido voluntariamente a medir con sus cálculos la pompa de jabón de mayor diámetro de todo el mundo, tal y como ha recono-

Ciencia y magia. Uno de los más recientes récord Guinness de todo el mundo lo ha validado un profesor de Matemáticas de Alicante, galardonado en 2019 como mejor docente de Secundaria de toda España: la mayor pompa de jabón a mano.

Matemáticas de Guinness

LLUÍS BONET
PROFSOR DE MATEMÁTICAS

«Medir una pompa de jabón forma parte de la belleza de las matemáticas»

«He realizado un minucioso cálculo

Imagen 5.- Matemáticas para conseguir un récord Guinness.

Para salvaguardar el éxito de esta misión, **la revolución de la didáctica de las matemáticas** junto con otros aspectos que nos vienen preocupando desde hace muchos años (mujeres y STEM, tecnología como herramientas didácticas, formación del profesorado, reducción de las ratios, aprendizaje inclusivo, modelos de pruebas externas) HAL 9000 se encuentra nuevamente ente dos alternativas inciertas. Por una parte, confiarla al criterio y a la decisión que tome cada persona en su aula o por otra provocar pequeños giros de tuerca en la implementación del nuevo currículum en las aulas.

Es entonces cuando el profesorado, o parte del colectivo, entra en neurosis, cosa que tampoco debería preocupar puesto que en nuestra materia (también en nuestra vida) nos enfrentamos continuamente a disyuntivas e incertidumbres. De nosotros justamente depende propiciar un espacio de aprendizaje para el alumnado donde fomentar estrategias y habilidades con las que conseguir competencias múltiples y preparar para un mundo mejor.

C2 No hagas cuentos, haz Matemáticas

M. Magdalena Martí Pons
magdalenmarti@gmail.com
CEIP Marian Aguiló, Palma

M. Susanna Morell Torrens
susannamorell@gmail.com
Centre d'Aprenentatge Científico Matemàtic (CENTMAT), Palma

Maria Àngels Portilla Rueda
manangels@gmail.com
CEIP Son Anglada, Palma

Núcleo temático: Procesos; Recursos para el aula

Modalidad: Conferencia plenaria

Nivel educativo: Educación Primaria

RESUMEN

Había una vez en que los personajes de los cuentos no estaban satisfechos con sus vidas. No querían que los niños eligieran sus cuentos, ya que sabían cómo acabaría la noche. ¿Por qué el lobo siempre acaba mal? ¿Por qué Cenicienta sale corriendo para llegar a tiempo a casa? ¿Por qué Blancanieves sigue viviendo con 7 enanitos? ¿Por qué Caperucita se lo cree todo? La historia se repetía noches tras noche, produciendo frustración, enfado e impotencia. Un buen día, los personajes tuvieron una gran idea, buscar ayuda para que las cosas cambiaran. ¿Podrán nuestros amigos encontrar una solución a sus problemas? ¿Podrán las matemáticas ayudarnos en la búsqueda de soluciones? Además, ¿podrán los cuentos ayudarnos a desarrollar la competencia matemática? ¿Pueden las matemáticas ofrecernos diferentes soluciones? Todas estas respuestas y muchas más las encontraréis en nuestra terapia… Perdón, en nuestra conferencia.

Palabras clave: Cuentos, Sentidos Matemáticos, Materiales, Procesos Matemáticos

Érase una vez en que los personajes de los cuentos no estaban satisfechos con sus vidas. No querían que los niños eligieran sus cuentos, ya que sabían cómo acabaría la noche. La historia se repetía noches tras noche, produciendo frustración, enfado e

impotencia. Un buen día, los personajes tuvieron una gran idea, buscar ayuda profesional para que las cosas cambiaran. ¡Bienvenidos a nuestra terapia!

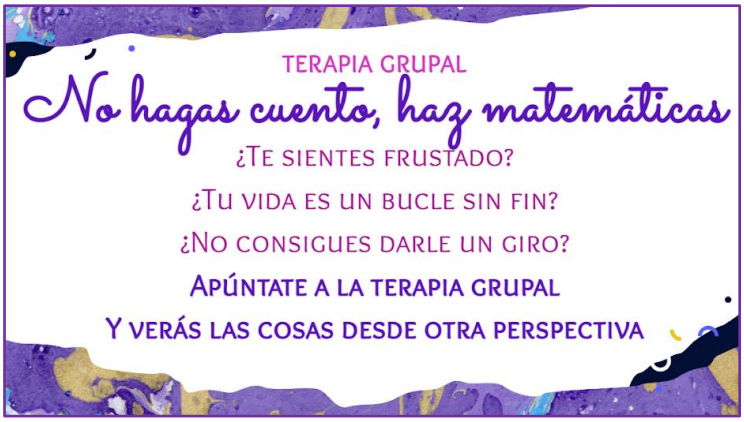


Imagen 1. ¿Te apuntas a la terapia?

Si queremos ayudar a nuestros personajes a buscar una solución a sus problemas, debemos ofrecerles un campo teórico sólido y consolidado que les permita recurrir a él siempre que sea necesario y, por consiguiente, tener éxito.

Si hay un método eficiente para enfrentarse a un problema y darle una solución, éste es el de George Pólya.

Pólya nos propone 4 fases a seguir a la hora de buscar una solución a nuestro problema:

- Comprender el problema: Lo primero que debemos tener en cuenta para poder buscar una solución a nuestro problema es analizarlo. Este análisis nos permite conectar con situaciones previas vividas, con conocimientos previos y, por tanto, algunas estrategias que fueron efectivas en su momento pueden volver a serlo ahora.
- Concebir un plan: Una vez que hemos analizado el problema, debemos abordarlo desde diferentes puntos de vista. Para ello, recomendamos a nuestros personajes que sean capaces de pensar qué estrategias les funcionaron en otros momentos y que las compartan entre ellos. Quizás lo que les funcionó a otros en situaciones similares puedan ayudar a nuestros amigos a buscar la solución a su problema.

- Ejecutar el plan: De entre las diferentes estrategias, debemos buscar aquella más eficiente para cada situación y llevarla a cabo. Debemos enfrentarnos al problema para poder dar con la solución.
- Examinar la solución: Finalmente, una vez analizado el problema, concebir un plan y ejecutarlo, debemos examinar la solución. ¿Es coherente a la situación? ¿Es la que buscamos?

Antes de continuar, vamos a ver porqué vuestras historias, los cuentos, se parecen a los problemas y, por ello, esta técnica nos servirá.

- En los cuentos siempre hay uno o varios personajes que se enfrentan a un problema, en principio complicado, que deben resolver. En las clases de matemáticas se proponen o surgen problemas a los que, en un principio, no les vemos una solución directa.
- En los cuentos puede existir un elemento repetitivo que permite al protagonista avanzar a partir de lo aprendido con anterioridad. Al intentar resolver un problema de matemáticas muchas veces nos basamos en otros del mismo estilo resueltos en el pasado.
- En los cuentos también podemos encontrar el ensayo error como el camino para conseguir el objetivo. Al igual que en los problemas, necesitamos entender, analizar, diseñar estrategias.
- Si no entendemos un cuento, no somos capaces de imaginarnos que pasará, lo mismo que si no entendemos un problema no podremos ni intentar resolverlo.

Además, si analizamos el contenido matemático de los cuentos populares, podemos observar que suelen presentar una buena combinación de lenguaje, estructuras, secuencias temporales y espaciales, gradaciones cuantitativas y cualitativas… Es decir, nos permiten desarrollar los sentidos matemáticos: el sentido algebraico, el sentido espacial, el sentido estocástico, el sentido de la medida y el sentido numérico.

Ahora que nuestros personajes tienen suficiente información, vamos a ver si sabrán aplicarla…

Imagen 2. ¡Anímate!

1. Problema 1: Caperucita Roja

Nos ha llegado un tweet de Caperucita:

Imagen 3. Las preocupaciones de Caperucita.

1.1. Comprender el problema

Vamos a analizar el problema que cree tener Caperucita, ¡Es tan indecisa! ¡Siempre está dudando!

¿Qué solución puede cambiar el final del cuento? Sin duda tiene que llegar antes que el lobo. Esto sí que lo tiene claro.

Entre todos tenemos que encontrar la mejor manera para que Caperucita, desde Mallorca, llegue antes que el lobo a casa de la abuelita, que está de vacaciones en Valencia.

¿Las matemáticas le ayudarán? Caperucita está a punto de poder cambiar el final del cuento.

1.2. Concebir un plan

Caperucita se encuentra con el Lobo y éste le propone 4 caminos diferentes para llegar al lugar donde veranea la abuelita. Como siempre Caperucita duda.

Para que Caperucita pueda llegar antes que el lobo lo primero que tiene que hacer es analizar las ventajas e inconvenientes que tiene cada uno de los caminos propuestos y también qué instrumentos le pueden resultar más útiles.

Algunas propuestas de nuestros personajes son: ayudarse de un plano, usar una brújula, preguntar a alguien, emplear Google Maps…

Google Maps es la opción que cuenta con más adeptos, únicamente necesita una conexión a internet y un móvil. ¡Parece tan fácil!

1.3. Ejecutar el plan

De las 5 opciones que Google Maps nos ofrece, presentamos en formato DIN-A 3 sólo 4 a nuestros alumnos, una para cada grupo:

- En coche
- En transporte público
- Caminando
- En bicicleta

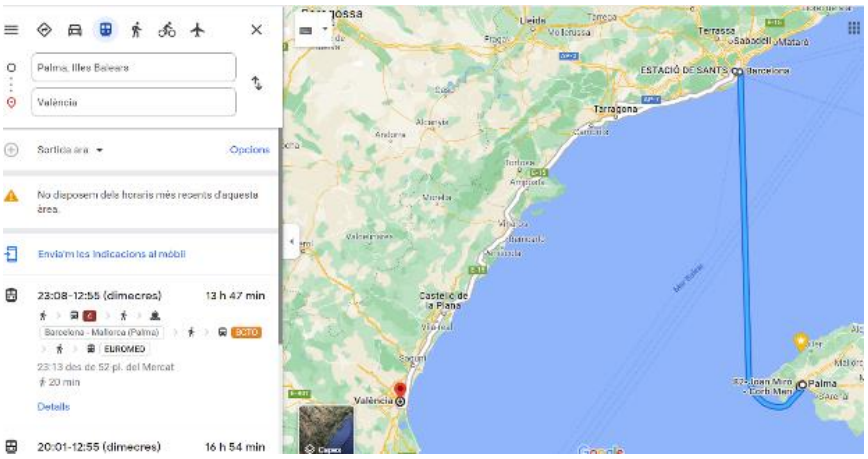


Imagen 4. De Mallorca a Valencia en transporte público.

Imagen 5. Interpretando mapas.

Los alumnos consideran que algunas de las opciones son inverosímiles. Lo justifican explicando que no hay puentes ni túneles para ir andando o en bicicleta.

En el grupo del transporte público, Google nos presenta un recorrido que pasa por Barcelona. Esta opción les desconcierta, ya que saben que hay una opción que nos permite viajar directamente.

El grupo que tiene la opción en coche, son conscientes que no es imposible, ya que meterían el coche en el barco.

Algunos alumnos han puesto atención en las observaciones que se presentan a la izquierda: “Esta ruta incluye ferry”; “Esta ruta incluye carreteras de uso restringido o privadas”. Concluyen que es imprescindible, primero, leer bien todas las observaciones de la izquierda para poder elegir bien.

Cuando se les pregunta por las diferencias de tiempos, argumentan que la velocidad de cada medio de transporte es distinta y de ahí las variaciones.

A continuación, consultan las rutas en un ordenador y… ¡Google nos da la opción de ir en avión!

Imagen 6. Comprobando rutas.

El lobo no nos ha ofrecido todas las opciones, sólo aquellas que a él le interesan.

1.4. Examinar la solución

Muchos alumnos inmediatamente ven la opción ideal: el avión. Pero otros se mantienen en que viajarían en barco. ¿Qué argumentos defienden una u otra opción?

- Viajar en avión es más rápido, barato, no te mareas y puedes ir y volver en el mismo día o aprovechar todas esas horas para otras cosas.
- Viajar en barco nos permite llevar el coche, puedes salir a ver el mar, es más divertido porque puedes dormir, es como una casa flotante, porque el avión es muy pequeño…

Pero si lo que queremos es llegar antes que el lobo, sin duda iremos en avión.

Caperucita ya tiene medio de transporte, y no será el que el lobo le ofrece. ¡Ya no hay duda alguna!

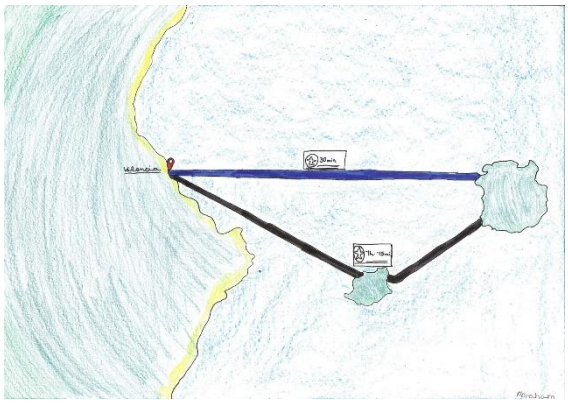


Imagen 7. La ruta que ha decidido Caperucita.

"Elijo este trayecto porque es el más rápido de todos y las vistas son mejores. Iría recto, sin pasar por Ibiza, que sería más largo. Además, en Valencia tengo familia por parte de mi madre"

1.5. ¿Qué sentido matemático se prioriza con este cuento?

Sentido espacial

… *"Su desarrollo se muestra cuando el alumnado es capaz de identificar, analizar y describir las características y propiedades de las figuras de dos y tres dimensiones, con criterios comunes y propios, en la localización y descripción de posiciones y trayectorias, en la descripción de invariantes y relaciones entre cuerpos y figuras;*

y en la aplicación e identificación de transformaciones, composiciones y descomposiciones geométricas" CEMat. Mayo de 2021.

2. Problema 2: La Cenicienta

El siguiente caso que trataremos hoy nos llega a través de Instagram.

Imagen 8. Los problemas de Cenicienta.

2.1. Comprender el problema

Cenicienta no sabe qué zapatos tiene que llevar al baile, ¿con tacón o sin tacón? (es que es más alta que Príncipe). Los zapatos son de cristal, ¿Qué le conviene? ¿Qué debería elegir?

Otra duda que le surge es si esos zapatos son tan especiales y únicos como ella cree.

Vamos a orientar a nuestra protagonista.

¿Las matemáticas le ayudarán? Cenicienta está a punto de poder cambiar el final del cuento.

2.2. Concebir un plan

Cenicienta va a la fiesta, lleva unos zapatos de cristal, baila toda la noche y a las 00h debe irse.

Al día siguiente los lacayos reales van de casa en casa buscando quien pueda calzar el zapato.

Cenicienta tiene dos preocupaciones:

- ¿Qué altura puede tener el tacón del zapato?
- ¿Será la única persona del reino a la que le encaje el zapato extraviado?

Los compañeros de terapia deciden que no tienen información suficiente para ayudarla. Internet es un buen recurso.

2.3. Ejecutar el plan

- ¿Qué altura puede tener el tacón del zapato?

Los alumnos leen el estudio elaborado por unos estudiantes de la universidad de Leicester: https://www.abc.es/ciencia/abci-zapato-cristal-cenicienta-fraude-cientifico-201602161939_noticia.html

Seguidamente nos planteamos la otra cuestión:

- ¿Será la única persona del reino a la que le encaje el zapato extraviado?

Esta pregunta nos sugiere otras más:

- ¿Qué probabilidad hay que esto ocurra?
- ¿Qué edad tiene Cenicienta?
- ¿Qué número calza Cenicienta?

En la red buscamos y encontramos datos interesantes:

- *Pie de Princesa: "Calzar 36 es lo ideal y no es casualidad que se estime que Cenicienta, cuyo zapato de cristal es emblemático por todo lo que representa en el estereotipo de belleza occidental, usara ese número"*
- *Existe la cirugía cenicienta; cirugía para embellecer los pies.*

Ante la evidencia de las informaciones los alumnos acuerdan que Cenicienta debe calzar un 36, aunque en un principio ellos habían propuesto tallas mucho más grandes.

Decidimos buscar ¿Cuántas Cenicientas o Cenicientos hay en el colegio? Elaboramos un estudio de los números de pie de los alumnos de Primaria. Descartamos Educación Infantil. Recogemos los datos por cursos. Nos centramos

en el contaje de los resultados de las tres clases de quinto representamos los datos obtenidos. ¿Será la moda el número 36?

Imagen 9. Investigando la moda del colegio.

2.4. Examinar la solución

Los distintos gráficos nos confirman nuestras sospechas iniciales, hay más de un Ceniciento y Cenicienta en nuestro colegio.

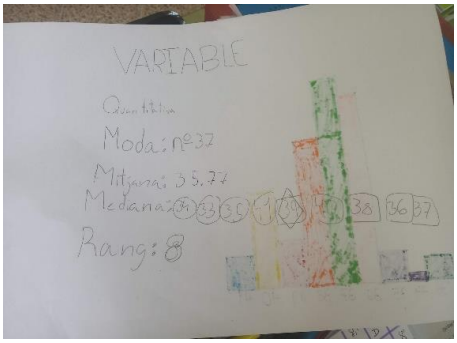


Imagen 10. Resultados de la investigación.

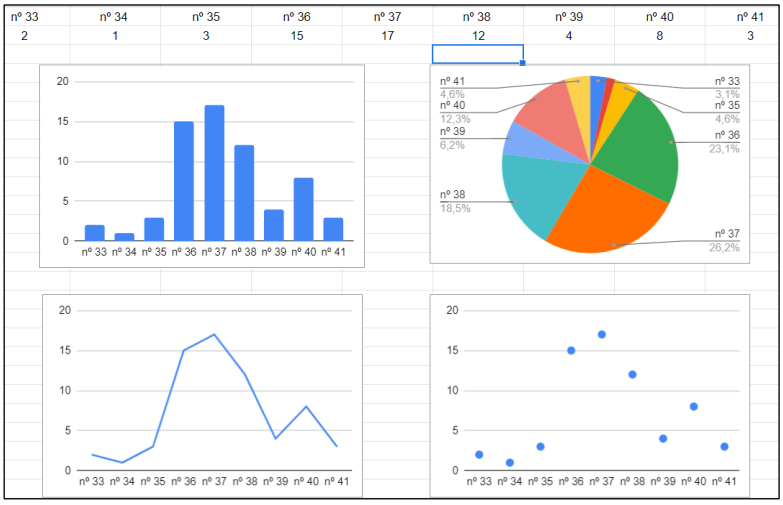


Imagen 11. Representando los resultados.

Las conclusiones son las siguientes:

- Si entre los 56 alumnos de quinto hay 15 “Cenicientas”, ¡en todo el reino debe haber mogollón! Aun así, la moda de nuestras clases es 37 y no 36.
- El hada Madrina de Cenicienta hizo un molde de su pie para hacerle el zapato. Muchos famosos se hacen los zapatos a medida, como Nadal.
- Para que pueda bailar y sobre todo, después correr, necesita un tacón de máximo 1,15cm

Solución propuesta:

- Cenicienta, te aconsejamos que vayas con un tacón bajo, la ciencia así nos lo aconseja.
- No te preocupes, no van a encontrar a otra persona con el mismo pie.
- Pero… Si quieres cambiar el cuento… ¡Ves con deportivas!… ¡Sal cuando quieras!... ¡Pasa de lo que dirán cuando te vean tal como eres… ¡Sé valiente! Y si no te apetece… ¡No vayas al baile!

2.5. ¿Qué sentidos matemáticos se priorizan con este cuento?

Sentido de medida

“Este sentido se puede caracterizar por la capacidad del sujeto para estimar y contabilizar magnitudes. Se reconoce esta capacidad en el individuo que entiende y elige las unidades adecuadas para estimar, medir y comparar atributos y utiliza las herramientas adecuadas para realizar mediciones”. CEMat. Mayo de 2021.

Sentido estocástico

“El sentido estocástico es la capacidad para hacer frente a una amplia gama de situaciones cotidianas que implican el razonamiento y la interpretación de datos, la elaboración de conjeturas y la toma de decisiones a partir de la información estadística, su valoración crítica y la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios, y la capacidad de realizar algunas predicciones”. CEMat. Mayo de 2021.

3. Problema 3: Blancanieves y los 7 enanitos

El último caso que trataremos hoy nos llega a través de correo electrónico y es de Blancanieves.

Imagen 12. Las dudas de Blancanieves.

3.1. Comprender el problema

Siguiente caso, Blancanieves tampoco está contenta consigo misma, trabajar, trabajar y trabajar. Los 7 enanitos la salvaron cuando estaba perdida, pero ¿a cambio de qué? De explotación laboral ¡Vaya vida!

¡Está claro que Blancanieves necesita ayuda urgente!

Debemos ayudar a Blancanieves a mejorar su calidad de vida, que aprenda a trabajar para vivir, y no a vivir para trabajar.

¿Las matemáticas le ayudarán? Blancanieves está a punto de poder cambiar el final del cuento.

3.2. Concebir un plan

Blancanieves quiere y necesita unas vacaciones.

En la terapia y con la ayuda de sus amigos, piensan algunas ideas para mejorar su vida: algunos consideran que no está tan mal, otros proponen remedios mágicos, que hable con los enanitos (hablando se entiende la gente), algunos consideran que hay muchos temas legales que tratar…

Las buenas palabras no funcionan, los enanitos no están de acuerdo, desde el 1937 que llevan esta dinámica, ¡para qué cambiar ahora! Blancanieves no quiere ni oír hablar de pócimas, ya tuvo una mala experiencia con una manzana envenenada.

Después de mucho debatir Astérix sugiere un plan: “Tengo algo que te podría ayudar y no es una pócima.

¿Y si desafías a los 7 enanitos? Blancanieves tienes que pensar en un reto muy especial para que tu vida pueda cambiar.”

Entonces Blancanieves tiene una idea. Como cada día los enanitos vuelven a casa en fila y en el mismo orden, les hace la siguiente proposición: *“Cada día tenéis que regresar del trabajo en fila de uno en un orden diferente, y yo no trabajaré hasta que hayáis agotado todas las posibilidades.”*

3.3. Ejecutar el plan

Proponemos a nuestros alumnos este mismo reto.

En un primer momento les parece muy fácil y piensan que Blancanieves se ha equivocado en su propuesta, que prácticamente no tendrá vacaciones.

Algunos hacen grupos de 7 alumnos y ya tenemos el primer contratiempo, ¡o sobra gente en la clase o nos falta!

Aparecen las primeras dudas cuando tienen que anotar las distintas combinaciones.

La mayoría de los alumnos empiezan directamente por los grupos de 7 y no consiguen sistematizar. A la pregunta de si están seguros de que tienen todas las posibilidades la mayoría dudan o simplemente no lo saben.

A partir de una puesta en común, ellos mismos proponen trabajar con los cubos encajables (policubos) y empezar con dos piezas, luego 3, 4… A partir de 4 policubos, se dan cuenta que, fijando el primero de la fila y cambiando los otros 3, que son las soluciones anteriores, no es necesario probar todas las opciones, sino que es suficiente multiplicar el resultado por la cantidad de policubos que están empleando, en este caso 4.

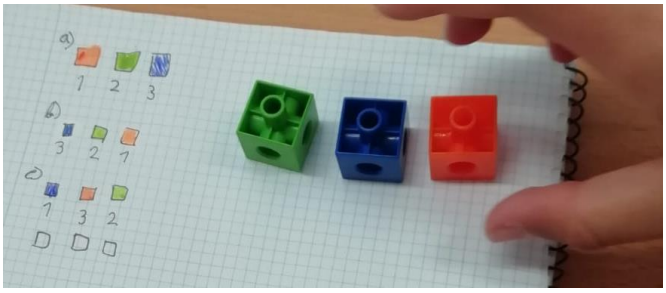


Imagen 13. Representaciones de los alumnos.

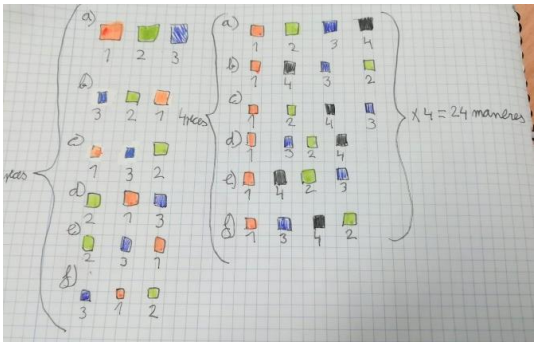


Imagen 14. Buscando estrategias para la obtención de soluciones.

Ahora que ya sabemos cuántos días necesitan los enanitos para cumplir el reto de Blancanieves, nos queda trasladarlo al calendario y así comprobar realmente cuánto son 5040 días laborables.

3.4. Examinar la solución

Las diferentes maneras en que pueden entrar los 7 enanitos se pueden resolver calculando el factorial de 7, que es 5040.
Es decir, ¡Estarían 5040 días en conseguirlo!
Pero, un momento… no trabajan los fines de semana: excluimos los 52 fines de semana que tiene un año: 104 días menos.
Nos quedan 261 días.
También hay que restar los 10 días festivos… Nos quedan 251 días laborables.
Si dividimos 5040 entre 251 días que trabajan al año, nos sale…
¡Más de 19 años!
Sin duda, esta propuesta le cambiará la vida a Blancanieves.
¿Quieres cambiar la historia?... ¡ESTÁ EN TUS MANOS!

3.5. ¿Qué sentido matemático se prioriza con este cuento?

Sentido algebraico

“Ver lo general en lo particular, reconociendo **patrones** y relaciones de dependencia entre variables y expresando estas regularidades mediante diferentes representaciones, así como modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólicas…” CEMat. Mayo de 2021.

4. Conclusiones

Llegamos al final entre risas, curiosidades que ni nos habíamos planteado, personajes no tan felices como parecen… pero, sobre todo, comprobando el poder de las matemáticas en nuestro día a día.

A lo largo de los cuentos hemos podido observar algunos de los superpoderes que las matemáticas nos ofrecen y que debemos tener en cuenta para el desarrollo de la competencia matemática de nuestros alumnos. Algunos de ellos son:

- Proponer y generar retos más que problemas, que inviten a los alumnos a descubrir las matemáticas.
- Saber que hay problemas sin solución, pero también hay problemas con muchas soluciones. Y presentar de ambos tipos.
- Cambiar la perspectiva para enriquecer la solución.
- Explicar el proceso a la hora de resolver problemas, ya que ayuda al aprendizaje de las matemáticas.
- Plantear problemas vinculados a la realidad, a través de un cuento o de una situación próxima, que no sea extraña.
- Ayudan a interpretar las situaciones.
- Son una excusa para pensar y reflexionar sobre el pensamiento.

Pero si las matemáticas nos ofrecen un superpoder claro es su utilidad, ya que ellas nos ayudan a entender el mundo.

Referencias

ABC (16 de febrero de 2016). El fraude que esconde el zapato de cristal de Cenicienta. https://www.abc.es/ciencia/abci-zapato-cristal-cenicienta-fraude-cientifico-201602161939_noticia.html

Alsina, À. (2019). Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años). Serie Didáctica de las matemáticas. Editorial Graó.

Alsina, À. y otros (2009). Educación matemática y buenas prácticas. Infantil, primaria, secundaria y educación superior. Serie Didáctica de las matemáticas. Editorial Graó.

Gende del Río, A. y Fernández, A. (13 de septiembre de 2019). El cuento de Blancanieves desde una perspectiva jurídica. Jurista enloquecido. https://juristaenloquecido.com/2019/09/13/el-cuento-de-blancanieves-desde-una-perspectiva-juridica/

Murcia, J.A. (2019). Y me llevo una. Nórdica Libros.

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Serie de matemáticas. Editorial Trillas.

Centre d'Aprenentatge Científico Matemàtic, Centmat (3 de septiembre de 2012). Contacontes matemàtics.

http://www.xeix.org/Centre-Aprenentatge-Cientificomatematic/oferta-educativa/activitats-a-centres/article/contacontes-matematics

González, A.M., Morell, S. y Portilla, MA. Mejor te lo cuento. Revista SUMA, número 97, 69-80. Sección "Diario de experiencias matemáticas". Ediciones FESPM.

http://www.xeix.org/activitats-sbm-xeix/seccio-revista-suma-diario-de-experiencias-matematicas/article/article-revista-suma-mejor-te-lo-cuento

C3 JAEM 2022 - Enriquecer las Mátematicas

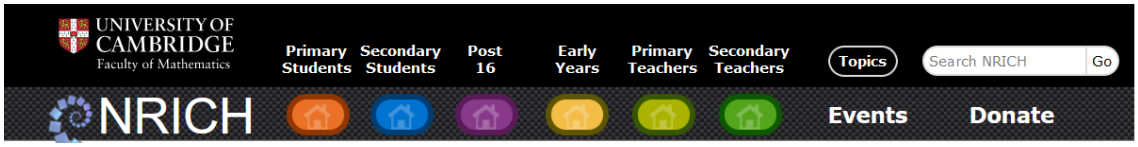
Charlie Gilderdale
cfg21@cam.ac.uk
University of Cambridge
NRICH Mathematics Project
Centre for Mathematical Sciences

Núcleo temático: Procesos, Recursos para el aula.

Modalidad: Conferencia plenaria.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

¿Qué ofrecemos a nuestros alumnos?



"... un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si ocupa el tiempo que se le asigna instruyendo a sus alumnos en operaciones de rutina, mata su interés, obstaculiza su desarrollo intelectual y abusa de su oportunidad. Pero si desafía la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas proporcionados a su conocimiento, y los ayuda a resolver sus problemas con preguntas estimulantes, puede darles el gusto por el pensamiento independiente y algunos medios para hacerlo".

Polya, G. (1945) Cómo plantear y resolver problemas

Diapositivas

Despertando la curiosidad de los estudiantes
The Number Jumbler
Pair Products
Same Number!

Matemáticas inclusivas: Umbral bajo / techo alto
(todos tenemos derecho a brillar, y todos tenemos derecho a afrontar nuevos retos)
Cryptarithms
Less is More
Odds and Evens con video de un taller

Tiempo para explorar, en una cultura en la que sea aceptable cometer errores
Make 37
Two and Two (DOS + TRES = CINCO)
Wipeout

Ofrecemos andamios, pero los estudiantes todavía tienen que construir / no puedo hacer esto (todavía)
Product Sudoku
Kite in a Square

La importancia de la colaboración y el diálogo - convencerte a ti mismo, convencer a un amigo, convencer a los demás...
Factors and Multiples Game
Unequal Averages
Perimeter Possibilities
Polygon Rings

Valorando múltiples estrategias / representaciones
What's it Worth?
Fruity Totals
Almost One

Descubrir patrones, conjeturar, generalizar, probar
Route to Infinity
Charlie's Delightful Machine Tilted Squares
Terminating or Not
Cyclic Quadrilaterals
Keep it Simple

Mañana...

Un viaje matemático

Enlaces a recursos para profesores:

Plan de estudios - Primaria
Plan de estudios - Secundaria

Enriqueciendo el plan de estudios - Primaria
Enriqueciendo el plan de estudios - Secundaria

Qué pensamos y por qué lo pensamos - Primaria
Qué pensamos y por qué lo pensamos - Secundaria

Pensando matemáticamente - Primaria
Pensando matemáticamente - Secundaria

Posters para las aulas

Libros en Castellano:

Aprender a enseñar matemáticas en la Educación Primaria

Aprender a enseñar matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria

C4 Bayes: Un teorema para abordarlo todo

Anabel Forte Deltell
Anabel.forte@uv.es
Departamento de Estadística e I.O.
Universitat de Valencia.

Núcleo temático: Comunicación y divulgación.

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (cualquier titulación que tenga algo de estadística)

RESUMEN

Durante muchos años el Teorema de Bayes fue considerado un tabú dentro de la Teoría de la Probabilidad. Nadie se atrevía a afirmar que lo usaba y, sin embargo, su uso se volvió indispensable en cuestiones tan diversas como la justicia, la economía, los seguros o la seguridad nacional.

Hoy en día, este Teorema se enseña en cualquier curso básico de probabilidad dentro de lo que conocemos como probabilidad condicionada, pero su interpretación a esos niveles dista mucho de la verdadera filosofía que había tras su desarrollo.

Conocer la naturaleza del Teorema de Bayes, su historia y su desarrollo posterior es fundamental para entender la importancia que esta herramienta tiene en el mundo actual.

Palabras clave: Estadística, Probabilidad, Teorema de Bayes.

1. Introducción

El Teorema de Bayes es una de esas herramientas que se enseñan en cualquier curso básico de probabilidad. Su fórmula, que solemos leer como*: "probabilidad de A dado B igual a probabilidad de B dado A por probabilidad de A dividido probabilidad de B",* resulta clave para entender algunas cuestiones de la vida cotidiana como la probabilidad de estar enfermo tras dar positivo en una prueba clínica o ser culpable de un delito a la vista de las pruebas. Su fama lo ha llevado incluso a estar escrito en letras de neón en la prestigiosa Universidad de Cambridge, como vemos en la Imagen 1, pero también a generar controversia hasta el punto de haberse vuelto tabú en distintos momentos de la historia.

Imagen 1. Teorema de Bayes en letras de neón. Fuente:
https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Bayes#/media/Archivo:Bayes'_Theorem_MMB_01.jpg

A lo largo de este artículo empezaremos por recordar uno de los ejemplos más utilizados en las aulas a la hora de ilustrar este teorema, para, después, tratar de entender la filosofía con la que se construyó y como ésta lo lanzó a la palestra. Para ello iniciaremos un pequeño recorrido histórico que nos traerá de vuelta a nuestros días y a conocer lo que hoy llamamos estadística bayesiana.

2. La paradoja de la prueba positiva: ¿Estoy enferma?

Como comentábamos en la introducción, cuando el Teorema de Bayes se cuenta en cualquier curso de introducción a la probabilidad, siempre se hace en el contexto de la probabilidad condicionada. En concreto, la probabilidad condicionada se define como la probabilidad de que suceda un determinado evento A bajo la condición B. Esta condición B puede ser otro evento que ya ha sucedido o una restricción de las condiciones bajo las que se puede producir A… o ambas cosas a la vez. Veámoslo con un ejemplo.

Supongamos que el evento A es que salga un 2 en un dado de 6 caras. Siguiendo la famosa “regla de Laplace”: número de casos favorables dividido por número de casos posibles, de la que volveremos a hablar un poquito más adelante, la probabilidad sería 1/6. Ahora supongamos que una amiga mira debajo del cubilete con los dados ya lanzados y nos dice que el resultado es par. Ante esta actualización de la información, la condición B sería “es par” y la probabilidad que buscamos es la probabilidad condicionada de que sea un 2 dado que es un número par.

En esta situación, tanto la lógica de la fórmula de Laplace (restringida al nuevo escenario):

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\{2\}}{\{2, 4 \text{ o } 6\}} = \frac{1}{3}$$

como la fórmula clásica de la probabilidad condicionada:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{probabilidad de que pasen A y B}}{\text{probabilidad de B}} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

nos llevan a un resultado de 1/3.

Sin embargo, no siempre es fácil calcular la probabilidad condicionada directamente porque la probabilidad de que pasen A y B no es algo fácil de definir.

Entre esos casos en los que la probabilidad de la intersección no es fácil de definir encontramos un ejemplo clásico, el del cálculo de la probabilidad de estar enfermo bajo la condición de haber tenido un resultado positivo en una prueba para una enfermedad. En ese caso, la probabilidad de estar enfermo y dar positivo no es algo que suela estar definido ni se pueda obtener mediante la regla de Laplace.

Sin embargo, lo que si conocemos en esos casos es la probabilidad de dar positivo dado que estamos enfermos. De hecho, esta probabilidad es una característica típica de las pruebas clínicas que se denomina sensibilidad. En la misma línea, se suele hablar de la especificidad como la probabilidad de dar negativo bajo la condición de no estar enfermo.

Es importante mencionar aquí que no es lo mismo calcular la probabilidad de A bajo la condición B que la de B bajo la condición A o, volviendo al ejemplo, no será lo mismo la sensibilidad que la probabilidad de estar enfermo habiendo dado positivo. A la confusión de estas dos probabilidades se le denomina “la falacia del fiscal” porque es un caso común a la hora de realizar un juicio. No es lo mismo calcular la probabilidad de que alguien sea culpable dadas las pruebas que la probabilidad de encontrar las pruebas bajo la condición de que esa persona sea culpable.

Lo que sí podemos hacer es pasar de una probabilidad a la otra utilizando el Teorema de Bayes. Así pues, esta "fórmula" tal y como la hemos enunciado anteriormente nos permite usar la especificidad y sensibilidad, para, junto a la probabilidad general de sufrir la enfermedad (incidencia), llegar a calcular la probabilidad de tener realmente la enfermedad. Vamos a los números.

Imagina que hablamos de una prueba para una enfermedad (E) que sólo sufren 4 de cada 10000 habitantes, es decir, que tiene una incidencia de $P(E) = 0{,}0004$. Dicha prueba tiene una sensibilidad del 99% y una especificidad del 98% o lo que es lo mismo $P(+ \mid E) = 0{,}99$ y $P(- \mid \text{No } E) = 0{,}98$.

Si escribimos ahora el Teorema de Bayes nos queda:

$$P(E \mid +) = \frac{P(+ \mid E)\, P(E)}{P(+)} = \frac{0{,}99 * 0{,}0004}{P(+)}$$

Nos faltaría conocer la probabilidad general de dar positivo que podemos calcular con lo que se conoce como Teorema de la Probabilidad Total. Este teorema es útil para calcular probabilidades de un evento cuando lo que conocemos es su probabilidad en distintos escenarios complementarios. En este caso, no conocemos la probabilidad de dar positivo, pero si la de dar positivo si se está enfermo (sensibilidad) y la de dar positivo si NO se está enfermo (1- especificidad). Además, sabemos la probabilidad de estar enfermo y la de no estarlo ya que son complementarias y tienen que sumar 1. Así:

$$\begin{aligned} P(+) = P(+ \mid E)\, P(E) + P(+ \mid \text{No } E) * P(\text{No } E) = \\ = 0{,}99 * 0{,}0004 + (1 - 0{,}98) * (1 - 0{,}0004) = \\ = 0{,}000396 + 0{,}0199 \approx 0{,}02 \end{aligned}$$

Con este valor calculado ya podemos volver al Teorema de Bayes:

$$P(E \mid +) = \frac{P(+ \mid E)\, P(E)}{P(+)} = \frac{0{,}99 * 0{,}0004}{0{,}02} \approx 0{,}02$$

y podemos ver como la probabilidad de estar enfermo sigue siendo bastante baja a pesar de haber obtenido un positivo en la prueba. El Teorema de Bayes nos ayuda a quitar un poco de hierro al asunto y nos tocará repetir pruebas para descartar o no la enfermedad.

Pero llega el momento de contar la verdad… este juego de probabilidades condicionadas y condiciones inversas a las que estamos acostumbrados al hablar de Teorema de Bayes no fue realmente la idea que tenía en mente la persona de la que toma su nombre, Thomas Bayes. De hecho, la versión del Teorema de Bayes que ha llegado hasta nuestros días no es ni tan siquiera la versión original enunciada por este reverendo presbiteriano, si no una versión posterior y más general del ya mencionado Pierre Simón Laplace.

3. El origen del Teorema de Bayes

La versión primitiva de lo que hoy conocemos como Teorema de Bayes apareció publicada en la Royal Society en 1763 cuando el Reverendo Thomas Bayes llevaba ya un par de años fallecido.

El texto había sido enviado a la revista por otro reverendo y amigo de Thomas, Richard Price, acompañado de una carta que decía:

“Estimado señor:

Le adjunto un escrito hallado entre los papeles de nuestro fallecido amigo el Señor Bayes que, en mi opinión, tiene gran mérito y debería ser preservado.

Richard Price”

Como dice la carta, Richard Price había encontrado el documento entre los papeles de su amigo y creía haber visto en ellos la forma en la que Bayes había tratado de entender el papel de Dios como causa de todas las cosas. Porque, al fin y al cabo, de eso iba el trabajo, de entender como de probable era que algo fuese o no la causa de lo observado.

En particular Bayes se apoyaba en un ejemplo sencillo pero muy intuitivo: si lanzamos una bola de papel hacia atrás sobre una mesa de un metro de ancho y queremos averiguar a que distancia del lado izquierdo ha caído esta primera bola, lo que podemos hacer es (sin mirar) seguir tirando bolas de papel hacia atrás mientras alguien nos dice si cada lanzamiento ha caído a la izquierda o la derecha de la bola original. De esa forma, a partir de la proporción de bolas caídas a uno u otro lado, podemos tener una mejor idea de la posición inicial.

Si te fijas la idea es bastante natural, empiezo no sabiendo donde ha caído la bola, luego observo datos y puedo terminar acotando donde puede haber caído. Si nos abstraemos un poco podemos decir que la posición de la bola original es “la causa” de que digamos que el resto de las bolas han caído a la derecha o a la izquierda. Así lo que hacemos mediante la observación es aprender sobre la causa.

Bayes buscaba así un método para mejorar nuestro conocimiento sobre las causas, algo que se conocía como probabilidad inversa y que había sido objeto de estudio por parte de grandes matemáticos como Abraham De Moivre o Jacob Bernoulli.

El nombre de probabilidad inversa viene del hecho de que lo que estamos acostumbrados a conocer es la probabilidad de ciertas observaciones dada la causa, es decir, la probabilidad de que 7 bolas de 10 caigan a la izquierda es fácil de conocer si sabemos que la bola original cayo a 65 cm del borde de la mesa, sin embargo, lo que buscamos es la probabilidad de que la bola cayese en algún lugar entre los 60 y los 70cm dado que 7 bolas de 10 han caído a la izquierda.

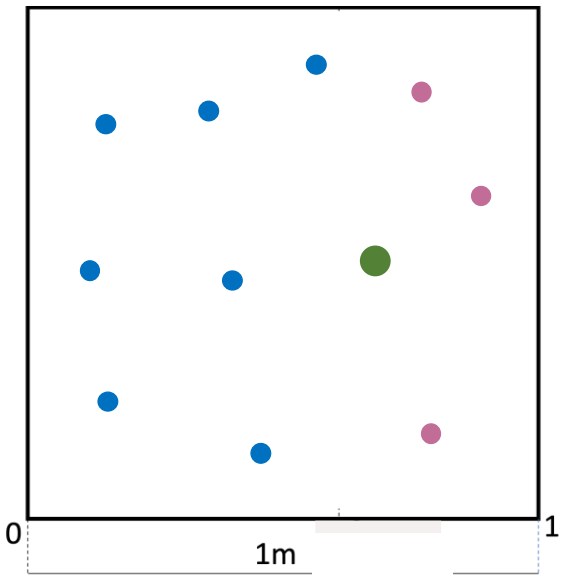


Imagen 2. Situación en “la mesa de Bayes”, con la bola verde siendo la del primer lanzamiento cuya posición queremos determinar.

En su trabajo, Bayes daba una solución que permitía pasar de la probabilidad de los datos dada la causa a la probabilidad de la causa dada los datos. Para ello, se necesitaba partir de lo que denominamos información a priori sobre la causa y que vendría a ser nuestro conocimiento sobre el proceso, previo a la observación de los datos.

Sin embargo, esta idea de tener que dar una aproximación *a priori* sobre “la causa” no es algo sencillo, y fue posiblemente la razón por la que Bayes guardó su trabajo en un cajón hasta que Price lo encontró. Porque la cuestión es que es complicado expresar el conocimiento que tenemos sobre algo, sobre todo cuando no sabemos mucho.

En el caso de la posición de la primera bola lanzada, decir que no sabemos nada es tan sencillo como decir que cualquier posición es igual de creíble… pero ¿no es eso dar algo de información? Además, si volvemos al supuesto objetivo que Bayes tenía en mente según Price, cuantificar la información a priori que tenemos sobre la existencia de Dios parece una tarea bastante complicada.

Así pues, pese a la originalidad de la idea de Bayes, la publicación del artículo no pasó de ser una mera anécdota que pronto cayó en el olvido sin que nadie le diese una utilidad real hasta que algunos años más tarde, en 1781, un viaje de Price a Francia lo cambió todo.

3.1. Ideas que viajan y enraízan.

En 1781 Richard Price había viajado a París para mantener diversas reuniones políticas. En unas de estas reuniones, Price coincidió con un matemático francés de quien ya hemos hablado un par de veces, Pierre Simon Laplace.

Laplace llevaba muchos años trabajando en torno a la probabilidad inversa de las causas inspirado por las ideas de Abraham De Moivre. En esos años había desarrollado una fórmula que tenía mucha similitud con el trabajo de Bayes, pese a que Laplace desconocía por completo la existencia de este. La diferencia entre el trabajo de Bayes y el de Laplace residía precisamente en la introducción de la información a priori en forma de distribución de la probabilidad de la causa. Sin ella, la fórmula de Laplace, pese a ser mucho más general que la de Bayes, sólo servía si todas las posibles causas eran equiprobables.

Si habéis atado cabos, esta idea de equiprobabilidad es la que enseñamos cuando trabajamos la fórmula de Laplace en el aula con ese “casos favorables dividido por casos posibles” que supone que todos los “casos” son igual de probables. Sin embargo, esta fórmula era poco útil en problemas complejos en los que esa equiprobabilidad era imposible, así que Laplace la había guardado en un cajón hasta que Price le habló de Bayes y su trabajo.

Laplace aún tardó unos 40 años en completar el puzle, pero entre 1810 y 1814 por fin veía la luz una fórmula que conjugaba la información a priori de Bayes con la fórmula de Laplace y que era ampliamente aplicable a cualquier problema en el que se buscase mejorar nuestro conocimiento sobre la causa de los datos observados. Pierre Simon Laplace había llegado al Teorema que el mismo llamó “de Bayes”, dando crédito al reverendo por sus aportaciones.

Llegados a este punto es posible que os preguntéis porque la forma de enseñar el teorema de Bayes es como la contábamos al principio, como una mera herramienta probabilística.

4. Idas y venidas de un Teorema.

Sharon B. Mcgrayne en su libro de 2011 titulado “La teoría que no morirá” explica a la perfección como tras la muerte de Laplace comienza una campaña contra el personaje y, por tanto, contra sus desarrollos. A esta campaña de desprestigio se unieron dos cuestiones relacionadas con la idea original tras el Teorema que hicieron que esta percepción fuese completamente denostada.

La primera de estas ideas tenía que ver con la cuantificación de la incertidumbre sobre la causa. La cuestión es que la causa es algo fijo, aunque desconocido y, lo que es más, es algo no observable. La mera idea de considerar la incertidumbre de algo fijo y no observable, era algo que los matemáticos de la época consideraban absurdo. Además, el teorema suponía un conocimiento previo sobre esa causa, algo que parecía bastante subjetivo y, por tanto, iba completamente en contra de la objetividad de la ciencia.

Sin embargo, pese a ser algo tabú, el teorema siguió utilizándose, unas veces como la herramienta probabilística que conocemos y enseñamos, y otras como la única solución para dar solución a problemas que la probabilidad que gustaba a los matemáticos era incapaz de resolver.

4.1 Un teorema tabú pero que ayuda

La gran fortaleza de la idea tras el Teorema de Bayes es precisamente esa idea de incorporar información a priori que no tiene porque, en contra de lo que declaran sus detractores, ser subjetiva, sino que puede esta basada en conocimiento científico previo.

Uno de los ejemplos que mejor ilustran la importancia de esta característica se dio cuando comenzaron a operarse vuelos comerciales. En ese momento las compañías de seguros necesitaban establecer una prima para el seguro de estos

aviones, pero… ¿cómo determinas la probabilidad de que pase algo que nunca ha pasado antes?

La versión de la probabilidad preferida por los matemáticos de la época era la conocida como frecuentista, y estaba basada en entender que la probabilidad de un evento es la proporción de veces que este evento sucederá si se repiten muchas veces las mismas condiciones. Bajo esta premisa, la probabilidad era algo que puede aproximarse a través de la observación de eventos anteriores que en el caso de los aviones no existían…

La idea bayesiana o subjetiva de la probabilidad, por su parte, sí permitía establecer una medida de la incertidumbre sobre los accidentes aéreos a partir de mediciones físicas o de la observación de otros tipos de accidentes.

Pero esta no fue la única ocasión en la que el teorema fue utilizado para dar solución a un problema de estas características. El Teorema de Bayes estuvo detrás del descifrado del código Enigma por parte del equipo de Alan Turing y se estima que ayudo a reducir la duración de la guerra en, al menos, dos años. Además, consiguió encontrar las bombas caídas en la playa de Palomares (Almería) durante la llamada Guerra Fría.

Estas aplicaciones seguían siendo todavía una anécdota hasta que una revolución filosófica entorno a la probabilidad hizo que el Teorema de Bayes volviese para quedarse.

4.2 De Finetti y la probabilidad subjetiva

Bien entrado el siglo XX el probabilista italiano Bruno De Finetti comienza a afirmar que era posible que la probabilidad o, mejor dicho, la incertidumbre, no existiese tal y como los matemáticos la habían entendido hasta el momento, que se trataba más bien de una medida subjetiva con la que nos aproximamos a un suceso que podríamos conocer con exactitud, pero para el que no tenemos tiempo, medios o conocimiento suficiente. Dicho de otra forma, De Finetti afirmaba que la probabilidad es simplemente una forma de cuantificar cuanto sabemos de algo.

Basándonos en esta idea, el Teorema de Bayes (o de Bayes-Laplace) cobra todo el sentido puesto que se trata de establecer ese grado de incertidumbre sobre esa "causa" fija pero desconocida y, desde ahí, ir aprendiendo y reduciendo nuestra incertidumbre a partir de los datos que observamos.

Con este nuevo paradigma en mente comenzaron a surgir defensores de la teoría ahora conocida como bayesiana, entre los que encontramos a Jack Good, compañero de Turing en Bletchley Park; los matemáticos Dennis Lindley y Jimmie Savage; el matemático y epidemiólogo Jerome Cornfield o el geofísico Sir Harold Jeffreys.

Pero todavía quedaba un escollo por salvar… La teoría bayesiana y la idea de la probabilidad como medida del conocimiento que tenemos sobre algo estaba muy bien, pero en problemas complejos la aplicación del teorema no era sencilla. Faltaba la última pieza de la lanzadera que haría despegar un nuevo paradigma.

4.3. Los métodos Montecarlo.

Curiosamente, la pieza que faltaba llevaba ya algunos años dando vueltas en el mundo de la física cuando los matemáticos y convencidos bayesianos Alan Gelfand y Adrian Smith se dieron cuenta del potencial que tenía para resolver los problemas "técnicos" con los que llevaban años lidiando.

Esta pieza eran los métodos Montecarlo por cadenas de Markov, una técnica desarrollada durante el proyecto Manhattan y que, aplicada sobre el Teorema de Bayes, permitía aproximar la probabilidad a posteriori de la causa, cuando está no podía calcularse de forma precisa.

Con esta potente herramienta en la mano, la teoría bayesiana dio el salto definitivo que la convirtió en una nueva filosofía estadística tan potente que permitía abordar la modelización de cualquier tipo de datos, manteniendo siempre la misma estructura, la del Teorema de Bayes, "se algo, observo, aprendo".

Hoy en día, encontramos la estadística bayesiana prácticamente en cualquier campo de la investigación y se va abriendo camino porque, pese a las reticencias o la costumbre, su flexibilidad es innegable.

Pero para que la idea bayesiana cale, nos queda todavía un pasito más… llevarla al aula.

5. Bayes en el aula.

Puede que te estes preguntando como el Teorema de Bayes podría realmente ayudar en el aula, que se puede hacer desde la docencia con la filosofía que Bayes y Laplace tenían en mente. Desde mi experiencia como docente universitaria, pero sobre todo como divulgadora, es que la filosofía bayesiana encierra una forma de entender la probabilidad que puede ser especialmente útil al alumnado para entender mejor la comunicación del riesgo.

Cuando en un aula de secundaria preguntas por el significado de la frase “hay una probabilidad de lluvia de un 80%” suele alzarse siempre alguna voz en la línea de: “va a llover en el 80% del territorio” o “en esa zona caerá el 80% de la lluvia total”. En definitiva, lo que sucede es que, al expresar la probabilidad en términos de porcentajes acaba por entenderse como una proporción sobre un todo.

Esta interpretación como proporción podríamos salvarla expresando la probabilidad en tantos por 1, tal y como se suele hacer dentro de las matemáticas, pero esos alumnos tendrán que seguir enfrentándose a los porcentajes como probabilidad en los medios y en su cotidianidad, por lo que huir de esas expresiones quizás no sea buena idea.

Podemos centrarnos, entonces, en dar sentido frecuentista a la probabilidad entendiendo que ese porcentaje expresa la proporción de veces que se daría ese evento (lluvia) si repitiésemos las mismas circunstancias (las condiciones climáticas de ese día) un número grande (por no decir infinito) de veces. El problema de esta definición está en el significado de las afirmaciones “las mismas circunstancias” y de “un número grande de veces”.

Empezando por la segunda expresión, en la práctica, muchas pueden no ser nunca suficientes y, en cualquier caso, al ser un ejercicio imaginario, es muy difícil entender que significa muchas. Por otra parte, con respecto a la primera expresión, hay muchas situaciones en las que pensar en repetir algo bajo las mismas circunstancias puede ser absurdo. ¿Cómo repetimos un partido de futbol o las circunstancias atmosféricas de un día? Incluso en aquellas situaciones en las que podríamos pensar en tener las mismas circunstancias, como el lanzamiento de un dado o una moneda, una pregunta natural de algunos alumnos es “pero si son las mismas circunstancias el resultado final será exactamente el mismo ¿no?”

Esta pregunta tiene mucho que ver con la idea de De Finetti de que la probabilidad no existe más allá de nuestro desconocimiento sobre las condiciones que producen un resultado. Así, si realmente fuésemos capaces de controlar todas las circunstancias, el resultado final sería exactamente el mismo.

Tiene sentido entonces hablar de la probabilidad tal y como se entiende dentro del teorema de Bayes, como una medida de la incertidumbre que tenemos sobre el evento de interés. Y no se trata meramente de algo subjetivo, sino que, al usar el Teorema de Bayes podemos aprender de las observaciones para ir mejorando nuestra perspectiva y nuestro conocimiento.

Resumiendo, la visión bayesiana es una forma bastante intuitiva de entender la probabilidad y la comprensión del Teorema de Bayes permite dar fundamento matemático al aprendizaje.

Referencias

Bayes, Mr; Price, Mr (1763). An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the Late Rev. Mr. Bayes, F. R. S. Communicated by Mr. Price, in a Letter to John Canton, A. M. F. R. S. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. **53**: 370–418. https://doi.org/10.1098/rstl.1763.0053

Barnard, G. A., y Bayes, T. (1958). Studies in the History of Probability and Statistics: IX. Thomas Bayes’s Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. *Biometrika*, *45*(3/4), 293–315. https://doi.org/10.2307/2333180

IMS (1988) The Reverend Thomas Bayes, F.R.S. — 1701? –1761. Who Is this gentleman? When and where was he born? The IMS Bulletin, 17(3), pp. 276–278.

Laplace, P. S. (1986 Traducción de S.M. Stigler). Memoir on the Probability of the Causes of Events. Statistical Science, 1(3), 364–378. http://www.jstor.org/stable/2245476

Mcgrayne, S. B (2011). *The theory that would not die how Bayes' rule cracked the enigma code, hunted down Russian submarines, & emerged triumphant from two centuries of controversy*. Yale University press.

Rodriguez M. (2022) La compleja y heterodoxa relación de Isaac Newton con el cristianismo que mantuvo en secreto toda su vida. BBC News: https://www.bbc.com/mundo/noticias-60987372

Stigler, S. M. (1982). Thomas Bayes's Bayesian Inference. Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General), 145(2), 250–258. https://doi.org/10.2307/2981538

Stigler, S. M. (1986). *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900.* Belknap Harvard Press.

PONENCIAS

PoP1 Nuevo currículo, ¿nuevas metodologías?

Antonio Moreno Verdejo
amverdejo@ugr.es
Universidad de Granada

Núcleo temático: Procesos, Formación del Profesorado.

Modalidad: Ponencia.

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

Esta ponencia describe las bases de la metodología planteada en los nuevos currículos de matemáticas. La resolución de problemas, el razonamiento matemático y el desarrollo del pensamiento computacional son los tres pilares metodológicos de esta propuesta. Proporcionar tareas que permitan a los alumnos y alumnas formular, emplear e interpretar situaciones del mundo real con matemáticas facilita una estructura útil y significativa para organizar los procesos matemáticos que describen lo que hacen los individuos para conectar el contexto de un problema con las matemáticas y posteriormente resolverlo. A lo largo de la ponencia desarrollaremos las características de los cambios metodológicos que nos sugiere el currículo y ejemplificaremos cómo abordarlos.

Palabras clave: Currículo, Metodología, Educación Matemática.

El currículo de matemáticas del Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, incluye conceptos y términos como objetivos, competencias y resolución de problemas. Sin embargo, aunque la terminología nos parezca que se perpetúan los currículos, este currículo incluye notables diferencias de fondo.

1. El currículo de matemáticas

Los currículos presentan una visión de lo que es el conocimiento y una concepción del proceso de la educación. De hecho, el RD 217/2022, define currículo como el conjunto de objetivos, competencias, contenidos enunciados en forma de saberes básicos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación (pág 41579).

Esta definición nos lleva a interpretar el currículo como un plan de formación que recoge una forma de entender el conocimiento, interpretar el aprendizaje, poner en práctica la enseñanza y valorar la utilidad y dominio de los aprendizajes realizados.

Para cada nivel educativo, los logros de aprendizaje se condensan en los objetivos establecidos para la etapa. Estos son concreciones de las capacidades expresadas en las competencias clave (Ilustración 1). Los objetivos y fines establecidos en el currículo de cada etapa se concretan en términos competenciales en el Perfil de salida de cada etapa educativa. Este explicita las competencias clave y el desarrollo previsto de cada una de ellas.

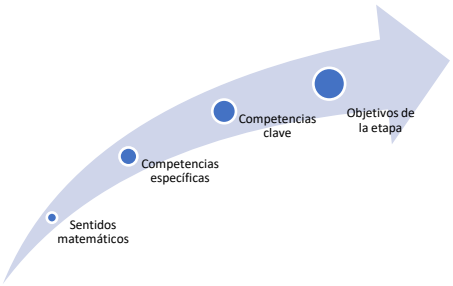


Ilustración 1. Contribución de las matemáticas a los Objetivos de la etapa

Desde la materia de matemáticas se contribuye al desarrollo de las competencias clave con el trabajo de las competencias específicas de la materia de matemáticas por medio de los contenidos enunciados como saberes básicos. La definición de la competencia específica de matemáticas tiene como líneas principales la resolución de problemas y las competencias socioafectivas (Ilustración 2).

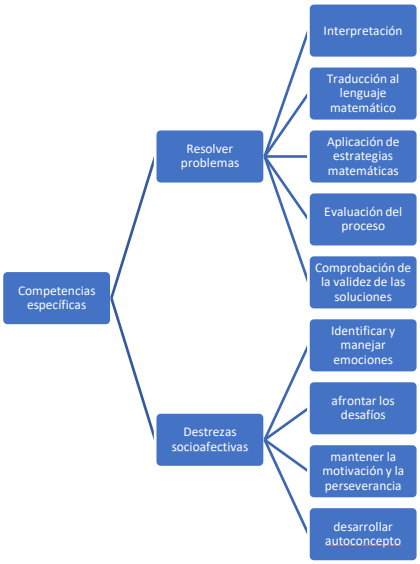


Ilustración 2. Definición de Competencia Específica de Matemáticas

Pero la competencia específica de matemáticas también se organiza con otras capacidades como el desarrollo del pensamiento computacional, la formulación de conjeturas, el razonamiento matemático y el establecimiento de conexiones entre las matemáticas y otras áreas o entre diferentes partes de las matemáticas (Ilustración 3).

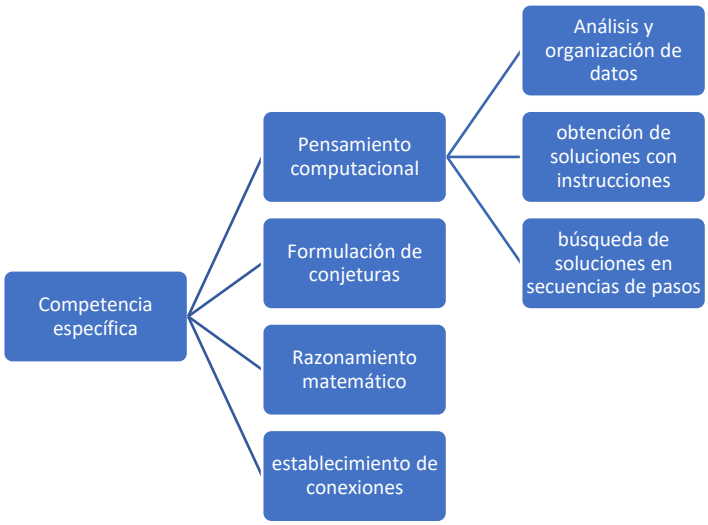


Ilustración 3. Competencia específica de matemáticas. Capacidades

La competencia específica de matemáticas se organiza en los siguientes bloques competenciales: Resolución de problemas, Razonamiento y prueba, Conexiones, Comunicación y representación, Destrezas socioafectivas.

El medio para lograr el desarrollo de las competencias específicas son los contenidos organizados en torno a la noción de sentido matemático. Este concepto se define como el conjunto de capacidades relacionadas con el dominio en contexto de contenidos numéricos y algebraicos, geométricos, métricos y estocásticos, que permiten emplear estos contenidos de una manera funcional y con confianza en las propias habilidades (Ruiz-Hidalgo et al., 2019).

El sentido matemático organiza los saberes básicos, es decir, los conocimientos, destrezas y actitudes que constituyen los contenidos propios de una materia o ámbito cuyo aprendizaje es necesario para la adquisición de las competencias específicas. En resumen, la propuesta metodológica se define en torno a la idea de competencia básica, saberes básicos y sentido matemático (Ilustración 4).

Ilustración 4. Propuesta metodológica

2. La metodología

La competencia matemática es el compromiso activo con las matemáticas para resolver problemas del mundo real en una variedad de contextos, y pretende abarcar el razonamiento matemático (tanto deductivo como inductivo) y la resolución de problemas utilizando conceptos y procedimientos matemáticos, hechos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos (OCDE, 2018).

Es interesante destacar que esta definición de competencia matemática no solo se centra en el uso de las matemáticas para resolver problemas del mundo real, sino que también identifica el razonamiento matemático como un aspecto central de la competencia matemática. La contribución que hace el marco PISA 2021 es resaltar la centralidad del razonamiento matemático tanto para el ciclo de resolución de problemas como para la competencia matemática en general.

2.1. Razonamiento matemático

El desarrollo competencial requiere que el estudiantado sea capaz de usar su conocimiento del contenido matemático para reconocer la naturaleza matemática de una situación problema, especialmente aquellas situaciones que se encuentran en el mundo real, y luego formularla en términos matemáticos. Esta transformación, de una situación ambigua y desordenada del mundo real a un problema matemático bien definido, requiere del razonamiento matemático.

De igual manera, una vez que la transformación se realiza con éxito, el problema matemático resultante debe resolverse utilizando los conceptos y procedimientos matemáticos que se enseñan en los centros escolares. De nuevo esto es una manifestación del razonamiento matemático porque requiere tomar decisiones estratégicas sobre la selección de esas herramientas matemáticas y el orden de su aplicación. Finalmente, la definición de competencia matemática (OCDE, 2108) nos recuerda la necesidad de que el estudiante evalúe la solución matemática interpretando los resultados dentro de la situación original.

Ilustración 5. Razonamiento matemático

Aunque el razonamiento matemático y la resolución de problemas del mundo real se superponen, hay un aspecto del razonamiento matemático que va más allá de la resolución de problemas prácticos. El razonamiento matemático es también una forma de evaluar y elaborar argumentos, evaluar interpretaciones e inferencias relacionadas con declaraciones (por ejemplo, en debates sobre políticas públicas, etc.) y soluciones de problemas que, por su naturaleza cuantitativa, se entienden mejor matemáticamente.

Por lo tanto, la competencia matemática comprende dos aspectos relacionados: el razonamiento matemático y la resolución de problemas. La competencia matemática juega un papel importante en poder usar las matemáticas para resolver problemas del mundo real. Además, el razonamiento matemático (tanto deductivo como inductivo) también va más allá de la resolución de problemas del mundo real para incluir la elaboración de juicios informados sobre esa importante familia de problemas sociales que pueden abordarse matemáticamente. También incluye emitir juicios sobre la validez de la información que bombardea a los individuos mediante la consideración de sus implicaciones cuantitativas y lógicas. Es aquí donde el razonamiento matemático también contribuye al desarrollo de un conjunto selecto de habilidades del siglo XXI.

2.2. Resolución de problemas

La definición de competencia matemática se refiere a la capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar (y evaluar) las matemáticas. Estos tres procesos, formular, emplear e interpretar, brindan una propuesta significativa para organizar y planificar la enseñanza para abordar los procesos matemáticos que describen lo que hacen los individuos para conectar el contexto de un problema con las matemáticas y resolver el problema.

La definición de competencia matemática conserva e integra la noción de modelización matemática. El ciclo de modelización (formular, emplear, interpretar y validar) es un aspecto central de la concepción de estudiantes matemáticamente alfabetizados. Sin embargo, a menudo no es necesario participar en todas las etapas del ciclo de modelización, especialmente en el contexto de una evaluación

(Galbraith, Henn y Niss, 2007). A menudo sucede que algunas fases del ciclo de modelización matemática han sido realizadas por otros, y el usuario final lleva a cabo algunos de las fases del ciclo de modelización, pero no todas. Por ejemplo, en algunos casos, se dan representaciones matemáticas, como gráficos o ecuaciones, que se pueden manipular directamente para responder alguna pregunta o sacar alguna conclusión.

Para que esto sea posible, los profesores deben ser capaces de orquestar entornos de enseñanza, situaciones y actividades que puedan fomentar el desarrollo de la competencia de modelización, en muchos contextos educativos, junto con el desarrollo de otras competencias matemáticas. Esto da lugar a multitud de cuestiones y decisiones relativas a la asignación de tiempo, el diseño y la planificación de las situaciones de enseñanza y aprendizaje, la elección de actividades y materiales, el diseño y la aplicación de instrumentos de evaluación, etc., además de lograr un equilibrio entre el trabajo de modelización y otros tipos de trabajo matemático.

Además, el desarrollo satisfactorio de la competencia de modelización presupone la presencia de otras que otras competencias matemáticas estén presentes, aunque sólo sea por la sencilla razón de que el trabajo en el ámbito matemático de un modelo no puede tener lugar sin dichas competencias.

En particular, las capacidades 'formular', 'emplear' e 'interpretar' aluden a los tres procesos en los que se involucrarán los estudiantes cuando resuelvan activamente problemas. Formular situaciones matemáticamente implica aplicar el razonamiento matemático (tanto deductivo como inductivo) para identificar oportunidades para aplicar y usar las matemáticas, viendo que las matemáticas se pueden aplicar para comprender o resolver un problema o desafío particular presentado. Incluye ser capaz de tomar una situación tal como se presenta y transformarla en una forma susceptible de tratamiento matemático, proporcionando estructura y representaciones matemáticas, identificando variables y haciendo suposiciones simplificadoras para ayudar a resolver el problema o enfrentar el desafío.

Emplear las matemáticas implica aplicar el razonamiento matemático mientras se utilizan conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticos para derivar una solución matemática. Incluye realizar cálculos, manipular expresiones y ecuaciones algebraicas u otros modelos matemáticos, analizar información de manera matemática a partir de diagramas y gráficos matemáticos, desarrollar descripciones y explicaciones matemáticas y usar herramientas matemáticas para resolver problemas.

Interpretar las matemáticas implica reflexionar sobre soluciones o resultados matemáticos e interpretarlos en el contexto de un problema. Implica aplicar el razonamiento matemático para evaluar soluciones matemáticas en el contexto del problema y determinar si los resultados son razonables y tienen sentido en la situación planteada; determinando también qué destacar a la hora de explicar la solución.

Pensemos por ejemplo en el sentido espacial. Podríamos establecer las siguientes componentes:

Analizar las propiedades de las figuras y los cuerpos geométricos

Reconocer y establecer relaciones geométricas y razonar matemáticamente sobre estas relaciones

Aplicar transformaciones geométricas y usarlas para analizar situaciones

Orientación espacial

Analicemos la siguiente tarea como ejemplo de una cuyo desarrollo nos permite abordar la propuesta metodológica de este currículo que estamos analizando.

Dibuja el camino sobre el desarrollo plano

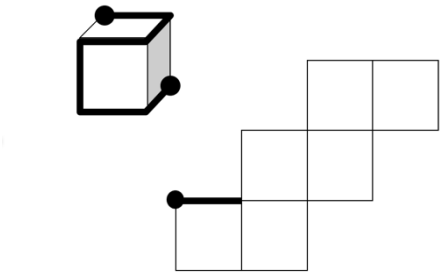


Ilustración 6. Dibuja el camino sobre el desarrollo plano

Esta tarea en la fase de “formular” trabajará los siguientes aspectos del sentido espacial:

1: **Analizar las propiedades de las figuras:** identificar el desarrollo plano de un cubo

2: **Establecer relaciones geométricas**: El camino se compone de 6 aristas perpendiculares, en 3 caras

3: **Transformaciones geométricas**: 3 aristas están en misma cara, 3 en cara contigua y una en otra, paralela a la segunda

4: **Orientación espacial**: Identificar cuáles son las aristas comunes en el desarrollo plano; identificar caras contiguas en desarrollo plano, pasar la ubicación en el cubo a la ubicación en las caras del desarrollo

En la segunda fase del razonamiento matemático, el estudiante emplea las matemáticas trabajando las componentes del sentido espacial de la siguiente manera:

1: **Analizar las propiedades de las figuras:** identificar las 6 caras cuadradas

2: **Establecer relaciones geométricas**: Identificar las 6 caras por sus vértices (ABCD, ADEH, ABGH, EHGF,

3: **Transformaciones geométricas**: Identificar los vértices de cada cara en cubo

4: **Orientación espacial**: Identificar las aristas comunes en el cubo

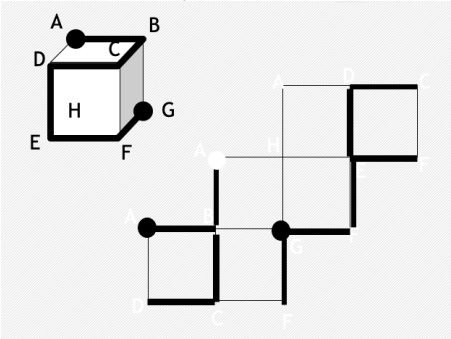


Ilustración 7. Camino dibujado en el desarrollo plano

El razonamiento matemático termina en este problema con la interpretación y validación. Las componentes del sentido espacial trabajadas en esta fase serían las siguientes:

1: **Analizar las propiedades de las figuras:** Identificar los elementos del cubo

2: **Establecer relaciones geométricas**: Identificar relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre caras

3: **Transformaciones geométricas**: mover los cuadrados para formar el cubo, apreciando cuáles aristas coinciden

4: **Orientación espacial**: Colocar las aristas sombreadas, identificar el camino en el desarrollo, pese a que no se siguen en el desarrollo

2.3. Pensamiento computacional

El Real Decreto 217/2022 señala que los estudiantes también deben demostrar habilidades de pensamiento computacional como parte de su práctica de resolución de problemas. Estas habilidades de pensamiento computacional que se aplican en la formulación, el empleo, la evaluación y el razonamiento incluyen el reconocimiento de patrones, la descomposición, la determinación de qué herramientas informáticas (si las hay) podrían ser empleados en el análisis o solución del problema, y la definición de algoritmos como parte de una solución detallada.

La naturaleza del pensamiento computacional dentro de las matemáticas se conceptualiza como la definición y elaboración de conocimientos matemáticos que

pueden expresarse mediante la programación, lo que permite a los estudiantes modelar dinámicamente conceptos y relaciones matemáticas. Una taxonomía de prácticas de pensamiento computacional orientada específicamente hacia el aprendizaje de las matemáticas y las ciencias implica prácticas con datos, prácticas de modelización y simulación, prácticas de resolución de problemas computacionales y prácticas de pensamiento sistémico (Weintrop et al., 2016). La combinación de pensamiento matemático y computacional no solo se vuelve esencial para apoyar eficazmente el desarrollo de la comprensión conceptual del dominio matemático por parte de los estudiantes, sino también para desarrollar sus conceptos y habilidades de pensamiento computacional, brindando a los estudiantes una visión más realista de cómo se practican las matemáticas en el mundo profesional y se utiliza en el mundo real y, a su vez, los prepara mejor para seguir carreras en campos relacionados.

Wing (2006) propone una definición que enfatiza la contribución única del campo de la informática a una amplia gama de actividades humanas: “el pensamiento computacional implica la resolución de problemas, el diseño de sistemas y la comprensión del comportamiento humano, basándose en los conceptos fundamentales de la informática” (Wing 2006, pág. 33).

Destacando la diversidad y la naturaleza inclusiva del debate sobre el pensamiento computacional, se pueden enumerar más de 20 habilidades y prácticas de alto nivel que el pensamiento computacional podría incluir: la abstracción y descomposición de problemas, el razonamiento heurístico, las estrategias de búsqueda y el conocimiento de conceptos informáticos como el procesamiento paralelo, el aprendizaje automático y la recursividad (NRC 2010).

Una tarea que ilustre estas ideas sería la siguiente:

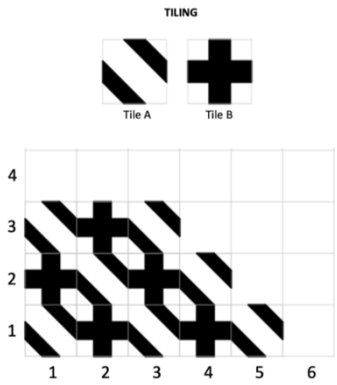


Ilustración 8. Tarea para el desarrolo del pensamiento computacional

Indica las instrucciones para conseguir el mosaico de la figura:

"Primero determina la primera pieza de la izquierda en cada fila"

SI la fila es impar ENTONCES la primera pieza es .....

EN OTRO CASO la primera pieza es ....

"Completa la fila añadiendo piezas"

SI la pieza anterior es ....

..... utiliza .....

..... utiliza .....

3. Conclusiones

A modo de resumen concluimos lo siguiente:

La ”alfabetización matemática” en el siglo XXI incluye el razonamiento matemático y algo de pensamiento computacional.

El razonamiento matemático se desarrolla situando a los estudiantes como resolutores de problemas.

La resolución de problemas en contexto no es una aplicación de las matemáticas sino un medio para trabajar las diferentes fases de la modelización matemática: razonar matemáticamente.

Implica desarrollar UD centradas en el desarrollo de competencias básicas, trabajando con un conjunto de saberes más amplio y poniendo la resolución de problemas y al estudiante en el centro del proceso.

Referencias

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022b). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*. En BOE n. 76, de 30 de marzo de 2022 (p. 41571-41789). Autor.

Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study (Vol. 10)*. Springer Science & Business Media.

National Research Council. (2010). *Report of a workshop on the scope and nature of computational thinking*. The National Academies Press.

OCDE. (2018). *PISA 2021 Mathematics Framework*. Draft. OECD Publishing.

Ruiz-Hidalgo, J. F.; Flores Martínez, P.; Ramírez-Uclés, R. y Fernández-Plaza, J. A. (2019). Tareas que desarrollan el sentido matemático en la formación inicial de profesores. *Educación matemática*, vol.31, n.1, pp.121-143.

Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M., Orton, K., Jona, K., Trouille, L., & Wilensky, U. (2016). Defining computational thinking for mathematics and science classrooms. *Journal of science education and technology*, 25(1), 127-147.

Wing, JM. (2006). Computational thinking. *Commun ACM* 49(3): 33–35

PoP2 El proceso de matematización en el estudio del patrimonio histórico-artístico: Matemáticas para la armonía.

Constantino de la Fuente Martínez
consdelafu@gmail.com
IES Cardenal López de Mendoza, Burgos.

Núcleo temático: Procesos.

Modalidad: Ponencia.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

La matematización es el proceso fundamental que los estudiantes emplean para resolver problemas de la vida real (OCDE, 2004, p. 39), por lo que también es eficaz para el estudio del patrimonio histórico artístico. Uno de los resultados obtenidos, al aplicarlo a la Catedral de Burgos, ha sido la identificación de algunos pasos específicos, conectados con la armonía y el disfrute estético, que, junto con los habituales del proceso, constituyen una propuesta metodológica que puede ser utilizada con otros monumentos: cálculo de *patrones dinámicos* y *enlaces orgánicos* entre ellos, identificación de los *ritmos arquitectónicos de armonía*, disfrute de la *significación interior* del elemento analizado, así como de las *resonancias lógicas y afectivas* que llevan a la contemplación y la armonía.

Una de las principales conclusiones es que, en el patrimonio histórico-artístico, material y tangible, existe un patrimonio matemático, inmaterial e intangible, oculto en el primero, que forma parte de los pilares sobre los que se sustentan las sensaciones estéticas de armonía y belleza, que suscita la contemplación de la obra artística.

Palabras clave: Catedral de Burgos, Patrones Dinámicos, Ritmos Arquitectónicos de Armonía, Euritmia, Significación Interior.

1. Introducción: el problema de la significación interior.

El análisis matemático de cualquier objeto artístico debe tener, como pilares básicos, algunas reflexiones que fundamenten y enmarquen, por una parte, los problemas que se presentan en este tipo de estudio y, por otra, la necesaria coherencia, de los procesos de resolución y las soluciones que se encuentren, con el marco teórico inicial. En el contexto concreto de la Catedral de Burgos, hay un precedente de estudio matemático, de carácter didáctico, con propuestas para el aula (ESTALMAT, 2009) realizado por un grupo de profesores y profesoras del proyecto ESTALMAT de Castilla y León. Por tanto, para profundizar matemáticamente, es conveniente hacer explícito el marco teórico y el enfoque que va a tener el estudio.

A este respecto, comenzaremos apoyándonos en las relaciones entre el objeto artístico, en este caso las catedrales, y las matemáticas y, más concretamente, con la aritmética del número y la geometría de las formas. Hani (2000, p. 34) reflexiona sobre esta idea:

La matemática del número, en su particular relación con la geometría, explica lo que le parece a primera vista inexplicable al admirador de las catedrales: la atmósfera sutil de esos edificios, cuya armonía es cuasi divina, así como la impresión de perfección que producen, no dependen de intenciones subjetivas, sentimiento religioso o afectividad del artista, sino de leyes objetivas que se apoyan en la geometría platónica transmitida a las organizaciones de los constructores. El elemento esencial era, para estos, la noción de relación y de proporción entre las distintas partes del edificio.

Habitualmente, cuando un visitante sensible se adentra en la Catedral, su mente puede sentirse desbordada por la cantidad de sensaciones visuales y estímulos emocionales que recibe. Sobre la dificultad para comprender o explicar de forma lógica o sentimental esa "*armonía cuasi divina*" o la "*impresión de perfección*", Hofstadter (1987, p. 646-647) plantea una reflexión muy acertada, extraída de la pintura y de la música, que se puede adaptar a un objeto tridimensional como la Catedral:

¿Qué nos hace reaccionar cuando observamos una pintura y sentimos su belleza? ¿La "forma" de las líneas y puntos en nuestra retina? Evidentemente debe ser eso, pues así es como examinan a aquellos nuestros mecanismos mentales de análisis; pero la complejidad

del procesamiento nos hace sentir que no estamos observando meramente una superficie bidimensional, estamos respondiendo a algún género de significación interior de la pintura, un elemento multidimensional aprisionado dentro de las dos dimensiones.

Lo importante es la palabra significación; nuestras mentes contienen intérpretes (mecanismos de interpretación) que reciben los moldes bidimensionales y, a continuación, extraen de ellos nociones de elevada dimensionalidad, tan complejos que no podemos describirlos conscientemente. Lo mismo puede ocurrir de cómo reaccionamos ante la música.

El intérprete (mecanismo de significación) actúa construyendo una estructura cognoscitiva, una representación mental de la composición musical a la que trata de integrar con informaciones preexistentes, mediante el hallazgo de vínculos con otras estructuras de conocimiento fruto de experiencias anteriores. Cuando ocurre esto, la significación, paulatinamente se va manifestando. En realidad, pueden pasar años antes de que alguien sienta que ha penetrado en la significación central de una obra.

Desde un contexto más cercano a las matemáticas, Ghyka (1983) incide en algunos aspectos relacionados con la "*significación interior*" mencionada anteriormente; concretamente plantea que las formas de la naturaleza y las creadas por el artista suscitan en el observador "*resonancias lógicas o afectivas*", de forma que cuando la percepción de estas resonancias se hace consciente, "*practicamos la Estética o ciencia de las relaciones armoniosas."*

En cuanto a las relaciones de la matemática con otros campos de la cultura, Odifredi (2007, p. 180) plantea conexiones con la pintura y la literatura:

En general, los distintos aspectos del humanismo están conectados todos de manera abstracta: el ritmo es simetría de la poesía y de la música, la simetría es ritmo de la pintura, la poesía es música del lenguaje, la música es pintura animada en el tiempo, la pintura y la arquitectura son música petrificada en el espacio. Y, sobre todo, la matemática es poesía del universo, pintura abstracta del mundo, música de las esferas: expresión, por tanto, de aquello que los griegos llamaban "kosmos" o "logos" y no es otra cosa que el orden racional de las cosas percibido a través del pensamiento abstracto.

Comienza a repetirse la idea de "*armonía*", por lo que es adecuada una reflexión sobre este concepto, desde una perspectiva general, no restringida a la música. El

poeta leonés Antonio Colinas (2010, p. 29) lo muestra acertadamente: *"…pasan los seres humanos y cambian las ideas que se impusieron como definitivas, a veces con leyes crueles, pero lo que siempre permanece es ese ritmo o fluir que todo lo rige. Fundir, en nuestro presente, ese fluir del mundo con nuestro propio fluir es la armonía."* Similares son las palabras de Ghyka (1998, p. 39) en las que plantea que el orden surgido del caos inicial se convierte en armonía, *"percibida esta como la consonancia entre el alma individual y el alma universal."*

Las ideas anteriores originan muchos interrogantes y permiten el planteamiento de un problema, que podemos enunciar de la siguiente forma: la Catedral, como objeto artístico, atesora, como resultado de su proceso de construcción, multitud de elementos arquitectónicos, escultóricos, etc. que suscitan en el visitante sensaciones y emociones difíciles de expresar. ¿Se puede aprehender la significación interior de la Catedral utilizando los conocimientos matemáticos? Por otra parte, asociado al problema anterior surge la natural cuestión metodológica: ¿qué proceso se puede desarrollar para conseguirlo?

2. Matematización y patrimonio histórico-artístico: características específicas.

La matematización es *el proceso fundamental que los estudiantes emplean para resolver problemas de la vida real* (OCDE, 2004, p. 39). El esquema del mismo (Blum, 2005, p.20), evidencia las conexiones entre la realidad y las matemáticas. A este respecto, caben señalar dos elementos de interés: a) el paso del modelo real al modelo matemático también es denominado matematización horizontal y es cuando se conecta el mundo real con el mundo matemático; b) la conexión entre el modelo matemático y la solución matemática es denominada como matematización vertical, que se produce dentro del mundo de las matemáticas.

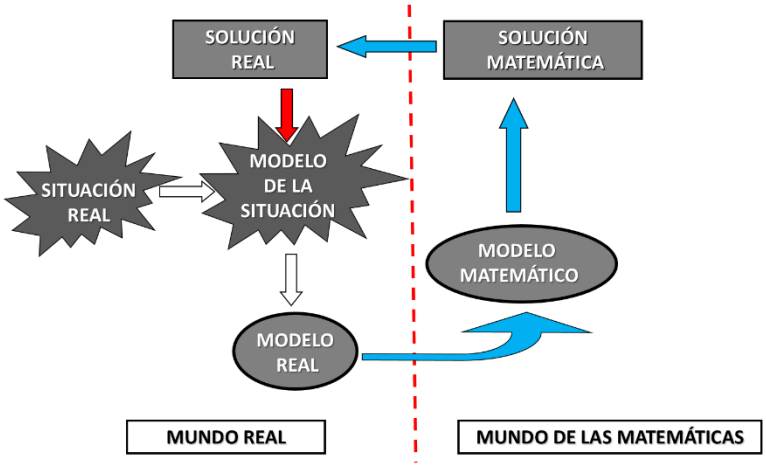


Fig 1. El proceso de matematización.

En la Fig. 1 se puede observar un esquema de las fases de la matematización, situándolas en su espacio específico, ya sea el mundo real o el mundo de las matemáticas.

Contextualizando el proceso, para el estudio del patrimonio histórico artístico, y profundizando en la matematización vertical, se puede caracterizar esta última por medio de los siguientes pasos:

- Paso1. Es el punto de partida del proceso y consiste en la construcción de modelos matemáticos, mayoritariamente geométricos, que representen y describan la forma de los elementos a estudiar (recintos, bóvedas, bajorrelieves, arcos, frisos, rosetones, etc.). Para ello se utilizan diferentes herramientas tecnológicas, como programas de geometría dinámica (GeoGebra entre otros). De esta forma obtenemos las configuraciones geométricas que modelizan los elementos reales a analizar.

- Paso 2. Consiste en el cálculo de los que denominamos *patrones dinámicos*, números irracionales que subyacen en las proporciones de los elementos o motivos estudiados. Estos patrones representan los acordes o concordancias entre las distintas partes que configuran los motivos que se estudian. La combinación de *patrones dinámicos* (mediante operaciones elementales) conforman los *enlaces orgánicos* o *concatenaciones*, que contribuyen a la simetría y euritmia de la configuración geométrica.

- Paso 3. Tiene como objetivo analizar los cambios, repeticiones, recurrencias y descomposiciones de las formas y tamaños de las configuraciones geométricas, aflorando así los invariantes numéricos que rigen los cambios y variaciones de los acordes o *patrones dinámicos*. Se obtienen, de este modo, los denominados ritmos armoniosos de variación o *ritmos de armonía*, caracterizados por sucesiones numéricas (habitualmente progresiones geométricas) de *patrones dinámicos* y *enlaces orgánicos*.

La consecución de estos pasos permite obtener la solución matemática del problema. El traslado de la solución matemática al mundo real permite, de forma general, evaluar su validez y sus limitaciones (como para cualquier otro modelo). Pero, en el estudio del patrimonio, se añaden unas características propias que constituyen un último paso:

- Paso 4. Una vez obtenida la solución real e interpretada en el contexto concreto, se obtiene una forma de acceder a la *significación interior* del objeto artístico, lo que permite disfrutar de las sensaciones de belleza, armonía, simetría, euritmia, etc. que el elemento estudiado nos transmite.

El uso exhaustivo del proceso de matematización en la catedral de Burgos, con los matices específicos presentados, permite llegar a disfrutar de una verdadera sinfonía matemática silente, con acordes, ritmos y movimientos que se extienden y esconden por toda la Catedral.

3. Modelos, configuraciones y patrones dinámicos

Aplicando los pasos descritos anteriormente, una vez elegido el motivo a estudiar, se procede a la construcción del modelo o modelos geométricos, que lo representen, constituyendo éstos una primera aproximación matemática a las formas y configuraciones. De esta manera pueden comenzar a aflorar los primeros patrones dinámicos, los más elementales, asociados al motivo, que refuerzan las palabras de Jámblico (1991, p. 43): "*La primera esencia es la naturaleza de los números y proporciones que se extiende a través de todas las cosas, de acuerdo con los cuales, todo está armónicamente dispuesto y convenientemente ordenado.*"

Estas reflexiones resumen la idea principal de la escuela pitagórica: *todo es número* y el orden y la armonía del cosmos se deben a él.

Para no alargar en exceso el documento, se da por conocidas algunas configuraciones geométricas como el rectángulo áureo y aspectos elementales del número de oro $\emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, centrando la atención en otras menos habituales.

3.1. Corte Sagrado

La configuración denominada corte sagrado es un modelo geométrico que resuelve el problema del paso del cuadrado al octógono regular. Esta cuestión se presenta muy a menudo en cuanto se desea obtener una bóveda octogonal en un recinto de planta cuadrada. En la Catedral hay cortes sagrados en varias capillas y recintos, destacando los de la Capilla de la Presentación, la de los Condestables y el Cimborrio. En la Fig. 2 se puede observar el modelo geométrico del corte sagrado del Cimborrio, con las trompas, que conforman los cuatro triángulos rectángulos interiores al cuadrado y exteriores al octógono regular.

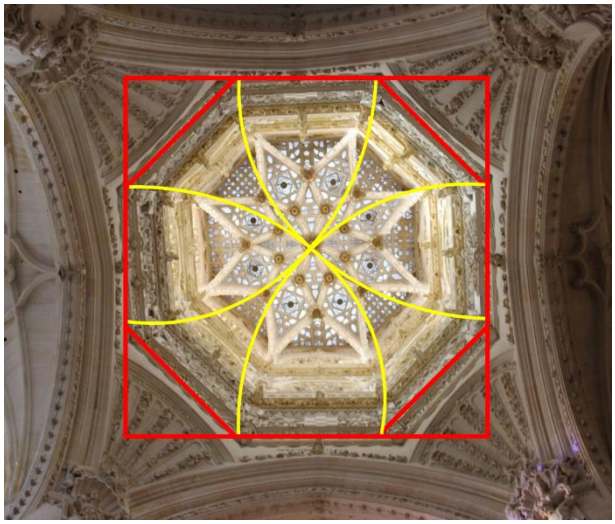


Fig 2. Corte sagrado en el Cimborrio.

Considerando el lado del cuadrado igual a la unidad de medida, se obtiene fácilmente que: los arcos trazados desde cada vértice tienen por radio la mitad de la diagonal, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, la longitud del lado del octógono regular resultante es $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, que es el

inverso del número de plata $\theta = \sqrt{2} + 1$. Intervienen, por tanto, varios patrones dinámicos, todos relacionados con $\sqrt{2}$.

3.2. Polígonos estrellados y estrellas

Los polígonos estrellados y las estrellas son abundantes en la Catedral y constituyen unas configuraciones geométricas elementales, que se pueden estudiar con matemáticas muy elementales.

La Fig. 3A es un ejemplo de polígono estrellado 8/3 en la bóveda de la capilla de la Presentación. En este caso, si el lado del octógono regular es la unidad, el del octógono estrellado 8/3 es igual al número de plata $\theta = \sqrt{2} + 1$.

Esta bóveda, calada en su parte central, contiene también una estrella formada por dos cuadrados yuxtapuestos, obtenidos al recorrer todos los vértices del octógono, saltando de dos en dos vértices; es decir, que esta estrella proviene del polígono estrellado 8/2. Puede observarse el modelo geométrico en la Fig. 3B.

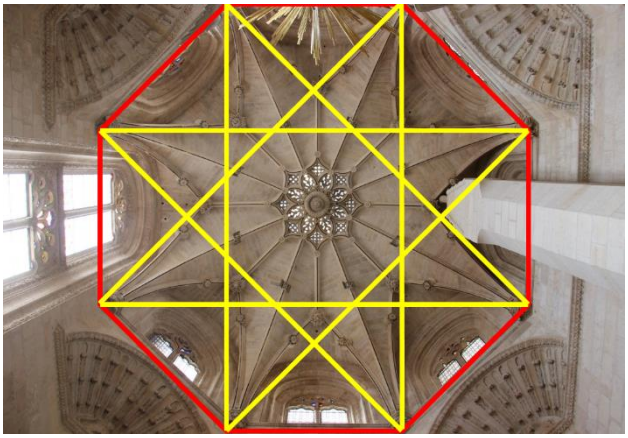


Fig 3A. Polígono estrellado 8/3

Fig 3B. Estrella (dos cuadrados yuxtapuestos)

3.3. *Vesica piscis*

Esta simbólica configuración, también denominada *mandorla* o *almendra*, es la región común a dos círculos en los que el centro de cada uno es un punto perteneciente a la circunferencia del otro.

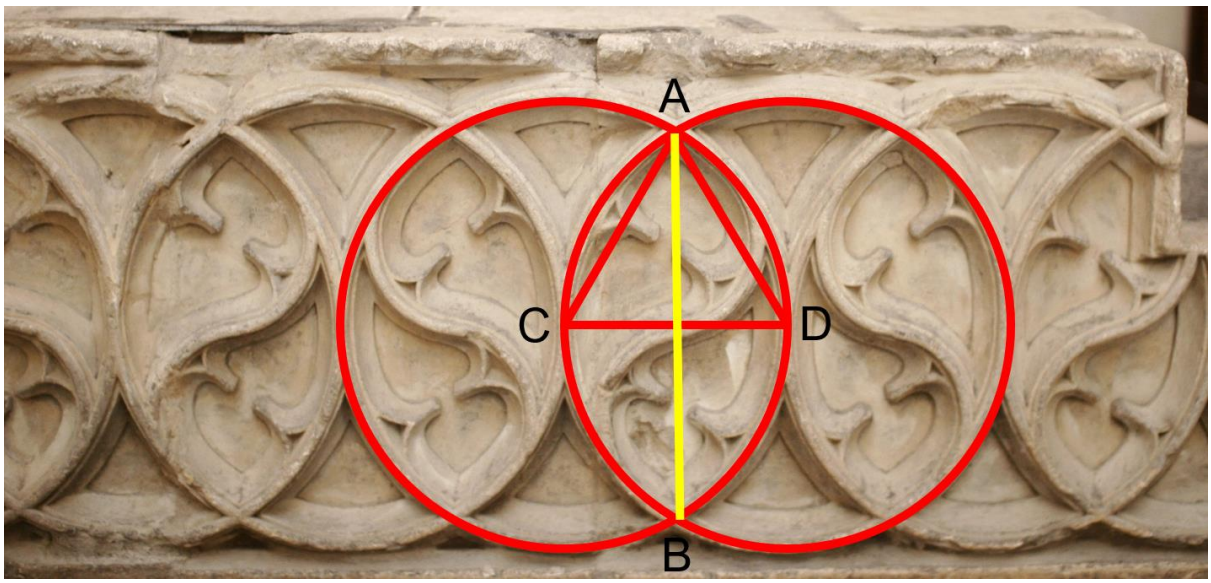


Fig 4. Modelo geométrico de la *vesica piscis*

Como puede verse en el modelo geométrico de la Fig. 4, perteneciente a un friso situado en la capilla de los Condestables, el patrón dinámico asociado es $\sqrt{3}$, que representa la razón $\frac{AB}{CD}$; es decir que $\frac{AB}{CD} = \sqrt{3}$. En el caso en que el radio de las circunferencias sea la unidad; es decir, que $CD = 1$, entonces $AB = \sqrt{3}$. Es interesante resaltar el simbolismo de la *vesica piscis* en los inicios del cristianismo, y su utilización en otros elementos de la Catedral: como elemento decorativo de algunos arcos de la capilla de los Condestables, en el altar de la capilla Mayor y en el situado en la capilla de San Nicolás. Por último, señalar que la mitad superior de la *vesica piscis* coincide, simbólicamente, con el arco ojival equilátero, estando esta configuración en la raíz y origen del arco ojival elemental.

3.4. Triángulo sublime o áureo

El triángulo sublime se puede obtener a partir de dos configuraciones geométricas: a partir de un pentágono regular o desde un decágono regular.

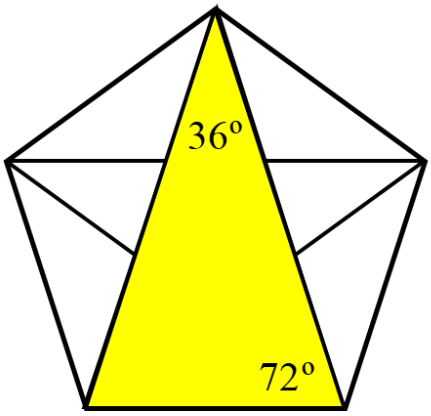


Fig 5A. Triángulo sublime en pentágono regular

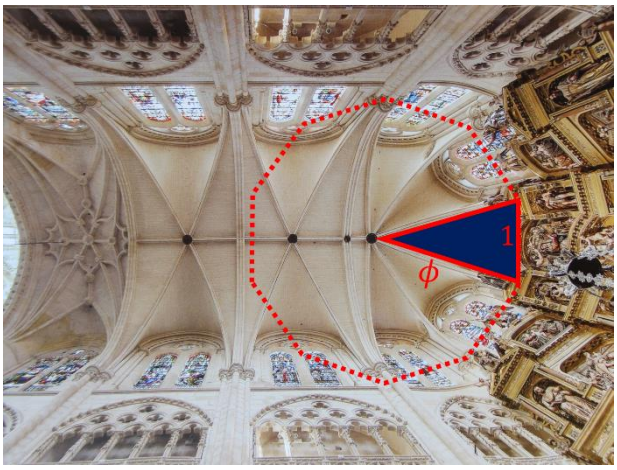


Fig 5B. Triángulo sublime en decágono regular

En el primero de los casos, en un pentágono regular, se obtiene al trazar las diagonales y considerar el triángulo formado un lado del pentágono y las dos diagonales que, partiendo de los extremos del lado considerado, confluyen en un mismo vértice (Fig. 5A). Esta es la forma más conocida, ya que interviene la estrella pitagórica, símbolo de la Hermandad, formada por las diagonales del pentágono regular. El ángulo de la base es 72° y el desigual 36°. Además la razón entre los lados distintos es el patrón dinámico más famoso: la proporción áurea, $\emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

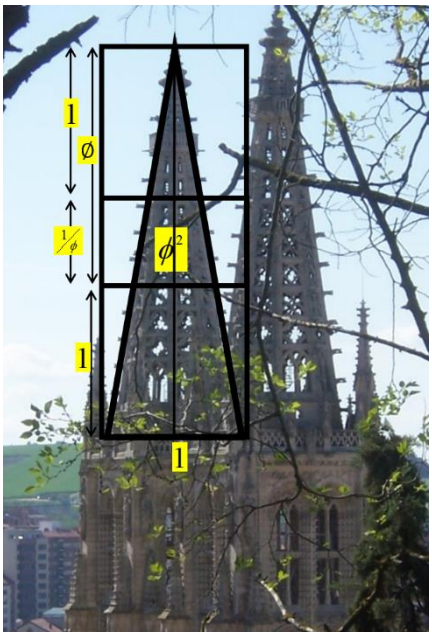
En el segundo de los casos, en un decágono regular, es el triángulo isósceles que se obtiene al unir el centro del polígono con dos vértices consecutivos. En la Fig 5B, de la parte alta de la capilla Mayor de la Catedral, se observa que los ventanales de la cabecera forman cinco lados consecutivos de un decágono regular, por lo que los triángulos que se forman con un vértice en el centro del decágono son sublimes o áureos.

3.5. Triángulo dorado

El triángulo dorado es el modelo geométrico que se obtiene a partir de dos rectángulos áureos que comparten una región rectangular que también es un rectángulo áureo. En la Fig. 6 se observa que las agujas de la Catedral responden,

con bastante exactitud, a esta configuración geométrica. Para profundizar en esta cuestión puede acudirse a De la Fuente Martínez y otros (2021, p. 124-126 y 134-140).

En ella, tomando como medidas de los lados de los rectángulos 1 y ∅, teniendo en cuenta las propiedades de la proporción áurea:



$$1+\frac{1}{\emptyset}=\emptyset \quad \text{y} \quad 1+\emptyset=\emptyset^2$$

Fig 6. Triángulo Dorado o de Calvimont

Como se puede ver en la fig 6, la razón entre la altura del triángulo y su base es $\emptyset^2$, que es la propiedad que lo define y caracteriza.

3.6. Un arco singular

El estudio matemático de los arcos constituye una fuente inmejorable de patrones dinámicos, algunos conocidos y otros no tanto. Para un tratamiento didáctico de arcos elementales puede consultarse ESTALMAT (2009, p. 75-85).

Con el objeto de visualizar la potencia del estudio matemático en arcos más complejos, se presenta, a continuación, uno de entre los muchos que atesora la Catedral:

Fig 7A. Arco singular de la nave central

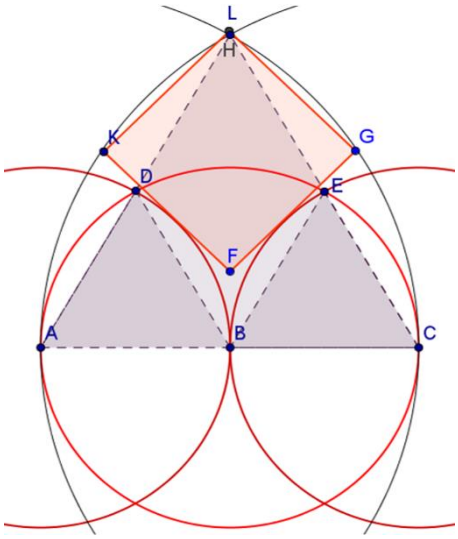


Fig 7B. Modelo geométrico del arco

El primero está situado en la nave central y puede contemplarse en la Fig 7A. Su singularidad radica en el cuadrado que el artista ha insertado en el interior del arco. En el modelo geométrico de la Fig 7B se han señalado los puntos más importantes del mismo.

La observación del arco lleva a sensaciones de tirantez, presión, falta de espacio, tensión entre las líneas curvas del arco y las rectas del cuadrado, etc. El estudio matemático posterior, fijando $B(0,0)$, $A(-2,0)$, $C(2,0)$, $H = L$ y suponiendo que los triángulos ABD, BCE y ACL son equiláteros, revela los patrones que intervienen: habitualmente, en los puntos relacionados con triángulos equiláteros aparece $\sqrt{3}$ y en los conectados a cuadrados $\sqrt{2}$. Por ejemplo, el vértice *F* del cuadrado es $F\left(0,\ 2(\sqrt{2}-1)\right)$, donde aparece $\sqrt{2}-1$, inverso del número de plata, $\theta = 1+\sqrt{2}$, y los vértices *D* y *E* de los triángulos son $D(-1\ ,\ \sqrt{3})$, $E(1\ ,\ \sqrt{3})$. Lo más singular de este arco son las coordenadas de los vértices *G* y *K*:

$$K(-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+\sqrt{3}-1)$$

$$G(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1,\ \sqrt{2}+\sqrt{3}-1)$$

En ellas aparecen combinados (en sumas o restas) $\theta = 1+\sqrt{2}$, el número de plata, y $\tau = \sqrt{3}+1$, el número de platino, compartiendo el valor 1, común a ambos. Podría intuirse, por ello, que hay una tensión entre ambos por el hecho de compartir el 1. ¿Esto explicaría la sensación de presión, tensión, desencaje, que transmite globalmente este arco? Ghyka (1968, p. 102) lo denomina *enlace orgánico* o *concatenación,* caracterizado porque contribuye, de una manera más patente, a dar a la composición un carácter *orgánico*, y, en opinión del que escribe, a generar sensaciones estéticas de diferentes tipos, según el caso: movimiento, simetría, dinamismo, tensión, equilibrio estático o dinámico, placidez, etc.

Para un desarrollo más minucioso de los resultados mostrados, o profundizar en el estudio de otros arcos complejos, en que aparecen patrones menos habituales y enlaces orgánicos entre ellos, como $\sqrt{21} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{7}$; $\sqrt{159} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{53}$ y $\sqrt{4929} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{53}\cdot\sqrt{31}$, se puede acudir a a De la Fuente Martínez y otros (2021, p. 171-228).

4. Ritmos de armonía

En primer lugar es necesario aclarar el concepto de ritmo en el contexto artístico-matemático. A este respecto Ghyka (1968, p. 42) lo expone con claridad:

Pensando en las nociones de número, razón y proporción hemos llegado del modo más natural a la noción de ritmo: periodicidad o recurrencia en el tiempo o en el espacio, que fluye orgánicamente de una cadena de acordes o de proporciones.

Ghyka plantea que el ritmo fluye orgánicamente a partir de una recurrencia de acordes (en el contexto musical) o de proporciones en el espacio (en el contexto artístico bidimensional o tridimensional); es decir, la repetición periódica o recurrente (por medio de sucesiones, descomposiciones, semejanzas, movimientos, etc.) de concordancias entre magnitudes (razones, proporciones, patrones dinámicos, etc.), con los criterios o condiciones que el artista establezca, da lugar a cambios y transformaciones. Las leyes o criterios que rigen esos cambios conforman las bases

del ritmo que se percibe, haciendo que tome forma la *significación interior* de la obra artística.

Por otra parte, aunque no hay principio fundamental para el diseño satisfactorio, una de las ideas más atractivas utilizadas para generar sensaciones estéticas, en la construcción de las catedrales, ha sido la repetición de figuras geométricas similares, lo que genera un *ritmo arquitectónico* (Pedoe, 1976).

En la Catedral hay ritmos generados por:

- Modificaciones o transformaciones (crecimiento, igualdad o decrecimiento) de una forma o figura inicial. El caso de la igualdad suele concretarse, por ejemplo, en frisos, muy abundantes en capillas, rejería, etc. En los otros casos, las variaciones se manifiestan en cambios de tamaño, manteniendo relaciones de analogía, semejanza, etc. con la figura primera. Estos cambios generan recurrencias regidas por patrones dinámicos que juegan el papel de invariantes y que contribuyen a generar también distintos *ritmos*.

- Descomposición de una figura por subdivisión en fragmentos, de forma que entre ellos y entre estos y el conjunto se mantienen las mismas relaciones de proporcionalidad y analogía. Este tipo de cualidades son características de la *simetría*, en el sentido clásico de su acepción, y de la *euritmia*:

La simetría consiste en el acorde de medidas entre los diversos elementos de la obra y entre estos elementos separados y el conjunto. Como en el cuerpo humano, surge de la proporción –la que los griegos llaman analogía– y está reglamentada por el módulo, el marco de medida común –que los griegos llaman el número–. Cuando cada parte importante del edificio está, además, convenientemente proporcionada en razón al acorde entre lo alto y lo ancho, entre lo ancho y lo profundo, y cuando todas estas partes tienen también su lugar en la simetría total del edificio, obtenemos la euritmia.

La euritmia aparece cuando esta simetría se obtiene por el encadenamiento continuo de las proporciones y la analogía recurrente.

Las reflexiones anteriores, de Vitruvio[1] (1997, libro 1, p.10), ilustran el sentido clásico y primario de la simetría, el carácter orgánico de las construcciones, el significado de la *euritmia* y su relación con la idea de *ritmo*.

Concretando la idea, un primer ejemplo de ritmo puede ser el ritmo áureo; es decir, el que está regido por la proporción áurea, que se concreta en la sucesión de las potencias sucesivas del número de oro:

$$1, \emptyset, \emptyset^2, \dots, \emptyset^n, \dots$$

También puede venir dado por la misma con exponentes enteros:

$$1, \emptyset^{-1}, \emptyset^{-2}, \dots, \emptyset^{-n}, \dots$$

La de exponentes naturales para los cambios con aumento o crecimiento y la de exponentes enteros para las variaciones con disminución de decrecimiento. Como se verá en los ejemplos, todo depende de la unidad de medida tomada como referencia.

Observando la primera de ellas, esta sucesión tiene propiedades notables: a) multiplicativas, ya que es una progresión geométrica de razón $\emptyset$, de crecimiento exponencial; b) sumativas o aritméticas, pues cada término (a partir del tercero) es igual a la suma de los dos anteriores; es decir, que si $n \geq 3$ se cumple:

$$\emptyset^n = \emptyset^{n-1} + \emptyset^{n-2}$$

Esta última propiedad es común a la *sucesión de Fibonacci*:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

en esta se cumple que si $n \geq 3$ entonces $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, como en la anterior, y además $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \emptyset$; es decir, que la sucesión de Fibonacci se acerca, asintóticamente, a la del ritmo áureo.

[1] Vitruvio. *Los diez libros de Arquitectura. Libro* I, p. 10

En las líneas que siguen se mostrarán también otros ritmos de armonía, que se identificarán en algunos recintos o motivos de la Catedral.

4.1. La Cabecera

El conjunto formado por la capilla Mayor, girola y capillas radiales originales configuran un espacio poligonal abierto, de cinco lados, que se puede completar imaginariamente, para hacerlo decagonal (en la Fig 5B se puede ver el formado por la capilla Mayor). Utilizando como base los planos (Fig 8A) de Karge (1995), se puede visualizar el modelo geométrico (Fig. 8B) consistente en tres decágonos regulares anidados, con decágonos estrellados 10/3 en dos de ellos, y los *triángulos áureos* o *sublimes* de cada decágono regular.

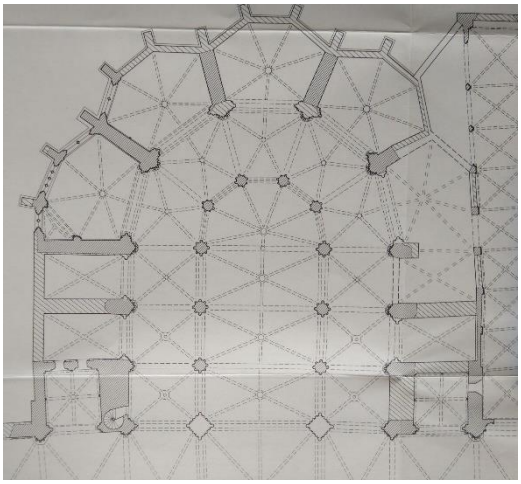


Fig 8A. Capilla Mayor, Girola y capillas radiales

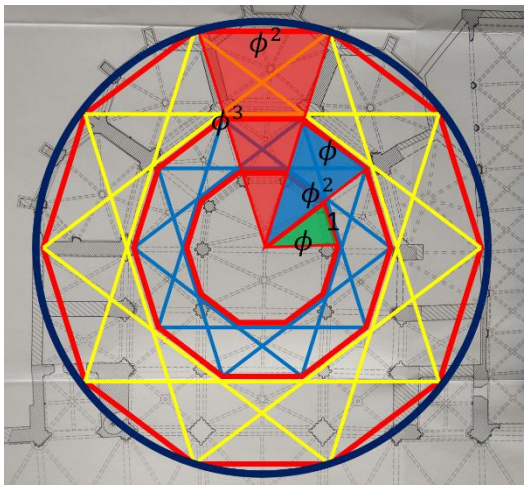


Fig 8B. Modelo geométrico y ritmo de la Cabecera

El análisis de las dimensiones permite confirmar la presencia de varias potencias sucesivas de ∅. Concretamente, considerando como unidad de medida el lado del decágono regular asociado a la capilla Mayor (las paredes donde se sitúa el retablo), las longitudes de varios de los elementos del conjunto se configuran en varios términos de la sucesión:

$$1, \emptyset, \emptyset^2, \emptyset^3$$

Por tanto, el ritmo de armonía de la Cabecera es áureo, conteniendo cuatro potencias sucesivas de ∅.

4.2. Rosetón del Sarmental

Fig 9A. Vista exterior del rosetón del Sarmental

Fig 9B. Modelo geométrico y ritmo de armonía.

Este rosetón (Fig. 9A), situado en la fachada sur de la Catedral, es un grupo de Leonardo de orden 10. En el modelo geométrico de la Fig. 9B se pueden apreciar los cuatro decágonos regulares y los decágonos estrellados, 10/3 anidados, que dan lugar a triángulos sublimes o áureos. En ellos se cumple:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{CD}{EF} = \frac{EF}{GH} = \emptyset$$

Tomando como unidad $GH = 1$, se obtienen cinco potencias sucesivas de $\emptyset$:

$$1, \quad \emptyset, \quad \emptyset^2, \quad \emptyset^3, \quad \emptyset^4$$

Por tanto, el ritmo de armonía del rosetón es áureo.

4.3. Bóveda calada del Cimborrio

El Cimborrio renacentista (Fig. 10A) es el verdadero centro cosmológico de la Catedral y el ritmo de su bóveda calada plana viene dado por la manera en que varían los octógonos regulares y estrellados anidados que la configuran (en la Fig. 10B se pueden ver junto con el corte sagrado). En la Fig. 2 del punto 3.1. se aprecia esta última configuración, que permite el paso de la planta cuadrada al octógono.

El análisis matemático del modelo de la Fig. 11 permite descubrir que el ritmo de los lados, $EF, NO, WZ, \ldots$, de los octógonos regulares queda caracterizado por la progresión geométrica:

Fig 10A. Bóveda calada del Cimborrio

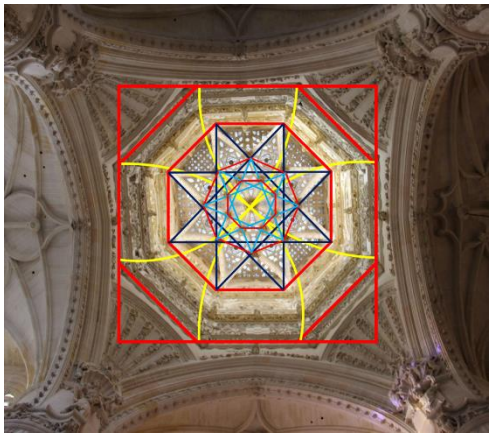


Fig 10B. Modelo geométrico: corte sagrado y octógonos estrellados

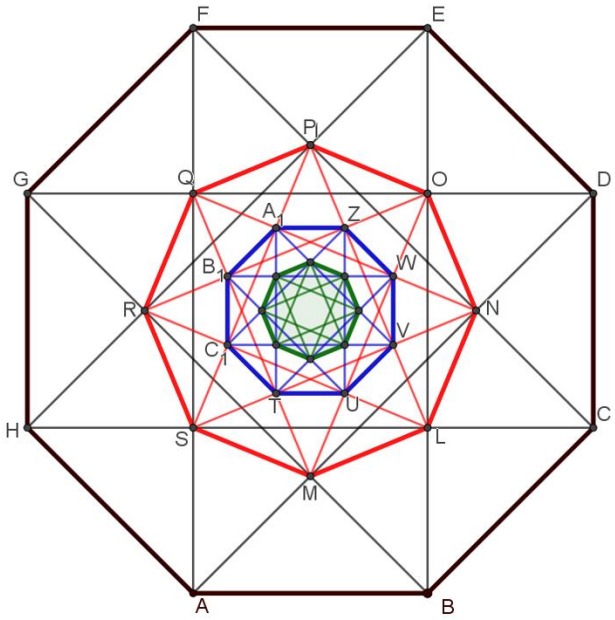


Fig 11. Modelo: octógonos regulares y estrellados

$$l, \quad l \cdot \frac{c}{\theta}, \quad l \cdot \left(\frac{c}{\theta}\right)^2, \; l \cdot \left(\frac{c}{\theta}\right)^3, \ldots$$

donde l es el lado EF del octógono regular exterior, $c = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ es la proporción cordobesa, y $\theta = 1 + \sqrt{2}$ es el número de plata. Si se considera $EF = 1$, unidad de medida, la sucesión anterior queda:

$$1, \quad \frac{c}{\theta}, \quad \left(\frac{c}{\theta}\right)^2, \quad \left(\frac{c}{\theta}\right)^3, \ldots$$

Para un desarrollo más detallado de estos resultados, puede verse en De la Fuente Martínez y otros (2021, p. 297-305).

En cuanto al ritmo de armonía de los lados, $CF, OR, UZ, \ldots$, de los octógonos estrellados, sus longitudes siguen la progresión:

$$l \cdot \theta, \quad l \cdot c, \quad l \cdot \frac{c^2}{\theta}, \quad l \cdot \frac{c^3}{\theta^2}, \ldots$$

En el caso en que se considere que $l = 1$ resulta:

$$\theta, \quad c, \quad \frac{c^2}{\theta}, \quad \frac{c^3}{\theta^2}, \ldots$$

La razón de las progresiones es $\frac{c}{\theta}$, que constituye un *enlace orgánico* de estos dos patrones dinámicos, la proporción cordobesa y el número de plata. Estas sucesiones explican y justifican, matemáticamente, los *ecos mudéjares* del Cimborrio, una idea muy comentada por los expertos en arte. También son ejes vertebradores de las sensaciones de dinamismo, simetría, armonía y belleza que transmite esta maravillosa bóveda calada.

4.4. Escalera Dorada

El estudio de la Escalera Dorada (Fig. 12A), obra maestra del Renacimiento, muestra sorprendentes resultados, uno de los más singulares, sin duda, es el ritmo de armonía, que se obtiene por descomposición de la forma principal, y no por recurrencia y repetición de formas como en los ritmos anteriormente estudiados.

Fig 12A. Escalera Dorada

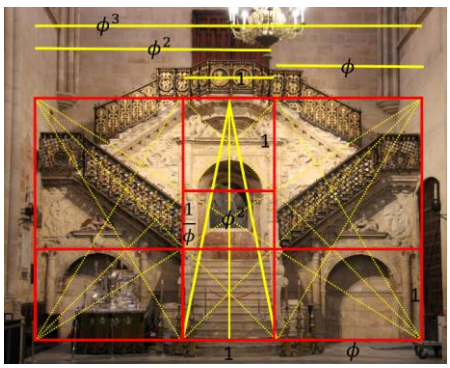


Fig 12B. Modelo geométrico y ritmo de armonía

La escalera responde a la configuración de un gran rectángulo áureo (Fig. 12B). Utilizando el *método de las diagonales* de Hambidge, para descomponer armoniosamente el rectángulo, se obtiene que las partes resultantes varian siguiendo el ritmo áureo de armonía; concretamente, tomando como unidad de medida la anchura del primer tramo de escalones, se pueden observar (Fig. 12B) cinco potencias sucesivas del número de oro, que corresponden a distintas partes de esta impresionante construcción:

$$\frac{1}{\Phi}, \qquad 1, \qquad \Phi, \qquad \Phi^2, \qquad \Phi^3$$

Este resultado da una idea de la *armonía* y *simetría* (en sentido clásico) de esta escalera, así como de los *acordes* (en el sentido de *concordancias*) que relacionan unos elementos (partes de ella) con otros, produciendo un ritmo áureo característico del Renacimiento. En De la Fuente Martínez y otros (2021, p. 349-360) pueden consultarse otros aspectos matemáticos de la Escalera Dorada.

5. CONCLUSIONES

El análisis de los resultados presentados en la Comunicación, una pequeña muestra de los *Tesoros Matemáticos de la Catedral de Burgos,* permite extraer las siguientes conclusiones:

- El estudio ha permitido aflorar el inmenso patrimonio matemático de la Catedral, intangible, oculto y casi ignorado hasta ahora. Este patrimonio constituye una forma más de acercarse y admirar la Seo, junto con los enfoques histórico, artístico, religioso y social, y debe ser puesto en valor, para conocimiento y disfrute de la sociedad.

- Los patrones dinámicos y los ritmos de armonía contribuyen, de manera inequívoca, a que los elementos observados, por el visitante sensible, susciten en él *resonancias afectivas o lógicas* (de belleza, armonía, simetría, euritmia, etc.) que eran unos de los objetivos perseguidos por los artistas con sus creaciones. Además también ayudan a descubrir, de una manera argumentada, la *significación interna* de la Catedral, reconociendo que esta significación se basa en *leyes objetivas de la*

Aritmética y la Geometría y no tanto en *intenciones subjetivas*, *sentimiento religioso o afectividad del artista.*

- El análisis matemático de la Catedral tiene gran aprovechamiento didáctico en todos los niveles educativos. Es una forma de que el profesorado de matemáticas acerque a sus estudiantes a contextos de la realidad que contribuyen a que sean conscientes del inmenso valor y potencia de esta ciencia.

- Los pasos del proceso de *matematización vertical* constituyen una metodología válida y eficaz para el estudio matemático del patrimonio en general, no sólo de la Catedral de Burgos.

6. BIBLIOGRAFÍA

- Blum, W. (2005). "Filling Up"–the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling task. *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, p. 17-21. San Feliu de Guixols.
- De la Fuente Martínez, C y otros (2021) *Tesoros Matemáticos de la catedral de Burgos.* Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán,* Burgos.
- ESTALMAT, Grupo (2009). *Matemáticas en la Catedral de Burgos.* Caja Círculo, Burgos
- Ghyka, M. C. (1968) *El Número de Oro*. *Los ritmos.* Poseidón, Barcelona
- Jámblico (1991) *Vida Pitagórica*. Torrejón de Ardoz. Etnos, Madrid.
- Karge, H. (1995). *La Catedral de Burgos y la Arquitectura del siglo XIII en Francia y España*. Junta de Castilla y León. Consejería de Cultura y Turismo, Valladolid
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. En Gagatsis, A., Papastavridis, S. (Edit), *3er Mediterranean Conference on Mathematical Education.* Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society, p. 115-124. Atenas, Grecia.
- OCDE (2004). *Marcos Teóricos PISA 2003.* Ed. MEC-inecse, Madrid.
- Odifredi, P. (2007). *Pluma, pincel y batuta. Las tres envidias del matemático.* Alianza Editorial, Madrid.

- Vitruvio Polion, M. (1997). *Los diez libros de Arquitectura*. Alianza Editorial, Madrid.

PoC1 En busca de la conexión perdida

Lluís Mora Cañellas
lmora1@xtec.cat
INS Cabrils

Núcleo temático: Conexiones

Modalidad: Ponencia

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (Grado Ed. Primaria y Máster profesorado)

RESUMEN

Las conexiones son puentes desde donde se realizan enlaces entre conceptos o ideas, enlaces que aportan continuidad y coherencia. ¿Qué es una conexión matemática? ¿Por qué motivo son valiosas? ¿Cómo podemos estimular a nuestros estudiantes a buscarlas?

Estas y otras son preguntas a las que intentaremos dar respuesta en esta búsqueda de conexiones. Nuestro recorrido establecerá, inicialmente, relaciones entre bloques de contenido matemático. Explorará las afinidades que podemos encontrar entre materias de un nivel educativo y entre niveles educativos. Y, finalmente, entrelaza ejemplos de los ámbitos que forman el acrónimo STE(A)M.

Números, Polígonos, Música, Lengua, Fotografía, Medida, Tiempo y Biología serán algunas de las paradas que efectuaremos en nuestra exploración.

1. Introducción

Tenemos acceso a mucha información, pero es fundamental relacionar esta información para generar conocimiento. Y estas relaciones son las que nos permitirán generar nuevo conocimiento. Por tanto, las conexiones, relaciones, son muy relevantes para el aprendizaje de las matemáticas.

En esta ponencia hablaremos, sobre todo, de dos aspectos relacionados con las conexiones, ¿Qué son?, y ¿Dónde podemos encontrarlas?

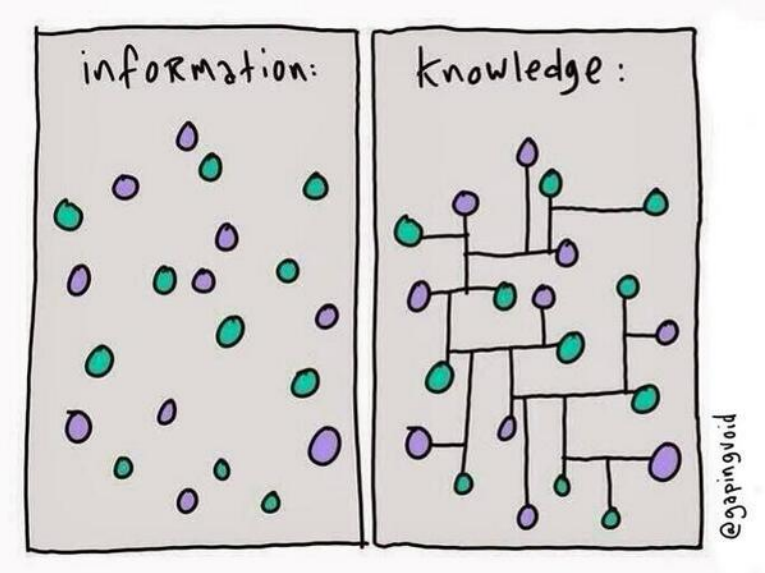


Imagen 1: Información y conocimiento

2 ¿Qué son?

Actualmente, hemos recibido o estamos a la espera de recibir el nuevo currículum, LOMLOE. Esta ley muestra, en el desarrollo del currículo de matemáticas, aspectos relacionados con este proceso matemático. Pero no es la primera referencia, ni el punto de partida de este concepto. Vamos a hacer un pequeño recorrido sobre ideas y referentes en educación matemática que han mencionado estas ideas y trabajado sobre ellas.

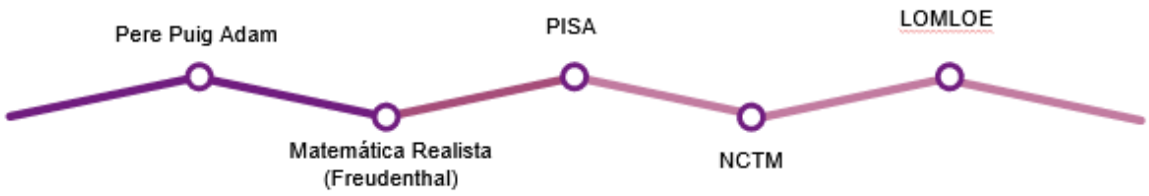


Imagen 2: Ideas y referentes sobre educación matemática

2.1 Decálogo de Pere Puig Adam

En el año 1955 Pere Puig Adam nos lega un decálogo dirigido a docentes, 10 ideas sobre la enseñanza de las Matemáticas. También introduce algunas ideas específicas sobre el tipo de trabajo que deben realizar los alumnos. Este decálogo lo podemos encontrar, comentado, por Claudi Alsina en el nº 34 de la revista SUMA, revista de la FESPM.

Imagen 3: Pere Puig Adam

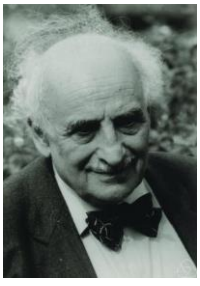
En el año 2007 Pilar Bayer, Catedrática emérita de la Universitat de Barcelona, recoge este decálogo y lo amplía con ejemplos y situaciones adaptadas a cada uno de los 10 puntos.

Hay dos puntos que nos interesan especialmente, el segundo y el tercero:

> 2.- No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución
>
> 3.- Presentar la matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.

Ideas importantes: Uso de materiales, matematización, y problemas prácticos, procesos históricos e interdisciplinariedad

2.2 Matemática realista. Hans Freudenthal



En la década de los 70, en los Países Bajos, Hans Freudenthal trabaja en la línea didáctica llamada Educación Matemática Realista, en contraposición a la Matemática Moderna y al enfoque mecanicista que se desarrollaba en las escuelas de este país. Establece 6 principios de actividad:

Imagen 3: Hans Freudenthal

- **De actividad:** Aprender haciendo
- **De realidad:** Conexión, mundo real y con lo realizable por los alumnos, Matematización y aprendizaje significativo.
- **De reinvención:** Sistematizar y organizar el sentido común
- **De niveles:** Matemática horizontal y vertical. Matematización progresiva hacia la abstracción
- **De interacción:** Actividad social
- **De interconexión:** Establecer conexiones tan pronto, tan fuertemente y dedicarle tanto tiempo como sea posible.

Dos de estos principios, realidad e interconexión, tienen especial importancia en la ponencia que estamos desarrollando: realidad e interconexión. La conexión con el mundo real, matematización de situaciones, y enlace con los conocimientos previos de los estudiantes, aquello que pueden realizar, abriendo la puerta al aprendizaje significativo, es una manera de conectar el conocimiento matemático con las capacidades de los estudiantes. Aspecto que ya había desarrollado también Pere Puig Adam en uno de los puntos de su decálogo.

Y recordar la frase, es necesario establecer conexiones tan pronto como sea posible.

2.3 Competencia matemática (PISA). Mogens Niss

A finales de la década de los 90, Mogens Niss habla del concepto de competencia matemática, relacionándolo con la idea del significado de hacer matemáticas y como

se debería tener en cuenta en un currículum de Matemáticas. Establece dos bloques importantes:

1) Formular preguntas y responderlas sobre las matemáticas y con matemáticas

Pensar matemáticamente

Formular y resolver problemas

Construir modelos

Razonar matemáticamente

2) Habilidad para tratar con el lenguaje y las herramientas matemáticas

Representar

Usar operaciones y lenguaje simbólico

Comunicar

Usar materials y herramientas de apoyo

Todas las ideas son interesantes, pero tenemos algunas que ya han aparecido en este recorrido: Modelización y uso de materiales y herramientas.

Este modelo de competencia matemática se utiliza en él, entonces inicial, estudio PISA, combinándolo con las actividades que deben realizar los estudiantes. En el modelo inicial estas actividades se clasifican en 3 tipos: reproducción, conexión y reflexión. Esta clasificación muestra una organización que va de menos complejidad a más complejidad. Y por complejidad podemos entender que estamos relacionando ideas y conceptos matemáticos con las decisiones que deben tomar los alumnos. Combinando los conceptos matemáticos con las acciones que deben desarrollar los estudiantes.

2.4 Procesos matemáticos. NCTM (2000)

En paralelo en el tiempo, el National Council of teachers of Mathematics, publica el libro: Principios y estándares para la Educación Matemática, que publica en España la Sociedad Thales de educación matemática. En este documento, y sintetizando, introduce o amplía la idea de procesos matemáticos, necesarios para entender la

idea de que significa hacer matemáticas. Para ser capaz de hacer matemáticas, los estudiantes deben ser capaces de:

Resolver problemas

Razonar y demostrar

Conectar ideas y conceptos

Comunicar

Representar

Si nos centramos en la que nos afecta en estos momentos, conexión, se focaliza en tres aspectos sobre los que los estudiantes deben ser capaces:

Reconocer y usar las relaciones entre ideas matemáticas

Comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras

Reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos

A mi entender, hay una pregunta fundamental que nos debemos hacer y que debemos hacer a nuestros estudiantes, a la cual, juntos, debemos hallar una respuesta:

> ¿En qué se parece este problema (reto) con los que has estudiado hasta ahora? ¿En qué contextos (situaciones), matemáticos o no, han aparecido?

Por ejemplo, si afrontamos el reto de las “Torres de Hanói”, ¿Cuántos movimientos debemos realizar, como mínimo, para superar el reto?

Imagen 4: Torres de Hanoi

¿Qué relación tiene el reto de las Torres de Hanói con el problema Doblar papel y responder a la pregunta ¿Cuántas crestas y valles hay después de 10 dobleces?

Imagen 5: Dobleces en una tira de papel

2.5 Conexiones. LOMLOE (2020)

Y llegamos al momento actual, con una nueva ley educativa y nueva estructura curricular. Ahora el foco se pone en la competencia matemática en lugar de los contenidos, un cambio de enfoque donde los procesos matemáticos, y las conexiones tienen un peso importante dado que los procesos matemáticos aparecen en los criterios de evaluación específicos de las materias.

El proceso aparece en los criterios 5 y 6 en los siguientes términos:

5. **Reconocer** y **utilizar** conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, **interconectando** conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.

6. **Identificar** las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, **interrelacionando** conceptos y procedimientos, para **aplicarlos** en situaciones diversas

Para completar el criterio, los estudiantes deberán reconocer, usar, identificar, interrelacionar y aplicar sus conocimientos matemáticos, (herramientas, estrategias, métodos, ideas y conceptos) en las situaciones que se trabajen en el curso correspondiente.

Para finalizar este apartado, podemos decir que esta idea de competencia representa un resumen de un trabajo realizado desde hace muchos años en el trabajo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

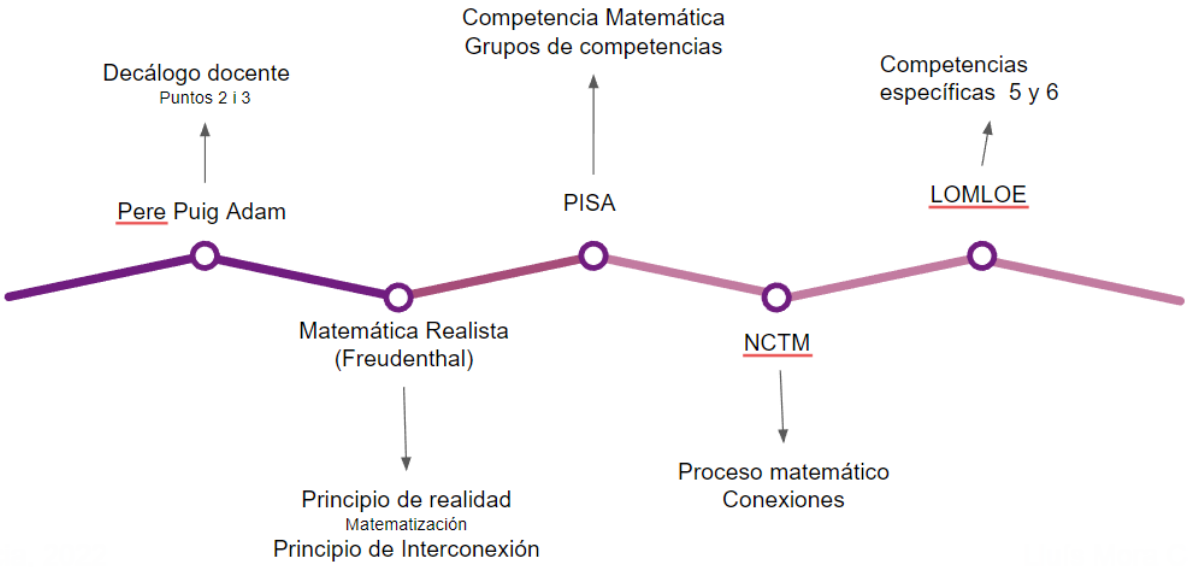


Imagen 5: línea temporal, conexiones

3. ¿Dónde?

Una vez localizados los referentes y concretadas que son, nos debemos plantear dónde podemos encontrarlas. En esta ponencia nos centraremos en 4 aspectos donde hacerlas visibles y poder trabajarlas, para ello mostraremos algunos ejemplos de ellos. Estos son:

3.1 Entre ideas y conceptos matemáticos

3.2 Entre materias diferentes

3.3 Entre niveles educativos

3.4 STE(A)M

Imagen 6: Conexiones

3.1 Entre ideas y conceptos matemáticos

Los números poligonales, o números con forma, nos muestran un ejemplo claro de las conexiones que existen entre distintos bloques de contenido matemático.

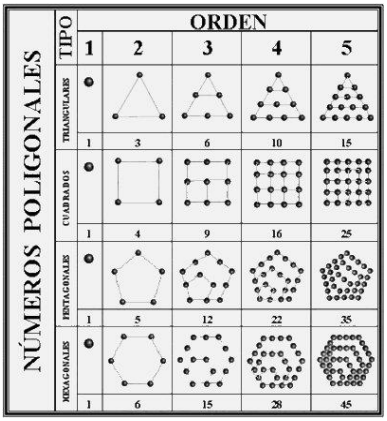
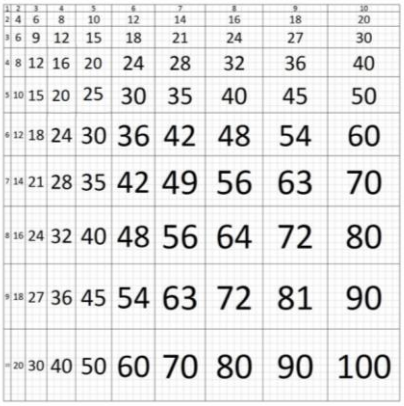


Imagen 7: Número poligonales

La imagen, una representación, muestra claramente la relación entre la Geometría y la Numeración. Y profundizando un poco más en la actividad nos aparece una conexión con el álgebra. ¿Cómo profundizamos en esta actividad? ¡Con buenas preguntas! Las preguntas son la llave que nos abrirá la puerta a aumentar la complejidad en las actividades que proponemos al alumnado.

1. ¿Qué vemos en la imagen?
2. ¿Cuál es el número siguiente en cada caso?
3. ¿Cuál es el número que ocupa la posición número 10?
4. ¿Puedes encontrar un modo de encontrar qué número está en el puesto número 100 en cada caso?
5. ¿Y en la 1000?
6. ¿Qué relaciones puedes encontrar en la tabla anterior?
7. ¿Existe alguna fórmula que relacione los diferentes conjuntos de números poligonales?

Esta manera de trabajar y estos ejemplos los podemos encontrar en otros niveles educativos. Un ejemplo puede ser útil para ampliar el aprendizaje de las tablas de multiplicar.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Imagen 8: Tabla de multiplicar

¿En qué se parecen las dos imágenes anteriores? Son situaciones análogas, relacionan los mismos bloques de contenido y, gracias a las preguntas que formulamos, podemos ir aumentando la complejidad de la situación. Y podemos introducir una conexión que no he mencionado en la entrada de este capítulo, la manera de trabajar. Una manera matemática de trabajar a partir de preguntas.

3. 2 Entre materias diferentes

Hay relaciones entre materias que podemos establecer de manera inmediata y que tenemos en la mente, Matemáticas con Física, Química o Tecnología. En el último apartado de esta sección haremos algún comentario sobre estas relaciones. Ahora vamos a centrarnos en una relación que enriquece las actividades que realizamos en clase y se adapta bien al nuevo currículo. Es una actividad que relaciona las Matemáticas y la Lengua.

El punto de partida de esta actividad son los “Microrrelatos Matemáticos” desarrollada e iniciada por Mª Pilar Menoyo @zafainvestiga. Este proyecto consiste en observar el entorno, plasmarlo en una fotografía y generar un microrrelato de 280 caracteres. Dos ideas como podemos ver, usar la fotografía como recurso y utilizar el uso de la lengua en situaciones de aprendizaje. El documento donde explica en detalle esta actividad se encuentra en http://formacionib.org/noticias/?Microrrelatos-

matematicos-en-un-tuit-Una-propuesta-didactica-para-educar-la o si la queremos ver y oír https://youtu.be/CjfrqzW1QcA.

Pero podemos estirar un poco más la actividad, y desdoblarla en dos:

a) #miradamatemàtica
b) #cercamatemàtica

Y establecer objetivos de aprendizaje para las dos materias:

Objetivos Matemáticos	Objetivos Lingüísticos
a) Identificar ideas matemáticas implicadas en una situación b) Buscar o crear situaciones relacionadas con ideas matemáticas concretas c) Traducir situaciones a lenguaje matemático	a) Planificar un escrito de acuerdo con la situación comunicativa y a partir de la generación de ideas y su organización. b) Escribir textos descriptivos y de ficción con adecuación, coherencia, cohesión y corrección lingüística.

Tabla 1: Objetivos de aprendizaje

Esta actividad, que implica el trabajo coordinado de dos materias, se puede organizar de diversas maneras, desde un docente individual de cualquiera de los dos ámbitos o hacerlo secuencial con dos docentes, no necesariamente en la misma aula.

En la imagen inferior podemos ver la estructura que tendría el proyecto

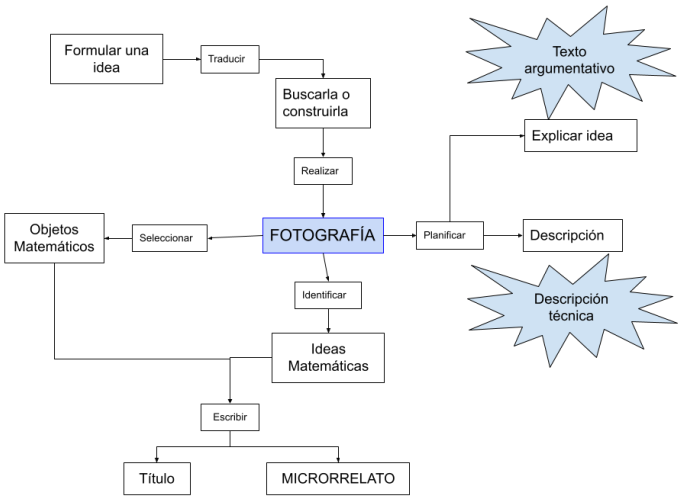
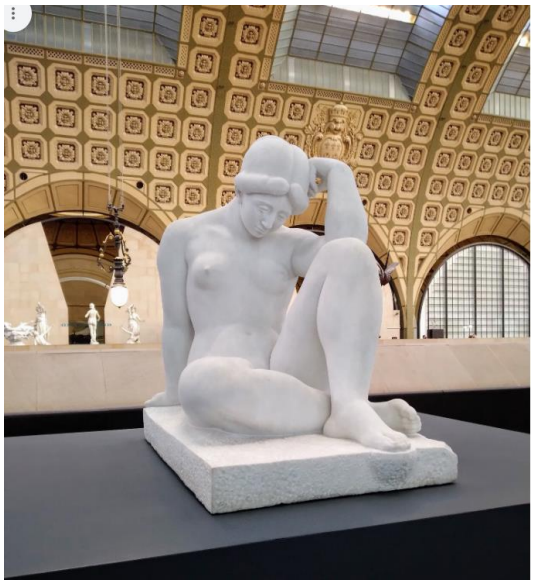


Imagen 9: Estructura del proyecto

Vista la estructura, la mejor manera de visualizar el proyecto y la integración de las materias es con ejemplos de realización por parte de los estudiantes.

#MiradaMatemática

El lunes fuimos de excursión a un museo, me llamó la atención esta escultura de mármol de esta mujer. Está sentada sobre una especie de cubo. Pero si observamos bien, el pie y la mano sobresalen del cubo y ya no es un cubo. ¿Cómo se llamará esta figura?	
Una noche oscura, una silueta negra entra por las rectangulares claraboyas de un museo. La silueta se desliza con facilidad por la pared de cuadrados, similar al patrón de las ramblas de Barcelona, y acaba aterrizando sigilosamente. "¡Eh, tú!", se escucha, pero ya se ha esfumado. ¿Qué debía querer?	
Esta mujer lleva bastante tiempo aquí y todavía no ha descifrado la altura del museo. Ha pensado en buscar una fórmula matemática, así que se ha puesto a pensar. Por último, ha optado por apilar esculturas hasta que lleguen al punto más alto del techo, porque la sabe que la altura de cada una es de	

0,5 m.	
He ido a un museo de la ciudad para mirar si tenía relación con las matemáticas. Lo que más me ha llamado la atención son las figuras geométricas en las ventanas. También se observan octágonos irregulares en las paredes y otras formas en todo el museo. En definitiva, sí que hay mates.	

Tabla 2: Ejemplos de Mirada Matemática

#CercaMatemática

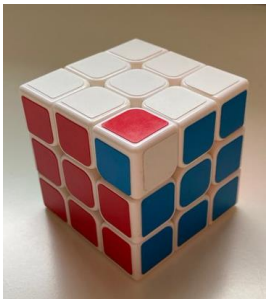
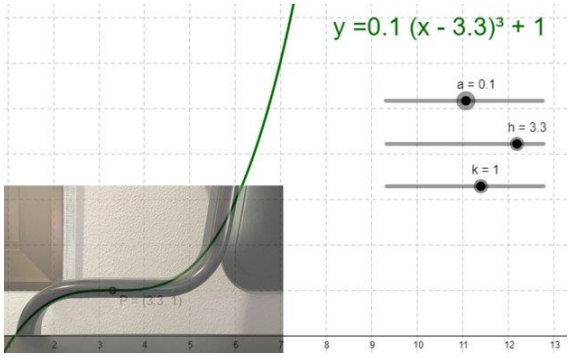
	Los ritmos, aparte de ser figuras geométricas (redondas, rectángulos, líneas rectas...), también son una medida de lo que debe durar cada nota. Los ritmos son también matemáticas. Ej: ¿Cuántas negras caben en una redonda? ¿Y en una blanca?
	Podemos ver un cubo de Rubik incompleto debido a una pieza que está mal posicionada. Este objeto debe completarse siguiendo una pauta de movimientos que lo harán posible
	
	"Dobles" Números naturales, multiplicaciones (El reflejo), divisiones (imagen en dos partes), sumas, fracciones y la simetría.

Tabla 3: Ejemplos de Cerca Matemática

Y para finalizar este apartado solo falta mencionar ejemplos de personas, grupos de trabajo y asociaciones que dedican parte de su valioso tiempo en desarrollar conexiones entre sus áreas de trabajo y la fotografía matemática.

Fotografia Matemática [@matesabeam]	SCPM Luis Balbuena [@SCPMLBalbuenaC]	Fotografia Matemática [ADEMGI]	[FEEMCAT]
[Concurs Fotografia]			

Tabla 4: Fotografía Matemática

3.3 Entre niveles educativos

En este apartado vamos a realizar una viaje en el tiempo, pero no en el tiempo real, lo haremos en el tiempo de aprendizaje, desde educación infantil hasta la ESO o Bachillerato. Y para hacerlo vamos a utilizar un vehículo muy importante, contar. Una de las 6 actividades matemáticas universales según Alan J. Bishop junto con jugar, medir, localizar, orientarse y explicar.

Mostraremos la conexión que tiene esta actividad en las diferentes etapas educativas y que implicaciones puede tener para el diseño de actividades.

La imagen siguiente muestra el viaje que haremos.

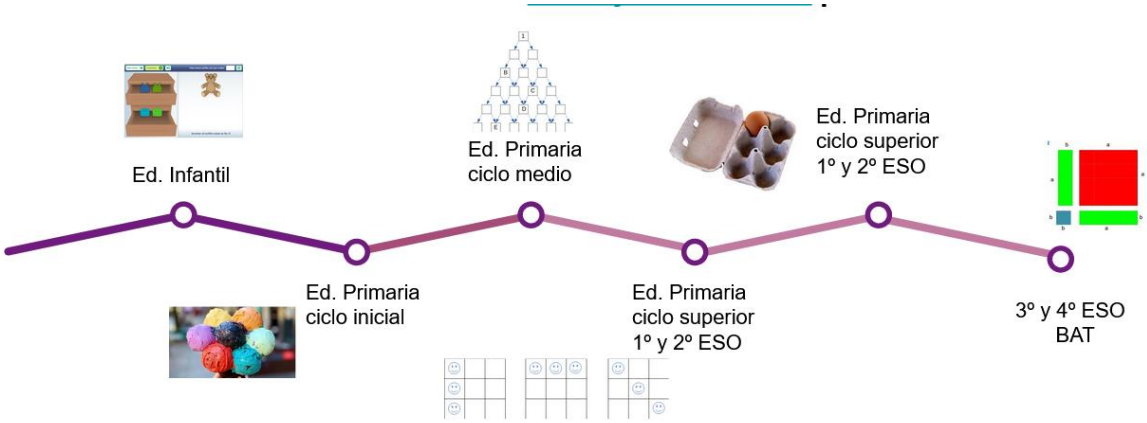


Imagen 10: Contar, un viaje

En la tabla inferior mostramos actividades relacionadas con contar y con la combinatoria que se pueden desarrollar a partir de Educación Infantil (0-6) hasta Bachillerato.

En el desarrollo de estas actividades podemos ver reflejadas muchas de las ideas que hemos mostrado en la primera parte de la ponencia.

Partir de situaciones reales o con proximidad con el mundo social que nos decía Pere Puig Adam. Implican actividad por parte de los estudiantes que puede, debe, ser individual y grupal, intentan establecer procesos sistemáticos y conectan diferentes tipos de conocimientos siguiendo las ideas de Freudenthal. Aumenta la complejidad de las actividades, con la edad de los estudiantes y con la secuencia de las actividades trabajadas. Y en todas aparece reflejada la competencia matemática tal como la formulaba Niss

Y obviamente, aparecen reflejados todos los procesos matemáticos de los que nos hablaba (NCTM, 2000).

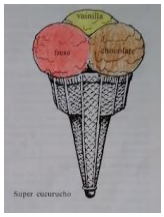
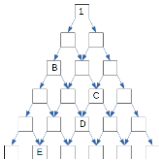
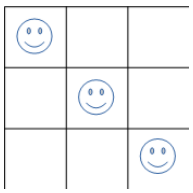
Actividad	**Nivel (A partir de…)**	
¿De cuántas maneras podemos vestir el oso?	Educación Infantil	Hipótesis Estrategias diversas Organizar el trabajo Encontrar solución. ¿Todas?
 ¿Cuántos helados diferentes podemos vender?	Educació Primària Ciclo inicial	¿Cuántos diferentes? Añadimos el precio ¿Y una bola más?
 ¿De cuántas maneras podemos llegar a diferentes puntos?	Educación Primaria Ciclo Medio	Caminos para llegar a B, C, D o E ¿Y una fila más? ¿Y la fila 15?
 Fichas que no formen 3 en raya	Educación Primaria Ciclo Medio y Superior	¿Cuántas fichas sin que haya tres en raya? ¿Y en un tablero 4x4? ¿5x5?
¿De cuántas maneras diferentes podemos llenar una huevera?	Educación Primaria Ciclo superior 1º y 2º ESO	¿Con un huevo, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Y con 0 huevos? ¿Y si caben 7 huevos? ¿En qué se parece al lenguaje Braille?

Tabla 5: Etapas de nuestro viaje matemático

Este tipo de trabajo, que nos lleva a conectar actividades en diversos momentos de las etapas educativas, puede ser una herramienta esencial para el diseño de actividades de aprendizaje, dado que las que aparecen pueden ser actividades iniciales de las que trabajamos en cursos superiores. Y las de cursos superiores se pueden considerar como actividades de ampliación. Importante en este último caso, como dice Antón Aubanell, tener en cuenta de no formalizar antes de tiempo a pesar de avanzar las actividades.

Esta idea nos permite estructurar actividades que conecten los conocimientos que tienen los estudiantes. El siguiente esquema nos muestra como.

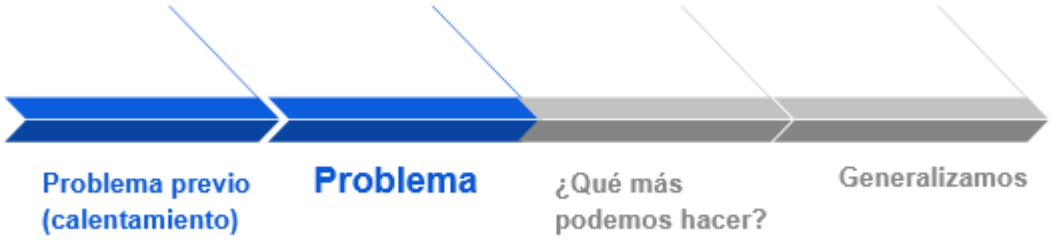


Imagen 11: Estructura de una actividad

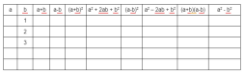
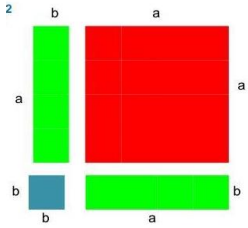
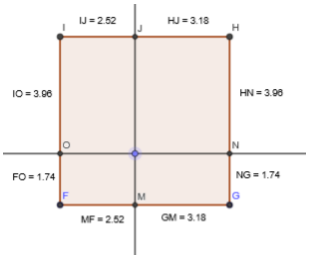
Calcular el área de un rectángulo de 31x37 Hacer el cálculo de diversas maneras Dibuja la operación	Calcular el valor de $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$. 	 $(a+b)^2 =$ $a^2 + b^2 + 2ab$	Calcular el desarrollo de $(a+b)^n$
Explorar: Teorema de Viviani. Actividad interactiva con Geogebra. 			

Tabla 6: Estructura de una actividad

Vemos un ejemplo de esta estructura en una actividad que pretende de manera sistemática formular el desarrollo del binomio de Newton. Como actividad previa trabajamos la descomposición de números, su multiplicación y su relación con el cálculo de áreas. Podemos ir más allá, sistematizando el proceso para otras potencias $(a+b)^3$ o $(a+b)^n$.

Podemos finalizar la actividad explorando otras relaciones, y aquí me gustaría mostrar la relación que tiene esta actividad que deriva del Teorema de Viviani y que me mostraron Jordi Font y Manel Martínez en una jornada de trabajo en el CESIRE, organizada por el CREAMAT.

Conectar actividades entre niveles nos permite dotar de estructura las actividades que realizamos en todos los niveles educativos.

3.4 STE(A)M

El primer tema a debatir en este apartado es la diferencia entre Science y Technology. Si consultamos la Wikipedia encontramos las siguientes definiciones

Technology ("science of craft", from Greek τέχνη, *techne*, "art, skill, cunning of hand"; and -λογία, *-logia*[2]) is the sum of **techniques, skills, methods, and processes** used in the production of goods or services or in the accomplishment of objectives, such as scientific investigation.
Engineering is the use of **scientific principles** to **design and build** machines, structures, and other items, including bridges, tunnels, roads, vehicles, and buildings.

A partir de estas dos definiciones asumimos para esta ponencia la idea que Ciencia, matemáticas e Ingeniería, cada una de ellas, tiene su propia metodología, formada por diferentes técnicas, métodos, habilidades y procesos.

A partir de esta idea podemos representar las actividades STEM, con el siguiente gráfico:

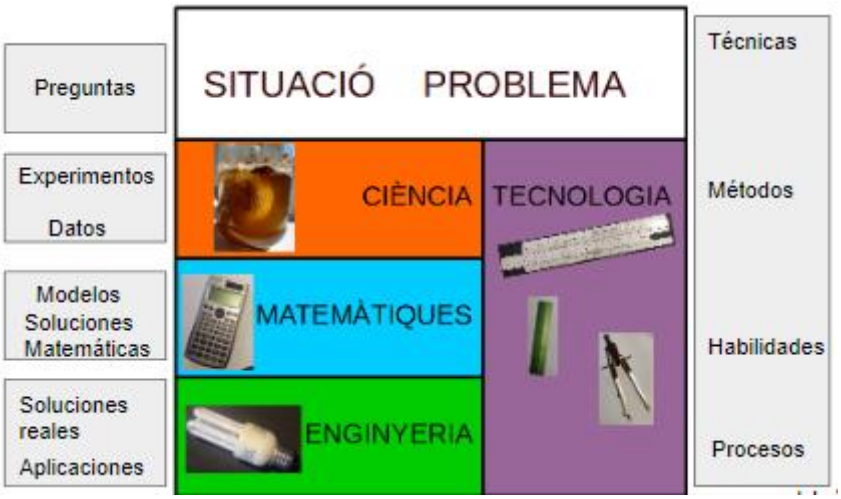


Imagen 12: Ámbito STEM

El punto de partida es una situación/problema. Nos formulamos preguntas, a partir de las preguntas es necesario diseñar experimentos que nos proporcionarán datos. Con estos datos podemos crear modelos matemáticos, o aprovechar los existentes para poder proporcionar soluciones, desde el punto de vista matemático de las preguntas que nos hemos propuesto. El último paso será adaptar nuestra solución matemática a la solución real y buscar aplicaciones del conocimiento que hemos generado. Esta estructura nos permite conectar los tres ámbitos de conocimiento y generar actividades que se adaptan al trabajo con cada uno de los ámbitos. Creo que es necesario comentar que esto no representa ninguna novedad en determinadas materias. En Física, Química o Tecnología ya se usan modelos matemáticos, pueden representar ideas más novedosas, utilizarlas en Biología. Por eso sugeriré algunos ejemplos para trabajar conectando Matemáticas y Biología. También creo que es necesario comentar que esta es una simplificación que empleo para las clases que realizo en la ESO. Podemos profundizar más en Couso et al. (2021)

Pero antes de mostrar estas conexiones, es necesario mencionar 4 ideas que nos permitan llevar este tipo de propuestas al aula. Estas ideas, adaptadas de NRICH, son:

1) Hagamos evidentes las conexiones generales que existen dentro de nuestra

materia

2) En nuestras clases hagamos referencias activas a los enlaces curriculares entre materias

3) Utilizar tareas transversales en el currículo.

1º preguntar a docentes de otros ámbitos qué matemáticas necesitan en sus clases o buscar puntos de contacto.

2º Decidir y comentar el material que se utilizará para contextualizar las técnicas Matemáticas

4) Desarrollar en el centro proyectos globales transversales: Semana de la Ciencia, 12 de mayo Día de las Matemáticas o Día internacional de las Matemáticas, antes dia de π https://idm314.es/.

Dicho esto, veamos algunas de las conexiones que podemos establecer entre Matemáticas y Biología.

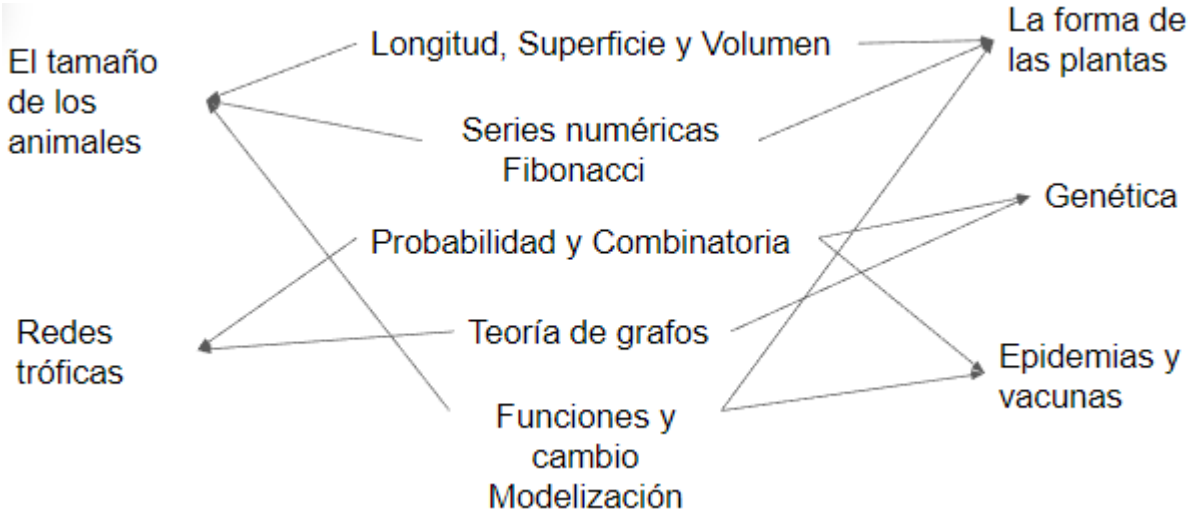


Imagen 13: Algunos ejemplos de conexiones entre Matemáticas y Biología

Los contenidos matemáticos, Longitud, Superficie y Volumen, Series numéricas, Probabilidad y combinatoria, Teoría de grafos, que representaría una novedad en el currículum o las funciones, se pueden relacionar con los temas de Biología que aparecen en la imagen. Introducir Matemáticas en estos temas permite, fundamentalmente, crear modelos y desarrollar previsiones que, con las ingenierías adecuadas, nos permitirán adaptar las soluciones a las situaciones reales que estemos estudiando.

4. Colofón

Y para finalizar dos aspectos importantes.

1) ¿Cómo podemos ver en los trabajos de los estudiantes que han desarrollado su capacidad de conectar ideas?

   Nos hacen falta indicadores. En este aspecto, debo resaltar el trabajo que realizarón Carme Aymerich y Manel Sol en el marco del programa de formación ARAMat del Departament d'Educació. En este programa participaron en su creación Carme Burgués, Tana Serra y Montserrat Torra. Desarrollaron un conjunto de indicadores para detectarlo. Estos indicadores, referidos a actividades concretas de aula, se pueden encontrar en el siguiente documento.

   Participaron, fundamentalmente, en la creación del programa ARAMAT Carme Burgués, Tana Serra y Montserrat Torra.

   Algunos ejemplos de estos indicadores son:

- Relaciona diferentes representaciones de una situación determinada.
- Aplica conocimientos previos a nuevas situaciones o contextos.
- Conecta números y sus representaciones geométricas y describe la relación que se ha establecido.
- Generaliza patrones o propiedades.
- Conecta figuras geométricas a través de transformaciones explicando qué se mantiene y qué cambia.
- Relaciona dos formas de abordar un mismo problema y puede explicar la relación.
- Cambia la manera de representar o resolver una situación y explica en qué basa las estrategias que sigue.
- Justifica porque se pueden conectar determinados contenidos.
- Modifica conexiones hechas para hacer nuevas y puede justificarlo
- Ve que puede usar diferentes abordajes de un problema o situación problemática.

- Ve casos más simples o más complejos de un problema.

2) La conexión más importante

Trabajar conjunta y coordinadamente con docentes del mismo centro y, también, de centros relacionados

Y una breve justificación, según John Hattie y su equipo, autor de Visible Learning, la actuación que tiene más impacto en el rendimiento académico de los estudiantes es el “Collective Teacher Efficacy”, en el puesto número 1.

Rank	Influence	Effect size d (Dec 2017)	Effect size d (Aug 2017)	Subdomain
1	Collective teacher efficacy	1.57	1.57	Leadership
2	Self-reported grades	1.33	1.33	Prior knowledge an background
3	Teacher estimates of achievement	1.29	1.62	Teacher attributes
4	Cognitive task analysis	1.29	1.29	Strategies emphasizing learnin intentions
5	Response to intervention	1.29	1.29	Strategies emphasizing feedba
6	Piagetian programs	1.28	1.28	Prior knowledge an background

Imagen 14: Visible learning

Referencias

Alsina, Cl., Carta a don Pedro Puig Adam (1900-1960) Revista SUMA nº 34, 5-7

Couso, D., Mora, Ll, Simarro, C. De las mates como instrumento a las mates como práctica Uno: Revista de didáctica de las matematicas, ISSN 1133-9853, Nº. 93, 202

Grup Cubic, Reflexions entorn el decàleg de Pere Puig Adam. http://www.ub.edu/cubic/wp-content/uploads/2017/11/Decaleg-Pere-Puig-Adam-Cubic.pdf Consultada 15/06/2022

Hattie, J, Visible Leartning, consultado 15/06/2022 https://visible-learning.org/hattie-ranking-influences-effect-sizes-learning-achievement/

Menoyo, MªP., Mirada Matemática, consultado 15/06/2022 http://formacionib.org/noticias/?Microrrelatos-matematicos-en-un-tuit-Una-propuesta-didactica-para-educar-la

https://youtu.be/CjfrqzW1QcA

Niss, M. Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project, 3rd Mediterranean conference on mathematical …, 2003

Programa ARAMAT; https://serveiseducatius.xtec.cat/cesire/recurs-eco2/aramat/, consultada 16/6/2022

PoA1 La evaluación externa en el nuevo marco legislativo de la LOMLOE

Ruth María Martín Escanilla
ruth.martin@educacion.gob.es
Instituto Nacional de Evaluación Educativa. Ministerio de Educación y Formación Profesional

Núcleo temático: Evaluación

Modalidad: Ponencia

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

En el curso 2022-2023 comenzará a aplicarse la LOMLOE. Los desarrollos curriculares publicados en 2022 suponen un enfoque novedoso, incorporando nuevos elementos curriculares orientados al logro de un verdadero aprendizaje competencial. Las competencias clave han formado parte del currículo desde la LOE, sin embargo, la propuesta curricular de la LOMLOE se define un nuevo elemento curricular, las competencias específicas de cada área o materia. Un nuevo modelo curricular debe asociarse, necesariamente, con un nuevo modo de evaluación que se oriente a medir verdaderamente el grado de desarrollo competencial y no se centre exclusivamente en los contenidos. Es innegable que la evaluación externa juega también un papel fundamental en el complejo funcionamiento del sistema. La LOMLOE ofrece una oportunidad para revisar los procesos de evaluación, también la externa. Las Evaluaciones de Diagnóstico (ED) y las Evaluaciones Generales del Sistema Educativo (EGS) en Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria son las evaluaciones externas que incorpora la LOMLOE.

En esta ponencia se analizarán los elementos clave del nuevo currículo y se describirán las características principales de las evaluaciones externas. Los marcos de evaluación y los modelos de prueba ofrecen referentes para la evaluación competencial en el aula.

Palabras clave: Evaluación de Diagnóstico (ED), Evaluación General de Diagnóstico (EGS), LOMLOE, Evaluación por Competencias.

1. La evaluación del rendimiento educativo como elemento de mejora escolar

La evaluación es un proceso fundamental en el sistema educativo, ya que actúa como un instrumento clave para el seguimiento y la valoración de proceso de enseñanza y aprendizaje, así como de sus resultados. En términos generales, toda evaluación consiste esencialmente en el análisis de los resultados de un proceso dirigido a una finalidad, en el que se valora hasta qué punto se han logrado los objetivos deseados. El análisis de las discrepancias entre estos objetivos y los realmente alcanzados permite emprender acciones encaminadas a minimizar estas diferencias. No obstante, cada vez es más complejo definir la evaluación educativa porque el objetivo perseguido con la acción educativa es múltiple, aunque tradicionalmente se haya centrado en los resultados de rendimiento del alumnado, identificándolo principalmente con la calificación obtenida. Sin embargo, es imprescindible establecer una diferencia clara entre la calificación y evaluación ya que mientras que la calificación se orienta a la información sobre el logro de los aprendizajes, generalmente al finalizar un proceso, la evaluación persigue la identificación de dificultades y fortalezas en el proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de tomar decisiones que orienten y reconduzcan el proceso, con la finalidad de mejorarlo. En relación con la evaluación, ara que esta cumpla el propósito que se plantea es necesario que se consideren diferentes métodos e instrumentos, de forma que no se limiten a una prueba de rendimiento.

Asimismo, el concepto de evaluación se ha ido extendiendo cada vez a más ámbitos y actores del sistema educativo, no limitándose en exclusiva al rendimiento del alumnado. De esta manera, en los sistemas educativos actuales han ido cobrando importancia otros aspectos como la evaluación del sistema en su conjunto, de los agentes que en él participan (administraciones educativas, centros, inspección, equipos directivos, profesorado, familias y alumnado, además del currículo, los proyectos o los procesos). En este sentido, existe consenso entre la comunidad educativa sobre la necesidad de realizar evaluaciones de los sistemas educativos

como herramienta que permita conocer de forma detallada la eficiencia y eficacia de los elementos que componen el sistema para lograr sus objetivos. La finalidad última de este tipo de evaluación es la mejora de la calidad de la enseñanza y de los resultados del sistema a través del análisis sus resultados globales, de sus fortalezas y debilidades, mediante el estudio de los factores implicados en los procesos de enseñanza-aprendizaje y la identificación de las variables que en él influyen de forma positiva, con el objetivo de modificar las políticas educativas y conseguir así que estas orienten el cambio educativo, garantizando que la escuela sea verdaderamente inclusiva y equitativa, que se reduzcan las desigualdades educativas y se mejoren las competencias del alumnado.

2. La evaluación externa en el sistema educativo español

Centrando la atención en la evaluación externa de los sistemas educativos, España tiene ya una larga experiencia en la participación en distintas evaluaciones internacionales que comenzó hace ya más de dos décadas. Esta experiencia se pone de manifiesto, por ejemplo, con las siguientes evaluaciones centradas en el rendimiento del alumnado y en los factores que en él inciden, medidas a partir de cuestionarios cognitivos y diversos cuestionarios de contexto, respectivamente:

- TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*), de la IEA (*International Association for the Evaluation of Educational Achievement*), que evalúa las competencias cognitivas en matemáticas y ciencias del alumnado de 4.º EP y 2.º ESO desde el año 1995. En aquella edición, España participó con una muestra de alumnado de 7.º y 8.º de EGB, y a partir de 2011 ha participado con el alumnado de 4.º EP en todos los ciclos, cada cuatro años.
- PIRLS (*Progress in International Reading Literacy Study*, Estudio Internacional para el Progreso de la Comprensión Lectora), también de la IEA. Evalúa la comprensión lectora en 4.º EP. España ha participado en todos los ciclos, cada cinco años, desde 2006.
- PISA (*Programme for International Student Assessment*), Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes), de la OCDE, que se centra en tres competencias consideradas troncales: ciencias, lectura y matemáticas.

España ha participado, desde su primera edición en 2000, en todos los ciclos, cada tres años hasta el 2022 (previsto inicialmente para 2021, pero aplazado debido al COVID-19) y 2025 (también aplazado de 2024 a 2025).

En cada ciclo se profundiza en una de las tres competencias troncales y en cada ciclo se explora una competencia innovadora, como la resolución colaborativa de problemas, en 2015; la competencia global, en 2018, o el pensamiento creativo, en PISA 2022. Así mismo se viene evaluando la competencia financiera desde 2012. En 2025 la evaluación PISA tiene como dominio principal la competencia matemática.

- Otras evaluaciones internacionales de la IEA, como ICCS (*International Civic and Citizenship Education Study*), que evalúa el papel de los centros educativos en la preparación de los jóvenes para ser ciudadanos dentro de la sociedad; ICILS (*International Computer and Information Literacy Study*, Estudio Internacional sobre Competencia Digital), para evaluar la competencia digital de los estudiantes de 2.º ESO y que en 2023 incluye un módulo opcional para evaluar el pensamiento computacional y la programación.
- Otras evaluaciones promovidas por la OCDE, como SSES (*Survey on Social and Emotional* Skills, Estudio sobre las Competencias Sociales y Emocionales).

La creciente importancia concedida a estas evaluaciones se muestra por la propuesta desde las instituciones internacionales de un número cada vez mayor de propuestas de estudios dirigidos a diferentes actores del sistema educativo y a un número creciente de competencias. Si los anteriores estudios centran en la evaluación del alumnado, se puede mencionar el estudio TALIS (*Teaching and Learning International Survey*, Estudio Internacional de Enseñanza y Aprendizaje) promovido por la OCDE y que se orienta a docentes, directores y directoras, e indaga sobre aspectos como su formación docente; su práctica docente; la evaluación de su trabajo, la retroalimentación y el reconocimiento que reciben; el liderazgo escolar o la gestión de los centros educativos, entre otros aspectos. Por su parte, el estudio PIAAC (*Programme for the International Assessment of Adult Competencies*) de la OCDE evalúa las competencias de los adultos de 16 a 65

años. Esta evaluación mide las competencias de los adultos en las destrezas clave del procesamiento de la información: comprensión lectora, matemáticas y resolución de problemas en entornos informatizados. Además, indaga sobre el uso que los adultos hacen de sus competencias en su vida diaria y en el trabajo.

Los programas de evaluación citados evidencian la experiencia en la realización de evaluaciones en España. En cuanto a la evaluación de ámbito nacional, la Ley Orgánica de Educación (2006) introdujo la realización de las Evaluaciones Generales de Diagnóstico en los cursos 4.º EP y 2.º ESO, orientadas a la evaluación de las competencias en comunicación lingüística; matemática; en el conocimiento y la interacción con el mundo físico, y social y ciudadana. Estas evaluaciones se realizaron únicamente en 2009 y en 2010, por lo que los informes de resultados (Ministerio de Educación, 2010, 2011) constituyen la única información sobre el rendimiento en las diferentes competencias del alumnado de todas las comunidades autónomas españolas en la misma escala obtenida a través de una evaluación nacional. La LOE también introdujo las Evaluaciones de Diagnóstico (evaluación realizada en los mismos cursos que la EGD y sobre las mismas competencias), competencia de las administraciones educativas. Esta evaluación se realizó anualmente, en cada comunidad autónoma, desde 2009 hasta 2012.

Con la entrada en vigor de las modificaciones introducidas por la LOMCE (2013) el modelo de evaluación externa basada en el rendimiento del alumnado sufrió una ruptura debido a que se planificaron las evaluaciones finales de etapa de la educación obligatoria con finalidad certificatoria. Salvo la evaluación final de la Educación Primaria, realizada al finalizar 2015-2016, el modelo de evaluación LOMCE no llegó a ponerse en práctica según había sido concebido debido a la entrada en vigor del Real Decreto-ley 5/2016, de 9 de diciembre, que aplazó el calendario de aplicación y estableció la finalidad diagnóstica de las evaluaciones de final de etapa en el periodo transitorio hasta su implantación efectiva. Este periodo transitorio finalmente se prolongó, finalmente, hasta la entrada en vigor de la LOMLOE. Durante el periodo de vigencia de la LOMCE, desde el curso 2014-2015 hasta el 2020-2021, se desarrolló, además, la evaluación individualizada de 3.º EP, según dispusieron las Administraciones educativas (evaluación censal y de carácter

diagnóstico) con la única interrupción del curso 2019-2020 debido al cierre de los centros educativos por motivos de la pandemia por Covid-19. También se realizaron evaluaciones con carácter diagnóstico en 6.º EP (desde 2016 hasta 2019) y 4.º ESO (desde 2017 hasta 2019). En todas estas evaluaciones se incluía la competencia matemática.

3. La evaluación externa en la LOMLOE

La evaluación del sistema, según se concibe en la LOMLOE, tiene principalmente una función diagnóstica, es decir, persigue conocer qué aspectos del sistema influyen en los resultados para poder orientar las futuras intervenciones. Esta función orienta las evaluaciones y condiciona su metodología. Para que la evaluación del sistema logre su verdadero objetivo y resulte un instrumento útil, debe seguir un diseño planificado y riguroso desde el punto de vista técnico, sin olvidar atender a criterios éticos, para que se garantice que la información obtenida es realmente valiosa. Resulta de especial interés considerar la evaluación como un proceso, y no como un acto aislado, que permita valorar el nivel competencial del alumnado en el momento de su realización y su evolución a lo largo del tiempo, a la vez que facilite información sobre los efectos que el sistema educativo tiene en el aprendizaje. En definitiva, resulta especialmente interesante el «valor añadido» de la escuela y su papel para compensar y equilibrar las desigualdades de partida del alumnado.

Los instrumentos que la LOMLOE prevé para el diagnóstico del sistema son las Evaluaciones generales del sistema educativo y las Evaluaciones de diagnóstico, aunque estas últimas no son, estrictamente hablando, evaluaciones externas. En ambos procesos de evaluación, el conocimiento del sistema educativo se realizará a través de la valoración de las competencias adquiridas por los estudiantes en relación con su contexto. Los resultados de las Evaluaciones generales del sistema pretenden impulsar procesos de innovación y compromisos de revisión y mejora de la educación en todo el sistema.

Las Evaluaciones generales del sistema educativo se regulan en el artículo 143 de la LOE. Tienen carácter muestral y mediante su realización se obtendrán datos

representativos tanto del alumnado y de los centros de las comunidades autónomas como del conjunto del Estado. Se realizarán en los dos cursos finales de las etapas de educación obligatoria, es decir, 6.º EP y 4.º ESO. Estas evaluaciones medirán el nivel de desarrollo competencial del alumnado al finalizar las etapas de educación obligatoria. En el punto siguiente se analizarán sus referentes. Está previsto que estas evaluaciones se realicen cada tres años a partir del curso 2024-2025.

Por su parte, la Evaluaciones de diagnóstico se regulan en el artículo 144. Estas evaluaciones no son estrictamente evaluaciones externas, sino que las realizarán los centros docentes a todo el alumnado siguiendo las directrices que proporcionen las Administraciones educativas. Se realizarán en 4.º EP y en 2.º ESO y como mínimo comprobarán el grado de dominio de la competencia en comunicación lingüística y de la competencia matemática. Puesto que la finalidad última de las evaluaciones es la mejora del sistema, las Administraciones educativas promoverán que los centros educativos tengan en cuenta los resultados de estas evaluaciones en el diseño de sus planes de mejora. Estos incluirán propuestas de actuación que contribuyan a que el alumnado alcance las competencias establecidas, permitan adoptar medidas de mejora de la calidad y la equidad de la educación y orienten la práctica docente. El INEE y los organismos correspondientes de las Administraciones educativas tienen encomendada la realización de un marco común de evaluación. Según el calendario previsto, se realizarán por primera vez al finalizar el curso 2023-2024.

Con el fin de planificar de forma adecuada las evaluaciones anteriores (EDS y ED), desde diciembre de 2021 se han constituido grupos de trabajo coordinados desde el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) formados por expertos del ámbito educativo universitario, técnicos en evaluación de las comunidades autónomas y profesorado de las etapas de educación obligatorias, para elaborar los marcos que guiarán el proceso de evaluación.

4. Las competencias clave y las competencias específicas

Desde la publicación de la LOE en 2006, las competencias clave han estado cada vez más presentes en los desarrollos curriculares del sistema educativo español.

Siguiendo con esta trayectoria, la LOMLOE pone de manifiesto la necesidad de profundizar en el aprendizaje competencial de forma que se garantice el completo desarrollo de la personalidad del alumnado en todas sus dimensiones, de manera que le permita integrarse, de manera activa y responsable, en una sociedad a la que debe contribuir aportando propuestas y dando respuestas a los desafíos del siglo XXI y a los grandes objetivos mundiales. El modelo curricular propuesto por la LOMLOE centra el objetivo de los aprendizajes en el denominado *Perfil de salida del alumnado al término de la enseñanza básica*, anexo a los decretos de enseñanzas mínimas[2]. El perfil recoge la adaptación al sistema educativo español de las competencias clave establecidas en las definidas a nivel europeo concretando su presencia transversal en el mismo a través de ocho competencias establecidas en la Recomendación del Consejo de la Unión Europea de 22 de mayo de 2018[3] relativa a las competencias clave para el aprendizaje permanente. Las competencias clave se definen en los documentos curriculares como aquellos desempeños que se consideran imprescindibles para que el alumnado pueda progresar con garantías de éxito en su itinerario formativo, y afrontar los principales retos y desafíos globales y locales planteados. Los descriptores que se recogen en el documento del perfil de salida se han enriquecido con reflexiones contextualizadoras sobre los principales retos y desafíos globales a los que va a verse confrontado nuestro alumnado y sobre los Objetivos de Desarrollo Sostenible de la Agenda 2030,[4] en particular el ODS4: “Garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todos”.

---

[2] Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.
Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.

[3] Las competencias clave se definen como «una combinación dinámica de los conocimientos, destrezas y actitudes que debe desarrollar una persona a lo largo de toda la vida, comenzando en una edad temprana». De forma más amplia, «las competencias se definen como una combinación de conocimientos, destrezas y actitudes, en las que:
a) los conocimientos se componen de hechos y cifras, conceptos, ideas y teorías que ya están establecidos y apoyan la comprensión de un área o tema concretos;
b) las destrezas se definen como la habilidad para realizar procesos y utilizar los conocimientos existentes para obtener resultados;
c) las actitudes describen la mentalidad y la disposición para actuar o reaccionar ante las ideas, las personas o las situaciones».

[4] https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/objetivos-de-desarrollo-sostenible/

Dado que las competencias se adquieren necesariamente de forma secuencial y progresiva, el Perfil también incluye los descriptores operativos que orientan sobre el nivel de desempeño esperado al completar la Educación Primaria, lo que permite disponer de un referente de evaluación al finalizar esta etapa educativa. Las competencias clave son las siguientes:

- Competencia en comunicación lingüística
- Competencia plurilingüe
- Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM, por sus siglas en inglés)
- Competencia digital
- Competencia personal, social y de aprender a aprender
- Competencia ciudadana
- Competencia emprendedora
- Competencia en conciencia y expresión culturales

Las competencias específicas constituyen un elemento novedoso en relación con los currículos anteriores y juegan un papel central, ya que ponen el foco de los aprendizajes en el desarrollo de competencias frente a los tradicionales contenidos (saberes, según la denominación actual). Las competencias específicas se definen como los desempeños que el alumnado debe poder desplegar en actividades o en situaciones cuyo abordaje requiere de los saberes básicos de cada área, materia o ámbito. Constituyen un elemento de conexión entre, por una parte, el *Perfil de salida del alumnado*, y por otra, los saberes básicos de las materias, las áreas o los ámbitos y los criterios de evaluación. En los desarrollos curriculares aparecen recogidas en las descripciones de cada una de las áreas (Educación Primaria) o materias (Educación Secundaria Obligatoria) que ordenan cada una de las etapas educativas. El desarrollo de las enseñanzas mínimas ofrece, asociados a cada una de las competencias específicas, los criterios de evaluación, que son los referentes que indican los niveles de desempeño esperados en el alumnado en las situaciones o actividades a las que se refieren las competencias específicas de cada área en un momento determinado de su proceso de aprendizaje.

5. Los referentes de las evaluaciones por competencias

La LOMLOE prescribe que la evaluación se basará en el grado de desarrollo de las competencias previstas, situando estas en primera línea del proceso enseñanza-aprendizaje. Esto no es más que la directriz propuesta por el marco conceptual que la Comisión Europea ha aportado a los estados integrantes de la Unión, donde se señala que: «Los Estados miembros deben facilitar la adquisición de las competencias clave haciendo uso de las buenas prácticas para contribuir al desarrollo de las competencias clave, en especial mediante: […] el respaldo y mayor desarrollo de la evaluación y validación de las competencias clave adquiridas en distintos contextos en sintonía con las normas y procedimientos de los Estados miembros».

Por lo tanto, los referentes de las evaluaciones externas no pueden ser otros que las competencias. Como es sabido, los aprendizajes competenciales no consisten únicamente en contenidos, sino que incluyen destrezas, emociones, motivaciones, actitudes y valores. Por ello, esta evaluación de competencias debe entenderlas en su dimensión integradora de conjunto de conocimientos, destrezas y actitudes que se requieren para la realización personal, el ejercicio de la ciudadanía activa y la incorporación satisfactoria en la vida adulta de los niñas, niños y jóvenes, que sustenten un aprendizaje a lo largo de toda la vida que resulten transferibles y multifuncionales.

Como consecuencia, estas dos categorías de competencias anteriormente descritos son las que constituirán el referente para las evaluaciones externas.

a) Las Evaluaciones generales del sistema educativo deben permitir obtener datos representativos del conjunto del Estado y de las comunidades autónomas, contribuyendo al conocimiento del sistema educativo y a la orientación en la toma de decisiones de las instituciones educativas y de todos los sectores implicados en la educación. Se realizan en el curso en el que finalizan las dos etapas de educación obligatoria: primaria y secundaria. Tienen carácter informativo, formativo y orientador, pero no se proporcionará información ni a nivel individual del alumnado ni del centro educativo. Puesto

que al finalizar las distintas etapas educativas resulta de interés conocer el nivel de adquisición de las competencias clave por parte del alumnado a nivel global (nacional o de comunidad autónoma) y no de forma individualizada, parece adecuado que esta evaluación se configure a partir de los descriptores operativos en los que se expresan estas competencias, explícitamente presentes en el *Perfil de salida del alumnado al terminar la educación básica*. Sin embargo, la evaluación general del sistema no debe apartarse de los elementos curriculares definidos (áreas, materias, criterios de evaluación, saberes básicos, etc.), más cercanos a la práctica docente y a la experiencia educativa del alumnado, en definitiva, los conocimientos, destrezas y actitudes que se determinan en el currículo.

El trabajo inicial del Grupo de trabajo de Evaluación Educativa, coordinado por el INEE, se ha centrado en la elaboración de los marcos teóricos para la evaluación de las competencias en comunicación lingüística y STEM, tanto para 6.º EP como para 4.º ESO. En los próximos meses se abordarán los marcos de las competencias plurilingüe y digital. Está previsto que estas evaluaciones se realicen por completo en formato digital.

b) Por otro lado, las Evaluaciones de diagnóstico se realizan en cursos intermedios de las etapas educativas de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria, y tienen carácter informativo, formativo y orientador para los centros, para el profesorado, para el alumnado y sus familias y para el conjunto de la comunidad educativa. Para ello, en estas evaluaciones se ofrecen diferentes tipos de informes (entre ellos, los informes individualizados) que permiten a las Administraciones educativas promover la elaboración de propuestas de actuación por parte de los centros, de manera que contribuyan a que el alumnado alcance las competencias establecidas, se adopten medidas de mejora de la educación y se oriente la práctica docente. En este sentido, la información derivada de estas evaluaciones completa el proceso de evaluación interno a través del análisis que centros docentes y profesorado pueden realizar de los factores que puedan haber incidido en el nivel de competencia alcanzado por el alumnado. De esta reflexión sobre los resultados pueden establecerse medidas de actuación que

recojan el análisis de las fortalezas y debilidades percibidas, así como la sistematización de las posibles actuaciones y propuestas de mejora, tanto en el desarrollo curricular y metodológico como en el organizativo, que permitan adoptar medidas de mejora de la calidad y la equidad de la educación.

Las Evaluaciones de diagnóstico, que tienen ya una consolidada trayectoria y aceptación en nuestro sistema educativo y con las que los centros están ya familiarizados, se dirigen a la medición del grado de consecución de las competencias específicas, ya que estas se encuentran ligadas de forma más inmediata y cercana a la experiencia diaria en el aula en un currículo articulado en áreas y materias. De este modo, las pruebas de las competencias seleccionadas se diseñarán a partir de un marco común de evaluación al que se incorporarán, como elemento curricular de referencia evaluativa competencial, las competencias específicas del área o materia evaluada, en su nivel correspondiente.

6. El contexto educativo

Para contribuir a la mejora de la calidad y la equidad de la educación las evaluaciones deben estimular en las comunidades educativas la necesidad de reflexionar sobre la práctica para encontrar evidencias rigurosas que les permitan comprender lo que hace y lo que consigue, es decir, deben promover procesos de autoevaluación en las instituciones escolares. La mejora de la educación exige la selección de variables de contexto que permitan interpretar los resultados. Por ello, además de los cuestionarios cognitivos (digitales, en este caso) se deben considerar las variables de contexto de cuyo análisis, en relación con los resultados de rendimiento, permita considerar los contextos socioculturales de alumnado y centros para poder explicar debidamente los resultados de la evaluación; solo deben realizarse comparaciones en un marco contextual que contribuya a explicar las diferencias

7. El marco de evaluación de la competencia STEM (EGS)

Como se ha mencionado, el trabajo de elaboración de los marcos de evaluación para las EGS presenta, como novedad, que el punto de partida son las competencias clave, desarrollando los procesos que se definen en los descriptores

operativos de cada competencia. Resulta especialmente novedosa la incorporación de la evaluación de la competencia STEM ya que no existen antecedentes en la evaluación externa de esta competencia. No obstante, el modelo que se propone no pretende ser rupturista con los anteriormente establecidos. En ese sentido, el borrador del marco de evaluación, que se presenta en esta ponencia, desarrolla de forma independiente cada uno de los cinco descriptores operativos de la competencia. Las preguntas o ítems que se propongan para esta evaluación no identificarán cada uno de los descriptores con un área o materia, sino que buscarán la integración de los procesos de pensamiento y trabajo en matemáticas, ciencias, tecnología e ingeniería de forma que, en principio, se podrán formular ítems de cada una de las áreas asociados a cada uno de los cinco descriptores.

El verdadero reto consiste en construir preguntas realmente competenciales, que para su resolución movilicen los conocimientos del alumnado y requieran aplicarlos ante situaciones no siempre conocidas.

8. Algunos modelos de ítems

En la presentación se analizan algunos modelos de ítems de diferentes evaluaciones nacionales e internacionales y se examinará su carácter competencial.

Referencias

Consejo de la Unión Europea (Ed.) (2018). Recomendación del consejo de 22 de mayo de 2018 relativa a las competencias clave para el aprendizaje permanente. Diario Oficial de la Unión Europea.

ICCS, *International Civic and Citizenship Education Study*, IEA, https://www.iea.nl/studies/iea/iccs

ICILS, *International Computer and Information Literacy Study*, IEA, https://www.iea.nl/studies/iea/icils

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) (https://www.educacionyfp.gob.es/inee/portada.html)

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa, https://www.boe.es/buscar/pdf/2013/BOE-A-2013-12886-consolidado.pdf

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación https://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2020-17264

Ministerio de Educación, 2010. *Evaluación general de diagnóstico 2009. Educación Primaria. Cuarto curso*. *Informe de resultados*.

Ministerio de Educación, 2011. *Evaluación general de diagnóstico 2010. Educación Secundaria Obligatoria. Segundo curso*. *Informe de resultados*.

PIAAC, Survey of Adult Skills, OECD, https://www.oecd.org/skills/piaac/

PIRLS, *Progress in International Reading Literacy Study*, IEA, https://www.iea.nl/studies/iea/pirls

PISA; *Programme for International Student Assessment*, OECD, https://www.oecd.org/pisa/

SSES, *Study on Social and Emotional Skills*, OECD, https://www.oecd.org/education/ceri/study-on-social-and-emotional-skills-the-study.htm

TALIS, *Teaching and Learning International Survey*, OECD, https://www.oecd.org/education/talis/

TIMSS, Trends in International Mathematics and Science Study, IEA, https://www.iea.nl/studies/iea/timss

PoA2 Evaluando la evaluación

Maite Gorriz Farré
mgorriz@xtec.cat
Inspección de Educación, Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya

Núcleo temático: Evaluación. Procesos.

Modalidad: Ponencia.

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad.

RESUMEN

En este artículo se mostrará el paralelismo entre la evaluación del alumnado y la evaluación docente y se expondrán experiencias donde las propuestas de mejora inciden en: incorporar la evaluación en actividades competenciales, replantear las sesiones de evaluación y aplicar una evaluación ética.

Palabras clave: Evaluación Formativa, Autoevaluación, Evaluación Competencial, Competencias Docentes.

1. Motivación

En cualquier contexto social, la evaluación de una situación es la clave que regula su buen funcionamiento porque promueve la activación de estrategias de mejora. En el contexto escolar, sin embargo, existe una larga tradición en la que se limitar la evaluación a aspectos de carácter diagnóstico evitando la toma de decisiones para la mejora. Las últimas tendencias educativas dotan a la evaluación de un carácter mucho más fructífero incidiendo tanto en los aprendizajes del alumnado como en los procesos de enseñanza y la práctica docente a fin de conseguir la mejora de los mismos.

La carrera docente, como cualquier otra, conlleva implícito un proceso de desarrollo profesional, donde la construcción de la identidad y la mejora continua, deben de estar en el epicentro del ejercicio y la práctica de la docencia. Resulta impensable un desarrollo profesional docente sin espacios de intercambio tanto de conocimiento

como pedagógico. Dicho intercambio implica también la reflexión compartida sobre la propia práctica educativa convirtiéndose en una palanca para la toma de decisiones sobre los diferentes aspectos que inciden en los aprendizajes del alumnado.

La declaración de Incheon, Educació 2030, hace hincapié en que los docentes son la clave para una educación de calidad, una educación que fomente la creatividad y el conocimiento garantice la adquisición de las competencias básicas de lectura, escritura y cálculo, así como de aptitudes analíticas, de solución de problemas y otras habilidades cognitivas, interpersonales y sociales de alto nivel. Además, añade que los sistemas educativos exitosos que garantizan la calidad y la equidad se han centrado en un desarrollo profesional continuo del docente y resalta que éstos, los docentes, contribuyen considerablemente a mejorar los resultados del aprendizaje del alumnado. En la misma línea, Chavarria y Borrell (2022) destacan que uno de los pilares fundamentales de cualquier centro educativo, es la calidad profesional de sus docentes y su constante actualización para adaptar sus competencias a los retos del mundo actual, así como su capacidad de colaboración y cooperación.

La frase “dime qué y cómo evalúas y te diré qué y cómo enseñas (y qué y cómo tus alumnos aprenden)” utilizada por Neus Sanmartí o Carles Monereo, entre otros, muestra la necesidad de establecer mecanismos de reflexión y mejora de todas las tareas y actuaciones que realizan los docentes respecto la evaluación de us estudiantes. En este sentido, ningún investigador educativo discute la decisiva influencia que tiene la evaluación sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Así, Bové, Domingo, (2016) “... sea cual sea el motivo, la finalidad y el agente que lleve a evaluar a un docente, se tenga siempre presente que cualquier proceso evaluativo puede tener un enfoque formativo, y que éste es el único que asegura la implicación de la persona evaluada y que la evaluación sirva para la mejora de los docentes, de los centros y, en definitiva, para mejorar el aprendizaje del alumnado”.

1.1. La competencia docente

Marchesi (2018) define competencia como “la capacidad de organizar y movilizar el saber, el saber hacer y el saber hacer con los demás para el desempeño de una tarea en el entorno escolar adaptada a la situación de los alumnos en las condiciones específicas de un determinado centro educativo”.

Para definir las competencias docentes, autores como Scriven (1998), Angulo (1999), Cano (2005), entre otros, han formulado su propuesta. Perrenoud (2007) detalló diez competencias docentes que consideraba fundamentales para los profesionales de la educación del siglo XXI, advirtiendo que se trataba de competencias emergentes y que no contemplaba las más tradicionales: 1.Organizar y animar situaciones de aprendizaje, 2. Gestionar la progresión de los aprendizajes, 3. Elaborar y hacer evolucionar dispositivos de diferenciación, 4. Implicar a los alumnos en sus aprendizajes y en su trabajo, 5. Trabajar en equipo, 6.Participar en la gestión de la escuela, 7. Informar e implicar a los padres, 8. Utilizar las nuevas tecnologías, 9. Afrontar los deberes y los dilemas éticos de la profesión, 10. Organizar la propia formación continua.

1.2. La evaluación de la competencia docente en Catalunya

La normativa vigente, con la aprobación reciente de los Reales Decretos de Currículum[5], regula que el profesorado evaluará tanto los aprendizajes del alumnado como los procesos de enseñanza y su propia práctica docente.

En concreto, en el diseño de evaluación docente de la Inspección de Educación de Catalunya, se consideran prioritarias las siguientes cuatro competencias docentes:

i. Competencia científica (saber): conocimiento de la materia y de las técnicas educativas para planificar y evaluar procesos de enseñanza-aprendizaje:

[5] Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato.

- Conocimiento de la normativa curricular vigente y capacidad para la elaboración de programaciones didácticas garantizando la optimización del tiempo, de los recursos, y de las potencialidades del entorno y del alumnado, con capacidad para relacionar conocimientos diversos.
- Visión competencial, inclusiva, de autorregulación de los aprendizajes y con perspectiva de género.
- Planificación de procesos en un ciclo de mejora continua teniendo en cuenta los progresos del alumnado.

ii. Competencia pedagógica (saber hacer): vinculación del saber con la acción educativa:

- Creación de entornos de aprendizaje motivadores y seguros, donde los alumnos pueden desarrollar su proceso de aprendizaje y crecimiento emocional, cultural y social (incluido el dominio en el uso de las TIC).
- Desarrollo de situaciones de aprendizaje en las que los alumnos asumen responsabilidades, toman iniciativas y construyen aprendizajes de forma autónoma y colaborativa.
- Adopción de medidas para identificar y atender las necesidades educativas de todos los alumnos y alumnas.

iii. Competencia personal (saber ser): habilidades para la docencia:

- Iniciativa y creatividad.
- Comunicación comprensible y fluida con un uso efectivo del lenguaje verbal y no verbal.
- Autorregulación de las emociones, empatía y asertividad.

iv. Competencia social (saber estar): habilidades para el trabajo en equipo y el desarrollo profesional:

- Consideración del trabajo en equipo para la consecución de los objetivos.
- Flexibilidad para la adaptación a situaciones nuevas.
- Interés en procesos de innovación y de investigación.

Como síntesis, la evaluación y la mejora continua de la función docente debe tener en cuenta todas estas competencias, pero toma todo su sentido situada en el contexto de un centro educativo y cuando está focalizada en los aprendizajes del

alumnado y en los procesos de enseñanza que los promueven. Para ello, se concretan cinco criterios: planificación de la actividad docente, intervención didáctica, evaluación de alumnos, gestión del aula e implicación en la aplicación del proyecto educativo del centro.

Este trabajo se centra en un solo criterio de la evaluación docente, el de evaluación del alumnado.

2. La evaluación del alumnado, el qué.

La evaluación se puede definir como el proceso de recopilación de información, pertinente y relevante, sobre un objeto que permite formular juicios profesionales y facilitar la toma de decisiones, Chavarría y Borrell (2022).

La normativa vigente en España define un sistema educativo basado en el aprendizaje de las competencias, y como consecuencia la evaluación debe ser competencial.

Si se consultan los textos académicos, éstos distinguen diferentes tipos de evaluación. Por ejemplo, evaluación tradicional o denominada cultura del examen, la evaluación no formal o alternativa (alternative assessment), la evaluación del proceso de realización (performance assessment), la evaluación basada en problemas (problema based assessment), la evaluación dinámica, la evaluación formadora o la evaluación formativa, la formación auténtica, Monereo (2009). En cualquier caso, sí es relevante qué se evalúa, cómo se evalúa, cuando se evalúa, quién evalúa y para qué se evalúa. Pero, la pregunta que cualquier docente debería formularse es ¿cuándo evalúo, las alumnas y los alumnos aprenden? Si la respuesta es que no (o que muy poco), es obvio que el propio docente debería replantearse su manera de evaluar, Gorriz y Vilches (2021).

El potencial de las actividades abiertas y creativas es incuestionable para un aprendizaje competencial. Pero, además, existen propuestas donde estas actividades abiertas y creativas con una buena formulación de preguntas y dando cabida a la reflexión constante son el elemento principal de la evaluación, por ejemplo, en Gorriz y Vilches (2021).

En definitiva, el proceso de la evaluación debe estar incorporado en el proceso de aprendizaje del alumnado. Es decir, se evalúan competencias (el qué), a través de diversos instrumentos y herramientas adaptadas a las actividades competenciales planteadas en el aula en un contexto de la realidad cotidiana (el cómo), durante la realización de las actividades de aprendizaje (el cuándo), de manera reflexiva para el propio aprendiz –autoevaluación-, de manera cooperativa con el resto de aprendices -coevaluación- y el docente ofreciendo propuestas de mejora individuales (quién) y finalmente, para la mejora del aprendizaje de todos y cada uno de los alumnos y alumnas (para qué).

3. La evaluación docente

En el contexto de la evaluación docente en Catalunya, los agentes que intervienen son: el propio docente que es evaluado, un docente experimentado que realiza la tutoría[6], la dirección del centro educativo e inspección. El docente que es evaluado aplica una autoevaluación de su actuación y una evaluación formadora, es decir, una reflexión sobre su práctica regulando y mejorando su competencia docente. La tutoría, la dirección e inspección tienen un papel fundamental en el componente formativo de la evaluación. Además, principalmente, la tutoría guía y apoya a la persona tutorizada en el desarrollo de la actividad educativa, ofreciendo toda la información necesaria para la implicación en el proyecto educativo del centro, orientando sobre el proceso de evaluación, fomentando el intercambio de experiencias, la reflexión sobre la práctica y la autoevaluación y facilitando la integración en la comunidad educativa. La dirección tiene un papel fundamental en la planificación, la acogida, el seguimiento, el acompañamiento y la supervisión directa del proceso de evaluación del docente. Todos estos aspectos inciden en la mejora y el desarrollo profesional del aspirante, pero al mismo tiempo generan un gran impacto en la mejora global de la calidad educativa de todo el centro. La inspección asesora al centro, a la dirección, al tutor o tutora e informa al aspirante sobre el procedimiento de evaluación, velando también por la correcta aplicación de

[6] Se refiere a la tutoría del docente evaluado y que recae sobre un “igual” con experiencia en la profesión y en el centro educativo.

la normativa para garantizar los derechos y deberes de todos los agentes implicados.

En los diferentes procesos de la evaluación de las competencias docentes en Catalunya[7], se concretan cinco criterios, uno de los cuales, tal como ya se ha mencionado, es la evaluación del alumnado. Los descriptores de este criterio son tres:

i. la concreción de criterios y de instrumentos de evaluación coherentes con las competencias y objetivos de aprendizaje
ii. la diversificación de las actividades e instrumentos de evaluación que contemplen la autoevaluación y la coevaluación del alumnado y que permitan realizar un seguimiento continuo de cada alumno a lo largo de su proceso de aprendizaje
iii. la valoración del progreso en la consecución de las competencias y la adopción de medidas para la orientación de los alumnos y la mejora del proceso de aprendizaje y de los resultados

La evaluación es un mecanismo esencial de apoyo a la mejora de la función docente, y ésta debe ser siempre una de sus finalidades básicas, de ahí la importancia del componente formador de la evaluación, de la autoevaluación, de la práctica reflexiva, del retorno de las valoraciones y de las propuestas de mejora. En un paralelismo absoluto entre la evaluación docente de aspirantes y la que estos realizan sobre sus estudiantes, para la evaluación docente se aplicaran estrategias y procesos similares a las de la evaluación del alumnado.

A partir de este paralelismo, se evalúan las competencias docentes de los aspirantes (el qué), a través de diversos instrumentos y herramientas adaptadas a las actividades competenciales planteadas en el aula en un contexto de la realidad cotidiana (el cómo), durante la realización de las actividades de enseñanza (el

[7] Actualmente, en Cataluña, se llevan a cabo los siguientes procesos de evaluación docente: Evaluación del primer curso entero de ejercicio de la docencia, Evaluación de funcionarios y funcionarias en prácticas, Evaluación de candidatos y candidatas a la función directiva, Evaluación de candidatos y candidatas al acceso a cuerpos superiores, Evaluación para el reconocimiento de estadios, Evaluación del período de prueba inicial (4 primeros meses de ejercicio de la docencia).

cuándo), de manera reflexiva para el propio docente (autoevaluación), de manera cooperativa con el resto de agentes implicados, tutoría, dirección e inspección, reflexionando sobre propuestas de mejora (quién) y finalmente todo este proceso de evaluación está integrado en la propia práctica docente la mejora del aprendizaje de todos y cada uno de los alumnos y alumnas (para qué).

La propuesta que se presenta en este trabajo es la realización de la evaluación docente con la misma mirada formativa que la evaluación del alumnado. Y, para ello, se mostrarán algunos ejemplos donde se resaltan algunos aspectos relevantes que pueden ser transferibles a otros centros educativos. Estos ejemplos harán hincapié en la mejora de la competencia docente concretándola en la propia evaluación del alumnado.

4. Experiencias transferibles en la evaluación docente

Durante los últimos cuatro cursos escolares, en mi labor de inspectora de educación, he realizado alrededor de cien evaluaciones docentes, todas ellas acompañadas por sus respectivas tutorías (realizadas por docentes funcionarios) y con la intervención y participación de la dirección del centro. En primer lugar, cabe destacar la implicación de los diferentes agentes en el proceso de evaluación como un aprendizaje permanente.

Para que la evaluación docente tenga un carácter realmente formador, se deben aplicar estrategias y procesos similares a las de la evaluación del alumnado, como por ejemplo los siguientes, Bové y Domingo (2016):

i. Compartir criterios y objetivos. El docente debe conocer y compartir los objetivos del proyecto de centro para situar en contexto su práctica educativa. Por otra parte, debe conocer los criterios de evaluación si queremos que los resultados de la misma tengan un efecto formador.
ii. Implicación del profesorado en la evaluación. El docente debe ser el protagonista tanto al inicio como durante todo el proceso. Las propuestas de mejora deben de tener incidencia en el crecimiento profesional.

iii. Cooperación y práctica reflexiva. Los procesos de mejora son más ricos si se comparten y contrastan con compañeros, de ahí la importancia del trabajo en equipo, del debate, de la investigación en acción y de la práctica reflexiva.

iv. Las valoraciones y las propuestas de mejora. Al finalizar cualquier proceso evaluativo, o en determinados momentos a lo largo de él, es imprescindible recapitular, comprobando si el proceso está bien orientado y cuál es el grado de consecución de los objetivos. Tiene que haber tiempo para la reflexión, para los juicios de valor y para la formulación de propuestas de mejora.

En este último punto es necesario incorporar el feedback o retroalimentación continua entre el docente y los agentes que participan en el proceso de evaluación o entre iguales. En definitiva, que se tome conciencia del propio proceso de aprendizaje en la mejora de las competencias docentes y también pueda proponerse un camino de mejora en el propio centro educativo, ya sea en un departamento didáctico, en un equipo docente o en cualquier ámbito según la autonomía organizativa del centro.

A continuación, se presentan ejemplos de propuestas de mejora que han surgido de diferentes evaluaciones docentes a partir de las reflexiones compartidas por los diferentes agentes participantes.

4.1. Incorporar la evaluación en las actividades competenciales

En un contexto de aprendizaje por competencias, resulta muy conveniente diseñar actividades que propongan un reto a los estudiantes que les permita desarrollar su creatividad, incentivar la autorregulación, fomentar el espíritu crítico y en el que la matemática juegue un papel protagonista.

A nivel de educación infantil, en una de las evaluaciones docentes realizadas se analizaba la actividad “el tiempo” en la que se prioriza la evaluación de las competencias *observar y relacionar,* así como *expresar con iniciativa* y *relacionarse con los demás con respeto.* La reflexión que se hizo en el proceso de evaluación fue la necesidad de concretar qué se evaluaba en las actividades que se planteaban. La propuesta de mejora, que ya se implementó en esta actividad, fue la de *realizar*

propuestas de situaciones de aprendizaje de manera global en los tres cursos de segundo ciclo de educación infantil para poder incidir de manera más personalizada en la evaluación de cada niña y niño con las máximas garantías de éxito.

<table>
<tr><th>Avaluem</th><th>EI3</th><th>EI4</th><th>EI5</th></tr>
<tr>
<td>Observar
Relacionar
Hàbits i confiança
Expressar
Respectar</td>
<td>A les rutines diàries tenim programat “El temps” per familiaritzar els infants en la representació gràfica dels fenòmens atmosfèrics. L’encarregat o encarregada, després de mirar per la finestra, assenyala amb una fletxa el temps que fa aquell matí. Es pot acompanyar amb la cançó: “Pastoret d’on vens?”
 </td>
<td>Es fa un registre col·lectiu del temps, afegint el del cap de setmana per l’infant encarregat. Amb tot el grup es compta els dies què ha fet sol, núvols, sol i núvols i pluja

a la pissarra es compta i amb “peces lego” es fa la representació gràfica per visualitzar el resultat: la filera més llarga és on hi ha més elements (en estadística “la moda”).
A partir del tercer trimestre, s’inicia l’activitat del temps de la setmana en un registre individual.
 </td>
<td>Es realitza un registre del temps mensual, seguint el mateix desenvolupament de l’activitat anterior.

L’últim dia de cada mes, es compta entre tots quin temps ha fet i s’apunta a la pissarra fent la representació del gràfic de barres amb les “peces de lego”.
Finalment s’omple el full de registre individual de les dades del temps, fitxa de treball que ens servirà com a activitat d’avaluació.
 </td>
</tr>
</table>

Imagen 1. Propuesta de educación infantil de la escuela Lluçanès

En otra de las evaluaciones docentes en un centro de primaria, donde el proyecto educativo de escuela tenía un marcado carácter competencial, se detectó que algunas áreas, por ejemplo, las matemáticas, quedaban excluidas de las situaciones de aprendizaje interdisciplinares. A la conclusión que se llegó fue que *no se trata de hacer una actividad conjunta si el contexto no lo facilita, la propuesta consiste en observar una misma habilidad del alumnado desde diferentes áreas, de manera que el objetivo fuera tomar decisiones consensuadas y conjuntas para abordar dificultades concretas del alumnado*. Así, los propios alumnos de ciclo superior realizaron un diagrama de araña o radar para autoevaluarse y reflexionar sobre su aprendizaje en las distintas actividades que estaban realizando.

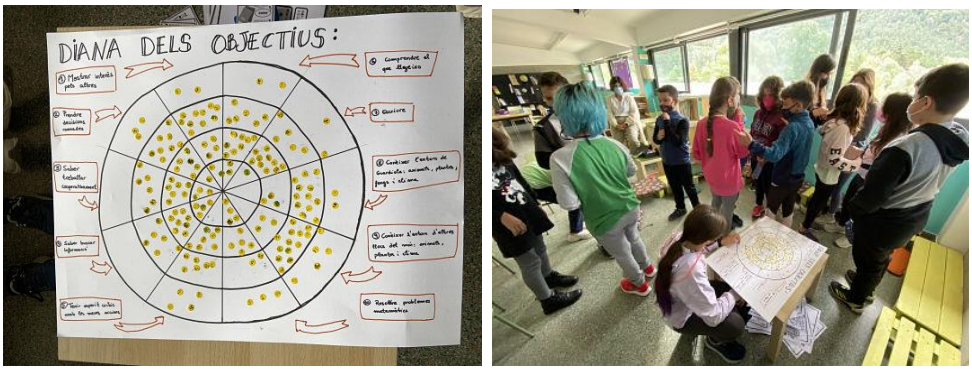


Imagen 2. Diana de autoevaluación de la escuela Sant Llorenç

Los aspectos que priorizaron estaban estrechamente vinculados a las competencias, pero se utilizó una expresión más comprensible para los alumnos: mostrar interés por los demás, tomar decisiones, saber trabajar cooperativamente, saber buscar información, tener espíritu crítico, resolver problemas, conocer el entorno del mundo, conocer el entorno de nuestro pueblo, escribir, comprender lo que leo.

En otra evaluación docente, en este caso en un instituto de educación secundaria, se analizó una actividad interdisciplinar. Al intentar evaluar conjuntamente profesorado de distintas meterías se llegó a la conclusión que *no se trata de crear una rúbrica de manera conjunta para calificar únicamente competencias transversales, sino que se trata de compartir las competencias específicas de distintas materias para definir situaciones de aprendizaje en un mismo contexto y evaluar las competencias de manera coherente a lo largo del proceso de aprendizaje para cada alumna y alumno.* Por ejemplo, en primero de eso, se propuso la actividad “¿nos engañan las estrellas? donde se proponía evaluar la “producción de un póster digital y una maqueta” donde se “argumente” (matemáticas) y se “identifique” el comportamiento de fenómenos naturales (ciencias) a través de “buscar, contrastar y seleccionar información” (digital) para comprender que las cosas no son en realidad como las vemos.

Imagen 3. Situación de aprendizaje de matemáticas y ciencias. Instituto Guillem de Berguedà

La valoración de esta actividad por los agentes implicados durante el proceso de la evaluación docente puso en evidencia la necesidad de una mejora general a nivel de claustro respecto a las estrategias que, mayoritariamente, estaban usando los docentes para evaluar a sus estudiantes. Esta necesidad se vehiculó a través de un asesoramiento de centro liderado por un experto externo. Para definir el asesoramiento se empezó efectuando un diagnóstico general a partir de la observación de diferentes parámetros que intervienen en la evaluación, desde aspectos individuales de cada docente, hasta aspectos colectivos. Una vez identificados aspectos susceptibles de mejora se realizaron trabajos colectivos para analizar y mejorar cada uno de ellos.

El primer aspecto a analizar y mejorar respondía a la pregunta. ¿las actividades que propongo facilitan el aprendizaje de las competencias por encima de memorizar contenidos? La necesidad de redefinir las actividades resultó ser un paso previo a cualquier otra reflexión.

Una vez redefinidas las actividades se trabajó en los instrumentos de observación usados por los docentes para identificar los progresos y las carencias de sus estudiantes respecto a la adquisición de habilidades competenciales.

El siguiente paso consistió en reflexionar sobre el uso que se hacía con la información recogida. Por una parte, se establecieron mecanismos para compartir dicha información con los propios estudiantes, haciéndoles partícipes de su propia evaluación con la finalidad de activar estrategias de mejora y por otra parte se vehicularon mecanismos para compartir la información con el resto de docentes para tomar decisiones colectivas. En este punto se observó poca capacidad de

compartir dificultades de aprendizaje. Los docentes mostraban tendencia a compartir sólo cuestiones actitudinales (hace deberes, hable mucho, se porta mal) pero no aspectos competenciales (comunica, resuelve, se expresa, comprende, relaciona, comparte, etc.).

Para lograr establecer puentes comunicativos entre docentes con la finalidad de consensuar estrategias de mejora de los aprendizajes competenciales de los estudiantes se inició un trabajo en equipos de, como mínimo, dos docentes de distintas materias. El reto consistía, de nuevo, en diseñar una actividad de aprendizaje en un contexto común entre distintas materias pero el requisito principal consistía en diseñar unas tablas de criterios de evaluación fusionando competencias de las distintas materias. De este modo se generó la necesidad de compartir competencias, criterios, e indicadores de evaluación con los que fue posible tomar decisiones conjuntas concretas encaminadas a la mejora de aspectos competenciales de los alumnos y las alumnas.

Se muestra el ejemplo de matemáticas y tecnología de 4º de eso donde el alumnado debe construir una pista de skate polinómica, “resolución de problemas” “experimentado” con el GeoGebra (matemáticas), “diseñando y construyendo” por bloques (tecnología) para realizar una impresión 3D.

CRITERIS	INDICADORS DELS CRITERIS		
	Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
1. Troba una solució satisfactòria al problema plantejat (**CM2 Resol problemes**)	Mostra dificultat a l'hora d'utilitzar els conceptes matemàtics per trobar la pista d'skate que vol acabar fent	Entén els conceptes bàsics que li permeten fer un disseny correcte	Mostra habilitat en l'ús dels conceptes predint, en tot moment quina pista d'skate generarà la funció triada.
2. Es mostra creatiu a l'hora de dissenyar i construir una pista d'skate polinòmica (**CM3 Experimenta**)	Fa pistes molt senzilles amb un parell o tres d'arrels	Fa una pista d'skate correcta amb 4 o 5 arrels	Dissenya una pista d'skate original i sap argumentar la seva forma a partir del elements del polinomi
3. Programa amb blocs la maqueta de la pista d'skate. (CCT9 **Dissenya, construeix i avalua**)	Dissenya la maqueta utilitzant el polinomi treballat a matemàtiques, assignant una amplada de la pista. Utilitza un bucle per generar les làmines que integraran la pista.	Dissenya la maqueta utilitzant el polinomi treballat a matemàtiques, assignant una amplada de la pista proporcionada i un punt d'inici i de final de pista lògic. Utilitza un bucle per generar les làmines primes que integraran la pista.	Dissenya la maqueta utilitzant el polinomi treballat a matemàtiques, assignant una amplada de la pista proporcionada i un punt d'inici i de final de pista lògic. Utilitza un bucle per generar les làmines primes que integraran la pista i afegeix plataformes a l'inici i al final.
4. Genera el fitxer CAD-CAM per enviar-lo a la impressora 3D. (CCT9 **Dissenya, construeix i avalua**)	Genera el fitxer CAD (stl) però no el fitxer CAM (gcode)	Genera el fitxer CAD (stl) i el fitxer CAM (gcode)	Genera el fitxer CAD (stl) i el fitxer CAM (gcode) optimitzant la impressió.
5. Fa ús del GeoGebra i el BlocksCAD per construir el coneixement (CD5 **Construeix coneixement**)	Utilitza el Geogebra i el BlocksCAD abusant de l'assaig i error i evitant una la reflexió	Organitza les idees per tal d'aconseguir que tant el geogebra com el Blockscad generin el que vol	Organitza les idees per tal d'aconseguir que tant el geogebra com el Blockscad generin el que vol i per plantejar-se i respondre les noves preguntes que es fa
6. Descobreix per si mateix els conceptes treballats (CPS2 **Mostra autonomia, s'organitza, aprendre a aprendre**)	Necessita ajuda d'un company, del professor o d'un suport informàtic	Necessita utilitzar bases d'orientació per a poder treballar de manera autònoma	Treballa de manera autònoma o elabora bases d'orientació de manera independent. Ajuda els companys.

Imagen 4. Ejemplo de tablas de criterios de evaluación de competencias de matemáticas y tecnología

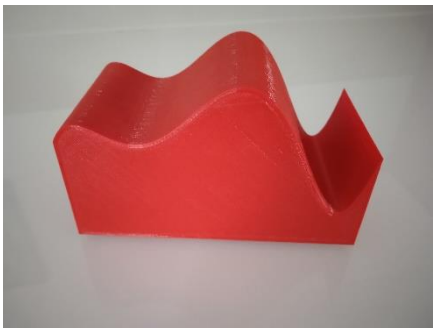


Imagen 5. Impresión 3D de la maqueta de una pista polinómica

4.2. Replanteamiento de las sesiones de evaluación

En otra de las evaluaciones, la docente aspirante que a su vez era tutora de un grupo de educación secundaria, en una de las reuniones que mantuvimos, inspectora, tutora y la propia docente a evaluar, mostró su dificultad para llegar a acuerdos en las sesiones de evaluación. Explicó que en las sesiones de evaluación cada docente ponía la nota y simplemente se elegían frases “de una lista” para describir la situación académica del alumno.

Fruto de la evaluación docente y partiendo de que “la sesión de evaluación es la reunión del equipo docente, coordinada por el tutor o tutora del grupo clase, que tiene como finalidad compartir información y tomar decisiones de forma colegiada sobre el proceso de aprendizaje de los alumnos y alumnas”, se hizo una propuesta de mejora al equipo docente referente a las sesiones de evaluación consistente en:

i. Intentar hablar menos de actitud y comportamiento y más de dificultades de aprendizaje competencial. Basado en el nuevo currículo: La evaluación será global, continua y formativa, teniendo en cuenta el grado de desarrollo de las competencias y su progreso en el conjunto de los procesos de aprendizaje.
ii. Realizar un trabajo en cada departamento didáctico sobre interiorizar las competencias específicas de cada materia, siguiendo la estructura: Aprendizaje = Capacidad + contenido (condiciones) + finalidad. En el caso de matemáticas:

Interpretar, modelizar y resolver	Interpretar, modelizar y resolver situaciones de la vida cotidiana, propias de las matemáticas y de otros ámbitos del conocimiento aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento para explorar procedimientos, obtener soluciones
Argumentar	Argumentar la idoneidad de las soluciones de un problema, evaluando las respuestas obtenidas a través del razonamiento y la lógica matemática, por verificar su validez y generar nuevas preguntas y retos
Conjeturar y crear	Formular conjeturas sencillas o problemas, utilizando el razonamiento y la argumentación, la creatividad y las herramientas tecnológicas, para integrar y generar nuevo conocimiento matemático
Pensamiento computacional	Utilizar el pensamiento computacional, organizando datos, descomponiendo en partes, reconocimiento patrones, interpretando, modificando, generalizando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficiente
Conectar	Conectar diferentes elementos matemáticos relacionando conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado
Contextualizar	Vincular y contextualizar las matemáticas con otras áreas de conocimiento, interrelacionando conceptos y procedimientos, para resolver problemas y desarrollar la capacidad crítica, creativa e innovadora en situaciones diversas.
Comunicar y representar	Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos usando el lenguaje oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología matemática apropiada, para dar significado y permanencia en las ideas matemáticas
Autorregulación del aprendizaje	Desarrollar destrezas personales, como la autorregulación, que ayuden a identificar y gestionar emociones, aprendiendo del error y afrontando las situaciones de incertidumbre como una oportunidad, para perseverar y disfrutar del proceso de aprender matemáticas
Compartir y cooperar	Desarrollar destrezas sociales, como la cooperación, participante activamente en equipos de trabajo inclusivos reconociendo la diversidad y el valor de las aportaciones de los demás, para compartir y construir conocimiento de matemático de forma colectiva

Tabla 1. Competencias específicas de matemáticas en educación secundaria en Cataluña

iii. Evitar sesiones de evaluación en bucle, “evaluar para avanzar”. Detallar los objetivos de cada evaluación trimestral. Así, por ejemplo, se propuso:
   a. En la primera evaluación se priorizó: Identificar las dificultades de aprendizaje de los estudiantes para ayudarles a superarlas y tomar decisiones colegiadas para ayudar a los alumnos a mejorar sus aprendizajes.
   b. En la segunda evaluación se priorizó realizar el seguimiento de los acuerdos tomados en evaluaciones anteriores y seguir tomando decisiones colegiadas para ayudar a los alumnos a mejorar sus aprendizajes.
   c. En la tercera evaluación se priorizó calificar a los alumnos y reflexionar sobre la eficacia de la propia labor docente.

iv. Uno de los problemas detectados fue la falta de concreción en las reuniones de evaluación. Para ello se propuso revisar los protocolos y redefinirlos de manera clara y efectiva para las sesiones de evaluación. También se dio protagonismo al tutor como motor para el cambio en la toma de decisiones.

v. Realizar en otras reuniones de equipo docente una propuesta de banco de recursos para dificultades en el aprendizaje competencial del alumnado. Por ejemplo, se identificaron dificultades genéricas como la de “interpretar las situaciones de aprendizaje planteadas” y dificultades específicas por materias como la de “modelización”. Lo importante de esta propuesta es el trabajo colaborativo del profesorado de un equipo docente en acordar el banco de recursos para que el alumnado perciba la coherencia en las actuaciones.

Le cuesta **interpretar** las situaciones de aprendizaje o los enunciados.	Con ayuda de un compañero, deberá rellenar el documento *¿qué debo hacer?* en todas las actividades que tengan un carácter significativo y complejo
Muestra dificultades a la hora de **modelizar** conceptos matemáticos (uso del lenguaje y abastecimiento)	* Rellenamos bases de orientación específicos modelización e introducción a la simbología matemática * debe hacer un glosario de terminología matemática con las cosas que se van trabajando, el glosario debe llevarlo siempre en una fundas de plástico.
Muestra dificultades en la **resolución de problemas**	Le pediremos que invente sus propios problemas a partir de modelos muy sencillos y que vaya aumentando la dificultad progresivamente. Compartirá sus problemas con los

	compañeros
Mostrar dificultades de reflexión y **argumentación**	Tendrá que rellenar un documento de "errores y soluciones" cada vez que realice actividades significativas y tendrá que guardar y consultar antes de las pruebas escritas
Mostrar dificultad al seguir algoritmos y procedimientos	* Hará bases de orientación muy bien hechas de cada procedimiento importante, le llevará en una funda de plástico y podrá consultarlo * Si la dificultad es más grave le facilitamos de uso de calculadoras y calculadoras simbólicas (GeoGebra y Geogebra CAS)
Dificultades de **representación.**	* Trabajamos con fotografía matemática, mostramos modelos y pido, que el alumno hagan los suyos y los compartan con los compañeros * Potenciamos el uso del GeoGebra y de la hoja de cálculo.

Tabla 2. Documento de trabajo de las dificultades en competencia matemática

4.3. Dimensión técnica y ética de la evaluación

Finalmente, un aspecto que ya se identifica en Chavarria i Borrell (2017) es la dimensión social y ética de la evaluación. Se refieren a las múltiples implicaciones intersubjetivas que la evaluación implica, como las diferentes opiniones, la posible percepción de amenaza, las consecuencias posibles, la transparencia informativa, el compromiso de los implicados y el bienestar de los participantes, entre otros.

Para lograr una evaluación de la competencia docente siempre hay que tener en cuenta esta dimensión ética. Así, se identifican los siguientes instrumentos que pueden facilitarla:

i. Sesión inicial conjunta de inspección con el profesorado que debe ser evaluado, las tutorías correspondientes y la dirección del centro para compartir finalidad de la evaluación, criterios y el desarrollo del proceso. Así como espacio para resolver todas las dudas existentes.
ii. Garantizar la confidencialidad del proceso y la reserva de la información.
iii. Compartir la definición de evaluación formativa y reguladora, así como la doble finalidad de la evaluación: mejorar la práctica docente de la persona motivo de la evaluación y proponer mejoras de la institución. Para ello es necesario identificar y compartir de manera clara las propuestas de mejora.
iv. Propiciar la confianza para incentivar la voluntad de mejora.
v. Facilitar la aplicación de las propuestas de mejora.

vi. Ofrecer propuestas basadas en investigaciones educativas para una evaluación formativa por parte de la inspección.

5. Conclusión

En educación, la evaluación tiene una doble vertiente: evaluar las competencias del alumnado en su proceso de aprendizaje y, por otra parte, evaluar las competencias docentes en su mejora continua profesional.

Para la evaluación de las competencias del alumnado es necesario integrar la propia evaluación en el proceso de aprendizaje y para ello es necesario el diseño de unas actividades competenciales donde tenga cabida el trabajo interdisciplinar en un contexto cercano al alumnado y que la creatividad y la colaboración entre los aprendices facilite el aprendizaje de todos los niños y jóvenes bajo la perspectiva de la equidad, dando un paso más a la inclusión.

Así, por ejemplo, si identificamos las competencias específicas con una expresión sintética se facilita su comprensión, mejorando su empoderamiento por parte de los estudiantes y encontrando con más facilidad puentes entre las competencias de distintas disciplinas, mejorando la concreción de los indicadores para, finalmente, generar un esfuerzo hacia una mejora continuada.

Para la evaluación docente y siguiendo los criterios que se han definido en Cataluña[8], la evaluación del alumnado es un criterio clave para la evaluación docente ya que si se realiza una evaluación formativa del profesorado aportará una mejora en la evaluación formativa del alumnado por la propia práctica y la regulación de la profesión docente. Para ello cabe remarcar la componente que hemos llamado ética de la evaluación con la participación de inspección, la tutoría y la dirección del centro, para crear un entorno de confianza y rigor profesional con el objetivo final de mejorar no solo la profesión docente sino también los procesos de evaluación del propio centro educativo. Finalmente, la importancia de la dirección del centro, para concebir el proceso de la evaluación docente como una formación continua de la

[8] Los cinco criterios de la evaluación docente en Catalunya actualmente son: planificación de la actividad docente, intervención didáctica, evaluación de los alumnos, gestión de aula e implicación en la aplicación del proyecto educativo del centro

propia institución para identificar las propuestas de mejora y comprometerse en su implementación a través de los planes anuales de centro.

Los ejemplos presentados en este artículo contribuyen en la mejora de la evaluación en sus dos vertientes, tanto en los aprendizajes del alumnado como en los procesos de enseñanza y la práctica docente. Éstos se basan en las propuestas de mejora que se han planteado e implementado en los centros a raíz de la evaluación docente. En concreto: el trabajo interdisciplinar para implementar una evaluación competencial en situaciones de aprendizaje, la mejora en las reuniones de evaluación tomando decisiones de forma colegiada sobre el proceso de aprendizaje del alumnado y, finalmente, incorporando a la dimensión técnica de la evaluación, la dimensión ética desde la inspección educativa.

Referencias

Bové, C., Domingo, A. (2016): “L’avaluació formadora dels docents”, en Avaluar per aprendre, monografia de Perspectiva Escolar 390 (pp. 51-55). Barcelona: Asociación de Mestres Rosa Sensat.

Cano, E. (2005) Cómo mejorar las competencias de los docentes. Guía para la autoevaluación y el desarrollo de las competencias del profesorado. Graó. Barcelona.

Chavarria, X. ; Borrell, E. (2022). Avaluació formativa de centre. https://projectes.xtec.cat/transformacioenxarxa/portada/dijous-19-de-maig-de-17-a-19h-lavaluacio-formativa-del-centre-elvira-borrell-i-xavier-chavarria-seminaris-tematics-daprofundiment/

Gorriz M., Vilches S. (2019) Maths Adds up. In: Doig B., Williams J., Swanson D., Borromeo Ferri R., Drake P. (eds) Interdisciplinary Mathematics Education. pp 185-208. ICME-13 Monographs. Springer.

Gorriz, M.; Vilches, S. (2021). Evaluación reguladora en post-pandemia. Ejemplo, eficacia y marco legal. UNION. Revista Iberoamericana de educación matemática. Num. 63. https://union.fespm.es/index.php/UNION/issue/view/72

Hattie, J., H. Timperley. (2007). The power of feedback. Review of Educational Research 77, no. 1: 81–112.

Marchesi, A., Perez, E.M. (2018): Modelo de evaluación para el desarrollo profesional de los docentes. Fundación SM, IDEA.

Monereo, C. (2009). La autenticidad de la evaluación en CASTELLÓ M. (Coord). La evaluación auténtica en enseñanza secundaria y universitaria, Barcelona, Edebé, Innova universitas.

Perrenoud, Ph. (2004). Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar. Barcelona. Graó.

Perrenoud, Ph. (2007). Diez nuevas competencias para enseñar. Barcelona. Graó

Sanmartí, N. (2007). 10 ideas clave. Evaluar para aprender. Colección Ideas Clave, 1. Graó. Barcelona.

Sanmartí, N. (2020). Evaluar és aprendre. Departament Educació. Generalitat de Catalunya.

PoR1 Los materiales manipulativos y las buenas preguntas: el binomio perfecto

Marcos Marrero Cárdenas
marcosmarrerocardenas@gmail.com
Ceip Isaac de Vega (San Isidro, Granadilla de Abona, Tenerife, Islas Canarias).

Núcleo temático: Recursos para el aula.

Modalidad: Ponencia

Nivel educativo: Educación Primaria.

RESUMEN

Que los materiales manipulativos son imprescindibles en cualquier aula donde se imparta matemáticas de calidad en cualquier nivel académico, es una realidad que nadie se cuestiona en el siglo XXI: desde los policubos para la composición y descomposición numérica en Educación Infantil, las Regletas Cuisenaire en Educación Primaria o el material de Baldosas (Álgebra Tiles) para Secundaria. En esta ponencia, presentaremos algunas actividades interesantes con algunos materiales manipulativos, poniendo especial relevancia la planificación y selección de buenas preguntas por parte de los docentes para que sea el alumnado quien indague, explore y potencie su razonamiento lógico- matemático a través de la manipulación, la observación y el diálogo entre iguales y el docente; asumiendo que el papel de las preguntas es la clave para poder sacarle todo el "jugo matemático" a los materiales, pudiendo plantear una misma actividad con diferentes niveles de dificultad y profundización".

Palabras clave: Regletas, Cuisenaire, Primaria.

Aquí está la presentación utilizada:

https://docs.google.com/presentation/d/19iyNelW4MwFGFKj4axy8o8U6cFzMvIw3/edit?usp=sharing&ouid=117179008363914948420&rtpof=true&sd=true

Referencias

BERMEJO, V. (2014). Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor. CCS. Madrid.

BLASCO et al, GRUPO CERO (1990). Materiales curriculares para la Educación Primaria. II Primer ciclo. Edelvives. Valencia.

BRISSIAUD, R. (1989). El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos. Visor. Madrid.

CANALS, M. (2011). Los dossiers de Maria Antònia Canals. Las Regletas. Octaedro. Barcelona.

CANALS, M. (2016). Los dossiers de Maria Antònia Canals. Medida y geometría. Octaedro. Barcelona.

CHAMORRO, M. (2005). Didáctica de las matemáticas para Educación Infantil. Pearson Educación. Madrid.

CONSTANCE, K. (1982). El número en educación preescolar. Visor. Madrid.

CONSTANCE, K. (1988). El pensamiento matemático en los niños. Visor. Madrid.

CONSTANCE, K. (1989). Reinventando la aritmética II. Visor. Madrid.

CONSTANCE, K. (1995). Reinventando la aritmética IIII. Visor. Madrid.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. (2007). Números en color. Acción y reacción en la enseñanza-aprendizaje de la matemática. CCS. Madrid.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. (2013). El número de 2 cifras. CCS. Madrid.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. (2014). La resolución de problemas matemáticos. Grupo Mayéutica. Madrid.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. (2014). Enséñame a contar y a no contar. Grupo Mayéutica. Madrid.

FERRERO, L. (2001). El juego y la matemática. La Muralla. Madrid.

GADINO, A. (1996). Las operaciones aritméticas, los niños y la escuela. Magisterio del Río de la Plata. Argentina.

GARCÍA MARTÍNEZ, S. (2010). Resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria. Trillas. México.

GATEÑO, C. (1962). Elementos de la matemática moderna con números en color. Cuisenaire de España. Madrid.

GATEÑO, C. (1966). Aritmética con números en color. Los números hasta el 100. Cuisenaire de España. Madrid.

GOUTARD, M. (1964). Catorce charlas sobre números en color. Cuisenaire de España. Madrid.

NCTM (2000). Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla.
POLYA, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Trillas. México.

PoR2 Con GeoGebra, ¡también podemos jugar!

Laura Sombra del Río
laura.delrio@ing.unlp.edu.ar
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina
Liceo Víctor Mercante, Argentina

Núcleo temático: Recursos para el aula.

Modalidad: Ponencia.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad.

RESUMEN

El uso de juegos para la enseñanza de la matemática, lejos de ser una novedad, es un tema ampliamente estudiado y puesto en práctica. En esta presentación pondremos la lupa sobre un tipo particular de juego educativo conocido como *microjuego*: un juego simple, de corta duración, que apunta a un objetivo muy específico de aprendizaje. Y más en particular aún, haremos foco en los microjuegos basados en GeoGebra. Analizaremos algunos de los que están disponibles en el repositorio de recursos buscando poner en evidencia la versatilidad de los mismos y la variedad de temas y habilidades que se permiten abordar.

Palabras clave: Microjuegos, Juegos Educativos, GeoGebra, GeoGebra Classroom.

1. Introducción

El uso de juegos para la enseñanza de la matemática, lejos de ser una novedad, es un tema ampliamente estudiado y puesto en práctica. Sus ventajas tanto cognitivas como motivacionales son bien conocidas (de Guzmán, 1989; García Azcárate 2019).

En el ecosistema de juegos educativos, se puede encontrar un tipo de juego particular: el *microjuego*.

De acuerdo con Rahmadi, Lavicza y Houghton (2021) los microjuegos son juegos pequeños y breves que promueven el compromiso y proporcionan una experiencia significativa apoyando el aprendizaje. Poseen objetivos didácticos muy específicos y se integran con otros recursos educativos existentes.

Estos juegos solo ocupan una porción muy pequeña de la clase, permitiendo su implementación aun en cursos con cronogramas muy ajustados. Deben tener un objetivo específico de aprendizaje: No intentan abordar un tema completo, sino que apuntan al repaso de un concepto puntual, o a la práctica de una habilidad concreta. Es por esto importante que se integren con otro tipo de recursos educativos, en lugar de intentar reemplazar al resto de los recursos u ocupar un lugar protagónico.

En este trabajo se analizan algunos de los microjuegos que están disponibles en el repositorio de recursos de GeoGebra (www.geogebra.org) buscando poner en evidencia la versatilidad de estos recursos y la variedad de temas y habilidades que permiten abordar. Además, se explicará cómo puede utilizarse GeoGebra Classroom (Zöchbauer y Hohenwarter, 2020) como una plataforma de juegos en línea.

El objetivo de la ponencia es dar a conocer un amplio conjunto de juegos y dar la oportunidad a los asistentes de probar este tipo de recursos y reflexionar sobre las posibilidades de implementación en el aula. Para poder profundizar en otros aspectos de la temática, se recomienda la lectura del artículo Del Río (2022).

2. Juegos para diversos temas y diversos niveles educativos

2.1 Adivina el polígono

Este juego está basado en un ya clásico juego de mesa, en el que cada participante debe adivinar el personaje que tiene su oponente haciéndole preguntas que puedan responderse por sí o por no: ¿Tu personaje usa anteojos? ¿Tu personaje es rubio/a? ¿Tu personaje lleva bigotes?

En esta versión matemática del juego, cada jugador debe abrir un *applet* de GeoGebra en su computadora o teléfono móvil: https://www.geogebra.org/m/ykwdbcmf. El azar le asignará uno de los polígonos, el que se encuentra debajo de la leyenda *Tu carta* (Imagen 1), y ese será el polígono

que el contrincante deberá adivinar. Cada jugador en su turno realizará una pregunta a su oponente: ¿Tu polígono tiene 3 lados? ¿Tu polígono tiene todos sus lados iguales? Las preguntas deben poder responderse por sí o no (es decir *¿cuántos lados tiene tu polígono?* no es una pregunta válida). De acuerdo a la respuesta del contrincante, el jugador descartará aquellos polígonos que no cumplan las condiciones haciendo clic sobre la carta correspondiente, o tocando con el dedo si juega desde un dispositivo móvil.

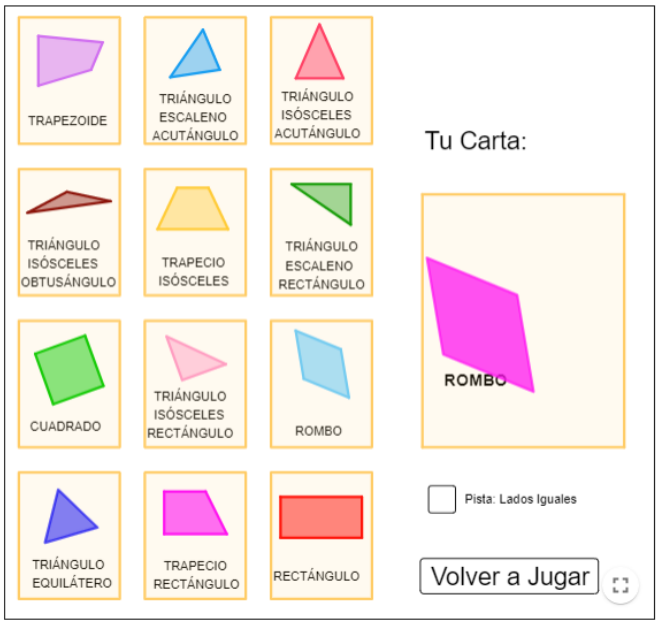


Imagen 1. Interfaz del juego *Adivina el Polígono*.

Una vez que el jugador cree saber cuál es el polígono de su oponente, arriesga un nombre y, si ha acertado, se declara ganador.

El objetivo didáctico que persigue este juego es dar a conocer o repasar las propiedades que definen a cada figura, familiarizarse con el vocabulario específico del campo de la geometría y desarrollar habilidades lógicas al elegir aquellas preguntas que resulten más útiles para descartar la mayor cantidad de posibilidades por jugada.

La implementación de este juego fue realizada en conjunto con Gianina Gambetta, integrante del Instituto GeoGebra de La Plata.

2.2 Aplasta al coronavirus

Este juego fue diseñado e implementado durante la etapa de enseñanza remota debida a la pandemia de COVID 19. Fue pensado para repasar coordenadas cartesianas con estudiantes tanto de escuela secundaria como con ingresantes a la universidad. Antes de la pandemia, recurría al clásico juego de la *Batalla Naval* para realizar este repaso, pero en la virtualidad se construyó esta versión para poder jugar en línea.

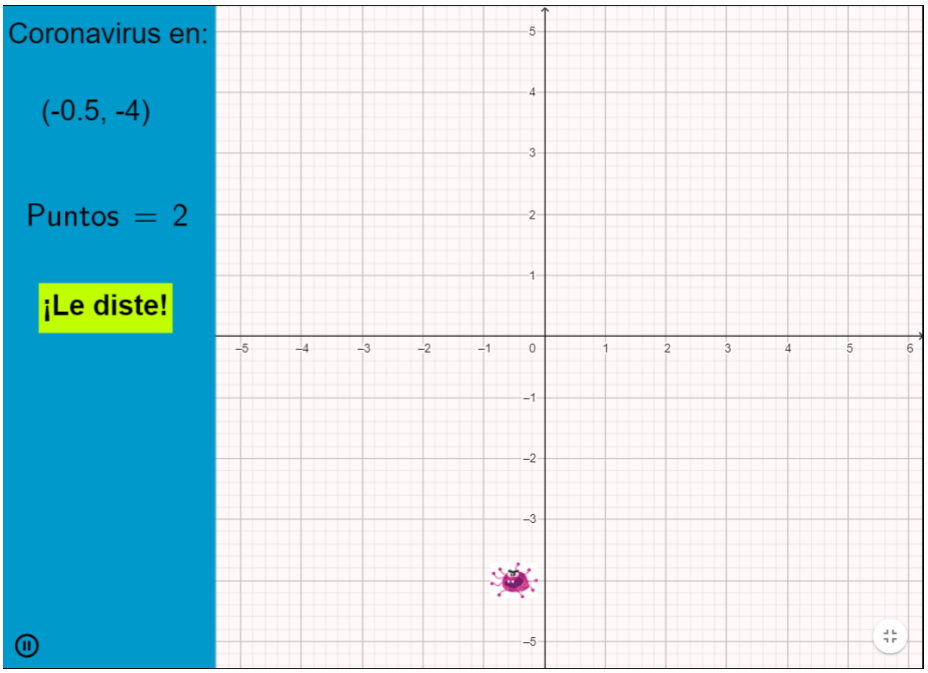


Imagen 2. Interfaz del juego *Aplasta al Coronavirus*.

En la pantalla, se indican las coordenadas del punto donde se encuentra escondido el coronavirus (Imagen 2). El jugador debe hacer clic, o tocar con su dedo si el dispositivo es táctil, en el lugar indicado para “aplastar” al virus. Si logra encontrarlo, sumará un punto. Si no lo logra, se le mostrará dónde se encontraba realmente el virus. La idea es que los estudiantes que presentan confusiones con el sistema cartesiano, al visualizar la posición del virus puedan darse cuenta de sus errores y corregirlos para así mejorar su comprensión.

2.3 Escoba del Uno

Este juego es una versión digital de la *Escoba Fraccionada* (Contreras, 2004) que es a su vez, una versión de la *Escoba de 15*.

El jugador recibe tres cartas y hay cuatro cartas colocadas sobre "la mesa". El jugador debe analizar si sumando una de sus cartas con una o más de las cartas en la mesa puede obtener como resultado el número 1. Si es así, seleccionará el grupo de cartas que suman 1 y presionará el botón *Colectar cartas* (Imagen 3). Si todo es correcto, sumará un punto por cada carta involucrada (es decir, si usó una de sus cartas y una de la mesa, sumará dos puntos; si usó una de sus cartas y tres de la mesa, sumará cuatro). Su puntaje se duplicará si acaba las cartas que están sobre la mesa, ya que en ese caso habrá *hecho escoba*.

Tanto en la Escoba de 15 como en la Escoba Fraccionada, juegan varios jugadores unos contra otros y gana quien suma más puntos. La Escoba del 1, en cambio, puede jugarse en solitario, intentando cada vez obtener más puntos, o bien compitiendo con otros a ver quién suma más puntos, aunque en esta oportunidad no se comparte el mazo, sino que cada quién contará con el propio, ni se juega por turnos.

Imagen 3. Interfaz del juego *Escoba del 1*. A la izquierda, cartas recibidas y cartas colocadas en la mesa. En rojo, el conjunto de cartas seleccionadas para jugar y sumar 1. A la derecha, luego de presionar "colectar cartas" se anuncia al usuario que la jugada es válida y que suma 3 puntos.

El objetivo didáctico del juego es practicar la suma de fracciones, potenciando el cálculo mental por sobre la aplicación de algoritmos.

2.4 Golf y Fulbito

Estos juegos fueron diseñados para practicar funciones lineales y cuadráticas. En ambos, el objetivo es ingresar la función lineal o cuadrática correcta para imprimir a una pelota (de golf o de fútbol) una trayectoria adecuada que permita sumar puntos.

En el caso del Golf, se presenta un jugador de golf colocado en un punto del eje de ordenadas y un hoyo en un punto del plano que no está en dicho eje. El jugador debe ingresar el valor de la pendiente de la recta y presionar un botón para que la bola se mueva en la dirección de la recta. Si emboca la bola en el hoyo, suma un punto. Si no lo logra, se le mostrará en pantalla la trayectoria que tendría la bola según el valor ingresado para la pendiente. De este modo, el alumno podrá notar si, por ejemplo, el signo de la pendiente no era el indicado, o si al dividir intercambió la variación en y con la variación en x, por comentar algunos de los errores más comunes.

En otra versión de este juego, el golfista ya no se encuentra en el eje y, y el estudiante debe ingresar la ecuación de la recta que une la bola con el hoyo para poder sumar puntos.

En el juego del Fulbito (palabra que se usa en Argentina para referirse al Fútbol amateur), lo que se da como datos para poder construir la función cuadrática son sus raíces, dado que la jugadora se encuentra con la pelota en un punto del eje x y el punto de gol también se encuentra en dicho eje. Se pretende que los estudiantes se den cuenta de que la estrategia ganadora consiste en utilizar la forma factorizada de la función cuadrática.

3. El rol de GeoGebra Classroom

Todos los juegos mencionados en el apartado anterior fueron implementados con el *software* libre GeoGebra. Durante el período de enseñanza virtual debida a la pandemia de COVID 19, GeoGebra lanzó su herramienta Classroom que permite monitorear en tiempo real o en diferido el avance de los estudiantes en una tarea de GeoGebra.

Para jugar a varios de estos juegos con los estudiantes, se crearon lecciones de GeoGebra Classroom (GeoGebra Team, 2020) y se los invitó a unirse mediante el correspondiente enlace. La mayoría de las veces se les pidió que formen equipos, se conecten mediante una videollamada y que uno de los integrantes ingrese al enlace y comparta pantalla para que entre todos pudieran jugar e intentar derrotar a los equipos rivales. Una vez ingresados los estudiantes en la clase, se activaba la misma para que todos pudieran comenzar en simultáneo. Se les daba algunos minutos (entre 10 y 20, dependiendo del juego) y al finalizar este tiempo la clase se ponía en pausa. Allí se procedía a ver qué equipo había obtenido más puntos, se anunciaba el equipo ganador y se invitaba a sus integrantes a contar al resto de la clase cómo habían hecho para ganar, es decir, cuál había sido su estrategia ganadora.

Cabe destacar que esta dinámica fue muy bien recibida por los estudiantes (como se explica en mayor detalle en Del Río, 2022) y sirvió para motivar a los alumnos a participar activamente de las clases en el difícil contexto de la pandemia de COVID 19. También contribuyó favorablemente a la conformación de grupos de trabajo, lo cual representó un gran desafío en el contexto de la pandemia, ya que los alumnos se encontraban cursando desde las casas y no se conocían entre sí. En este sentido, los juegos sirvieron para *romper el hielo,* animarlos a interactuar y conocerse y esto se reflejó más tarde en el funcionamiento de los grupos de estudio en micro salas de videollamadas en las que resolvían problemas, y dialogaban sobre los temas de la materia.

Esta estrategia también puede implementarse en el aula presencial, aunque en este caso se recomienda la revisión y adecuación de los *applets* para asegurar su usabilidad en dispositivos móviles, y grupos de trabajo más pequeños (de dos o tres estudiantes) que puedan utilizar en conjunto un solo dispositivo móvil.

4. A modo de cierre

Uno de los objetivos de esta ponencia es el de dar a conocer las posibilidades que brinda el *software* libre GeoGebra para la creación y/o utilización de microjuegos en el aula de matemática. La presentación de estos ejemplos permite mostrar la

versatilidad de estos recursos, para abordar una gran diversidad de temas matemáticos.

En el transcurso de la ponencia, los asistentes a adoptan el rol de estudiante/jugador para probar estos recursos y reflexionar acerca de las posibilidades de implementación en el aula: posibles ventajas, dificultades, etc.

Otro objetivo es el de difundir el uso de la herramienta GeoGebra Classroom, que es un gran aporte tanto para la enseñanza remota como presencial, ya que permite hacer un seguimiento en tiempo real del desarrollo de las actividades de los alumnos.

Se espera poder animar a otros colegas docentes que aún no implementen juegos en sus clases a hacerlo, ya que la experiencia es muy gratificante y muy positiva tanto para los docentes como para los estudiantes.

Referencias

Contreras (2004) Las Matemáticas de ESO y bachillerato a través de los juegos. Material de curso.

Del Río, L. (2022) Microjuegos creados con GeoGebra: Su rol durante la virtualización de la enseñanza por la pandemia y… ¿después? *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. 64, 1-12.

García Azcárate, A. (2019) Matemáticas con juegos: Aprender y disfrutar. *Épsilon*, 101, 11-28.

GeoGebra Team (2020) Aprende GeoGebra Classroom. Disponible en https://www.geogebra.org/m/fstbrmvt#material/zg9g57ya

Guzmán, M. de (1989). Juegos y Matemáticas. *Suma*. 4, 61-64

Rahmadi, I.F., Lavicza, Z., Houghton, T. (2021) Defining Microgames in Education Context. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET),* 16(22), 4–16. https://doi.org/10.3991/ijet.v16i22.20929

Zöchbauer, J., Hohenwarter, M. (2020). Developing a collaboration tool to give every student a voice in a classroom discussion. En Seventh ERME Topic Conference on Language in the Mathematics Classroom, 1, 195–202.

PoF1 De la formación del profesorado en currículum y evaluación competencial al asesoramiento a centros

Iolanda Guevara Casanova
iguevara@xtec.cat
Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya, Universitat Autònoma de Barcelona

Núcleo temático: formación del profesorado.

Modalidad: Ponencia.

Nivel educativo: Interniveles.

RESUMEN

El 4 de julio del 2018 se publicó en el Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya (DOGC, 2018) la Orden por la que se determinaban el procedimiento, los documentos y los requisitos formales del proceso de evaluación en la educación secundaria obligatoria.

Durante la elaboración esta Orden de evaluación, el Servei de currículum de la ESO y del Bachillerato del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya fue consciente que, el giro que suponía la evaluación por competencias en contraposición a la evaluación por contenidos requería un amplio plan de formación del profesorado que diese apoyo y respuesta a esta nueva manera de evaluar.

En esta ponencia se expone el recorrido de este plan de formación del profesorado, así como su evolución a *Asesoramientos a centros en currículum y evaluación competenciales* y también a la creación del programa de innovación *Recerca, Creació i Servei.*

1.Currículum y evaluación competencial por ámbitos

1.1. Los formadores

En enero del 2018 se constituyó un equipo de trabajo, formado por profesores de los diferentes ámbitos del currículo de la educación secundaria obligatoria: ciencias, ciencias sociales, educación física, lengua, lengua extranjera, matemáticas, música, visual y plástica, con el propósito de definir una estructura comuna para los cursos de formación del profesorado de las diferentes materias de la ESO y una vez definida, elaborar el material de apoyo para impartir los cursos de formación.

Una vez definida la estructura común y elaborada una primera propuesta para cada materia, se constituyeron grupos de trabajo por materias y coordinados por el especialista del grupo inicial. Los componentes de estos grupos de trabajo fueron los primeros formadores que impartieron los cursos: *Currículo y evaluación competencial por ámbitos,* por todo el territorio a partir del segundo semestre del curso 2018-2019.

Estos grupos de trabajo se constituyeron a partir de pedir candidatos a cada territorio, los diez Servicios Territoriales en que se organizaba el Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya. Recientemente se han definido dos nuevos ST para dar respuesta a demandas y necesidades del territorio (Alt Pirineu i Aran, Penedès). Los candidatos debían ser profesores en ejercicio en el aula o en centros de recursos de profesores, especialistas de las diferentes materias y que tuvieran experiencia en formación del profesorado.

La creación de estos equipos de formadores era la base para que en el futuro cada territorio tuviese sus especialistas y que a la larga éste pudiese organizar su formación y asesoramiento a centros de manera descentralizada, en base a las demandas de los propios centros y realizada por profesionales de la zona.

1.2 Estructura e implementación

Los cursos debían ser de 30 horas, 20 presenciales y 10 de trabajo personalizado, que finalmente quedaron en 21 y 9, al concretarse en 7 sesiones presenciales de 3 horas. Esta estructura venía condicionada por los estándares establecidos por el Departament d'Eduació sobre cursos de formación, que siempre tienen una parte presencial y otra de trabajo individualizado (aprox. 2/3 y 1/3).

Se implementaron durante el curso 2018-2019, 2019-2020, 2020-201 en tres turnos anuales correspondientes al primer semestre, segundo semestre y verano. Durante el segundo semestre y el verano del curso 2019-2020, así como todo el curso 2020-2021 todos los cursos pasaron a ser de seis sesiones virtuales sincrónicas a causa de la covid.

La decisión de no impartir esta formación durante el curso 2021-2022 no fue provocada por falta de demanda de los cursos sino porque desde el Servicio de currículum de la ESO y del Bachillerato se optó por volcar los recursos en la elaboración del nuevo currículo que debe implantarse en los cursos impares de las diferentes etapas educativas a partir del curso 2022-2023. También porque a pesar de que el contenido y propósito de los cursos, el trabajo y evaluación por competencias continuaba vigente, las competencias se habían remodelado de título (de competencias básicas a competencias específicas) y de contenido. A pesar de que las nuevas se inspiraban en las anteriores se podía confundir al profesorado si no se incorporaba al curso el nuevo currículo que se estaba elaborando. En definitiva, que hacía falta tener el nuevo currículo terminado para poder seguir con los cursos de *Currículum y evaluación competencial.*

1.3 Estructura y contenido

Si el curso llevaba por título *Currículo y evaluación competencial* se trataba de conseguir que al finalizar el curso los asistentes, profesores de una determinada especialidad, salieran con ideas y material concreto que les facilitase el análisis y la valoración de sus clases, y su material de soporte, para llevarlos a un terreno más competencial y mejorar la evaluación del alumnado. Las competencias básicas de las materias y los ámbitos transversales se habían desarrollado desde el curso 2012 (Departament d'Educació 2012-2021) y se habían introducido en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria desde el 2015 (DOGC, 2015) pero faltaba formación para consolidarlo.

El encargo del Servicio de Currículum al equipo era claro y directo se debe «enseñar» a los asistentes a construir una unidad didáctica verdaderamente competencial y que contenga la evaluación formativa y formadora correspondiente.

Durante las sesiones de trabajo del equipo inicial, se puso de manifiesto que los cursos de formación también modelan cómo cada docente hará sus clases después del curso. Así, si el curso era únicamente transmisor de «buenas ideas y métodos» también lo serán o continuarán siendo las clases de los docentes asistentes al curso. En cambio, si se quería promover el trabajo en grupo colaborativo en las aulas también debía utilizar esta metodología el curso de formación.

En vistas a todas estas consideraciones la estructura y la metodología del curso quedó bastante definida.

Sesión 1: Introducción y propósito del curso. Evaluación y currículo. Las competencias profesionales del profesor.

Sesión 2: Las secuencias didácticas. Contenidos versus competencias.

Sesión 3: Estrategias de gestión de aula inclusivas. Como se hace una programación.

Sesión 4: La evaluación.

Sesión 5: Competencias transversales.

Sesión 6: Proyectos.

Sesión 7: Exposición de las unidades elaboradas.

Las sesiones de tres horas tenían dos partes, una primera en la que el formador con el soporte de un *powerpoint* exponía el tema y los conceptos que quería introducir de forma dinámica promoviendo la interacción de los docentes y una segunda parte, en la que los docentes organizados en grupos empezaban a trabajar sobre la unidad didáctica que debían diseñar a lo largo del curso de formación.

Los grupos se formaban el primer día de manera que cada asistente diseñaba la unidad del curso y el tema que estaba trabajando o que podía trabajar en breve. El diseño debía ser pensando en sus alumnos, un diseño «real» para unos alumnos concretos. Esta era la finalidad principal: lo que se hacía en el curso de formación, debía tener repercusión directa en el aula aquel mismo año.

Los formadores disponían del material para impartir el curso que había sido elaborado por los formadores del núcleo inicial. El formador tenía libertad para adaptar el material, pero no para eliminar o introducir nuevas sesiones.

Desde la primera formación del curso 2017-2018, el material se compartía en carpetas por materias y también se realizaron reuniones mensuales para compartir no sólo contenido de las siete sesiones que había diseñado el núcleo inicial sino también para que todos los formadores se sintieran cómodos con el diseño, se lo hiciesen suyo y si era menester se introdujesen cambios. En la misma sesión de coordinación mensual, se hacía una parte común con todos los formadores y otra distribuidos en subgrupos por materias Está organización en red se valoró muy positivamente durante todo el proceso y se continuó durante el curso 2018-2019, hasta que en cierta manera formadores y sesiones quedaron estabilizadas ya para el verano del 2019 y el curso 2019-2020.

El curso 2019-2020 tuvo sus cambios y transformaciones especiales a causa de la covid. Los cursos del segundo semestre pasaron de presenciales a virtuales sincrónicos, de las siete sesiones se pasó a seis porque básicamente se suprimió la última (exponer las unidades) que se transformó en que todos los asistentes leían y valoraban las unidades didácticas construidas por los otros grupos con unos criterios de evaluación comunes. En algunos casos esta valoración final se hizo sincrónica en el grupo reducido que cada uno había trabajado para elaborar la unidad didáctica y en otros se hizo de forma individual.

El hecho de que todas las materias utilizarán el mismo guion fue una de las premisas iniciales ya que todas las materias tenían sus competencias propias de la materia y todas debían, evaluar el aprendizaje del alumnado no en base a los conocimientos adquiridos sino en base a las competencias desarrolladas, nadie podía quedar fuera del currículum y evaluación competencial.

Se había empezado por la formación de los especialistas pensando en que se necesitan especialistas bien formados para después, trabajando conjuntamente en los equipos docentes de cada centro, se tomasen decisión que repercutieran sobre todos los alumnos, independientemente de la materia que estuviesen trabajando.

Este fue un gran debate previo que se tuvo durante el proceso de diseño de la formación. ¿Empezar por los profesores desde el ámbito de la materia y más tarde pasar a asesorar a los centros sobre cómo implantar un currículo y una evaluación competenciales, o bien empezar por el asesoramiento general a centros y luego formar a los profesores por materias?

La apuesta fue formar primero a los especialistas y posteriormente hacer los asesoramientos a los centros.

1.4 El legado de los cursos

Entre material inicial que había elaborado cada coordinador de materia, no solo había las diapositivas de las siete sesiones del curso sino también un ejemplo de unidad didáctica creada por el formador con las características que quería encontrar en las unidades que diseñasen los asistentes al curso, esto es un ejemplo de unidad didáctica con sus actividades de aprendizaje y de evaluación competenciales.

Durante el curso 2018-2019, los formadores tuvieron conciencia que las unidades didácticas elaboradas por los asistentes a los cursos podrían ser también un modelo de referencia para los nuevos asistentes a otros cursos y también para profesores que por la razón que fuese no asistían al curso, pero podían estar interesados en ver unidades didácticas competenciales.

Decidieron revisar de nuevo las unidades producidas por sus alumnos con vistas a compartirlas para todo el profesorado en el portal XTEC (Xarxa Telemática de Catalunya), en el apartado correspondiente a Currículum y orientación de la ESO. Pidieron permiso de edición a los autores y seleccionaron las que les parecían mejor.

En julio del 2019 se publicaron las primeras unidades en el apartado *Secuencias didácticas de la ESO*, del portal XTEC (Vilches y otros, 2019):

Se hicieron tantas carpetas como ámbitos y dentro de ellas las diferentes materias:

- Lingüístico: Catalán/Castellano, Inglés

- Matemático

- Científico Tecnológico: Biología y Geología/Física y Química, Tecnología

- Sociales: Geografía e Historia

- Artístico: Educación Visual y Plástica, Música

- Educación Física

2.Competencias y evaluación de los ámbitos transversales

2.1 La motivación y los formadores

En la Orden de evaluación de julio del 2018, también se implanta para el curso 2017-2018 la evaluación del ámbito digital y del personal y social. Estas competencias estaban ya desarrolladas con sus correspondientes publicaciones, la digital se actualizó como segunda edición en enero de 2017 y la personal y social se editó por primera vez en julio de 2018.

Evaluar esos dos ámbitos y emitir una cualificación específica para cada uno de ellos en la evaluación final de cada uno de los cuatro cursos generó la necesidad de impartir algún tipo de formación al respecto. Se debía dirigir en este caso no a especialistas de materia si no a jefes de estudio o coordinadores pedagógicos para que al volver al centro tuviesen ideas claras de qué decisiones se debían tomar en el centro, sobre que docentes eran los responsables de evaluar y cualificar la adquisición de esas competencias por parte de los alumnos.

Los formadores fueron algunos de los profesores de materia que eran coordinadores en su centro, o jefes de estudio o directores. Como en el caso anterior se organizó un grupo de trabajo previo (octubre-diciembre de 2018) formado por cuatro profesores del núcleo inicial de formadores de *Currículo y evaluación competencial* de diversas especialidades para diseñar el curso e implementarlo de forma piloto de enero a abril de 2019.

2.2. Estructura, contenido e implementación

Se diseñaron cursos de 20 horas, 15 presenciales y 5 individuales, dirigidos a coordinadores de equipos docentes.

Las 15 horas presenciales se distribuyeron en cinco sesiones de las cuales las cuatro primeras eran quincenales y la quinta y última se impartía unos meses después con la intención de que cada coordinador o equipo de coordinadores de un centro elaborase una propuesta real de cómo se organizaría el centro para evaluar de forma colegiada esas dos competencias transversales, la digital y la personal y social. Se quería evitar a toda costa que la competencia digital fuera solo una responsabilidad del profesor de Tecnología y la personal y social del tutor del grupo.

Las cinco sesiones diseñadas por el equipo se concretaron en los temas siguientes:

Sesión 1: Ubicación de los ámbitos transversales en el currículum.

Sesión 2: El ámbito digital.

Sesión 3: El ámbito personal y social.

Sesión 4: Proyecto de centro para la programación y la evaluación de los ámbitos transversales.

Sesión 5: Presentación de los proyectos de cada centro.

Las sesiones de tres horas tenían una estructura similar a las de *Currículum y evaluación competencial por ámbitos*, en la primera parte el formador exponía promoviendo la interacción de los docentes y en la segunda les proponía actividades para hacer en grupo relacionadas con los contenidos de la primera parte. Igual como se estaba haciendo con los cursos de ámbito, los formadores disponían del material para el curso que había sido elaborado por los formadores del núcleo inicial. Las condiciones de uso del material por parte de los formadores y la revisión final se establecieron de forma similar a la de los cursos de materia: libertad para adaptar el material, pero no para eliminar o introducir nuevas sesiones y revisión colectiva al acabar cada turno.

Por lo que se refiere a la implementación de los cursos, desde Currículo en coordinación con los Servicios Territoriales y la Inspección educativa se recomendó que todos los centros delegasen a uno o dos docentes con responsabilidades de coordinación (jefe de estudios, coordinador pedagógico, coordinador de nivel o equivalentes) para asistir al curso en alguno de los cuatro turnos que se planificaron

para el bienio 2018-2020. No se hicieron cursos en verano porque no había la opción de preparar la implementación en el centro de esta evaluación de los ámbitos transversales y luego exponerla en el grupo. Los cursos se implementaron, una vez más, distribuidos entre los 10 territorios de los Servicios Territoriales, en dos turnos cada curso, unos en el primer semestre y otros en el segundo, colocando siempre la última sesión como mínimo dos meses después de la cuarta, para dar tiempo a los centros a diseñar su propio plan.

Se realizaron un total de 19 cursos, 14 el primer año y 5 el segundo.

3.Asesoramientos a centros en currículum y evaluación competenciales

El curso 2018-2019 era el segundo curso de implementación de la formación por ámbitos y por competencias transversales, empezaba a haber en todos los centros profesores que habían pasado por la formación. Según el plan inicial, una vez formados los docentes por materia se debía dar un segundo paso y asesorar a los centros para que la formación recibida se expandiera en el centro y se plantearan nuevas maneras de trabajar, no solo por parte de los docentes formados sino también por el resto de docentes que tal vez no habían acudido a la formación por desconocimiento o porque pensaban que ya estaban trabajando en esta línea. Se trataba de incluir a todo el claustro en la toma de decisiones a nivel de centro sobre como pasar de trabajar por competencias y evaluar contenidos a evaluar el logro de las competencias por parte del alumnado. Está claro que el cambio remueve todo el proceso educativo, evaluar es aprender como dice Sanmartí (2020).

Todo apuntaba pues a que en el curso siguiente 2019-2020 se debía ofrecer a los centros la posibilidad de recibir asesoramientos en currículum y evaluación competenciales.

Qué tipo de asesoramiento y quien lo podía impartir, es lo que estaba sobre la mesa y fue lo que decidió el Servicio de Currículum y el núcleo inicial de formadores.

3.1. Los asesores y la formación de los mismos

De marzo a junio de 2019 se realizó una formación de 20 horas, en parte presencial y en parte on line dirigida a los futuros asesores: *Formación de formadores en asesoramiento a centros en currículum y evaluación competenciales*. Se compaginaron los dos tipos de sesiones para evitar desplazamientos a los formados que provenían de los diez Servicios Territoriales de Catalunya. Se tenía mucho interés en formar asesores de todo el territorio para poder ofrecer después asesoramiento a todos los territorios e impartidos por docentes de la misma zona.

Para recaptar asesores, se preguntó a los formadores de ámbito si se veían y querían formar parte del nuevo equipo de asesores de centro en currículum y evaluación competencial. También se preguntó a los Servicios Territoriales si tenían formadores interesados en formar parte del equipo. El perfil continuaba siendo un profesor/a en activo en centro docente o centro de profesores y si tenían experiencia en cargos de coordinación mejor ya que aparte de tener buena base didáctica también se requería una cierta capacidad de gestionar equipos de trabajo.

Los objetivos de la formación de los asesores fueron:

a) Formar perfiles de formadores con las competencias necesarias para responder a las demandas de los centros que soliciten asesoramiento en el proceso de implementación del currículum competencial.

b) Identificar los contenidos, las herramientas y las estrategias más relevantes que permitan un asesoramiento flexible, funcional y contextualizado en el centro que solicite este apoyo.

c) Establecer criterios para priorizar la selección de los centros que pidan el asesoramiento.

Se reclutaron 24 formadores, lo que permitiría ofrecer para el curso 2019-2020 un mínimo de 24 asesoramientos distribuidos entre los diez Servicios Territoriales. En la formación también intervino la Inspección Educativa y a nivel Territorial fue muy adecuado para poder tener criterio a la hora de adjudicar los asesoramientos a partir de las peticiones de centros recibidas.

3.2. Estructura y contenido de los asesoramientos

Los objetivos del asesoramiento eran claros, se diseñaron con los formadores del grupo inicial y se consensuaron con todo el equipo de asesores durante la formación inicial:

a) Asesorar los claustros de los centros de secundaria hacia el cambio metodológico que implica el currículum y la evaluación competenciales.

b) Identificar los contenidos, las herramientas y las estrategias más relevantes que permitan un asesoramiento flexible, funcional y contextualizado en los centros que soliciten este apoyo.

c) Analizar diferentes modelos de organización curricular e implementar aquellos que permitan la coordinación horizontal, el trabajo colegiado entre los ámbitos y entre los equipos de trabajo de los docentes.

d) Asesorar al profesorado en todos aquellos ámbitos de la didáctica al aula que faciliten los aprendizajes competenciales priorizando la evaluación formativa.

e) Proponer modelos de programación curricular en los diversos niveles de concreción y del diseño de actividades y de herramientas de evaluación.

f) Favorecer la reflexión docente y el trabajo en red, así como procurar que el alumnado aprenda de forma reflexiva y encuentre significado y sentido en el esfuerzo para aprender.

Los contenidos a trabajar en las sesiones también se establecieron en el curso inicial de asesores:

Organización y gestión de centro. Modelos diversos y complementarios para organizar el currículum y el trabajo colaborativo entre el profesorado

Gestión y dinamización de los grupos internos de impulso para liderar y transferir las acciones de mejora en el centro

Detección y definición de los ámbitos didácticos que intervienen en el proceso de enseñar, aprender y evaluar por competencias. Metodologías, estrategias, formas de trabajo en el aula, la conexión entre los ámbitos, el trabajo globalizado, etc.

El proceso y los ámbitos de implementación de la evaluación. Herramientas y recursos para evaluar por competencias.

El asesoramiento a nivel de formación era un curso de 30 horas de las cuales 20 presenciales y 10 de trabajo individual, en cierta manera seguía la misma estructura de los cursos de *Currículo y evaluación competencial.* El asesor y el equipo directivo del centro debían decidir, el objeto del asesoramiento y como se concretaban las 20 horas presenciales, si eran con todo el claustro o bien con subgrupos del mismo que luego generan encargos para implicar al resto de los docentes del centro. Lo que no se quería es que el asesoramiento se redujese a un equipo impulsor del claustro, a los más motivados, porqué en esos casos la transformación se expande tan despacio que realmente no llega a todo el centro. En la difusión de la oferta este fue un punto importante a considerar.

Un requisito para conceder el asesoramiento a un centro es que se inscribiese como mínimo el 70% del claustro de profesores que impartían docencia en ESO y bachillerato, no se incluía en este cómputo el profesorado que impartía docencia en Formación Profesional.

3.3. La difusión de la oferta y primeros centros asesorados

En la difusión de la oferta, se caracterizaba el asesoramiento como: «Un curso de 30 horas de formación en centro (20 presenciales). Este curso se presenta como una continuación de los cursos de *Currículum y evaluación competencial por ámbitos*, así como los cursos de *Competencias de los ámbitos transversales*. Este curso se plantea como una acción formativa globalizadora que se fundamenta en la aplicación de estrategias de mejora educativa a partir del punto de partida y del contexto de cada centro receptor, de forma que se incentive el cambio metodológico necesario para implementar el currículum y la evaluación competencial. Este propósito tendrá que ser un proceso progresivo que movilice el trabajo colegiado

entre los docentes y el consenso necesario en los diversos ámbitos de actuación y toma de decisiones».

La oferta se publicó y se instó a los responsables de formación de cada Servicio Territorial y al Inspector jefe de la zona que propusieran a qué centros les podía venir bien ese asesoramiento. También se pedía que una parte del profesorado del centro hubiese pasado por la formación previa de *Currículo y evaluación competencial* y también de *Competencias y evaluación de los ámbitos transversales* por parte de los miembros de coordinación del centro.

El curso 2019-2020 se iniciaron 21 asesoramientos a centros distribuidos por todo el territorio y lo acabaron 20. Fue un año complicado a partir del 13 de marzo ya que a partir de esa fecha todo cambió y también cambiaron los asesoramientos que tuvieron que convertir las sesiones presenciales que les quedaban por hacer a sesiones sincrónicas online.

Para acompañar a los asesores y coordinar el trabajo del equipo se estableció un calendario de reuniones mensuales presenciales de coordinación. En la primera reunión, realizada en septiembre antes de iniciar el curso, se acordó que cada asesor escribiría un diario del asesoramiento en soporte digital y en una carpeta on line compartida con todo el equipo.

El diario se hacía en una hoja de cálculo y tenía una estructura común con las siguientes columnas: día de la sesión, duración, asistentes, tareas realizadas, acuerdos tomados y fecha de la siguiente sesión, tareas encargadas, observaciones y comentarios.

Cada fila de la hoja de cálculo correspondía a una sesión. Así era sencillo poder ver y analizar qué se estaba haciendo en cada centro y también organizar las sesiones mensuales de coordinación en base a contenidos concretos.

En el mismo drive se crearon una serie de carpetas para compartir el material que los diferentes asesores diseñaban y utilizaban en su centro:

a) Presentación diagnóstico y planificación.

b) Currículo y aprendizaje competencial.

c) Metodología, gestión de aula e inclusión.

d) Evaluación.

e) Ámbitos transversales

f) Programaciones

g) Proyectos

h) Documentos generales sobre cómo hacer un asesoramiento.

Muchas de estas carpetas contenían materiales que provenían de los cursos de formación por ámbitos. No se trataba de reproducir con todo el claustro el curso de formación que algunos docentes del mismo ya habían hecho sino que tuviese todo el centro asesorado los mismos referentes y que por ejemplo cuando se hablase de evaluación formativa, todos tuviesen en mente de qué se estaba hablando y si podía ser con ejemplos de todas las materias y ámbitos mejor, para evitar la duda de: «es que en mi materia no sé si se puede hacer o no sé cómo hacerlo, los ejemplos siempre son de otras disciplinas».

En este primer año de asesoramientos, a pesar de la pandemia que cambió muchas dinámicas en el segundo semestre del curso, el equipo de asesores había trabajado bien, había aprendido mucho y estaba en muy buena disposición para continuar el curso siguiente y en condiciones de doblarse en cuanto a formadores y centros que recibiesen el asesoramiento.

3.4. Segundo turno de asesoramientos y nuevos asesores

El curso 2020-2021 se realizaron 40 asesoramientos de los cuales 4 fueron de continuidad y el resto nuevos, pero de dos años. Al diseñar los nuevos turnos de asesoramientos se valoró que para seguir bien un tema era mejor planificarlo para dos cursos. Así, en el primero se trataba de que el propio centro valorase su situación inicial respecto al tema que quería mejorar, diseñase actividades concretas

para el aula, las implementase y analizase los resultados en el tercer trimestre y tomase decisiones de cara al curso siguiente. El segundo curso servía para consolidar los cambios, de forma que las nuevas prácticas quedasen establecidas para los cursos sucesivos de forma que ya no fuese necesaria la guía y acompañamiento del asesor.

Para poder doblar el número de asesoramientos, pasar de los 20 del curso 2019-2020 a los 40 del curso 2020-2021 se decidió que se debía ampliar el equipo de asesores, pero que se debía hacer aprovechando la experiencia de los 20 asesores iniciales. Así, en lugar de repetir el curso de formación de asesores que habían recibido los primeros asesores, se optó por la formación de los nuevos asesores in situ. Durante el primer trimestre del curso 2020-2021, los nuevos asesores, tenían un solo centro asignado pero no actuaban solos sino en pareja con un asesor «experto». El asesor experto tenía durante el primer trimestre dos centros, el suyo en el que actuaba solo y otro centro en el que el titular era al asesor nuevo y él actuaba como asesor de apoyo.

Debe recordarse que los nuevos asesores, una vez más procedían del equipo de formadores de materia o ámbito. Un análisis de la evolución de la demanda de cursos de materia o ámbito había puesto de manifiesto que estos cursos, cada vez tenían menos demanda, no porque estuvieran mal valorados en los cuestionarios de satisfacción sino porque después de tres cursos y ocho turnos de oferta, quien había querido hacer el curso ya lo había hecho.

Compartir con los formadores de ámbito la previsión de una baja demanda de cursos de materia hizo que la mayoría de formadores viesen bien pasar de formadores de ámbito a asesores, si recibían el apoyo y formación adecuados.

Estos eran los números que el Servicio de Currículo tenía a finales del curso 2019-2020, una vez cerrada la inscripción del mes de julio.

El tiempo dio la razón a las previsiones porque durante el curso 2020-2021 los cursos de ámbito que se realizaron fueron bastante menores que los del curso

anterior pero los formadores no se habían quedado sin tarea, sino que habían pasado a ser asesores de centro en currículum y evaluación competencial.

El cóctel fue perfecto y en estas condiciones se llevaron a cabo los 40 asesoramientos del curso 2020-2021. Básicamente con sesiones sincrónicas y sin pisar los centros, pero ya se había aprendido bastante a trabajar así de marzo a junio del 2020.

En ese segundo año también se había aprendido que el asesoramiento funcionaba si la petición provenía del equipo directivo del centro y éste se implicaba en las sesiones, más que si era una recomendación de la inspección del centro que éste no veía clara. Tampoco se trataba de que los asesores dijesen al claustro lo que el equipo directivo no se atrevía a decir, sino que asesor y equipo directivo trabajasen a la una para establecer determinadas prácticas que debían perdurar en el centro más allá del año o años en que el asesor las guiaba o supervisaba.

Otra cuestión obvia pero muy importante es que en la organización anual del centro se estableciesen espacios reales de reuniones de los equipos docentes, departamentos y otros órganos de coordinación para poder analizar la situación del centro en referencia a los temas planteados a mejorar, diseñar nuevas actividades y poder analizar después como habían funcionado.

3.4. Tercer año de asesoramientos y un nuevo proyecto de asesoramiento: el programa de innovación *Recerca, Creació i Servei*

El curso 2021-2022 se han realizado 30 asesoramientos de los cuales 26 de continuidad y 4 nuevos con la perspectiva de dos cursos. Debe recordarse que de los 40 asesoramientos del curso 2020-2021, 4 eran de continuidad del curso anterior (2019-2020) por tanto, según la planificación inicial, podían continuar 36 y lo han hecho 30. Teniendo en cuenta que los 40 asesoramientos se habían iniciado ya en formato sincrónico y que la pandemia durante el curso pasado y el primer semestre de este ha sido un elemento que ha condicionado en gran manera la práctica docente, se puede considerar que los objetivos planteados con los asesoramientos

de centro en Currículum y evaluación competenciales se han alcanzado de forma satisfactoria.

El curso 2021-2022, por parte del Servicio de Currículum, se ha llevado a cabo la implantación de un nuevo proyecto de innovación: *Investigación, Creación y Servicio* que contiene también un asesoramiento a centro y esta vez durante tres cursos. El programa ha empezado este curso con 10 centros, el próximo curso lo empezaran otros 10 centros y el 2023-2024 otros 10 más. Así habrán pasado por el proyecto 30 centros desde 2021-2022 hasta el curso 2025-2026.

Explicar qué es el proyecto de innovación *Investigación, Creación y Servicio* da para otra ponencia más, tal vez puede ser para las Jaem de 2024, por ahora se puede ver información detallada del nuevo proyecto en la página web del Departament d'Educació (2021).

Referencias

Departament d'Educació (2012-2021). *Competències bàsiques dels àmbits de l'Educació secundària Obligatòria* https://educacio.gencat.cat/ca/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/eso

Departament d'Educació (2021). *Programa d'innovació Recerca, Creació i Servei* Programa recerca, creació i servei. XTEC - Xarxa Telemàtica Educativa de Catalunya (gencat.cat)

Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya (2015). DECRET 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria. https://dogc.gencat.cat/ca/document-del-dogc/?documentId=701354

Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya (2018). *Ordre ENS/108/2018, de 4 de juliol, per la qual es determinen el procediment, els documents i els requisits formals del procés d'avaluació a l'Educació Secundària Obligatòria.* http://portaldogc.gencat.cat/utilsEADOP/PDF/7659/1685428.pdf

Sanmartí, N. (2020). *Avaluar és aprendre*
https://educacio.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/eso/avaluar-aprendre.pdf

Vilches, S. y otros (2019). *Seqüències didàctiques*
https://xtec.gencat.cat/ca/curriculum/eso/sequencies/

PoF2 Resolviendo problemas en primaria

José Ángel Murcia Carrión
Mail autor joseamur@ucm.es
Institución Universidad Complutense de Madrid.

Núcleo temático: Formación del profesorado

Modalidad: Ponencia

Nivel educativo: Educación Primaria.

RESUMEN

La resolución de problemas se está convirtiendo en el verdadero foco del proceso de aprendizaje de las matemáticas en las etapas obligatorias, como vemos en cualquier documento curricular de los últimos años tanto nacional como internacional. Igualmente, observando los documentos curriculares, vemos la necesidad de modelizar y matematizar la realidad. Tras la categorización de los problemas aritméticos verbales en categorías semánticas a finales del s. XX se impone la necesidad de encontrar una manera de modelizar estos problemas que sea eficiente y ayude a nuestro alumnado a poder enfrentarse a ellos con garantías, que trascienda el método de las palabras clave, los cuadernillos de problemas y el esquema datos/operaciones/resultado. El modelo de barras de Singapur es la mejor solución que tenemos. En esta ponencia justificaremos su necesidad y veremos sus distintos tipos, con ejemplos y recursos online para utilizarlas.

Palabras clave: Resolución de Problemas, Modelización, Barras de Singapur, PAEV.

1. Ejercicios y problemas

Conviene empezar aclarando que vamos a distinguir un problema de un ejercicio siguiendo la definición de Kantowski en la que se establece que “Un problema es una situación que se diferencia de un ejercicio en que el resolutor no tiene un procedimiento o algoritmo que conduzca con certeza a una solución.” (Kantowski, 1974). Por lo que si conocemos previamente cómo se debe resolver una tarea, ésta no podrá ser calificada de verdadero problema.

Vemos que esta definición no precisa que para plantear un problema haya que dar un enunciado largo que deba ser traducido; una instrucción corta, del tipo “construye un rectángulo de perímetro 14 cm” cabe perfectamente en la definición de problema, siempre que no tengamos un procedimiento para resolverlo.

Imagen 1. Tarea de construcción de polígonos de Smartick.

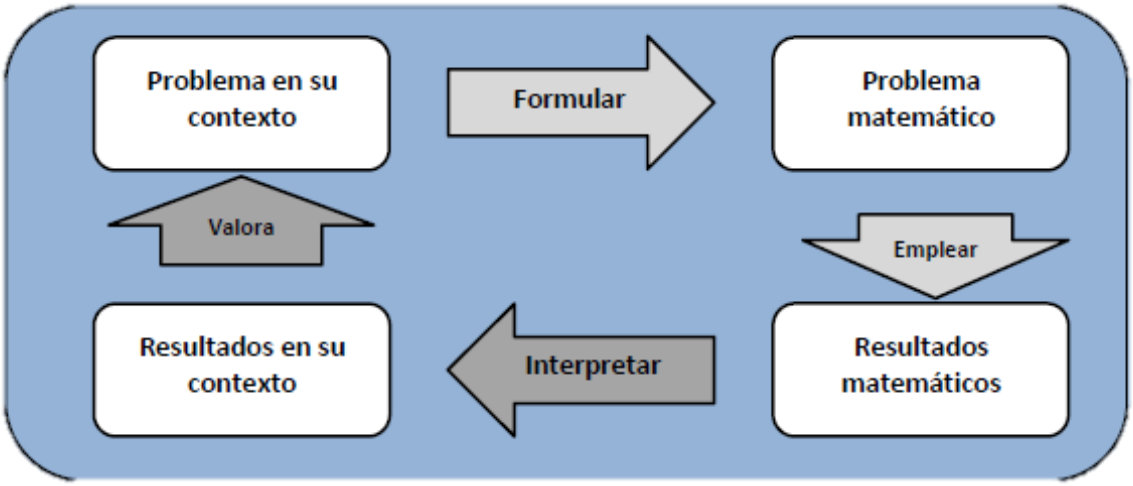
Al mismo tiempo, un enunciado en el epígrafe de restas de un libro de texto, puede perfectamente caer fuera de la definición de problema, en tanto que disponemos de un procedimiento para resolverlo, estos enunciados suelen considerarse como “problemas de aplicación”, no los vamos a considerar como verdaderos problemas.

2. Los modelos de fases para la resolución de problemas

Los modelos de fases, desde tiempos de Polya (2004), proponen que el resolutor no se lance directamente a resolver el problema, sino que pase por varias etapas. Se pueden resumir en estas cuatro:

1. Lectura y comprensión del problema
2. Elaboración de un plan / modelización / traducción
3. Ejecución del plan / Cálculo
4. Solución y revisión / comprobación

Estas fases concuerdan con el ciclo de construcción de modelos matemáticos que se da en la modelización OECD (2003)



Ciclo de modelización de problemas, imagen elaborada por Carlos de Castro. OECD (2003)

3. Problemas aritméticos verbales

Los problemas aritméticos de estructura verbal (PAEV, en adelante) han sido ampliamente estudiados en la literatura didáctica. Para este trabajo seguiremos la ya clásica división en categorías semánticas de Puig y Cerdán (1988). Vamos a considerar como un PAEV una situación dada de forma oral o escrita que para resolverse precise solo de la aplicación de una o varias operaciones aritméticas.

3.1 Estructura aditiva

Un problema tendrá estructura aditiva cuando para resolverlo haya que realizar una o varias operaciones aditivas: sumas y/o restas, y heredará de los significados de éstas la estructura, ya que esta no es única. Por no extendernos demasiado en este texto, sumando y restando se pueden resolver problemas con múltiples significados distintos y que presentan distintas dificultades a la hora de resolverse por alumnos. Por ejemplo, va a ser más fácil resolver una resta que provenga del significado sustractivo de la misma que un problema en el que la resta plantee una comparación entre dos cantidades. *"Julia tenía 8 canicas, pero perdió 3, ¿cuántas tiene ahora?"* es un problema que resuelven habitualmente alumnos de infantil, esos mismos alumnos encuentran mucho más difícil resolver *"Julia tiene 8 canicas, 3 más que las que tiene su hermana Inés, ¿cuántas canicas tiene Inés?"*. El primer problema pertenece a la categoría de **cambio** mientras que el segundo lo hace a la de **comparación**. Los problemas aditivos en una etapa incluyen también las categorías de **combinación** *"en el frutero tengo 5 manzanas y algunas peras, si en total tengo 8 frutas, ¿cuántas peras hay?"* en las que dos cantidades son cardinales de subconjuntos de un conjunto mayor y problemas de **igualación** en los que se nos que por la vía de añadir o quitar elementos, conseguiríamos que dos conjuntos tengan el mismo cardinal.

Dada la naturaleza binaria de la suma, en todos los casos hay tres posibles incógnitas, como 5+3=8, puedo plantear tres situaciones distintas 5+3=?, 5+?=8 y ?+3=8. Por no extendernos demasiado, solo los problemas de cambio creciente, problemas en los que ocurre una acción que se traduce en un incremento. En dichos problemas encontraremos una **cantidad inicial**, una **cantidad de cambio** -que se va a añadir a la primera- y por tanto habrá también una **cantidad final.** La incógnita puede estar en cualquiera de las tres cantidades, formándose así tres tipos de problemas de cambio, que tampoco van a tener la misma dificultad (¡ni siquiera se van a resolver con la misma operación!)

3.2 Estructura multiplicativa

La multiplicación es también una operación binaria por lo que para cada categoría semántica que definamos, encontraremos hasta 3 tipos de problemas en función de en qué lugar coloquemos la incógnita de un problema que plantee 3x4=12. La aproximación semántica añade aún más riqueza, dado que a veces los factores de la multiplicación juegan un papel totalmente intercambiable, ocurre en los PAEV de **combinación multiplicativa,** si esta mañana disponía en mi armario de 3 camisetas y 4 pantalones distintos, podía vestirme de 12 maneras diferentes. En estos casos solo habrá dos tipos, el problema que se resuelve multiplicando y su inverso, que se resolverá dividiendo. Otras veces no ocurre así, dado que uno de los factores hace las veces de multiplicador y el otro de multiplicando. Esto ocurre, por ejemplo, en los casos de **comparación multiplicativa** (*Tengo 4 canicas, mi hermano tiene tres veces más canicas que yo, ¿cuántas canicas tiene mi hermano?*) o en los problemas de **grupos repetidos** (*Tengo tres bolsas con 4 canicas en cada bolsa, ¿cuántas canicas tengo?*) Esta riqueza implica que haya dos problemas de división diferentes en función del lugar que ocupe la incógnita cuando esté en alguno de esos dos factores en las situaciones en las que estos sí juegan un papel diferenciado. En el caso de que la incógnita esté en el multiplicando se resolverán con una **división reparto** (*Tengo 12 canicas repartidas a partes iguales en tres bolsas, ¿cuántas canicas habrá en cada bolsa?*) o una **división agrupamiento o medida** (*Voy a poner en bosas de 4 canicas cada una mis 12 canicas, ¿cuántas bolsas necesito?*) Este segundo tipo de problemas suelen tener peor efectividad cuando son planteados a alumnos de la misma edad, ya que suelen entender dividir como la acción de repartir en partes iguales, cuando la división resuelve un número mayor de situaciones.

Nótese que ninguna de las situaciones planteadas en este artículo son verdaderos problemas para el lector, ya que conoce la forma de resolverlos. Además, es muy probable que el lector de este artículo no tenga que pararse a pensar en las operaciones planteadas, ya que conoce los hechos numéricos (qué número hay que sumar a 3 para llegar a 8, cuántas grupos de 4 objetos puedo hacer con 12 objetos). Esto lleva a pensar que las cantidades que se utilizan en los PAEV no deben ser demasiado pequeñas, para que estos PAEV sean verdaderos problemas. Sin embargo, tampoco podrán ser las cantidades demasiado grandes si nos queremos

centrar en la resolución de problemas y no queremos colocar el obstáculo en otro lugar.

4. Palabras clave

Una primera aproximación a la resolución de PAEV -bastante presente en las aulas- es la de localizar esa palabra -habitualmente un verbo- que convierte el problema en un ejercicio. Si dice "aumentar" se hace sumando. Si dice "quitar", se hará restando… la objeción a esta reducción simplista es un ejercicio de primero de didáctica de las matemáticas: *inventa un problema que utilice "aumentar" y que se resuelva restando*. El método de palabras clave muestra también su dificultad cuando el alumno no está familiarizado con otros sinónimos semánticamente más complejos, o cuando el que plantea el problema haya conseguido eliminar cualquier referencia a esa clave.

Otro ejemplo que podríamos citar es el que aparece referenciado en Felmer y otros (2016) es el siguiente, que la mayor parte de alumnos resuelven como una multiplicación, por la presencia de la palabra "veces":

"Tara resolvió 21 problemas, tres veces más problemas que Pat, ¿Cuántos problemas resolvió Pat?"

No obstante lo dicho, no es despreciable que los alumnos identifiquen ciertas acciones con las operaciones aditivas, otras con las multiplicativas, siendo conscientes de que esa primera aproximación es solo eso, una aproximación.

Cartel palabras clave para imprimir en un aula, Fuente: https://laimaginacionenelaula.blogspot.com/2018/12/palabras-clave-para-resolver-problemas.html

5. El modelo de barras

El modelo de barras o "barras de Singapur" debe su popularidad a que se ha ido propagando desde su implantación en aquel país hace ya más de 4 décadas tras los distintos éxitos en los rankings internacionales de competencia matemática del país.

Se asocia también con el "método Singapur" la secuencia "Concreto-pictórico-abstracto", que podemos encontrar también fuera de este marco, como por ejemplo cuando hablamos de aprendizaje por analogías y su modelo de fases concreta-puente-simbólica.

Los ejemplos que vamos a mostrar serían en cualquier caso de la segunda fase (fase puente en aprendizaje por analogías) y vendrían después de que los alumnos se hubieran familiarizado a modelizar situaciones y problemas con cubitos encajables (físicos o virtuales) y/o con barras, como las regletas de cuisenaire.

Las recomendaciones que se establecen en la metodología Singapur pasan por una aplicación del método de fases para la resolución de problemas. Se recomienda:

1. Leer bien el enunciado.
2. Dibujar una barra por cada sujeto que lo protagonice.
3. Añadir etiquetas verbales a las barras.

4. Añadir etiquetas numéricas (incluyendo la incógnita).
5. Plantear la operación que resuelve el problema.
6. Comprobar en el modelo.
7. Escribir una frase completa con la solución del mismo.

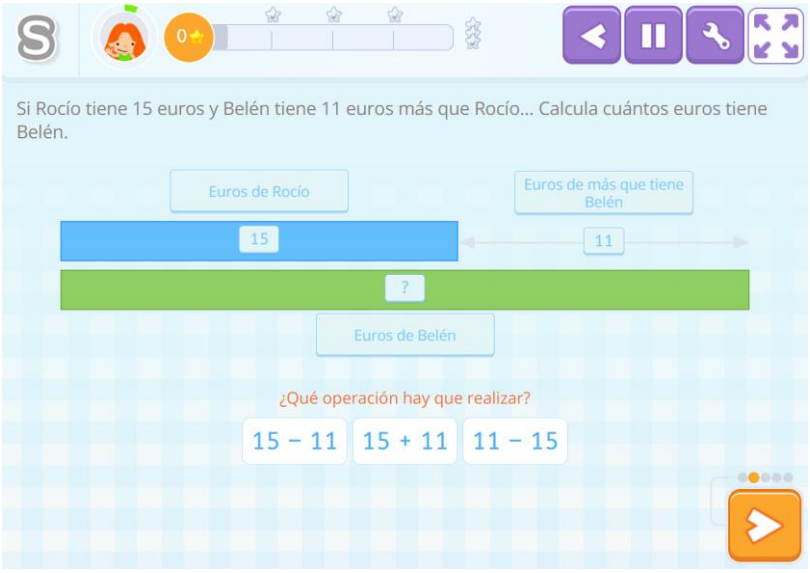
5.1 Estructura aditiva

Los problemas de estructura aditiva en una sola etapa se pueden plantear en dos esquemas distintos, el esquema de **cambio** y el de **comparación**. La principal diferencia entre uno y otro es el uso de un solo carril o dos para colocar las barras, y ésta depende, simplificando, de que las cantidades que participan en el problema se mezclen (cambio o combinación) o no (comparación e igualación). Como decíamos antes, en los problemas de cambio ocurre una acción que incrementa (cambio creciente) o disminuye la cantidad inicial en una cantidad (cantidad de cambio) llegando así a una cantidad final. En los problemas de combinación las cantidades o partes se combinan (aditivamente) para formar el total.

Problema de combinación con incógnita en el total modelizado en Smartick con el esquema de cambio.

Apréciese que no hay proporcionalidad entre la longitud de las barras y las cantidades.

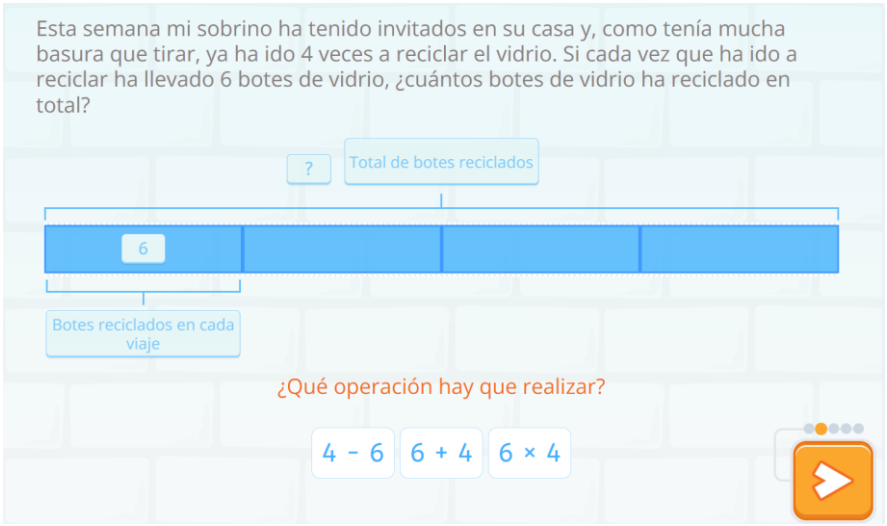
Colocamos las barras en paralelo (en dos carriles) en los problemas de comparación o igualación. Se evita también al utilizar barras continuas, las dificultades que presentan los alumnos en edades más tempranas a la hora de establecer una correspondencia uno a uno.



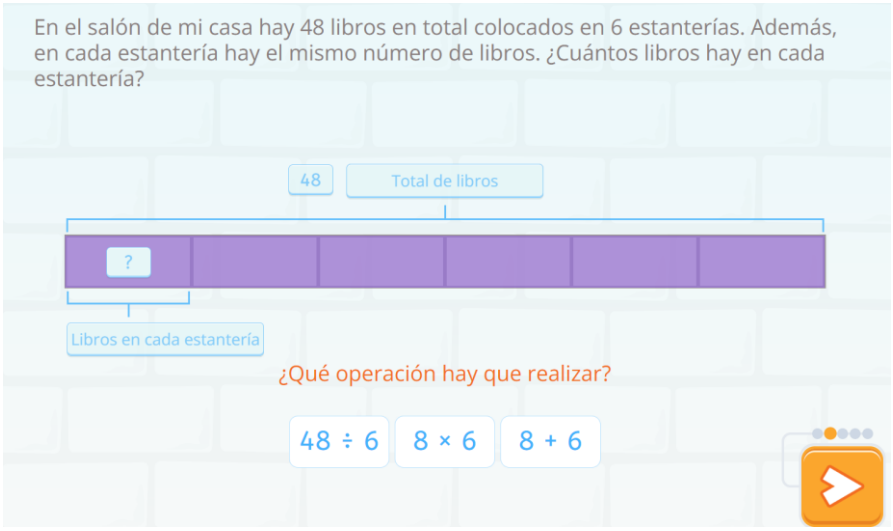
Problema de comparación 3 modelizado en Smartick con el esquema de comparación

5.2 Estructura multiplicativa

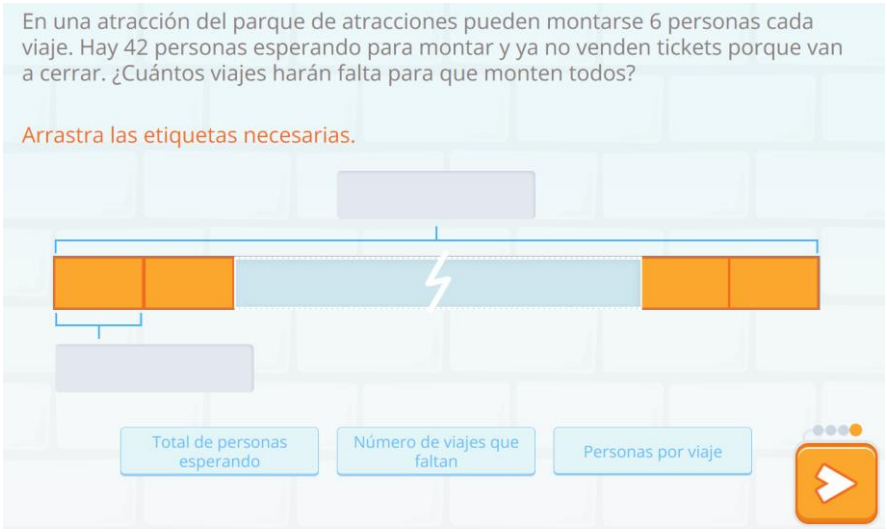
En estructura multiplicativa vamos a encontrar también la dicotomía entre un carril y dos, y se va a resolver de la misma manera que ocurría en estructura aditiva. Utilizaremos un solo carril cuando trabajemos con grupos repetidos, tento en problemas de multiplicación:



Como en problemas de división:

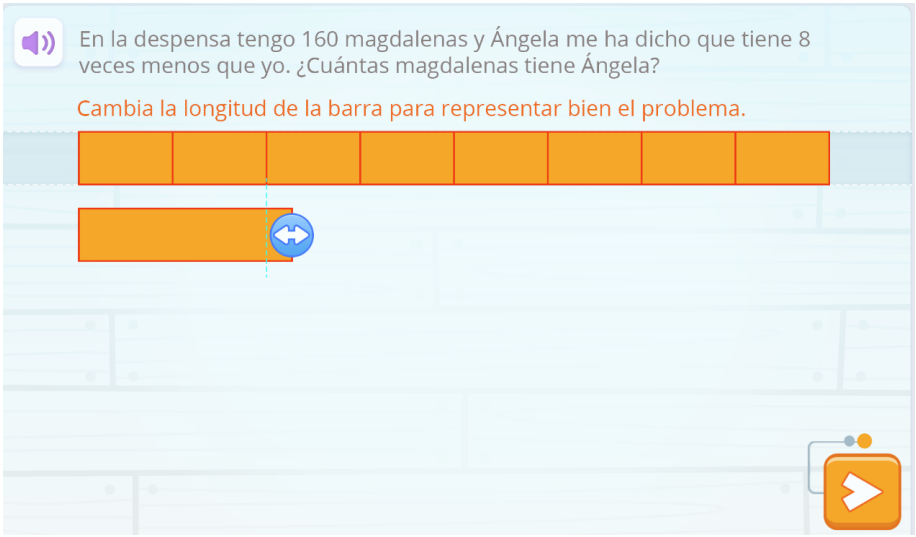


Eso sí, habrá que tener en cuenta que en los problemas de división hay que considerar dos modelos de división distintos. En el ejemplo anterior se observa una división **como reparto** (proviene de un problema de grupos de iguales en el que la incógnita es el multiplicando, el número de elementos que hay en cada grupo). En el siguiente ejemplo se ve, paso a paso un problema de división agrupamiento, ya que la incógnita se encuentra esta vez en el número de grupos que hay que hacer, por eso el principal cambio se puede ver en el primer paso:



Primer paso, el carril es discontinuo, reflejando que no sabemos todavía el número de grupos que se van a hacer.

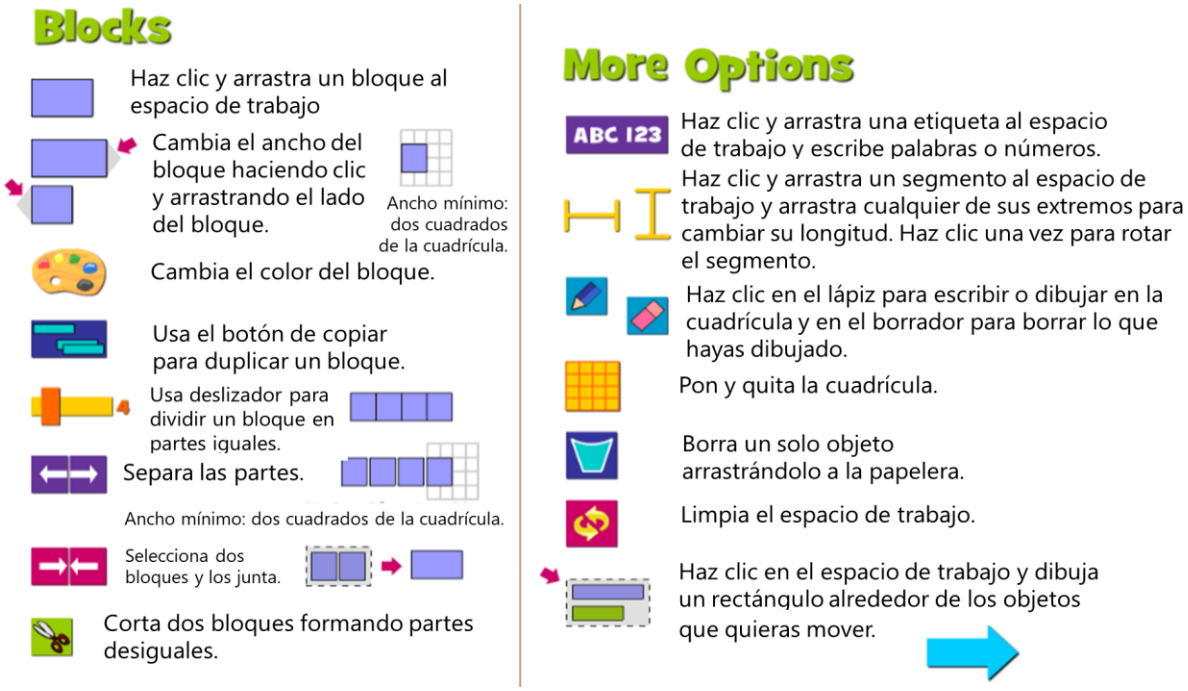
Como se decía más arriba hay también espacio para el modelo de dos carriles, como ocurre con los problemas de comparación multiplicativa:



Mis magdalenas y las de Ángela se comparan, por eso están en dos carriles.

6. Aplicación del modelo de barras en un entorno libre online

No hay muchos ejemplos de entornos libres online para modelizar problemas utilizando barras, el mejor es el que proporciona mathplayground. Se puede encontrar en este enlace. La propia web da ejemplos con soluciones de problemas aritméticos verbales de varias categorías, incluyendo enunciados de problemas en varias operaciones que, por su extensión no se han incluido en esta ponencia.



Instrucciones para utilizar la herramienta online.

Referencias

Felmer, P. Pehkonen, E. Kilpatrick, J. (2016). *Posing and Solving Mathematical Problems*. Suiza: Springer International Publishing.

Kantowski, M. G. (1977). *Processes involved in mathematical problem solving*. Journal for research in mathematics education, 8(3), 163-180.

OECD, N. (2003). The PISA 2003 assessment framework: Mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills. https://www.oecd.org/education/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/pisa2003assessmentframeworkmathematicsreadingscienceandproblemsolvingknowledgeandskills-publications2003.htm

Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (Vol. 85). Princeton university press.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis. https://www.uv.es/puigl/libros.html

PoD2 ¿Qué podemos esperar de las redes sociales?

Pablo Beltrán-Pellicer
pbeltran@unizar.es
Universidad de Zaragoza

Núcleo temático: comunicación y divulgación

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (grados de Magisterio y Máster ESOb).

RESUMEN

Las redes sociales pueden ser un excelente instrumento de formación para el profesorado de todos los niveles educativos. En esta ponencia nos centraremos en el potencial que ofrece una de ellas, Twitter, como espacio para el debate, la divulgación y la interacción con docentes e investigadores. Este recorrido permitirá reflexionar, a su vez, sobre enfoques de enseñanza y «metodologías», prestando atención al impacto de los diferentes tipos de divulgación, distinguiendo la que se hace sobre matemáticas y sobre educación matemática.

Palabras clave: Redes Sociales, Formación de Profesorado, Desarrollo Profesional.

1. Introducción

Que el título de la ponencia sea una pregunta no significa que vaya a darle una respuesta definitiva. Mucho menos, que la intención sea sentar cátedra sobre este tema. Como veremos, son varios los autores que señalan el potencial formativo de las redes sociales y que relatan experiencias de éxito. Hablaremos de ello, claro, pero también reflexionaremos sobre diferentes cuestiones relacionadas, como el desarrollo profesional, la divulgación o los posicionamientos metodológicos. Inevitablemente, ofreceré el punto de vista personal que supone participar de forma activa en la comunidad tuitera con una cuenta, @pbeltranp, dedicada fundamentalmente a la educación matemática.

2. Desarrollo profesional

Hace unos meses, en uno de los *spaces*[9] que organiza Ingrid Mosquera (@imgende) en Twitter, reflexionaba junto con Manuel Fernández-Navas, Noelia Alcaraz y Víctor Arufe sobre formación del profesorado. En particular, recuerdo que traté de relatar a los oyentes cómo fue mi evolución como docente de secundaria.

No tengo ningún pudor en reconocer que cuando empecé no tenía ni la más remota idea de cómo dar clase. Ahora bien, de eso no te das cuenta cuando empiezas. A lo mejor piensas que te faltan tablas, experiencia, pero a mí ni se me pasaba por la cabeza que necesitase un mayor conocimiento sobre las fracciones o los números enteros. Estos ejemplos que acabo de nombrar forman parte de lo que se denomina conocimiento matemático especializado para la enseñanza. Es decir, matemáticas, sí, pero no de las que se ven en un grado de Matemáticas, a no ser que hayas tenido la suerte de poder cursar alguna optativa de didáctica. Ahora bien, la didáctica comporta mucho más, como todo lo que se refiere al conocimiento didáctico-matemático y que tiene que ver, sin ir más lejos, con dificultades del alumnado, maneras de aproximarse a un objeto matemático determinado, etc.

La didáctica de la matemática ni se me pasaba por la cabeza. No sabía lo que era. He trabajado en nueve centros diferentes (IES, CPI, CPEPA) y mentiría si dijera que no he aprendido de mis compañeros. He compartido departamento (y no-departamento) con excelentes profesionales. Sin embargo, lo que dio un vuelco a mi docencia fue el empezar a implementar en el aula propuestas fundamentadas a partir de investigaciones en didáctica y a reflexionar de forma sistemática sobre ellas. He tenido la suerte añadida de poder discutir sobre ellas con autores especialistas en cada tema. Pienso, por ejemplo, en el grupo de la Universidad de Granada, sobre probabilidad y estadística; o en el equipo de la Universidad de Zaragoza, donde le di sentido la didáctica de la aritmética, álgebra y geometría cuando empecé como profesor asociado. Aunque no quiero dar nombres porque son muchos y me dejaría alguno, basta pasarse por mis hilos de Twitter para saber de dónde salen las secuencias y muchas de las reflexiones que comparto.

[9] Un *space* de Twitter es una sala de audio en tiempo real. @imgende las deja disponibles en varias plataformas, como iVoox: https://bit.ly/3NROWBS.

También aprecio mucho haber conocido materiales en la biblioteca del departamento, gracias a la «casualidad». Pongo comillas porque algunos de estos materiales, libros y propuestas, los han ido trayendo, de forma altruista, profesores jubilados. Igualmente, participar las actividades que organiza la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas Pedro Sánchez Ciruelo, la FESPM o la RSME es algo que te abre la mente y te pone en contacto con compañeros con inquietudes parecidas. Por otra parte, en mi caso ha jugado un papel importante la investigación en sí misma, participar de las actividades de la SEIEM, aunque no creo que sea una obligación del profesorado de etapas anteriores a la universidad.

Sí que merece mención aparte Ana Martínez Pérez, compañera en el CPI Val de la Atalaya durante los cursos 2019/20 y 2020/21. Ha sido la única vez en la que he vivido en un centro una forma de trabajar que ha supuesto un desarrollo profesional con repercusión directa en lo que hacía en el aula de matemáticas. Como resultado más interesante de esta etapa, los avances en gestión de aula y evaluación.

No se trata de caerse del guindo, ni de una epifanía que llega un buen día. Por lo menos, en mi experiencia personal, llegar a conocer la didáctica como área de conocimiento ha sido fruto de una larga travesía. Lo mismo que introducir en mis clases un enfoque a través de la resolución de problemas. Pero no nos extendamos más con esta historia personal, invito a los lectores a bucear en el hilo (y en los retweets y respuestas de otras cuentas) donde planteaba estas cuestiones[10].

¿A qué vienen entonces estos apuntes autobiográficos si el tema de esta ponencia son las redes sociales? Resulta que la formación inicial, tanto del profesorado de Educación Infantil y Primaria, como de Secundaria, tiene sus limitaciones (López-Beltrán y otros, 2020). La problemática es ligeramente distinta en cada caso, y no es objeto de esta ponencia detenernos en ello, pero las limitaciones en la formación inicial y la ausencia de planes serios de formación continua se identifican fácilmente en mi historia personal. Si cuando empezamos aterrizamos en un centro con compañeros con inquietudes como las nuestras o, mejor, con compañeros que ya hayan tenido esas inquietudes y hayan superado la inercia del enfoque expositivo,

[10] https://twitter.com/pbeltranp/status/1525179350336917504

sepan de didáctica y nos orienten, genial. Estos compañeros existen, claro, pero creo que no es arriesgado decir que no abundan. Posiblemente, la mayoría de ellos estén asistiendo a estas JAEM o lean después las actas. Si no tenemos esa suerte de coincidir con, por lo menos un compañero así, ¿qué?

¿Qué hacemos entonces cuando empezamos en la enseñanza? Tal como decía Wright (2017), adoptar los mismos modelos de enseñanza que experimentamos como estudiantes, dándoles crédito de nuestro propio éxito. Con lo que, en el fondo, estamos aceptando la ideología dominante[11]. Es decir, nos crearemos una imagen mental de cómo es un buen docente de matemáticas según nuestro marco mental, e intentaremos mejorarlo, desde ese mismo marco mental. Si, como fue mi caso, no hemos experimentado un enfoque a través de la resolución de problemas, una clase en la que se parte de lo que hace y piensa el alumnado quedará fuera de nuestra concepción.

Cuando se implantó la LOGSE, en plenos años 90 del siglo pasado, se generaron multitud de materiales. Espectaculares. Muchos de ellos, desde las propias consejerías y departamentos de Educación. Más allá de la normativa, los Principios y estándares del NCTM (2000) datan de hace más de 20 años. Obviamente, ha pasado mucho tiempo y se ha generado nuevo conocimiento en didáctica, pero el enfoque esencial que subyace sigue vigente. Y no ha llegado de forma mayoritaria a las aulas. Como me ha dicho alguna vez Daniel Sierra, puede ser que entonces no hubiera «nadie» escuchando. Actualmente, las redes sociales (y otras formas de comunicación al amparo de las tecnologías de la información) facilitan los intercambios de ideas como nunca. Confiemos en que ahora sí haya alguien escuchando.

Tanto estas dificultades para que calen las orientaciones nacionales e internacionales, como los obstáculos que he mencionado para el desarrollo profesional, tienen ciertas similitudes con lo que escribe Larsen (2019) en la introducción de su tesis doctoral. La tesis lleva por título «Mathematics teaching and social media: An emergent space for resilient professional activity» y parte de la

[11] A veces comparto citas, como esta, desde mi cuenta: https://twitter.com/pbeltranp/status/1264902189186777100

necesidad de conocer qué hacen otros profesores de matemáticas para crecer profesionalmente. De esta manera, señala que el ritmo y estructura habituales de un centro educativo nos restringen de tal manera que ni siquiera tenemos espacio para poder entrar a la clase de un compañero. Mucho menos, para reflexionar sobre qué ha ocurrido al implementar tal o cual propuesta en el aula. Larsen (2019), por tanto, se dedica a explorar la potencialidad de las redes sociales en este sentido. En particular, indaga las dinámicas de interacción en torno a la Math Twitter Blogosphere (MTBoS) (Larsen, 2019; Larsen y Liljedahl, 2017), fenómeno organizado en torno a la etiqueta de Twitter (hashtag) homónima[12].

En otras palabras, como la estructura del sistema educativo no me permite crecer profesionalmente, además del asociacionismo de siempre (que en matemáticas es especialmente importante), tenemos las redes sociales. De esta forma enlazamos con la siguiente sección, donde nos centraremos en las posibilidades de Twitter.

3. El papel de Twitter en el desarrollo profesional docente

Cuando hablamos de desarrollo profesional tenemos que quitarnos de la cabeza la imagen de los cursos de formación. Este modelo, en el que los asistentes participan de acciones formativas de menor o mayor calidad, pero sin un seguimiento real en los centros y sin crear una comunidad que forje redes de colaboración, está destinado al fracaso. O, por lo menos, está llamado a ser un coste de oportunidad. Enfoques como el estudio de clases o lesson study (Fernandez y Yoshida, 2012) y las comunidades de práctica (Wenger, 1998) son ejemplos de modelos de desarrollo profesional que van más allá. De las investigaciones realizadas sobre estos modelos, y otros, se desprende que el éxito depende de asegurarse de que los formadores y los docentes participantes adopten una actitud de indagación permanente, que las actividades surjan de los intereses y necesidades de los participantes, así como plantearse como objetivo específico la construcción de comunidades y redes de colaboración (Lerman y Zehetmeier, 2008). Hemos de

[12] Existe una web no oficial, https://mtbos.org/, en la que quedan recogidas todas las etiquetas usadas para diferentes cuestiones: etapas, contenidos concretos, etc.

decir que en España no se ha llegado a implementar ninguno de estos modelos a gran escala. No obstante, a pesar de que tampoco se dispone de una estructura que lo facilita, existen algunas iniciativas de ámbito local (p. ej., Martínez-Juste y Domenech, 2019).

Ante las dificultades y obstáculos que plantea el desarrollo profesional, y las limitaciones de la formación continua estándar, ya hemos adelantado en la sección anterior que Larsen y Liljedahl (2017) en el ámbito norteamericano, señalan el fenómeno de las comunidades virtuales, descentralizadas e independientes, poniendo como ejemplo las etiquetas del MTBoS de Twitter.

El estilo comunicativo de Twitter es peculiar y favorece dinámicas -complejas- que no tienen lugar en otras redes. Los mensajes o tweets pueden tener, como mucho 280 caracteres (originalmente, eran mensajes de 140 caracteres), pudiendo incluir enlaces, imágenes o vídeos. Sin embargo, los usuarios se han adaptado para inventarse nuevos géneros de expresión, siendo ejemplo de ellos los hilos de Twitter (threads). Estos hilos encadenan varios mensajes de un mismo usuario, de tal manera que no se trata simplemente de cortar un texto más largo en fragmentos de 280 caracteres, sino que exigen síntesis y enlazar ideas de tweet en tweet.

Alsina y Rodríguez-Muñiz (2021) exploran el uso de hilos de Twitter como medio para divulgar (¿estará bien empleado este término?) sobre didáctica de la probabilidad y la estadística. Describen seis hilos que muestran secuencias de enseñanza y, como puntos fuertes, destacan que el acceso a la información se ve facilitado, al requerir menos tiempo que otros formatos de formación. Además, Twitter facilita que cualquier persona pueda participar del hilo, interactuando con el autor o con otros usuarios, abriendo la puerta a la «deconstrucción de conocimientos previos o cotidianos, la construcción conjunta de nuevo conocimiento a través de la interacción y, por último, la reconstrucción del propio conocimiento a partir del contraste entre los conocimientos previos y lo que se está aprendiendo a través del hilo».

En cuanto a mi experiencia personal en Twitter, creé mi cuenta en octubre 2011 para un curso del INTEF. A continuación, estuve unos cuantos años haciendo un

uso muy esporádico de esta red. Gracias a Twitter descubrí las secuencias didácticas de la plataforma Desmos, allá por 2017. Y, más recientemente, el modo live de Geogebra. He tenido que realizar alguna búsqueda para identificar septiembre de 2017 como el momento en que empiezo a compartir tweets sobre educación matemática y en participar activamente. Además de tuitear sobre actividades concretas, ese año me planteo el reto de la #DidMatCita17[13]. Este reto autoimpuesto consistía en tuitear, diariamente, desde septiembre y hasta fin de año, una cita de algún trabajo de didáctica de la matemática. Visto con perspectiva, el «éxito» de esta iniciativa en términos de impresiones y demás métricas fue muy modesto (Imagen 1), pero valoro de forma muy positiva la experiencia. Hubo interacciones excelentes, reflexiones compartidas y, en definitiva, aprendizaje. Estos tweets con citas volverían con la etiqueta #DidMatCita, aunque sin la regularidad que exigía el reto de 2017.

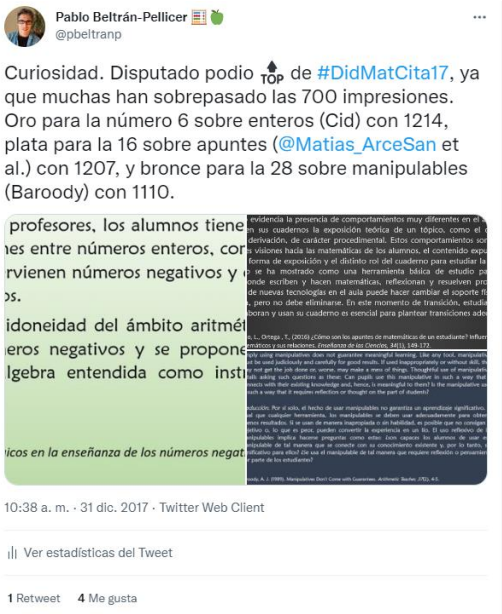


Imagen 1. Tweet comunicando cuáles fueron las citas más visitadas de la #DidMatCita17.

Alguna vez me han dicho que lo que hago en Twitter actualmente es divulgación en educación matemática. Imagino que lo de la #DidMatCita puede verse como un intento, quizás, a ojos de hoy, torpe, de divulgación. Aunque dedicaremos unas líneas a la cuestión de la divulgación, realmente no sé si puedo decir que haya un momento concreto en que fuera consciente de estar haciendo este tipo de

[13] https://twitter.com/hashtag/DidMatCita17?src=hashtag_click

divulgación (ni si es divulgación). Mis primeros hilos compartiendo secuencias de clase datan de septiembre y octubre de 2018[14]. Mi sensación desde el primer momento fue la de que causaban más interés que las citas, más interacciones y esto me animó a seguir escribiendo en esta línea.

Fuera del ámbito específico de la educación matemática, está el #ClaustroVirtual, en general, donde interactúan docentes de todas las etapas y materias. También se observan interacciones con otros miembros de la comunidad educativa, como familias y, en menor medida, algunos alumnos. Seguir los discursos que aparecen en esta comunidad educativa es toda una experiencia. Por mencionar un tema en auge, me fascina enormemente la tendencia actual en hablar de «educación basada en evidencias». Esto no es exclusivo de la comunidad de habla española, ya que en el Reino Unido tienen también debates muy profundos sobre esto. No obstante, en español se complica todo un poco más, ya que la palabra «evidence» en inglés significa algo como «indicio», mientras que en español es más bien «certeza». Al margen de estas cuestiones lingüísticas, sin un mínimo de sensibilidad hacia otros marcos de pensamiento o sin nociones de filosofía de la ciencia, es fácil caer en comentarios típicos de barra de bar. Uno de los más recurrentes, sin duda, es decir que la pedagogía no es una ciencia. Y, por extensión, la didáctica, porque no es algo que se diferencie con claridad en estos foros, en mi humilde opinión.

4. Divulgación y educación, divulgación en matemáticas, divulgación en educación matemática, didáctica, transferencia, etc.

De acuerdo, el título de esta sección ha quedado largo, pero creo que todavía se queda corto. Creo que todos tenemos claro que divulgación y educación son cosas distintas. Complementarias y relacionadas, claro que sí, pero con objetivos diferentes. Puede decirse que actualmente la divulgación vive una época dorada, merced a la facilidad para crear y difundir contenidos. Ya no estamos hablando de un puñado de divulgadores con libros, grandes conferencias y programas de

[14] Están recogidos en el hilo fijado del perfil de mi cuenta: https://twitter.com/pbeltranp/status/1431517328483799041

televisión. Los formatos se han multiplicado, y una persona siempre puede encontrar el que más le guste en cada momento: blogs, redes sociales, vídeos online, podcasts, etc. Los temas, además, son extremadamente variados. El alumnado que se acerca a este material puede alimentar su curiosidad sobre, prácticamente, cualquier cosa. Pero ¿dónde nace esa curiosidad? ¿Cómo sabe a dónde dirigirse? Desde el ámbito educativo, en los centros, muchas veces es donde se corta ese bucle sin salida, dando respuesta a ambas preguntas. Por ello, siempre me ha sorprendido que, al poner algún fragmento de Órbita Laika en clases de secundaria y bachillerato, sean tan pocos los alumnos los que conozcan dicho programa. Y estamos hablando de una de las producciones de divulgación científica nacionales más ambiciosa de los últimos tiempos. Por su parte, el profesorado, acude a la divulgación por disfrute, pudiendo obtener, en ocasiones, ideas que luego aplicar en el aula.

¿Cómo clasificamos experiencias como la de Alsina y Rodríguez-Muñiz (2021)? ¿Divulgación en didáctica? ¿Transferencia? O, sin ir más lejos, hilos como los míos, ¿qué son? Como verán los lectores, en este punto solo tengo preguntas. Y, en el fondo, tampoco es que sea necesario catalogar todo lo que hacemos. Desde luego, si con estos hilos se generan inquietudes, creo que podemos afirmar que algo de divulgación hay. ¿Transferencia? Imagino que también, porque muchos de estos hilos parten de conocimiento generado en el ámbito académico universitario.

5. Conclusión

Recientemente, aprovechando la proximidad de esta ponencia, me animé a tuitear planteando esta cuestión (Imagen 2):

Imagen 2. ¿Qué podemos esperar de las redes sociales?[15]

De nuevo invito a los lectores a bucear por sí mismos en las respuestas. Sintetizando mucho, se reconoce que, a pesar del ruido que puede haber, Twitter es una herramienta de conocimiento muy potente. Como ejemplo que resume el espíritu colaborativo y construcción conjunta de conocimiento, me gustaría mencionar la aportación de @AprenentMates al tema (Imagen 3).

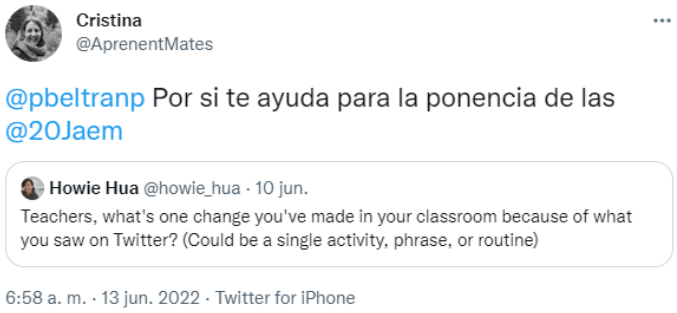


Imagen 3. Ambiente colaborativo en Twitter[16].

El tweet que cita @AprenentMates es una pregunta similar lanzada por Howie Hua el día anterior a la mía. La cantidad de respuestas es impresionante y, de nuevo, una muestra de que Twitter es un espacio de aprendizaje. Además, Daniel Ruiz participa reflotando un antiguo hilo de Cecilia Calvo a partir de una mesa redonda del Congrés Català d'Educació Matemàtica de 2016 (Imagen 4), donde ya se discutía sobre los usos de las redes.

Imagen 4. Arqueología tuitera. Congrés Català d'Educació Matemàtica de 2016.

[15] https://twitter.com/pbeltranp/status/1535707196213800960
[16] https://twitter.com/AprenentMates/status/1536211401651494913

No puedo evitar pensar que, tras esta ponencia, tenga que abrir el paraguas cuando entre en Twitter. Siempre que hay algún posicionamiento, ocurre. Y esto es algo que ocurre continuamente en educación, donde se debate hasta el significado de la O de la ESO. Por lo demás, valoro de forma muy positiva mi experiencia en esta red. Compartir, aprender, debatir, discutir, etc. son verbos que podría utilizar tranquilamente para describir lo que espero de ella.

Agradecimientos

El autor de este trabajo pertenece al grupo S60_20R «Investigación en Educación Matemática» financiado por el Gobierno de Aragón.

Referencias

Alsina, Á. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). Hilos de estadística y probabilidad en Twitter: Una nueva herramienta para el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. *Educação Matemática Pesquisa, 23*(4), 21–53.

Carpenter, J. P., Kimmons, R., Short, C. R., Clements, K. y Staples, M. E. (2019). Teacher identity and crossing the professional-personal divide on twitter. *Teaching and Teacher Education, 81*, 1-12.

Fernandez, C. y Yoshida, M. (2012). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Routledge.

Larsen, J. (2019). *Mathematics teaching and social media: An emergent space for resilient professional activity*. Simon Fraser University.

Larsen, J. y Liljedahl, P. (2017). Exploring generative moments of interaction between mathematics teachers on social media. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 129–136). PME.

Lerman, S. y Zehetmeier, S. (2008). Face-to-face communities and networks of practising mathematics teachers: Studies on their professional growth. En K. Krainer

y T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (Vol. 3, pp. 133153). Sense Publishers.

López-Beltrán, M., Albarracín, L., Ferrando-Palomares, I., Montejo-Gámez, J., Ramos, P., Serradó, A., Thibaut, E. y Mallavibarrena, R. (2020). La educación matemática en las enseñanzas obligatorias y el Bachillerato. En D. Martín De Diego, T. Chacón, G. Curbera, F. Marcellán y M. Siles (eds.), *Libro Blanco de las Matemáticas* (pp. 1-94). Editorial Centro de Estudios Ramón Areces.

Martínez-Juste, S. y Domenech, A. (2019). Lesson Study para innovar en matemáticas. *Entorno Abierto, 30*, 7-10.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Tur, G., Marín-Juarros, V. y Carpenter, J. (2017). Uso de Twitter en Educación Superior en España y Estados Unidos. *Comunicar, 51*, 19-28.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. Cambridge University Press

Willet, B. S. y Reimer, P. (2018). The Career You Save May Be Your Own: Exploring the mathtwitterblogosphere as a Community of Practice. En E. Langran y J. Borup (eds.), *Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference* (pp. 2324-2329). Association for the Advancement of Computing in Education (AACE).

Wright, P. (2017) Critical relationships between teachers and learners of school mathematics. *Pedagogy, Culture & Society, 25*(4), 515-530.

PoI1 Unus Pro Omnibus (Et Omnia Pro Uno)

Covadonga Rodríguez-Moldes Rey
covadongares@gmail.com
Catedrática de Matemáticas jubilada

Núcleo temático: Inclusión

Modalidad: Ponencia

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato

RESUMEN

El título de la ponencia, adaptación del lema de los tres mosqueteros de A. Dumas, describe la sensación, a veces agobiante, que suele tener un o una docente cuando descubre las personalidades, características y problemáticas específicas del alumnado de un grupo del que, en principio, solo conoce el nombre y apellidos que aparecen en el listado.

La palabra oficial que resume la causa de esta sensación de agobio es *diversidad*. La tarea de atender a todo el alumnado según sus necesidades es un reto extremadamente difícil para el profesorado.

Esta ponencia tiene dos partes, en la primera se presentan algunas propuestas para trabajar en el aula con todo el grupo al estilo mosqueteros, es decir, *una (actividad) para todos* y en la segunda parte, se pone la atención en la necesidad de detectar y estimular al alumnado con talento matemático para lo que el o la docente de matemáticas debe tener recursos propios.

Palabras clave: Diversidad, proyecto, talento matemático

1. Unus pro omnibus

Cuando empecé mi carrera profesional como profesora de Matemáticas en el Instituto Antonio Trueba de Baracaldo en el año 1979 viví una experiencia que me marcó profundamente. Ya habían comenzado las clases cuando me incorporé al centro cierto día de octubre, e inmediatamente entré en mi primera clase, 1º BUP D, formada, como los demás grupos, por 40 alumnas y alumnos.

Nada más entrar pude observar que en la primera fila había un chico muy grande, el más grande de la clase, que en el pupitre tenía una extraña máquina de escribir: era ciego. Me sentí abrumada, ya que si antes de entrar en el aula todo el trabajo que tenía por delante me parecía muy complicado de asumir, en ese momento fui consciente de que tenía que enfrentarme a una situación para la que en absoluto estaba preparada. Todo me parecía difícil, no conocía al alumnado ni sus problemas ni características, tampoco sabía cómo funcionaba el centro ni conocía al profesorado, y sentí que yo era *una para todo (unus pro omnibus).*

Estoy segura de que esta sensación de susto y soledad es compartida por la mayoría del profesorado en algún momento de su carrera profesional. Para mí significó darme de bruces con la llamada *diversidad,* con alumnos y alumnas con discapacidad o trastornos graves de conducta, de la comunicación y del lenguaje, aunque en aquella época no se prestaba atención a este concepto y todo el alumnado tenía que ser evaluado atendiendo exclusivamente a los resultados de unos exámenes en los que no se tenían en cuenta las características que ahora se engloban en la *atención a la diversidad,* término acuñado por la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (L.O.E.).

Hoy en día no se concibe la enseñanza sin la atención a la diversidad, que es el **conjunto de medidas y acciones** que tienen como **finalidad adecuar la respuesta educativa** a las diferentes características y necesidades, ritmos y estilos de aprendizaje, motivaciones, intereses y situaciones social y culturales de todo el alumnado. Dentro de estas características y necesidades están las del alumnado que precisa, de forma temporal o permanente, apoyos o provisiones educativas diferentes a las comunes, por presentar necesidades educativas especiales, por dificultades específicas de aprendizaje, por altas capacidades intelectuales, por incorporarse tarde al sistema educativo o por condiciones personales o de historia escolar.

A pesar de la ayuda inestimable que aporta el profesorado de apoyo del que se dispone en muchos casos, la responsabilidad de las decisiones, la planificación del trabajo, la elaboración de la documentación y el trabajo día a día en el aula siguen recayendo en el o la docente que está al frente de un grupo que tenga alumnado

con dificultades de aprendizaje y la sensación *unus pro omnibus et omnia pro uno* se da con mucha frecuencia.

1. 1 Unus (labor) pro omnibus

En mi experiencia profesional de bastantes años constaté que no solo el alumnado diagnosticado con necesidades educativas especiales precisa atención individualizada, sino que todos y cada uno de los estudiantes de un grupo tienen características propias que los hacen diferentes a los demás y que deberían ser tenidas en cuenta por el profesorado.

Cabría hablar por tanto de matemáticas inclusivas, un tema abordado en seminario federal de la FESPM en el mes de noviembre pasado, en Castro Urdiales, en el que participaron ponentes del núcleo temático *Inclusión* de estas JAEM, y que será un tema tratado con mucha atención en estas jornadas. En el seminario se enumeraron las características que deben cubrir las tareas inclusivas, que pueden consultarse en el siguiente documento:

https://fespm.es/wp-content/uploads/2021/09/Conclusiones-Seminario-Matematicas-Inclusivas.pdf

Si nos detenemos en el siguiente indicador de buenas prácticas inclusivas: *que todo el alumnado, sin ninguna excepción, participe en todas las actividades, situaciones de aprendizajes y experiencias planificadas para el grupo de referencia,* pensamos en una actividad para todos (unus pro omnibus). Pero el hecho de que todo el grupo trabaje en una misma tarea o proyecto no significa que todos los estudiantes deban participar de la misma manera, sino que debemos ofrecerles un abanico suficientemente amplio de posibilidades que permita esta participación a todos y a cada uno de ellos respetando sus capacidades.

A continuación mostraré tres prácticas de aula en las que se respeta este indicador.

1.1.1 En homenaje a Emma Castelnuovo

Mi primer contacto con Emma Castelnuovo (1913-2014) fue en las JAEM de Madrid en el año 1995, donde impartió una conferencia que resultó impactante para mí, al narrar su experiencia dando clase a niños y niñas en Níger, sin apenas medios para

trabajar, y contando solo con su entusiasmo y entrega. Esta profesora inolvidable, que dejó un legado didáctico que considero habría que conseguir difundir a mayor escala entre el profesorado –yo solo trabajé con los textos en italiano de la editorial La Nuova Italia que me acompañaron durante toda mi trayectoria docente– en aquella conferencia nos dijo que "había que tocar para comprender" y nos relató una actividad que hizo con los niños partiendo de una pregunta:

¿Crecen las hojas de una planta de forma proporcional a lo largo y a lo ancho?

La respuesta en los seres humanos sería negativa, pero ¿y en las plantas?

La actividad que presento comienza con esta misma pregunta y la he llevado a cabo en todos los niveles en los que impartí docencia, incluyendo la FP Básica, y con todo tipo de alumnado.

Con Emma Castelnuovo y Teresa Otero en las JAEM de Lugo (1999)

No quiero extenderme demasiado en la explicación de la actividad ni en la adaptación de la misma a las exigencias de estándares y de las tareas o unidades didácticas integradas (UDI) de la LOMCE, ahora ya obsoletas a la espera de que se defina el desarrollo curricular de la LOMLOE en todas las comunidades -–pues en el momento de escribir esta ponencia no lo está–, así que presento el guion para llevarla a cabo en un curso de secundaria. Particularmente, he trabajado esta actividad en 2º, 3º, 4º ESO, FP Básica y Bachillerato, con pequeños cambios en su desarrollo pero en los que no se necesita una base previa de conocimientos

matemáticos, ya que cuando es necesario representar puntos en una gráfica se representan, cuando hay que calcular una media aritmética se hace sin necesidad de haber tratado antes la estadística y aún más, cuando se necesita el concepto de pendiente de una recta, se explica y se calcula. Es un trabajo individual que se hace en el aula, con todo el alumnado trabajando en la misma actividad, y puede realizarse usando sus ordenadores o a mano. Personalmente, solía dedicar un día a la semana en un trimestre a esta tarea.

GUIÓN DE LA ACTIVIDAD

¿Crecen las hojas de forma proporcional a lo largo y a lo ancho?	
Actividad 1	Salir a un lugar próximo a recoger hojas, cada persona deberá recoger no menos de 15, de distintos tamaños y de una misma planta. Cuantas más plantas se utilicen, mejor.
Actividad 2	Poner las hojas a secar entre hojas de periódico. Pueden quedar todos los periódicos con las hojas en el aula o en un lugar donde no molesten, tratando de ponerles peso encima.
Actividad 3	Marcar las hojas con las iniciales del estudiante y un número. Por ejemplo: SV-01.
Actividad 4	Tomar medidas de cada hoja: largo, x_i y ancho, y_i y crear una tabla con todos los datos. Luego guardar las hojas de nuevo por si hubiese que revisar medidas.
Actividad 5	Representar las medidas de cada hoja en unos ejes de coordenadas y obtener la "nube de puntos". ¿Cuál es su aspecto? Mediante la observación de la nube responder a la pregunta: *¿aumenta el largo y el ancho de forma proporcional?*
Actividad 6	Calcular las medidas de la "hoja media" que es la que tiene de largo la media aritmética de todas las x_i y de ancho la media de todos los y_i.
Actividad 7	Representar en la gráfica de puntos el correspondiente a la "hoja media". Marcarlo de color distinto a los otros puntos.
Actividad 8	Trazar la recta que pasa por el origen y por hoja media. ¿Es la recta que parece acercarse más a todos los puntos?
Actividad 9	Escribir la ecuación de esa recta: $y=mx$, que es la "fórmula del crecimiento de la hoja". (Para esto es necesario contar el concepto de pendiente, m).

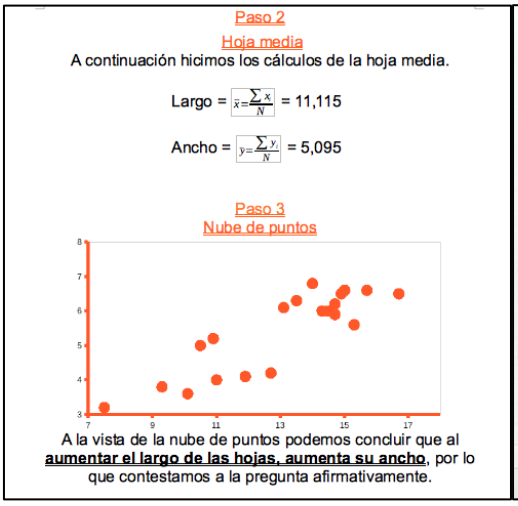
Actividad 10	Para finalizar, dibujar una hoja gigante que mida, por ejemplo, 40 cm de largo, colorearla y poner el nombre y las características de la planta de la que procede la hoja estudiada.
Actividad 11	Escribir un informe de todo lo realizado que se deberá entregar en un plazo dado y que luego será expuesto a los compañeros de clase.

Esta guía servirá para que alumnado y profesorado conozca los pasos a seguir para completar el trabajo, aunque será el docente quien deberá dirigir, ayudar, corregir, dar explicaciones y orientar el trabajo, especialmente del alumnado que tenga dificultades de aprendizaje o de aquél que prefiera hacer las actividades usando medios informáticos y quiera avanzar en la escritura con el procesador de textos con tablas, fórmulas y gráficas.

Poniendo hojas a secar, marcado de las hojas y toma de medidas

Todo preparado para representar puntos

Las anteriores son imágenes de las actividades 2, 3 y 4 de la experiencia en un grupo de 3º de ESO. En la actividad 5, con las gráficas a la vista, ya pueden contestar a la pregunta que se les planteaba. A continuación se pueden ver dos imágenes extraídas de los informes que debe presentar el alumnado, en las que se puede apreciar distintas formas de enfocar el trabajo –recuerdo que todo se hace en el aula– y la diversidad del grupo.



Paso 2

Hoja media

A continuación hicimos los cálculos de la hoja media.

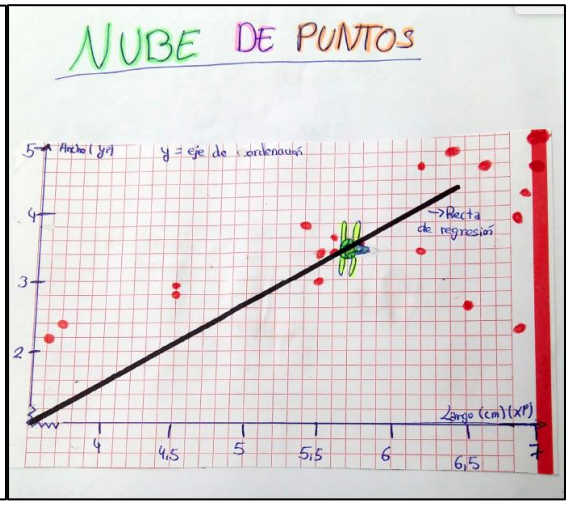
Largo = $\bar{x}=\frac{\sum x_i}{N}$ = 11,115

Ancho = $y=\frac{\sum y_i}{N}$ = 5,095

Paso 3

Nube de puntos

A la vista de la nube de puntos podemos concluir que al **aumentar el largo de las hojas, aumenta su ancho**, por lo que contestamos a la pregunta afirmativamente.



Puedo asegurar que esta actividad es una buena manera de dar a conocer el método científico a todo el alumnado, tenga o no necesidades educativas especiales; la tarea para el profesorado es intensa en todo caso ya que debe guiar y comprobar que en libretas u ordenadores se va describiendo la actividad de una forma entendible. En realidad, cuando los estudiantes son capaces de dibujar correctamente la nube de puntos y ven que al aumentar el largo aumenta el ancho,

se habrá conseguido el objetivo inicial de responder a una pregunta con base científica y a esta conclusión llega todo el alumnado si está bien tutelado en el aula. Conseguir entender el significado de pendiente y la ecuación de la recta es otro objetivo que alcanza la mayoría; la escritura de fórmulas en el ordenador, la representación de la nube de puntos e incluso de la recta de regresión está al alcance de algunos estudiantes.

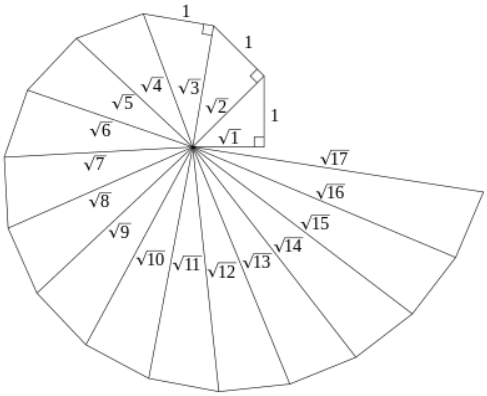
Para más referencias de este trabajo se puede consultar el artículo *Estadística para formar ciudadanos libres* (ver referencia en la bibliografía).

1.1.2 Espiral de Teodoro

La actividad que presento a continuación es obra didáctica de una excelente amiga, compañera y profesora, Cristina Montero. Surge en un grupo de 3º de ESO en el que hay varias personas diagnosticadas con necesidades educativas especiales (problema de motricidad, TEA con adaptación de 3º de primaria, TDHs, altas capacidades).

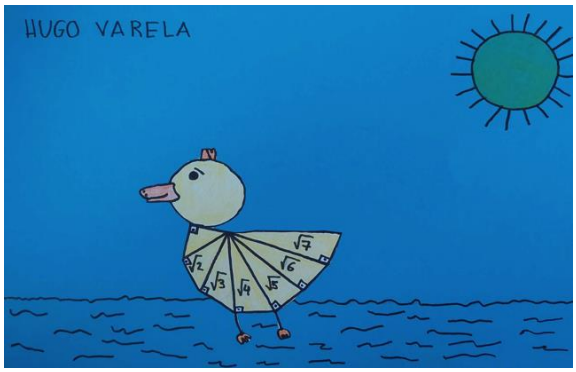
A veces las “obras didácticas” aparecen sin haberlo planeado, en este caso cuando el alumnado está trabajando potencias y radicales y ya conoce los números reales. Al aparecer la raíz de 2 un alumno comenta que “ve” la diagonal de un cuadrado de lado 1 y la profesora pregunta entonces: “¿Y cómo podríamos *ver* la raíz de 3?”, la profesora la dibuja partiendo de Pitágoras, raíz de 2 y de 1, a lo que una alumna exclama “¡Ah, una caracola!”. Pronto se dan cuenta de que con raíces sucesivas aparece la espiral de Teodoro y la profesora les propone para el día siguiente que piensen en donde se podría integrar esa espiral, además de en una caracola.

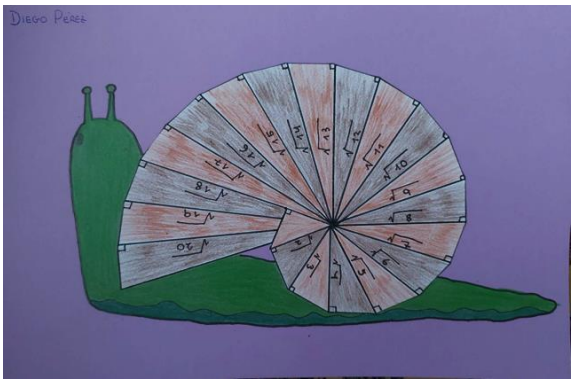
Al día siguiente cada estudiante trae su propuesta de integrar la espiral y se disponen a construirla en el aula con regla y compás, pidiendo la profesora que representen, como mínimo, hasta la raíz de 16.

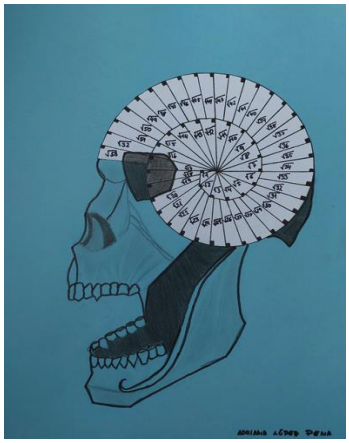


Después de trazar la espiral había que integrar ésta en su propuesta, una tarea que iniciaron el aula, de forma individual, pero pudieron completar en casa. Todos los y las estudiantes terminaron su trabajo, que resultó muy llamativo e interesante, y en el caso de las personas con necesidades educativas, se les proporcionó la espiral hecha que supieron integrar adecuadamente en su dibujo.

A través de las imágenes, que son una selección de los trabajos entregados, se puede apreciar la riqueza que supone la diversidad del aula. Y cabe señalar, que está actividad ayudó a la profesora a descubrir facetas imprevistas en su alumnado.







Con esta actividad me gustaría enfatizar el concepto de “obra didáctica” acuñado por Pedo Puig Adam (1900-1960), quien en la circular nº 4 de la Asesoría de Matemáticas para los Institutos Laborales, fechada en octubre de 1956, escribe algo que está de plena actualidad:

> Ninguna reforma tiene plena eficacia sin contar previamente con el elemento humano que haya de llevarla a efecto. Sería inútil toda precipitación coactiva y es preferible la vía del convencimiento y de la verdad. También para ustedes ha de valer como clave promotora de su interés y de su esfuerzo la derivada de las situaciones experimentadas por ustedes mismos ante sus alumnos.

A continuación, en esa misma circular, Puig Adam escribe lo que para mí representa la clave para ser feliz enseñando:

> Cuando cada profesor se sienta creador de obra didáctica en su clase, específicamente suya y como tal con peculiaridades y novedades que la distinguen de las demás, sentirán como nunca la belleza de nuestra tarea y gozarán enseñando como sus alumnos aprendiendo.

La obra didáctica es *un plan propio de acción* o una *reinterpretación* de la obra de otros autores –como en el apartado anterior– que adaptaremos a la especificidad de nuestra aula, incorporándola así a nuestro repertorio didáctico.

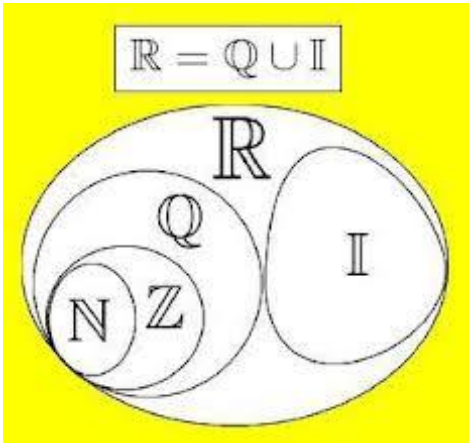
Aprovecho para recordar a nuestra querida Antonia Canals, recientemente fallecida, que en las XI JAEM en Zaragoza nos decía en su conferencia: “Si crees que algo se debe hacer...¡Hazlo! No tengas miedo a la innovación”.

1.1.3 Cajas para clasificar números reales

El conocimiento de los números reales es un objetivo complicado que raramente se alcanza en la etapa escolar de secundaria y bachillerato a pesar de la insistencia del profesorado. Esto se debe principalmente a la dificultad que presentan los distintos tipos de números que lo conforman y sus interacciones, además de los sutiles conceptos que se manejan como “aproximación infinitesimal”, “límite” o la existencia de distintos infinitos.

La tercera actividad que presento tiene su origen en un aula de 3º de ESO en la que coincidían varios alumnos y alumnas con NEE, alguno de ellos muy disruptivo. Estábamos en el primer trimestre atascados con los números reales cuando se me ocurrió la idea de construir cajas de números reales, algo que planteé al grupo y a lo que este accedió al pensar que se trataba una buena forma de huir de la rutina del aula.

La propuesta consistía en *tridimensionalizar* la visión del conjunto de los números reales convirtiendo una caja de cartón en un lugar en el que tendrán cabida los subconjuntos numéricos N, Z, Q, I que conforman la gran familia de los números reales. Basta repasar textos escolares para ver la confusión que presentan muchos diagramas planos de deste conjunto.



R=QUI, ¿cierto?

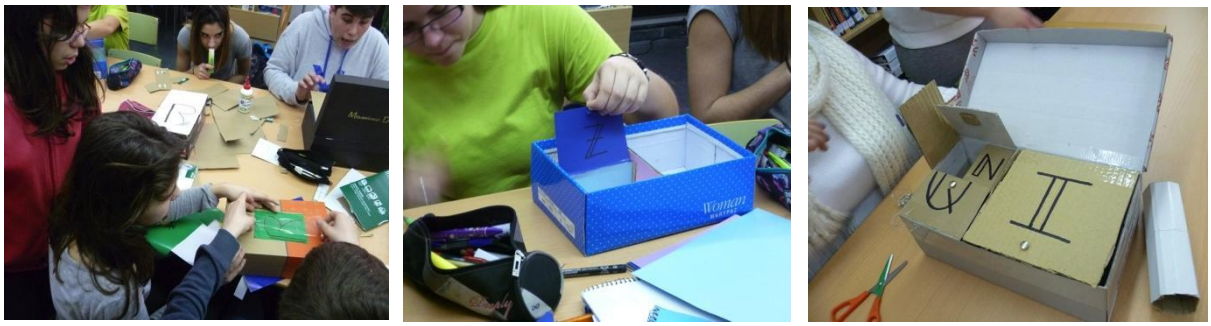
La actividad se organizó en grupos de cuatro personas y antes de empezar fue necesario definir el proyecto. Deberían traer una caja –de zapatos, por ejemplo-, y habría que construir en ella recintos en los que se ubicarían los distintos subconjuntos de los números reales.

Primeros trabajos

Cada grupo tendría que construir los recintos de su caja con la técnica que considerasen adecuada, para lo que debían aportar una relación del material que podrían necesitar para esta construcción. Yo me encargaría de proporcionarles este material y de guardar los prototipos de una semana a otra, pues la actividad se haría

los martes por la tarde en la biblioteca del centro. Y así, con bastante bullicio, se comenzó el trabajo con la primera división: los dos recintos, el de los números racionales y el de los irracionales, sin nada en común y que ocuparían toda la caja. Habría que poner tapas a los recintos que se pudiesen abrir y cerrar con facilidad. La primera sorpresa surge con el tamaño de I, les pareció muy grande porque pensaban que habría menos números. [17]

Es fácil de imaginar que la construcción de Z y N dentro de Q tiene su complicación, como el diseño de las tapas, pero en cuatro semanas las cajas estaban construidas y hoy creo que la construcción de la caja fue muy formativa. Las cajas resultaron ser fuertes y duraderas y todavía hoy siguen en funcionamiento.



Distintos momentos de la construcción de las cajas de números rea

Yo aprovechaba la construcción para contar propiedades y curiosidades de los números y cuando les pedí que escribieran sobre la actividad pude leer entre otras muchas cosas:

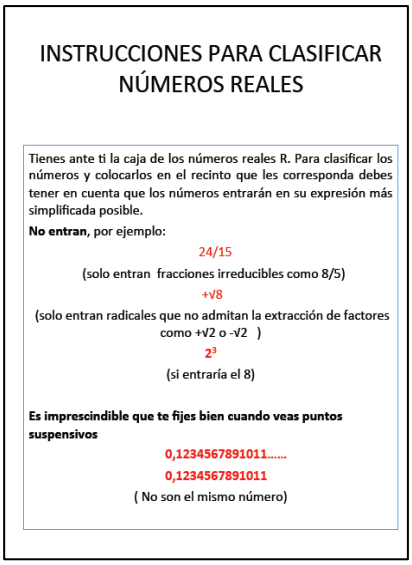
> “Mentras cortábamos e probábamos como se sostiña a división na caixa, a profesora nos dicía que a división maior correspondería aos números irracionais que son os números decimais que teñen infinitas cifras decimais e que non teñen período. Tamén inventábamos números irracionais: comezaba un dicindo 2,1 e seguía outro 2,12, e outro 2,123, así todos aumentábamos una cifra 2,1234 -> 2,12345 -> 2,123456,…… E lembramos aos irracionais famosos: pi, e , raíz de 2, número fi,…..”

[17] Por cierto, a quien piense que no se debe encerrar a R en una caja le diría que entonces no debía dibujar nunca un segmento y llamarle recta.

Una vez que las cajas estaban construidas llegó el momento de crear números para hacer la actividad de colocarlos en el recinto correspondiente. El material elegido fueron las avellanas y decidí que se partiría de los números escritos en su expresión más simplificada; es decir, no aparecerían operaciones como potencias, logaritmos o raíces de las que se puedan extraer factores ni entrarán fracciones sin simplificar. El motivo de esta decisión sería tener los conceptos claros, y que al mirar el número escrito en la avellana ya se pueda decidir su ubicación. Se podrían hacer otras actividades usando expresiones más complicadas, incluso ecuaciones en las que hubiese que colocar las soluciones en el recinto correspondiente, pero no era ese el objetivo.

Avellanas convertidas en números reales

Ahora la actividad sería la de clasificar números, para lo que diseñé unas instrucciones con un diagrama de flujo que ya sabían manejar pues se lo había "copiado" a Emma Castelnuovo de uno de sus libros para aprender a hacer operaciones combinadas.



INSTRUCCIONES PARA CLASIFICAR NÚMEROS REALES

Tienes ante ti la caja de los números reales R. Para clasificar los números y colocarlos en el recinto que les corresponda debes tener en cuenta que los números entrarán en su expresión más simplificada posible.

No entran, por ejemplo:

24/15

(solo entran fracciones irreducibles como 8/5)

+√8

(solo entran radicales que no admitan la extracción de factores como +√2 o -√2)

2^3

(si entraría el 8)

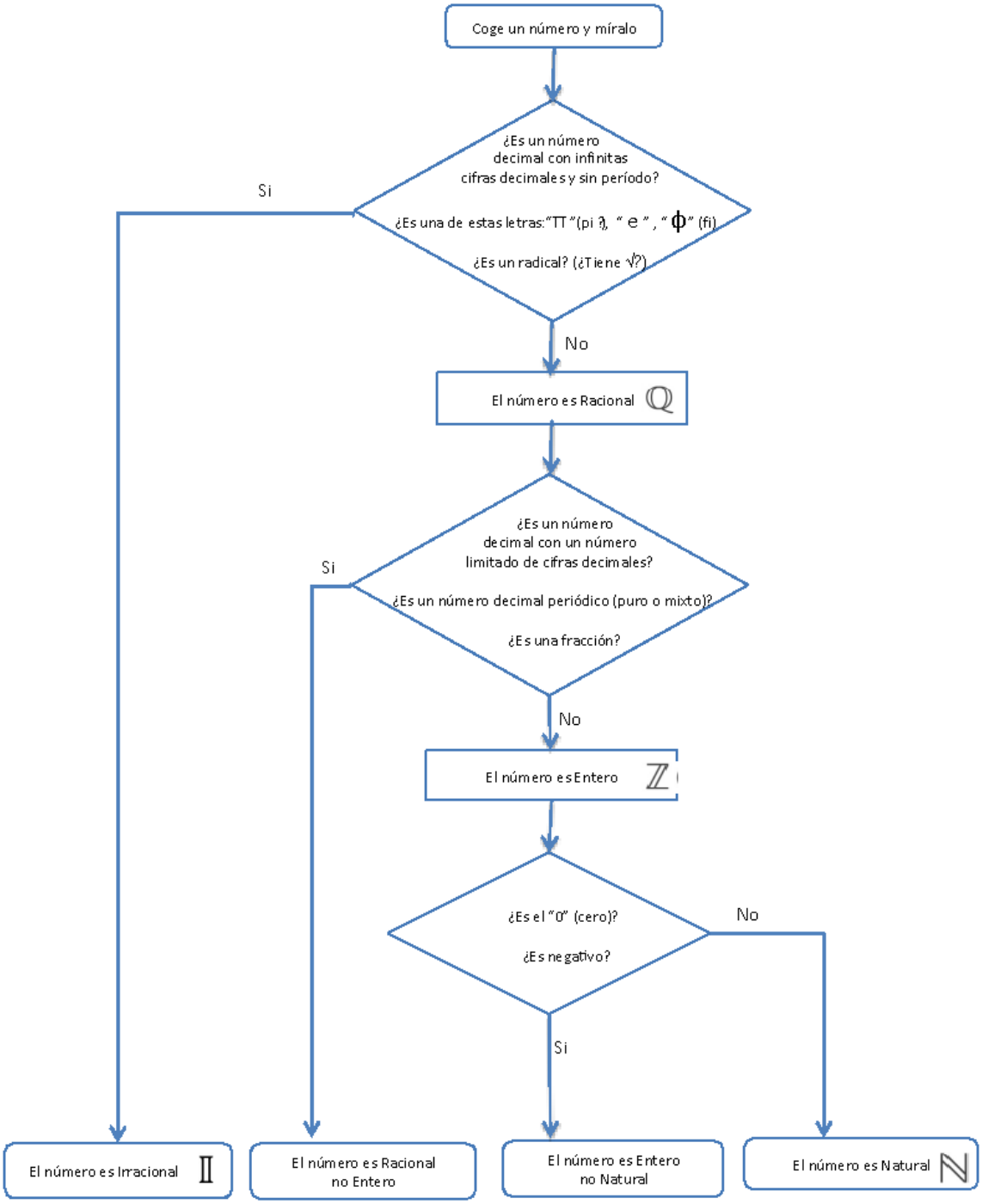
Es imprescindible que te fijes bien cuando veas puntos suspensivos

0,1234567891011.....

0,1234567891011

(No son el mismo número)

Clasificando números reales

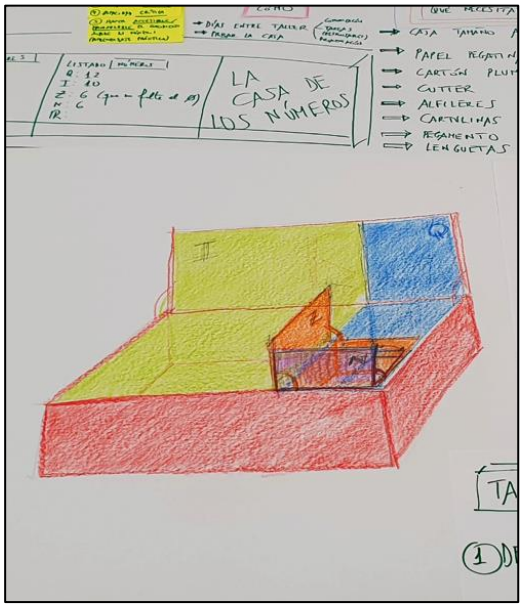


La segunda parte de esta actividad, ya con las cajas de números, los números, el diagrama y las instrucciones, consistió en practicar la clasificación colocando 10 números reales en el recinto que le correspondiese. La puntuación (0,2 por cada número correctamente colocado) se sumaría a la nota del siguiente examen.

He repetido esta prueba en 4º de ESO y bachillerato en muchas más ocasiones usando las cajas de números y las mismas avellanas que resultaron ser un material sostenible y duradero.

Puede pensarse que esta actividad no está adaptada a alumnado con problemas de aprendizaje o quizás que no es un tema adecuado, pero yo defiendo el valor cultural que tiene el conocimiento de los números, es como el genoma de las matemáticas y defiendo su conocimiento y divulgación.

Este proyecto fue seleccionado en el Laboratorio Ciudadano *Experimentamates* de la Universidad Politécnica de Madrid, donde se trataba de sacarlo adelante con los aportes de los asistentes de perfiles variados, la mayoría no relacionados con las matemáticas. En las pruebas realizadas, personas voluntarias lograban clasificar números reales y se sorprendían al descubrir un mundo desconocido –eso decían a pesar de haber pasado por la enseñanza secundaria–.



Diseño de caja de números reales en Experimentamates

Mi idea al presentar estas tres actividades, que podrían haber sido otras, es el de transmitir la necesidad de conseguir que todo el alumnado se implique en una misma tarea, a pesar de las diferentes características y necesidades educativas del alumnado. No es un trabajo nada fácil, hay que distribuirlo adecuadamente durante el año académico, mi propuesta e hacer un proyecto por trimestre.

1. 2 Una obligación: la detección y cuidado del talento matemático

Comienzo esta última parte de mi colaboración en las XX JAEM de Valencia con unas palabras que escribía Miguel de Guzmán (1936-2014) a finales del siglo pasado:

> Con seguridad se encuentran en una comunidad escolar de una cualquiera de nuestras grandes ciudades 20 niños entre 12 y 14 años con un talento especial para las matemáticas. ¿Qué sucederá con ellos? Muy probablemente transcurrirán sus años escolares inadvertidos, frustrados, sin fruto para la sociedad, por falta de un tratamiento adecuado; posiblemente van al fracaso y a la inadaptación por aburrimiento.[18]

Precisamente en unas JAEM, las VI, celebradas en Badajoz en 1993 –mis primeras JAEM, desde entonces nunca he faltado a la cita de los años impares– asistí asombrada a una conferencia de Miguel de Guzmán que estaba en esa época tratando de crear el proyecto ESTALMAT. Desde entonces fui consciente de la responsabilidad que tenemos los profesores y profesoras de Matemáticas con la detección y cuidado del talento matemático, una necesidad educativa especial para la que no tenemos profesorado de apoyo. En este caso, somos nosotros los que tenemos la responsabilidad de descubrir y cuidar, y de nuevo sentimos la sensación de *unus pro omnibus et omnia pro uno*.

18 https://thales.cica.es/estalmat/sites/thales.cica.es.estalmat/files/MGUZMAN_TRATAMIENTO_EDUCATIVO.pdf

Antes de continuar conviene hacer una reflexión sobre el concepto *talento matemático* en un momento en que existe preocupación por detectar y atender al alumnado de *altas capacidades* que, según el MEC, "...constituye un grupo muy heterogéneo que se caracterizaría porque en test psicométricos de inteligencia general obtienen puntuaciones significativamente superiores a la media (al menos dos desviaciones típicas) y en pruebas de aptitudes obtienen, además, puntuaciones percentiles superiores a la media (desde 75 a 95 o más), dependiendo de su perfil (complejo, múltiple o simple)."[19]

El alumnado de *altas capacidades* puede ser de tres tipos: alumnado *precoz, superdotado* o alumnado con *talento.* El alumnado *precoz* tiene un desarrollo evolutivo que se realiza en un tiempo más breve que el que se considera normal y una vez que se consigue un cierto nivel es posible que se iguale a la población de referencia. La persona *superdotada* tiene un rendimiento intelectual superior en una amplia rama de aptitudes y capacidades y aprende con facilidad en cualquier área. Se cumple que todos los superdotados son precoces pero no todos los precoces son superdotados. Al hecho de tener un rendimiento superior en un área concreta se le llama *talento*. Un alumno o alumna con talento tiene habilidades específicas en ciertas áreas muy concretas (las personas superdotadas suelen tener un determinado talento en un área específica). Entre los tipos de *talento* están el musical, el artístico, el social, el científico...y el *talento matemático.*

El alumnado con *talento matemático* tiene una alta capacidad para manejar información cuantitativa y numérica, para la representación espacial y para la resolución de problemas, tiene capacidad de organizar y usar los datos, puede formular problemas espontáneamente, tiene capacidad de generalizar y puede tener con frecuencia ideas originales.

En España a partir de los resultados de la evaluación diagnóstica de 2º de ESO (2010) –que ahora no se hace en todas las comunidades– y a partir de los informes PISA, se pone de manifiesto que el sistema no hace aflorar al alumnado con talento matemático. Entre los muchos análisis que aparecen en el último informe PISA publicado en el 2018, se analizan los resultados en Matemáticas que alcanzan el

[19] https://www.educacionyfp.gob.es/mc/neurociencia-educativa/plan/ejes/talento-aacc.html

nivel que representa la excelencia en estas pruebas (el 5) y podemos leer:

> En España, solo el 6,2% de los estudiantes de 15 años llegan al nivel 5 de la escala de matemáticas, significativamente menos que la media de países OCDE (8,5%) y que el total UE (9.0%). Los países con mayor proporción de estudiantes que alcanzan este nivel son Corea (14,4%), Países Bajos (14,2%), Japón (14,0%) y Bélgica (12,5%), mientras que México (0,5%), Colombia (0,5%) y Chile (1,1%) presentan las proporciones más bajas de estudiantes que alcanzan este nivel. [20]

Esto significa que, comparando con la UE, en España hay unos tres alumnos o alumnas de cada 100 que, teniendo altas capacidades no tienen alto rendimiento. Es necesario que nos impliquemos a fondo en conseguir que no se desperdicie el talento matemático que existe en nuestras aulas, es importante para el futuro de nuestra sociedad.

1. 2. 1. Detección y cuidado del talento matemático, ¿cómo?

No conozco una técnica estudiada y definida por expertos para detectar y cuidar el talento matemático, no olvidemos que generalmente en un aula tenemos muchos alumnos y alumnas y cada uno es especial, pero tampoco olvidemos que en el aula *todo es para una (omnia pro uno),* así que comencemos con un primer consejo, de nuevo, de Puig Adam.

Puig Adam escribió el *Decálogo del profesor de Matemáticas*[21] y en una primera versión no quedó del todo contento como podemos comprobar en la Circular nº 3 que envió desde la Asesoría de Matemáticas a Asunción Rodríguez-Moldes, profesora en el Instituto Laboral de Ribadeo (Lugo) en fecha indeterminada de 1956:

> Finalmente voy a criticarme yo mismo el Decálogo: creo que olvidé en él un carácter fundamental que ha de marcar la postura del profesor moderno, *La observación constante de sus alumnos*. Aunque tal

[20] https://sede.educacion.gob.es/publiventa/descarga.action?f_codigo_agc=20372

[21] https://redined.mecd.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/74796/00820073009402.pdf?sequence=1&isAllowed=y

> observación va implícitamente contenida en varios puntos, especialmente el primero; habría sido mejor enunciarla explícitamente completando así el primer punto: no adoptar una didáctica rígida sino amoldarla en cada caso al alumno observándole constantemente.

En relación con esto aconsejaba ...

> estampar en la portada del diario de clase este aforismo de compromiso: "este no es solo mi diario de clase sino también mi diario de experiencias. no he de olvidarme de observar constantemente a mis alumnos para penetrar en sus pensamientos y en sus efectos"

El primer consejo es, por lo tanto, la observación constante del alumnado.

El segundo consejo es de Miguel de Guzmán y procede del artículo "Tendencias innovadoras en Educación Matemática"[22] donde propone que frente a la secuencia: exposición de contenidos –ejemplos –ejercicios sencillos –ejercicios más complicados –¿problemas?, en la presentación de un tema, se podría sustituir por otra basada en el espíritu de la resolución de problemas con la secuencia: propuesta de la situación problema de la que surge el tema (basada en la historia, aplicaciones, modelos, juegos…) –manipulación autónoma por los estudiantes –familiarización con la situación y sus dificultades –elaboración de estrategias posibles –ensayos diversos por los estudiantes –herramientas elaboradas a lo largo de la historia –elección de estrategias –ataque y resolución de los problemas –recorrido crítico (reflexión sobre el proceso) –afianzamiento formalizado (si conviene) –generalización –nuevos problemas –posibles transferencias de resultados, de métodos, de ideas. Asegura:

> En todo el proceso el eje principal ha de ser la propia actividad dirigida con tino por el profesor, colocando al alumno en situación de participar, sin aniquilar el placer de ir descubriendo por sí mismo lo que los grandes matemáticos han logrado con tanto esfuerzo.

[22] http://blogs.mat.ucm.es/catedramdeguzman/tendencias-innovadoras-en-educacion-matematica/#4.3

Este es, pues, el segundo consejo, hacer participar activamente al alumnado en las clases. Y para terminar, el tercer consejo lo doy yo: ofrecer al alumnado actividades matemáticas voluntarias al margen de la actividad lectiva ordinaria.

Hoy en día hay muchas actividades que sirven para detectar y estimular el talento matemático: Proyecto ESTALMAT, Olimpiadas, Concurso de Primavera, Canguro Matemático, Pangea, Open Matemático, Incubadora de Sondeos... Basta consultar las asociaciones matemáticas que forman la FESPM o navegar por internet para descubrir muchas posibilidades, a las que hay que añadir las propuestas propias de cada centro: concursos de resolución de problemas, el problema del mes, concursos diversos como los de fotografía matemática, Pi-tuits, etc.

No cabe duda de que este último consejo tiene un coste especial para el profesorado, la ocupación del tiempo no lectivo y el trabajo enorme que producen pues es necesario estar muy atentos a las convocatorias, plazos, inscripciones, anuncios al alumnado, preparaciones, ensayos, gestionar desplazamientos si los hay…; en fin, a veces el trabajo es desbordante, pero me gustaría dar una visión muy positiva de estas tareas "extra", una conclusión a la que llegué después de muchos años de implicación en Olimpiadas Matemáticas, ESTALMAT o concursos diversos como fotografía, vídeos, matmonólogos, Incubadora de Sondeos, Open Matemático... y que no es sino la suerte de tener la posibilidad de conocer y hacer amistades con gente increíble, de aprender muchas cosas –y no solo matemáticas–, de viajar, de sentir que nuestro alumnado especial lo merece o de vivir experiencias insospechadas.

Abanderada de Turkmenistan en la IMO (Olimpiada Matemática Internacional) (2008)

Referencias

Castelnuovo, E. (1989). *Matematica. 1. Numeri e figure.* La Nuova Italia. Firenze.

Rodríguez-Moldes, C.(2015). Descubriendo un tesoro: Las circulares de Puig Adam. *Sociedad "Puig Adam" de profesores de Matemáticas. Boletín* nº100, 41-52.

Rodríguez-Moldes, C.(2015). Detección e coidado do talento matemático en Galicia. O programa ESTALMAT-Galicia. *Revista Galega de Educación.* nº100, 41-52.

Rodríguez-Moldes, C. (2017). Estadística para formar ciudadanos libres. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas,* nº 76, 16-27.

PoI2 Matemáticas inclusivas: eliminando barreras y creando facilitadores desde la evidencia

Concha Barceló
conbarlop1@gmail.com
Institución/Centro de referencia
Begoña De la Iglesia Mayol
bego.delaiglesia@uib.es
Universitat de les Illes Balears

RESUMEN

En esta conferencia se presentarán algunas de las múltiples oportunidades de aprendizaje que ofrece el marco de una escuela inclusiva, atendiendo a sus dimensiones: las culturas o valores inclusivos, las políticas, encaminadas a movilizar recursos para atender mejor a la diversidad, y las prácticas de aula, diseñadas para conseguir la presencia, la participación y el aprendizaje de todos los alumnos y alumnas, poniendo el foco en la identificación y eliminación de las barreras del contexto que pueden impedir el aprendizaje de conceptos y procesos matemáticos.

A su vez, presentaremos actividades y buenas prácticas inclusivas matemáticas que se fundamentan en el Diseño Universal de Aprendizaje (DUA), en el Modelo de Respuesta a la Intervención (RtI), en los predictores de éxito de aprendizaje, en la organización de los apoyos y facilitadores del aprendizaje, en los indicadores competenciales, la teoría del aprendizaje autorregulado…, todo ello para asegurar el aprendizaje de calidad de todo el alumnado, sea cual sea su condición y sus características.

Palabras clave: Educación Inclusiva, Diseño Universal para el Aprendizaje, Modelo de Respuesta a la Intervención, Matemáticas inclusivas, Dificultades Específicas de Aprendizaje (DEA).

1. Introducción

La educación inclusiva tiene que ver con todas las personas en todos los contextos educativos. Pretende ofrecer entornos amables para el aprendizaje. Entornos equitativos, libres de barreras y que favorezcan el acceso, la participación y el progreso de todo el alumnado (Booth *et al.*, 2000).

Por lo que se refiere a las matemáticas, son uno de los aprendizajes más funcionales para la vida. Son esenciales para entender y construir el mundo que nos rodea y hacer frente a los retos del siglo XXI. Por lo tanto, el diseño de las situaciones de aprendizaje matemáticas, en todos los niveles y etapas educativas, debe procurar la identificación de barreras del contexto que puedan dificultar los aprendizajes, así como la creación de facilitadores, desde la evidencia.

El camino hacia un proceso inclusivo de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pasa por conocer la diversidad y considerarla como un valor, por tratar el error como una oportunidad de aprendizaje, poniendo el foco en los procesos y no tanto en los resultados. Además, es fundamental tener altas expectativas hacia todo nuestro alumnado, flexibilizando la enseñanza de las matemáticas con la finalidad de adaptarla a todos los estilos de aprendizaje.

Con esta comunicación pretendemos reflexionar precisamente sobre la necesidad y la urgencia de embarcarnos en procesos de transformación educativa que promuevan oportunidades de aprendizaje de las matemáticas para todo el alumnado.

2. Objetivos

Nuestros objetivos se centran en:

- Sensibilizar al profesorado sobre la necesidad de caminar hacia un enfoque curricular inclusivo.
- Definir cuáles son las dimensiones de una escuela inclusiva.
- Concretar los principios de la educación inclusiva.
- Identificar las barreras del entorno que impiden aprender al alumnado con dificultades específicas de aprendizaje.
- Ofrecer ejemplos de facilitadores desde la evidencia.
- Presentar los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA).

- Comentar las evidencias del modelo de respuesta a la intervención (RTI). como propuesta para la detección e intervención temprana de dificultades.
- Presentar un modelo de herramienta para el diseño de actividades matemáticas competenciales e inclusivas.
- Reflexionar sobre el proceso de la evaluación para el aprendizaje.

3. Argumentación

¿De dónde partimos?

Tradicionalmente, nuestro sistema educativo ha considerado al alumnado medio o "talla única" (Popham, 1999) como el protagonista al que dirigir las propuestas curriculares, obviando otros perfiles diversos que, habían (o han) de hacer un esfuerzo considerable por adaptarse a un sistema rígido. De esta manera, la sociedad pierde talentos y engrosa las estadísticas de fracaso escolar, de las que España es líder en Europa (Martínez, *et al*., 2016). Uno de los colectivos más vulnerables en este sentido, es el alumnado con dificultades específicas de aprendizaje (DEA). Según la American Psychiatric Association (2014), la prevalencia de las DEA, en las áreas académicas de la lectura, la expresión escrita y las matemáticas es del 5-15 % en el alumnado en edad escolar de diferentes lenguas y culturas. Esta condición neurobiológica, afecta a personas con una inteligencia media, alta o muy alta e impide que el alumnado obtenga éxito educativo si no se crean las condiciones de accesibilidad adecuadas. Con esta realidad evidenciada por infinidad de estudios a lo largo de los años, el sistema educativo no puede continuar anclado en prácticas educativas que no tengan en cuenta la neurodiversidad.

¿Cómo se pueden trabajar las matemáticas respetando la diversidad del aula?

La respuesta educativa inclusiva se compone de varios ingredientes fundamentales, todos ellos basados en los parámetros y principios de la educación inclusiva. Las medidas de carácter general, siguen los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje, como los facilitadores y apoyos (indispensables para unos, pero buenos para todos).

Las medidas más específicas, nacen del enfoque preventivo que nos proporciona el modelo de respuesta a la intervención. En todo caso, todas las medidas de

respuesta deben respetar y propiciar la presencia, la participación y el progreso de todo el alumnado, aumentando así su nivel de autonomía y de autorregulación. Por último, no podemos olvidar el gran impacto de las altas expectativas sobre el éxito educativo. Pasamos a desarrollar, con un poco más de profundidad, las medidas anteriores, comenzando por definir las dimensiones de una escuela equitativa.

La educación inclusiva es un proceso. Una búsqueda constante de mejores maneras de atender al alumnado (Echeita y Ainscow, 2011). Tiene en cuenta la diversidad en el proceso de aprendizaje, a través de un conocimiento previo de los intereses, fortalezas y necesidades del aula. Se centra especialmente en el alumnado vulnerable que está en riesgo de fracaso escolar y/o de exclusión social (Echeita y Ainscow, 2011). Para iniciar el proceso hacia la mirada inclusiva, es necesaria una evaluación previa de las dimensiones que definen a una escuela inclusiva: las culturas, las políticas y las prácticas. Las culturas de centro son los valores de la comunidad educativa. Un centro inclusivo es un lugar donde todas las personas se sienten acogidas, respetadas, valoradas y escuchadas. Es un entorno seguro. Las políticas de centro se basan en la organización y movilización de todos los recursos disponibles para atender a la diversidad. Por último, las prácticas inclusivas son aquellas acciones que llevamos a cabo en el aula y que se apoyan en los dos parámetros anteriores. Si nos centramos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la cultura de centro sería la responsable del cambio de mirada: de ver la diversidad como riqueza y de tener altas expectativas hacia los logros matemáticos de todo el alumnado. Por su parte, las políticas inclusivas, se centrarían en proporcionar los apoyos y recursos personales, materiales y espaciales, entre otros, para llevar a cabo las prácticas matemáticas a nivel de aula.

Estas prácticas, han de estar enmarcadas en el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA). Este diseño nos ofrece tres principios y nueve pautas (Pastor, *et al*., 2014), para guiar las situaciones de aprendizaje:

- Proporcionar múltiples medios de compromiso para activar la motivación de nuestro alumnado. Por ejemplo, ofreciendo la posibilidad de que el alumnado elija entre varias propuestas matemáticas, y que estas estén conectadas con su contexto e intereses.

- Proporcionar al alumnado diversos medios para representar los conceptos y procesos matemáticos. Se trata de atender a todos los estilos de aprendizaje del aula, desplegando en las explicaciones recursos de todo tipo: visuales, manipulativos, digitales, audiovisuales, etc.
- Por último, proporcionar múltiples maneras para que nuestro alumnado accione y exprese los aprendizajes matemáticos. Esto aplica tanto al proceso de investigación, descubrimiento y entrenamiento de los conceptos y procesos matemáticos, como a la fase de la evaluación de los mismos. Esta última, ha de ser diversificada, proponiendo diferentes instrumentos y formas de evaluar. Focalizando en los progresos individuales y no tanto en el resultado final.

Integrar las situaciones de aprendizaje matemático en este marco metodológico, proporciona equidad a nuestro alumnado puesto que se flexibiliza el currículum y se atiende a los diferentes estilos y ritmos de aprendizaje. Estos últimos, se van a evidenciar al aplicar el modelo de respuesta a la intervención (Rti). Se trata de un enfoque preventivo para el abordaje de las dificultades específicas de aprendizaje (Jiménez, 2016). Está estructurado en varios niveles de apoyo:

- Nivel 1: Apoyo universal – Enseñanza matemática de alta calidad y apoyo al comportamiento para todos los estudiantes de la escuela.
- Nivel 2: Apoyo estratégico – Intervenciones adicionales para estudiantes que necesitan mayor ayuda en destrezas matemáticas específicas. Se da en grupos reducidos y heterogéneos.
- Nivel 3: Apoyo intensivo e individualizado. Intervenciones diseñadas específicamente para cubrir las necesidades únicas de estudiantes individuales.

Cuando un estudiante no responde bien al nivel 1, se le programan sesiones de apoyo estratégico para apoyarle en aquellos aspectos en los que necesita mayor refuerzo. Si después de estas sesiones se constata, mediante una evaluación, que el alumno o alumna sigue sin responder bien a esta intervención, se le diseñan sesiones intensivas e individuales, normalmente con profesorado especializado de apoyo a la inclusión. Una mala respuesta continuada a la intervención en niveles

iniciales, suele tener tanta validez como un diagnóstico posterior de dificultades específicas de aprendizaje. Al organizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta manera, se visibilizan las posibles condiciones neurobiológicas que impiden el aprendizaje, al tiempo que se trabaja de forma proactiva en las necesidades concretas detectadas. Es decir, al intervenir de manera temprana, nos adelantamos al fracaso.

En toda esta organización y flexibilización curricular, es fundamental que se garanticen los principios de Presencia, Participación y Progreso. La primera condición es que todos los alumnos estén siempre presentes en todas las actividades, situaciones de aprendizaje y experiencias que se desarrollen con el grupo de referencia. La participación quiere decir que todos los alumnos, sin ninguna excepción, participan en todas las actividades, situaciones de aprendizaje y experiencias planificadas para el grupo de referencia. Ello no significa que todos los alumnos deban participar de la misma manera, sino que debe ofrecerse un abanico suficientemente amplio de posibilidades, que permita esta participación a todos y cada uno de los alumnos respetando sus capacidades. Por último, el progreso requiere necesariamente que todos los alumnos en todas las experiencias, actividades y situaciones planteadas alcancen un aprendizaje óptimo, aunque no sea necesariamente el mismo para todos y cada uno de los alumnos. Estos indicadores se ven reforzados desde la mirada de una educación inclusiva si, además, nos esforzamos por lograr la autonomía del alumnado en la realización de las tareas. Esto involucra la autorregulación; la consciencia sobre el proceso; y la evaluación formadora.

Finalmente, de forma transversal, se ha de tener presente la enorme importancia (evidenciada) que tienen las altas expectativas hacia todo el alumnado (Hattie, 2012). Las creencias propias de un alumno o alumna sobre su rendimiento académico, muchas veces basadas en experiencias previas negativas, influyen de forma extraordinaria en su aprendizaje. Dweck (2017), nos habla de la necesidad de promover una mentalidad de crecimiento, tanto en el alumnado como en el profesorado, poniendo el foco en el proceso de aprendizaje, en el progreso individual, en el “todavía no” y no tanto en el “ahora no”.

4. Conclusiones

Son muchas las evidencias presentadas y vividas, que muestran que lo que realmente es necesario cambiar es la mirada y enfocarse hacia las capacidades de todos y todas para aprender. Asumir que todo el mundo aprende y puede aprender más y mejor si lo acompañamos desde sus potencialidades.

Las escuelas justas son las escuelas preparadas y nosotros tenemos la responsabilidad de prepararlas con profesionales formados para dar y querer atender a todo el mundo, también en las situaciones de aprendizaje matemático.

Ayudar al desarrollo profesional y personal hará que la presencia, participación y aprendizaje de todos y todas sea una realidad extendida. Todo el mundo tiene derecho a ir a la escuela de su pueblo, de su barrio, se su entorno. Y que esta escuela sea justa y esté preparada para acoger a todo el mundo es una responsabilidad de los y las docentes (Llabrés et al, 2021).

Esperamos, deseamos e invitamos a las personas que viajen por estas páginas, que se dejen tocar y transformar tal como nos ha transformado quienes hemos tenido la suerte de conocer historias de vida inclusivas en las escuelas. Así continuaremos construyendo escuelas justas, es decir escuelas para todos.

Imagen 1. Logo.

Referencias

American Psychiatric Association. (2014). DSM-5: Manual diagnóstico y estadístico de los trastornos mentales.

Booth, T., Ainscow, M., Black-Hawkins, K., Vaughan, M., & Shaw, L. (2000). *índice de inclusión. Desarrollando el aprendizaje y la participación en las escuelas*.

Dweck, C. (2017). *Mindset: La actitud del éxito*. Editorial Sirio SA.

Echeita Sarrionandia, G., & Ainscow, M. (2011). La educación inclusiva como derecho. Marco de referencia y pautas de acción para el desarrollo de una revolución pendiente.

Hattie, J. (2012). *Visible learning for teachers: Maximizing impact on learning*. Routledge.

Jiménez, J. E. (2016). Modelo de respuesta a la intervención: un nuevo enfoque en la identificación de las dificultades de aprendizaje.

Llabrés, J., Muntaner, J. J., & De la Iglesia, B. (2019). Aprender Juntos en la Escuela: Un Derecho Inexcusable y un Beneficio Social. *Revista Internacional De Educación Para La Justicia Social*, *8*(2), 147–164. https://doi.org/10.15366/riejs2019.8.2.008

Martínez, M. L., Reverte, G. M., & Manzano, M. M. P. (2016). El fracaso escolar en España y sus regiones: Disparidades territoriales. *Revista de estudios regionales*, (107), 121-155.

Pastor, C. A., Sánchez, J., & Zubillaga, A. (2014). Diseño Universal para el aprendizaje (DUA). *Recuperado de: http://www. educadua. es/doc/dua/dua_pautas_intro_cv. pdf*.

Popham, W. J. (1999). ¿Por qué las pruebas estandarizadas no miden la calidad educativa. *Educational Leadership*, *56*(6), 2-11.

COMUNICACIONES

CoP001 ¿Cómo explican los estudiantes de bachillerato su imagen intuitiva de límite de una función?

Joan Pons Tomàs
joanpons50@yahoo.es
Profesor jubilat IES Mutxamel
Julia Valls González
julia.valls@ua.es
Profesora colaboradora honorífica Departamento de Innovación y Formación Didáctica.
Universidad de Alicante

Núcleo temático: Procesos. Formación del profesorado.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Bachillerato.

RESUMEN

Esta investigación tiene como objetivo analizar cómo explicarían los estudiantes de primero de bachillerato (16-17 años), si ostentaran el papel de profesor, su imagen intuitiva de límite a un hipotético estudiante. Los participantes en esta investigación fueron seleccionados y entrevistados entre los 32 que habían respondido a dos tareas opcionales que formaban parte de un cuestionario cuyo objetivo era analizar cómo comprendían el concepto de límite de una función. Los resultados indican que estos estudiantes son capaces de explicar el significado de límite de una función: (a) en modo algebraico-numérico, desde la concepción dinámica de límite, o desde el valor de la función y el conocimiento de los algoritmos de cálculo; (b) en modo gráfico, con diferentes tendencias laterales, cinco de ellos lo explican basándose en la concepción dinámica, expresando los diferentes límites laterales, indicando cuatro de ellos la no existencia de límite; los otros cinco no son capaces de explicarlo

Palabras clave: Comprensión, Límite de una Función, Concepción Dinámica, Procedimientos Algorítmicos, Modos de Representación Gráfico y Algebraico.

1. Introducción

Esta comunicación se engloba en una problemática más amplia centrada en comprender cómo los estudiantes de primero de Bachillerato de Ciencias (16-17 años) aprenden el concepto de límite de una función en un punto, construyen dicho concepto e identifican las dificultades a las que se enfrentan. Nuestro trabajo se focaliza en la tradición piagetiana de la abstracción reflexiva (Dubinsky, 1991). El primer contacto que los estudiantes tienen con el concepto de límite suele ser desde la idea de aproximación, mediante la concepción dinámica de límite, siendo el camino por el cual el concepto de límite se usa con la finalidad de resolver problemas; contacto que queda lejos de basarse en la definición formal de límite (Cornu, 1991).

En la muy cambiante legislación española, el concepto de límite se introduce dentro del bloque de Análisis desde el epígrafe "*Concepto de límite de una función en un punto y en el infinito. Cálculo de límites. Límites laterales*" (BOE, 2015, p.417). De hecho, en los manuales de matemáticas postobligatorias el concepto de límite de una función es introducido visualmente mediante ejemplos de tendencias dinámicas en contextos algebraico-numéricos o gráficos (Pons, 2014).

En el proceso de comprensión del concepto de límite de una función, debemos distinguir entre la imagen y la definición formal del concepto de límite (Tall y Vinner, 1981). La imagen del concepto significa la estructura cognitiva que los estudiantes tienen asociada al concepto e incluye las representaciones mentales y las propiedades asociadas; está se construye a lo largo del tiempo mediante toda clase de experiencias, cambiando cuando el individuo se encuentra con nuevos estímulos. Un estudiante tiene una imagen "*eficiente"* del concepto si, dado un problema, es capaz de usarla para resolverlo correctamente; además, si el estudiante parece percibir dicha imagen del concepto como la más significativa para resolver problemas entonces sería *"la imagen clave del concepto"*. Al identificar la imagen clave del concepto de límite, los estudiantes hablan del límite de una función en un punto como: a) las tendencias de los puntos de la gráfica; b) si el punto pertenece al dominio; c) la tendencia de los valores de la función; d) conocer los algoritmos de cálculo; e) en términos de entornos; y f) el valor de la función en el punto

(Przenioslo, 2004). Entendemos la concepción dinámica de límite de una función en un punto, como aproximación óptima (Blázquez y Ortega, 2002):

> "*Sea "f" una función y "a" un número real, el número "L" es el límite de la función "f" en el punto "a", y se escribe lim f(x) = L, si cuando "x" se aproxima al número "a" más que cualquier aproximación, sus imágenes "f(x)" se aproximan a "L" más que cualquier otra aproximación fijada*".

Una forma de identificar las dificultades que tienen los estudiantes para comprender el concepto de límite consiste en proponerles que asuman la función del profesor y expliquen, a un hipotético estudiante, el significado de límite de una función en un punto o que expliquen cuando el límite de una función no existe; el que una mayoría de dichos estudiantes no estén en posición de explicar el límite de una función, o que uno de cada cinco dé una explicación aceptable de cuando una función no tiene límite, nos indica las dificultades con las que se encuentran los estudiantes (Elia y otros, 2009). No obstante, debemos tener en consideración que ciertas dificultades se deben a que la demanda cognitiva que requiere que el estudiante sea capaz de expresar que no existe el límite de la función, cuando sean distintos los límites laterales, es diferente a la demanda cognitiva que requiere que sea capaz de expresar el límite, cuando los límites laterales sean iguales (Valls, y otros, 2011).

La comprensión de los estudiantes está mediatizada por la representación del concepto, de ahí que diferentes investigaciones pongan el foco de atención en el papel que los modos de representación tienen en dicha comprensión (Duval, 2006; Elia, y otros, 2009; Páez y Hitt, 2003; Pons, 2014; Tall y Vinner, 1981; Valls, y otros, 2011). Si bien, la comprensión que los estudiantes tienen de un concepto matemático en una representación no implica necesariamente la comprensión en otra representación (Elia y otros, 2009). Por otra parte, un estudiante alcanza una sólida imagen del concepto de límite cuando es capaz de dibujar diferentes situaciones en las que exista el límite de una función, y situaciones en las que no exista dicho límite (Swinyard, 2011). En esta investigación nos hemos planteado como objetivo analizar cómo explicarían los estudiantes de primero de bachillerato (16-17 años), si ostentaran el papel de profesor, su imagen intuitiva de límite a un hipotético estudiante.

2. Método

2.1 Participantes y contexto

En este trabajo participaron diez estudiantes de primero de bachillerato de Ciencias (16–17 años), seleccionados de un grupo de 32 (Tabla 1), que habían respondido a dos tareas opcionales que formaban parte de un cuestionario de seis tareas que se pasó a 136 estudiantes.

	T7	T7 y T8	Total estudiantes
Estudiantes	18	14	32

Tabla 1. Respuestas de los estudiantes a las tareas 7 y 8

En la elección de los diez estudiantes se tuvo en cuenta: a) el tipo de respuestas dadas a las tareas 7 y 8; b) disponibilidad de los estudiantes; c) tiempo entre la realización del cuestionario y el final del curso; y d) el nivel de desarrollo del esquema de límite al que habían sido asignados a partir de las respuestas (Tabla 2), dadas a las seis preguntas del cuestionario, partiendo de la coordinación dinámica [sin publicar]:

Nivel	**Características**	**Nº estudiantes elegidos**
Intra	• O no construyen la coordinación dinámica o la construyen cuando las tendencias laterales de la función coinciden, en uno, dos o tres modos de representación (en mayor medida N o AN) • Expresan el límite en funciones con tendencias laterales coincidentes	4
Inter	• Construyen la coordinación dinámica, cuando las tendencias laterales de la función coinciden, en dos o tres modos de representación (en mayor medida N o AN) • Construyen la coordinación dinámica, cuando las tendencias laterales de la función no coinciden, en un único modo (en mayor medida N o AN); • Al expresar el límite se obtienen dos grupos diferenciados de estudiantes: ○ unos no lo expresan o lo hacen cuando las tendencias laterales de la función coinciden ○ otros lo expresan con tendencias coincidentes y no coincidentes indicando algunos que el límite no existe al ser diferentes	1
Trans	• Construyen la coordinación dinámica, cuando las tendencias laterales de la función coinciden, en dos o tres modos de representación • Construyen la coordinación dinámica, cuando las tendencias laterales de la función no coinciden, en dos o tres modos de representación • Al expresar el límite se obtienen dos grupos diferenciados de estudiantes: ○ unos no lo expresan o lo hacen cuando las tendencias laterales de la función coinciden ○ otros lo expresan con tendencias coincidentes y no coincidentes, indicando algunos que el límite no existe al ser diferentes • Algunos pueden reconocer el mismo objeto matemático en diferentes representaciones	5

Tabla 2. Características de los niveles de desarrollo del esquema de límite y estudiantes elegidos asignados a cada nivel de desarrollo

2.2. Instrumento de recogida de datos

El instrumento de recogida de datos han sido las entrevistas realizadas a los diez estudiantes, después de responder al cuestionario formado por 8 tareas (**Ti, i=1 a 8**): 2 tareas en modo numérico (**N)**; 2 tareas en modo gráfico (**G**); 2 tareas en modo algebraico-numérico (**AN**); y 2 tareas **opcionales,** en modo algebraico-numérico y gráfico (**AN** y **G**). El cuestionario estaba fundamentado en la descomposición genética del límite (Cottrill, y otros, 1996), entendida como una hipótesis de cómo los estudiantes comprenden la concepción dinámica de límite. En la descomposición genética adaptada (Pons, 2014) consideramos la comprensión de la: a) idea de función; b) concepción dinámica lateral; c) concepción dinámica; y d) expresión del límite de una función (Figura 1).

• Sea f una función y x_0 un número real. El valor de la función f *en* $x=x_0$, $f(x_0)$ (E0)	
• Concepción dinámica de límite por la izquierda de una función	• Idea de tendencia ➢ $f(x)$ tiende a L_1 (E1I) ➢ x tiende, por la izquierda, al número a^- (E1I) • Coordinación en la concepción dinámica por la izquierda: las imágenes $f(x)$ tienden a L_1, cuando x tiende, por la izquierda, al número a^- (E2I)
• Concepción dinámica de límite por la derecha de una función	• Idea de tendencia ➢ $f(x)$ tiende a L_2, (E1D) ➢ x tiende, por la derecha, al número a^+, (E1D) • Coordinación en la concepción dinámica por la derecha: las imágenes $f(x)$ tienden a L_2, cuando x tiende, por la derecha, al número a^+, (ED2)
• Concepción dinámica de límite de una función	• Idea de tendencia ➢ $f(x)$ tiende a $L = L_1 = L_2$, (E1) ➢ x tiende al número a, (E1) • Coordinación en la concepción dinámica: las imágenes $f(x)$ tienden a L, cuando x tiende al número a, (E2) • Coordinación en la concepción dinámica: las imágenes $f(x)$ no tienden a L, cuando x tiende a a, al ser $L_1 \neq L_2$ (E2)
• Expresan la existencia del límite L de la función $f(x)$ en el punto a, (E3) • Expresan la existencia de límites laterales diferentes de la función $f(x)$ en el punto a, (E3)	

Figura 1. Descomposición genética de límite de una función en un punto (adaptación de Pons (2014))

Las dos tareas opcionales, T7 en modo algebraico-numérico y T8 en modo gráfico (Figura 2), tenían como objetivo analizar cómo los estudiantes eran capaces de

explicar, a otro estudiante, el significado de límite de una función en un punto cuando las aproximaciones laterales son coincidentes, T7, y no coincidentes, T8.

Tarea 7

Supón que tú fueras el profesor/a de matemáticas, ¿cómo le explicarías a un/a estudiante el significado de límite de la función f(x) cuando x tiende a 2?

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$$

Tarea 8

Supón que tú fueras el profesor/a de matemáticas, ¿cómo le explicarías a un/a estudiante el significado de límite de la función f(x) cuando x tiende a 4? Desde la función f(x) que se muestra en la figura

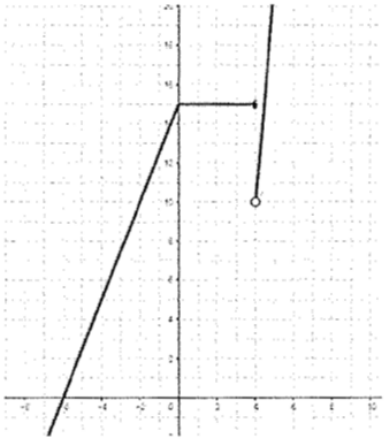


Figura 2. T7 en modo algebraico-numérico y T8, en modo gráfico

Las entrevistas se llevaron a cabo con posterioridad a la realización del cuestionario, al análisis de las respuestas dadas por los 136 estudiantes a este y a la caracterización de los estudiantes según los niveles del esquema de la teoría APOS (Dubinsly, 1991). El objetivo de las entrevistas fue obtener más información sobre cómo los participantes habían explicado a un hipotético estudiante el significado de límite a fin de determinar su "capacidad de explicar el significado de límite". Consideraremos que un estudiante tiene "capacidad de explicar el significado de límite" cuando es capaz de plantear al hipotético estudiante la necesidad de determinar desde:

la concepción dinámica

las imágenes de la función cuando los valores de la *x* tienden, por la derecha y por la izquierda, al punto *x=a,* y coordinarlas, haciéndole comprender que las imágenes de la función*, f(x), en* relación con el comportamiento de la variable *x*, en las proximidades de *x=a*, permiten expresar el límite de la función (Tarea 7) o expresar los diferentes límites laterales (Tarea 8).

los algoritmos de cálculo

el valor de la función en el punto *x=a*; comprobar que es una indeterminación del tipo *0/0*; usar un procedimiento de descomposición factorial de polinomios, acompañado de una simplificación de la fracción, haciéndole comprender que debe evitar la indeterminación; volviendo a calcular el valor de la función simplificada en el punto *x=a* para establecer el límite de la función (Tarea 7).

2.3. Análisis de los datos

Los datos de esta comunicación son las respuestas de los diez participantes a las tareas 7 y 8 y a la entrevista sobre estas tareas. Estos datos se analizaron cualitativamente y permitieron categorizar la capacidad de explicar a un hipotético estudiante el significado de límite de una función en un punto.

En el análisis se realizó en dos fases. En la primera fase se analizó el tipo de explicación que los estudiantes habían dado en las tareas T7 y T8 y en la entrevista. En la segunda fase, se compararon las distintas explicaciones dadas por los estudiantes, en las tareas y entrevistas, y se categorizaron estos en tres grupos.

Ejemplificamos el análisis realizado a través de la estudiante EST34, caracterizada de nivel Intra por sus respuestas al cuestionario.

Fase 1. En su respuesta a la T7 del cuestionario (Figura 3), EST34, explicó el límite de forma dinámica. En primer lugar, justificó que no se podía sustituir el valor x=2 en la función: "*1) El denominador no puede ser 0, así que resolvemos el denominador para ver qué valores no pueden ser.* $x^2 - 4=0$*; x=-2 y +2, no pueden ser el denominador".* En segundo lugar, indicó cómo calcular las tendencias laterales por la derecha y por la izquierda: *2) Analicemos la función en el punto 2, tanto como cuando va por la izquierda como cuando va por la derecha. 3) Sustituimos en la función que se acerque a* 2^- *y a* 2^+ *(1'999/2'001). 4) Cuando hacemos eso varias*

veces, miramos a qué número tiende y ahí tenemos al número que tiende", sin hacer ningún tipo de cálculo para justificar su respuesta. Sin embargo, durante la entrevista (Figura 3), EST34, utilizó la calculadora para obtener dos valores de la función por la derecha y dos por la izquierda, e indicó que "*Tienden a 0.25, el límite de la función es 0'25*".

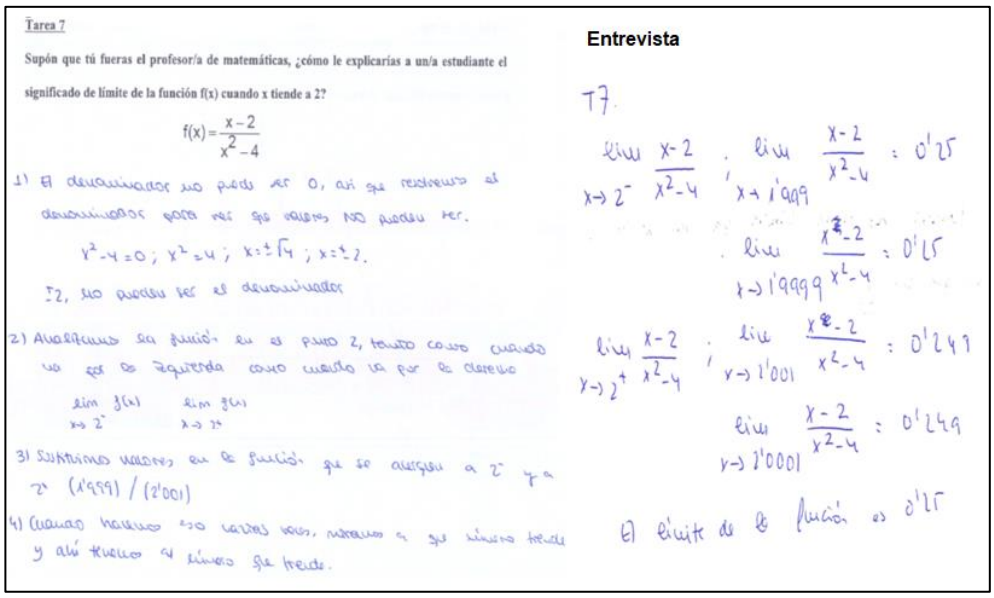


Figura 3. Entrevista a EST34 sobre sus respuestas a T7, tendencias laterales coincidentes

En la respuesta de EST34 a T8 del cuestionario (Figura 4), únicamente indica el proceso que habría que hacer para obtener las tendencias laterales, izquierda y derecha, pero sin realizar ningún cálculo: "*a) Miramos la función en x (x=4) por la izquierda y miramos a que valores se aproxima. b) Hacemos lo mismo por la derecha*". Durante la entrevista (Figura 4), justifica sus dificultades para explicar el significado de límite indicando que "*A mí las gráficas se me dan un poco mal, pero, ..., pues por la izquierda seria 14, ..., mirando la gráfica y acercándome a cuatro por la izquierda es una recta que se mantiene en el mismo valor, en 15, ... Por la derecha como va hacia arriba, pues, ...*".

Fase 2. Comparando las respuestas dadas, a las tareas 7 y 8 y en las entrevistas, podemos concluir que EST34 solo tiene capacidad para explicar a un hipotético estudiante el significado de límite de una función con tendencias laterales coincidentes, en modo AN, de manera dinámica.

El análisis realizado a las respuestas de los diez participantes ha permitido establecer tres grupos de estudiantes en relación con la forma de explicar el significado de límite de una función a un hipotético estudiante.

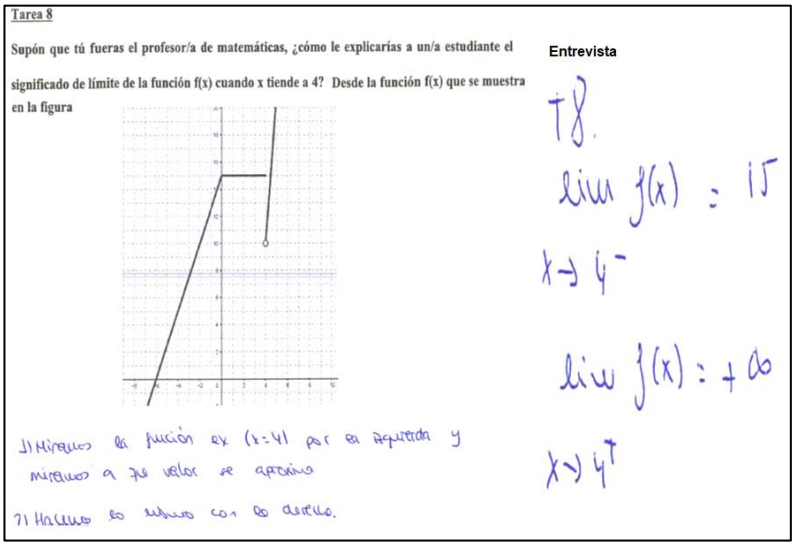


Figura 4. Entrevista a EST34 sobre sus respuestas a T8, aproximaciones laterales no coincidentes

3. Resultados

Los resultados se han organizado en tres secciones. En estas secciones se presentan tres grupos diferenciados de estudiantes en función de cómo han explicado el concepto de límite de una función en un punto a un estudiante: 1) dinámica en modo AN; 2) algorítmica en modo AN y dinámica en modo G; y 3) dinámica en ambos modos, AN y G.

3.1. Grupo 1: Explicación dinámica en modo AN

A este grupo pertenecen cinco de los diez estudiantes participantes. Los estudiantes de este grupo dan una explicación del significado de límite desde la concepción dinámica, pero solo vinculada al modo algebraico-numérico cuando las tendencias laterales de la función son coincidentes (Tarea 7), por lo que podríamos decir que la imagen eficiente del concepto de límite son las coordinaciones dinámicas laterales. Una evidencia de esta característica la hemos presentado en la sección de análisis a través de la estudiante EST34.

3.2. Grupo 2: Explicación algorítmica en modo AN y dinámica en modo G.

A este grupo pertenecen dos estudiantes de los diez participantes. La explicación del significado de límite de este grupo se realiza tanto en modo algebraico-numérico con tendencias laterales coincidentes (Tarea 7), como en modo gráfico con tendencias laterales no coincidentes (Tarea 8). En la primera mediante el cálculo del valor de la función y el conocimiento del algoritmo de cálculo, y en la segunda desde la concepción dinámica. Estos estudiantes en ambos casos muestran evidencias de tener capacidad de explicar el significado de límite de una función en los dos modos de representación. Las características de este grupo las evidenciamos con la estudiante EST18, caracterizada de nivel Trans por sus respuestas al cuestionario. Su respuesta a la T8 del cuestionario estaba en blanco. Durante la entrevista al pedirle, a EST18, que explicara el significado de límite, nos indicó que "Empecemos con la T8, vamos a ver, cuando x tiende a 4, por donde se acerca la función por la izquierda y por la derecha", evidenciando su comprensión de la concepción dinámica, en modo gráfico; expresando los diferentes límites laterales "por la derecha sería 10 con algo, ..., y por la izquierda 15"; sin ser capaz de indicar que la función no tiene límite al no coincidir los límites laterales (Figura 5).

Inv: *Podrías explicar el significado de límite a un estudiante hipotético*

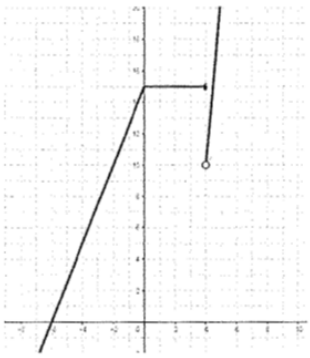
EST18: *Empecemos por la T8, yo te explico el significado de límite cuando x tiende a 4. Lo que vamos a ver es cuando x tiende a 4 por donde se acerca la función por la izquierda y por la derecha. Por la derecha la función* baja hasta el 4, pero el 4 no está dentro de la función, la función viene de 20 hacía abajo, por lo tanto, el límite sería 10 con algo, porque cuando llega a 10, el 10 no existe. Por la izquierda, empieza a subir hasta el ...,15, y es 15 hasta el 4, por la izquierda sería 3.999, ..., no, no, sería 15.

Inv: *¿En el punto 4, cual es el límite?*

EST18: *Que por la izquierda sí que está, pero por la derecha no está*

Tarea 8

Supón que tú fueras el profesor/a de matemáticas, ¿cómo le explicarías a un/a estudiante el significado de límite de la función f(x) cuando x tiende a 4? Desde la función f(x) que se muestra en la figura



$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 10'0001$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) =$ [illegible] 15

Figura 5. Entrevista con EST18 en la T8.con tendencias laterales no coincidentes

En la respuesta a la T7 del cuestionario indicó: "*No hay tiempo*". Al pedirle en la entrevista a EST18 que explicara el significado de límite en modo algebraico-numérico indicó: "*Para calcularlo tendríamos que ver por la izquierda y por la derecha, ..., por la derecha y por la izquierda vale 0.25, pero cuando x=2, ..., es una indeterminación".* Llegados a este punto, EST18 descompuso en factores el denominador de la función, simplificó las fracciones e indicó: "*Esta función es la misma y el límite es 0.25, ..., ah, es lo mismo*". Esta estudiante afirmó que con los primeros cálculos no tuvo confianza para decir cuál era el límite, pero con el procedimiento algorítmico de la descomposición y simplificación de la fracción sí que tenía confianza en expresar el límite y se sorprendió: "*... el límite es 0.25, ..., ah, es lo mismo"* (Figura 6).

Inv: *Podrías explicar el significado de límite a un estudiante virtual:*

EST18: *Para calcularlo tendríamos que ver por la izquierda y por la derecha*

Inv: *¿Estás haciendo lo mismo que has hecho en la T8?*

EST18: *Si, por la derecha y por la izquierda, …, ahora lo hacemos en x=2, ..., y es una indeterminación*

Inv: *¿Qué puedes decir del límite cuando x tiende a 2?*

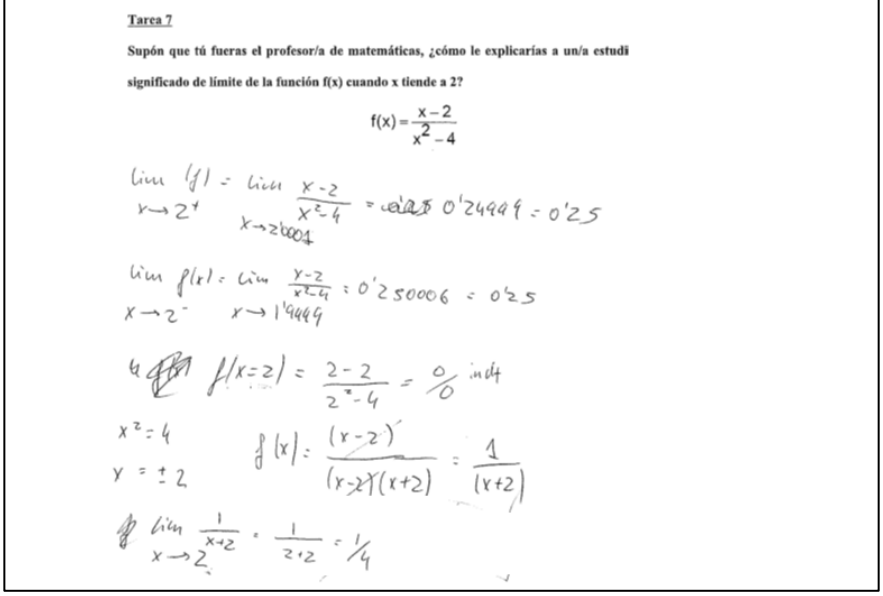
EST18: *Que por la derecha y por la izquierda vale 0.25, pero cuando x=2, no existe, he, he, um, um, ...,*

Inv: (Ahora está descomponiendo el denominador y simplificando)

EST18: *Esta función es la misma y el límite es 0.25, ..., ah, es lo mismo*

Inv: *Con los dos primeros cálculos no has tenido confianza para decir cuál era el límite*

EST18: *No, porque en x=2 no me daba*


Tarea 7

Supón que tú fueras el profesor/a de matemáticas, ¿cómo le explicarías a un/a estudi

significado de límite de la función f(x) cuando x tiende a 2?

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = 0'24999 = 0'25$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 1'9999} \frac{x-2}{x^2-4} = 0'250006 = 0'25$

$f(x=2) = \frac{2-2}{2^2-4} = \frac{0}{0}$ ind

$x^2=4$

$x=\pm 2$

$f'(x) = \frac{(x-2)'}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{(x+2)}$

$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$

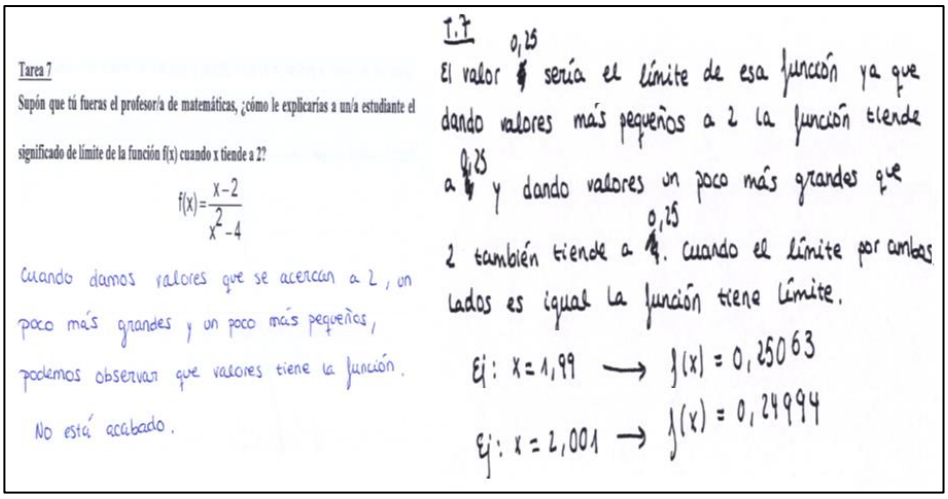
Figura 6. Entrevista con EST18 en la T7, con tendencias laterales coincidentes

Comparando las respuestas dadas, a las tareas 7 y 8 y en las entrevistas, podemos concluir que EST18 tiene capacidad para explicar a un hipotético estudiante el significado de límite de una función con tendencias laterales coincidentes, en modo AN, de manera algorítmica; y explicar el significado de límite de una función con tendencias laterales no coincidentes, en modo G, de manera dinámica. Por lo que hay evidencias de que la imagen clave del concepto de límite es el procedimiento algorítmico de cálculo en modo algebraico-numérico, aunque en modo gráfico el elemento eficiente son las coordinaciones dinámicas laterales.

3.3. Grupo 3: Explicación dinámica en ambos modos: AN y G

A este grupo pertenecen tres estudiantes de los diez participantes. La explicación del significado de límite de este grupo está vinculada a los modos de representación gráfico, con tendencias laterales no coincidentes, y algebraico-numérico, con tendencias laterales coincidentes. Las características de este grupo se evidencian con la estudiante EST51, caracterizada de nivel Trans por sus respuestas al cuestionario.

En su respuesta a la T7 del cuestionario, EST51, indicó: "*Cuando damos valores que se acercan a 2, un poco más grandes y un poco más pequeños, podemos observar que valores tiene la función. No está acabado*". Durante la entrevista, EST51, para terminar su explicación, utilizó la calculadora y calculó valores de la función, uno por la derecha y uno por la izquierda, e indicó que "*El valor 0,25 sería el límite de esa función ya que dando valores más pequeños que 2 la función tiende a 0,25 y dando valores más grandes que 2 también tiende a 0,25. Cuando el límite por ambos lados es igual la función tiene límite*" (Figura 7).


Tarea 7

Supón que tú fueras el profesor/a de matemáticas, ¿cómo le explicarías a un/a estudiante el significado de límite de la función f(x) cuando x tiende a 2?

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$$

Cuando damos valores que se acercan a 2, un poco más grandes y un poco más pequeños, podemos observar que valores tiene la función.

No está acabado.

T.7

El valor 0,25 sería el límite de esa función ya que dando valores más pequeños a 2 la función tiende a 0,25 y dando valores un poco más grandes que 2 también tiende a 0,25. Cuando el límite por ambos lados es igual la función tiene límite.

Ej: x = 1,99 → f(x) = 0,25063

Ej: x = 2,001 → f(x) = 0,24994

Figura 7. Entrevista a EST51 sobre sus respuestas a T7, tendencias laterales coincidentes

En su respuesta a la T8, EST51, indicó "*No me ha dado tiempo*". Durante la entrevista explicó el significado de límite, a partir de los límites laterales y afirmando que "*La función no tiene límite cuando x tiende a 4 porque el valor del límite por la izquierda y por la derecha es diferente".* Al preguntarle si estaba utilizando el mismo criterio (las tendencias laterales, la explicación dinámica) que, en la T7, su respuesta fue "*Si, más o menos*" (Figura 8).

EST51: *Cuando x tiende a 4 por la derecha la función tiende a 10 y cuando tiende a 4 por la izquierda la función tiende a 15. La función no tiene límite cuando x tiende a 4 porque el valor del límite por la izquierda y por la derecha es diferente*

Inv: *Podrías explicar por la derecha y por la izquierda*

EST18: *Sí, por la derecha serían valores más grandes que 4 y por la izquierda serían valores menores que 4, que se acerquen a 4*

Inv: *Estas utilizando el mismo criterio que en la T7*

EST18: *Sí, más o menos*

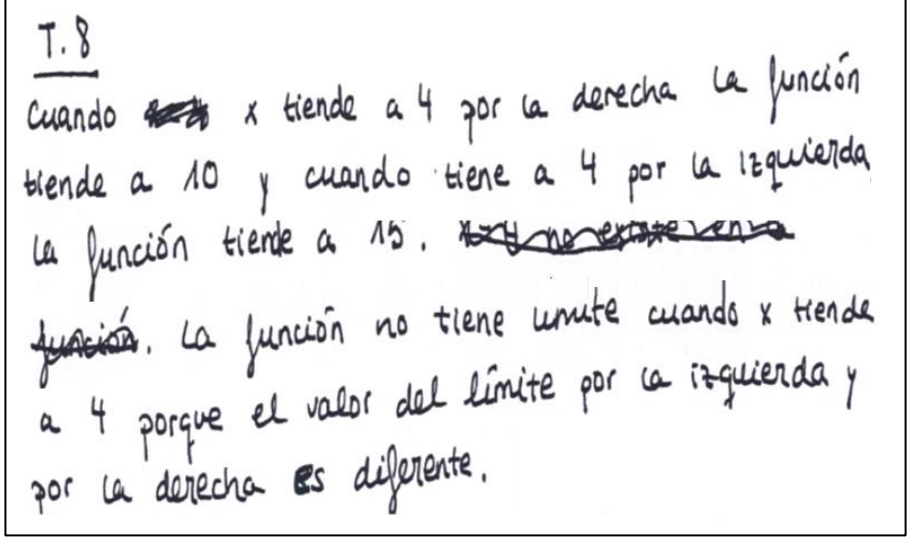


Figura 8. Entrevista a EST51 en la T8, tendencias laterales no coincidentes

Comparando las respuestas dadas, a las tareas 7 y 8 y en las entrevistas, podemos concluir que EST51 tiene capacidad para explicar a un hipotético estudiante el significado de límite de una función con tendencias laterales coincidentes, en modo AN, y con tendencias laterales no coincidentes, en modo G, de manera dinámica. Por lo que hay evidencias de que la imagen clave del concepto de límite, en modo algebraico-numérico y en modo gráfico, son las tendencias laterales. Además, en modo gráfico con tendencias laterales no coincidentes, es capaz de afirmar que el límite no existe porque los límites laterales de la función son diferentes.

4. Conclusiones.

El objetivo de esta investigación ha sido analizar cómo explicarían los estudiantes de primero de bachillerato (16-17 años), si ostentaran el papel de profesor, su imagen intuitiva de límite a un hipotético estudiante.

Los estudiantes de educación postobligatoria, tal como muestran los resultados, inician su capacidad de explicar el significado de límite con funciones en modo de representación algebraico-numérico, con tendencias laterales coincidentes, por dos vías, según utilicen: a) la explicación dinámica, calculando imágenes de la función, cuando x tiende a *a*, por la derecha y por la izquierda, y coordinándolas; o b) la explicación algorítmica, calculando el valor de la función en el punto y utilizando el conocimiento de los algoritmos de cálculo, y consolidan su capacidad de explicar el significado de límite con funciones en modo de representación gráfico, con tendencias laterales no coincidentes, utilizando la explicación dinámica. Si bien, una conjetura que podríamos extraer es que el estudio del límite de una función cuando la variable independiente tiende a más infinito, podría ser un obstáculo cognitivo cuando los estudiantes intentan construir la coordinación dinámica lateral por la derecha, en modo gráfico. Dicha conjetura estaría basada en respuestas como la de EST34 en la Tarea 8 (Figura 4), cuando al explicar los límites laterales afirma que "p*or la derecha como va hacia arriba, pues …",* e indicando que el límite es más infinito.

Estos resultados están en consonancia con aquellos que indican que los estudiantes tienden a trabajar solamente con el modo algebraico de representación (Elia, y otros, 2009); pero, aunque los diez estudiantes entrevistados son capaces de explicar el significado de límite de una función en un punto, en modo AN, lo hacen de dos modos diferenciados; para ocho de ellos, la imagen eficiente seria la explicación basada en la concepción dinámica de límite, y para los otros, sería el cálculo del valor de la función y el conocimiento de los algoritmos de cálculo. Sin embargo, en modo gráfico, con diferentes tendencias laterales, cinco de ellos no son capaces de explicar el significado de límite, y la imagen eficiente de los otros cinco se apoya en la explicación basada en la concepción dinámica, si bien uno de ellos expresa los límites laterales sin indicar que no existe límite y los otros cuatro los expresan e indican que no existe límite al ser diferentes.

Por tanto, los resultados muestran que los estudiantes con una sólida imagen de la noción de límite son capaces de realizar una explicación del significado de límite tanto en modo AN (tendencias laterales coincidentes), como en modo G (tendencias laterales no coincidentes), siendo capaces en ambos casos de afirmar la existencia

o no existencia de límite de una función, lo que estaría en la misma línea que otras investigaciones (Swinyard, 2011). No obstante, cabe señalar que el porcentaje de los que dan una explicación aceptable de cuando no existe el límite es superior al encontrado en otras investigaciones (Elia, y otros, 2009). Finalmente, nuestros resultados apoyarían la idea de que la construcción del significado de límite no es uniforme, puesto que su comprensión en los estudiantes de educación postobligatoria en modo algebraico-numérico no necesariamente implica su comprensión en modo gráfico (Elia, y otros, 2009).

Esta investigación plantea las dificultades que tienen los estudiantes para comprender e intentar explicar la noción de límite de una función en un punto, permitiéndonos valorar las diferentes alternativas de enseñanza con la intención de poder superarlas (Cottrill, y otros, 1996) (Mira, y otros, 2013).

Agradecimientos. Nuestro agradecimiento al alumnado de primero de bachillerato que participó voluntariamente durante el curso 2018/2019; así como al profesorado que nos permitió el acceso a sus aulas: Asun Goméz (ies Enric Valor); Conrad Gallent y Yolanda Villaverde (ies Lloixa); Cristina Carbonell y Fernando Arenas (ies Allusser); Consuelo Belmonte y Ana Sogorb (ies Berlanga); María Maestre (ies Mutxamel); Ximo Nebot, Víctor Cabrera, Juan Aurelio Pina y Fidel Pastor (ies Gaia).

Bibliografía.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 30,* 67-82.

Boletín Oficial del Estado: Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, núm. 3, de 03-01-2015, pp. 169-546.

Cornu, B. (1991). *Limits*. In D. Tall (Ed.), Advances Mathematical Thinking (pp. 153–166). Kluver.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167–192.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinkin*g (pp.95-126). Kluver.

Duval, R. (2006). ¿Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9(1),* 45-82.

Elia, I., Gagatsssi, A., Panaoura, A., Zachariades, T. y Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of "limit" and the impact of the "didactic contract". *International Journal of Science and Mathematics Education, 7(4),* 765-790.

Mira, M., Valls, J. y Llinares, S. (2013). Un experimento de enseñanza sobre el límite de una función. Factores determinantes en una trayectoria de aprendizaje. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 36*, 89-107.

Páez, R.E. y Hitt, F. (2003). *Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 32*, 97-108.

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. (Doctoral dissertation, Universitat d'Alacant-Universidad de Alicante).

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of Mathematical studies at the University. *Educational Studies in Mathematics, 55*, 103–132.

Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike*. The Journal of Mathematical Behavior, 30(2)*, 93-114.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12(2),* 151–169.

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias, 29(3),* 325-338.

CoP004 Identificación de estrategias de resolución de problemas en un contexto de olimpiada matemática: un estudio de casos

Fernando Arenas Planelles
fernando.arenas@iesallusser.es
IES Allusser (Mutxamel)
Julia Muñoz Martínez
julia.martinez@iesallusser.es
IES Allusser (Mutxamel)
Joan Pons Tomàs
joanpons50@yahoo.es
Profesor jubilat IES Mutxamel

Núcleo temático: Procesos. Formación del profesorado.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo analizar e identificar las estrategias o heurísticas que utilizan los estudiantes, de segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (14-16 años), cuando resuelven problemas en un contexto de concursos matemáticos como las Olimpiadas Matemáticas. Entrevistamos a 4 estudiantes, seleccionados entre los 30 de la fase provincial, por sus respuestas a dos problemas aritméticos. Los resultados nos han permitido **identificar diez estrategias utilizadas**: 1) generalización de un resultado parcial; 2) selección de la operación adecuada; 3) utilización de todos los datos; 4) prueba y error; 5) buscar regularidades; 6) visualización externa apoyada en el diseño un dibujo; 7) visualización interna apoyada en el dibujo; 8) reducir el problema a otro más fácil; 9) analizar diferentes posibilidades, excluyendo las que no cumplen las condiciones establecidas; 10) rectificación, iniciar una vía que se abandona, reiniciar el proceso encontrando otra vía que lo soluciona.

Palabras clave: Problemas Aritméticos, Olimpiadas Matemáticas, Heurísticas, Estrategias de Resolución, Estudio de Casos.

1. Introducción.

Esta comunicación tiene como objetivo comprender e identificar las estrategias de resolución de problemas que utilizan los estudiantes de segundo ciclo de ESO (14-16 años) cuando resuelven problemas en un contexto de Olimpiadas Matemáticas. Diferentes investigaciones sobre cómo los estudiantes resuelven problemas nos han permitido focalizar una amplia problemática sobre la importancia de las estrategias de resolución de problemas (Arteaga y Guzmán, 2005; Caballero y García, 1993; Gasco-Txabarri, 2017; Gaulin, 2001; Montero, y otros, 2020; Pifarré y Sanuy, 2001). El saber Matemáticas significa plantear y resolver problemas, criticar argumentos, y utilizar el lenguaje matemático con facilidad (Grup Zero, 1981). Una modelización del proceso de resolución de problemas se puede resumir de manera concisa en cuatro fases: comprender el problema; elaborar un plan; ejecutarlo; y volver atrás (Pólya, 1975). Los procesos de resolución de problemas suelen sustentarse con estrategias heurísticas, operaciones mentales útiles en la resolución. Así, al resolver problemas matemáticos, ponemos en práctica estrategias como: considerar casos sencillos, explorar un problema análogo, buscar regularidades, hacer una figura o un diagrama, particularizar, generalizar, resolver un problema similar más sencillo, analizar posibilidades, dividir un problema en partes (Grupo Cero, 1990); elegir el número adecuado al contexto, seleccionar la operación más útil en cada caso o utilizar distintas estrategias a la vez (Botella y otros, 2007). Además, aunque los métodos heurísticos de resolución de problemas buscan la solución mediante técnicas informales, su aplicación no asegura el éxito (Gasco-Txabarri, 2017). Por otra parte, las estrategias utilizadas por el alumnado cuando resuelve problemas pueden ser reflexivas o irreflexivas. Una estrategia reflexiva conlleva la utilización de operaciones, cuyo significado es apropiado al contexto del problema (García-García, y otros, 2015). Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a los estudiantes para construir nuevos conocimientos a través de la resolución de problemas, aplicar y adaptar diversas estrategias, familiarizarse con heurísticas de resolución, controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él (NCTM, 2003). Sin embargo, en algún momento, la resolución de problemas estuvo presente en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria

(ESO) como contenido que ha de ser enseñado, y concebida a la manera heurística, expresando los pasos seguidos, pero con las múltiples modificaciones del currículo dejó de ser un elemento central en la educación matemática y desapareció todo rastro de heurística (Puig, 2008). La nueva ley permite el optimismo puesto que volvemos a encontrar dentro de las competencias específicas las técnicas y estrategias de resolución como la analogía, la estimación, el ensayo y error, resolución a la manera inversa, el tanteo, la descomposición en problemas más sencillos, la búsqueda de patrones y la visualización (Real Decreto, 2022). Finalmente, hemos de considerar las Olimpiadas Matemáticas, como concursos que son, un poderoso instrumento para el profesorado, puesto que permite fomentar el trabajo cooperativo, o elaborar materiales didácticos útiles para las clases (Martínez, 2007; Oliu, 2015).

En esta investigación nos hemos planteado como objetivo identificar cuáles son las estrategias o heurísticas utilizadas por los estudiantes del segundo ciclo de la ESO (14-16 años), cuando resuelven problemas en el contexto de un concurso como lo son las Olimpíadas Matemáticas.

2. Método

2.1. Participantes y contexto

En este trabajo han participado 4 estudiantes del segundo ciclo de la ESO (14-16 años). Fueron seleccionados entre las 30 personas, que participaron en la Fase Provincial de la Olimpiada Matemática celebrada en Benidorm; seleccionadas previamente entre un grupo de 233 personas que participaron en la Fase Comarcal de la Olimpiada Matemática de la provincia de Alicante; y preseleccionadas, a su vez, en sus centros, por su profesorado. De ahí que les llamemos buenos resolutores de problemas. Su participación fue voluntaria. Los criterios utilizados para su selección tuvieron en cuenta dos variables, una organizativa (cercanía a la localidad donde trabajan los investigadores), y la otra relacionada con las respuestas que los estudiantes habían dado a los dos problemas aritméticos (errores en las respuestas, razonamientos incompletos, y respuestas correctas), uno de cada fase de la olimpiada.

2.2. Instrumento de recogida de datos

El instrumento de recogida de datos han sido las entrevistas realizadas a los 4 estudiantes, y sus producciones en la fase provincial de la Olimpiada. Estos estudiantes habían resuelto cinco problemas en cada una de las dos fases de la Olimpiada. Las respuestas a los dos problemas aritméticos, uno de cada fase, nos habían permitido caracterizar diferentes estadios en la resolución de los problemas. Estadios fundamentados en las fases de Pólya (1975) y en las estrategias de resolución de problemas (García-García, y otros, 2015). En nuestra adaptación de los estadios, consideramos: la comprensión o no del problema; la estrategia utilizada, reflexiva o irreflexiva; y si la estrategia reflexiva conduce a una resolución parcial o completa del problema (Figura 1).

ESTADIOS EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

1. No comprenden el problema/Estrategia irreflexiva
2. Comprenden el problema. Utilizan una estrategia irreflexiva
3. Comprenden el problema. Utilizan una estrategia reflexiva que resuelve el problema de manera parcial
4. Comprenden el problema. Utilizan una estrategia reflexiva que resuelve el problema

Figura 1. Estadios en la resolución de un problema

A continuación, presentaremos, en primer lugar, los problemas de la fase comarcal (Figura 2); en segundo lugar, los problemas de la fase provincial (Figura 3).

S.E.M.C.V. AL-KHWARIZMI

XXX OLIMPÍADA MATEMÀTICA - FASE COMARCAL

MUTXAMEL - PETRER - L'ALFÀS DEL PI - ELX - TORREVIEJA

6 D'ABRIL DE 2019 - PROVA INDIVIDUAL
NIVELL B (3r i 4t ESO)

NOMBR

1. KAREN UHLENBECK

Karen Uhlenbeck, la primera dona que ha guanyat el premi Abel, vol donar quatre llibres als seus tres estudiants de geometria: Ana, Bernat i Carla. Si vol repartir-los tots. Quina és la probabilitat que Ana reba dos llibres?

Karen Uhlenbeck, la primera mujer que ha ganado el premio Abel, quiere donar cuatro libros a sus tres estudiantes de geometría: Ana, Bernat y Carla. Si quiere repartirlos todos. ¿Cuál es la probabilidad de que Ana reciba dos libros?

2.ELS DÍGITS DE JOAN

Joan tria 3 dígits i després de fer totes la permutacions possibles obté 6 números diferents de 3 dígits cada u. Si exactament un dels números que obté és un quadrat perfecte i exactament tres són nombres primers, quins són els 3 dígits que ha triat Joan?
Donar els 6 números formats amb ells

Joan elige 3 dígitos y después de hacer todas las permutaciones posibles obtiene 6 números distintos de 3 dígitos cada uno. Si exactamente uno de los números que obtiene es un cuadrado perfecto y exactamente tres son números primos, ¿cuáles son los 3 dígitos que ha elegido Joan?
Dar los 6 números formados con ellos.

3. TERNA D'ENTERS

Trobar una terna d'enters positius x, y, z tals que:

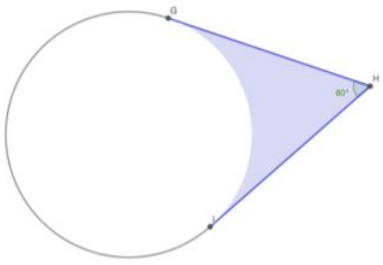
Hallar una terna de enteros positivos x, y, z tales que:

$$\frac{97}{19} = 5 + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}}}$$

4. ZONA OMBREJADA

Donat un cercle de radi 4 metres, tracem les tangents exteriors al mateix des d'un punt H que formen 60º. Calcula l'àrea de la zona ombrejada?

Dado un círculo de radio 4 metros, trazamos las tangentes exteriores al mismo desde un punto H que forman 60º. ¿Calcula el área de la zona sombreada?



5. L'OPERACIÓ

Calcula el resultat de la següent operació:

Calcula el resultado de la siguiente operación:

$$2018^2 - 2017^2 + 2016^2 - 2015^2 + \cdots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$$

Figura 2. Problemas de la fase comarcal de la Olimpiada

S. E. M. C. V. AL-KHWARIZMI

XXX OLIMPÍADA MATEMÀTICA - FASE PROVINCIAL

PETRER

4 DE MAIG DE 2019 - PROVA INDIVIDUAL
NIVELL B (3r i 4t ESO)

CODI

1. L'ESCURABUTXAQUES

Una màquina escurabutxaques funciona de la manera següent:

- Cada partida costa 1€.
- Cada 10 partides perdudes seguides guanyes 1€.
- A les primeres 20 partides seguides jugades guanyes 10€,
- A les primeres 50 partides seguides jugades guanyes 20€.
- A les primeres 70 partides seguides jugades guanyes 10€.
- Finalment, a les primeres 100 partides guanyes el pot.
- Aclarim que al finalitzar la partida número 20, 50 i 70, no es torna l'euro corresponent per ser un múltiple de 10 partides ja que s'obtenen premis especials.

¿Quants diners com a mínim hem de portar per a guanyar el pot?

Una máquina tragaperras funciona de la siguiente manera:

- Cada partida cuesta 1€.
- Cada 10 partidas perdidas seguidas ganas 1€.
- A las primeras 20 partidas seguidas jugadas ganas 10€.
- A las primeras 50 partidas seguidas jugadas ganas 20€.
- A las primeras 70 partidas seguidas jugadas ganas 10€.
- Finalmente, a las primeras 100 partidas ganas el bote.
- Aclaramos que al finalizar la partida número 20, 50 y 70, no se devuelve el euro correspondiente por ser un múltiplo de 10 partidas ya que se obtienen premios especiales.

¿Cuánto dinero como mínimo debemos llevar para ganar el bote?

2.TROBA EL NOMBRE

Troba un nombre *n* de dues xifres que compleix la següent propietat:
Al sumar n amb el seu anterior és igual al nombre que resulta d'intercanviar l'orde de les xifres de n.

Encuentra un número **n** de dos cifras que cumpla la propiedad siguiente:
Al sumar **n** con su anterior es igual al número que resulta al intercambiar el orden de las cifras de **n**.

3. NOMBRES CONSECUTIUS

Considerem 13 nombres enters consecutius i les afirmacions següents:

a) El nombre central és la mitjana dels que ocupen les posicions 6a i 8a.
b) La suma de tots els nombres és divisible per 13.
c) Almenys quatre d'ells són divisibles per 3.
d) Set són parells.
e) La mediana d'aquesta sèrie de nombres és la mitjana dels dos extrems.

Quines d'aquestes afirmacions no són sempre veritables?

Consideramos 13 números enteros consecutivos y las afirmaciones siguientes:

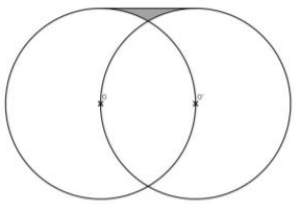
a) El número central es la media de los que ocupan las posiciones 6ª y 8ª.
b) La suma de todos los números es divisible por 13.
c) Al menos cuatro de ellos son divisibles por 3.
d) Siete son pares.
e) La mediana de esta serie de números es la media de los dos extremos.

¿Cuáles de estas afirmaciones no son siempre verdaderas?

4. SOBRE CIRCUMFERÈNCIES

Quant val l'àrea de la zona ombrejada si el ràdio de les circumferències és d'1 cm.

Cuánto vale el área de la zona sombreada si el radio de las circunferencias es de 1 cm.



5. CONTANT TRIANGLES

Tres vèrtexs qualssevol d'un hexaedre regular formen un triangle. De tots aquests triangles, quants n'hi ha que no tenen tots els vèrtexs en la mateixa cara del hexaedre?

Tres vértices cualesquiera de un hexaedro regular forman un triángulo. De todos estos triángulos, ¿cuántos hay que no tienen todos sus vértices en la misma cara del hexaedro?

Figura 3. Problemas de la fase provincial de la Olimpiada

2.3. Procedimiento

Las entrevistas fueron realizadas con posterioridad a las fases comarcal y provincial de la Olimpiada, al análisis de las respuestas y a la caracterización de los estudiantes según los estadios de la resolución de los problemas aritméticos (Problemas: 5 de la comarcal; y 1 de la provincial). Los objetivos de las entrevistas fueron ampliar la información sobre cómo los estudiantes resolvían los dos problemas aritméticos, así como las dificultades con las que se encontraban. También queríamos conocer la valoración comparativa entre los problemas de las dos fases, y la percepción que tenían sobre las dificultades de los diferentes problemas, y en particular de los dos aritméticos. Sus percepciones, nos llevaron a ampliar nuestro objetivo de análisis con la intención de identificar las estrategias que utilizaban al resolver los problemas de la fase provincial de la Olimpiada. En las dos fases, cada estudiante había sido identificado con una letra y un número. En la fase comarcal, la letra era la inicial de la población donde había realizado la prueba (**M**utxamel, **A**lfàs del Pi, **P**etrer, **E**lx y **T**orrevieja), y el número asignado en la prueba. En la fase provincial, la identificación fue **Bi (i=1 a 30)**, letra asignada al grupo de segundo ciclo de la ESO. Así, por ejemplo, el estudiante B14/M154 participó en la fase provincial con el número 14, y participó en fase comarcal en Mutxamel con el número 154.

2.4. Análisis de las respuestas de los estudiantes

Los datos de esta comunicación son las entrevistas realizadas a los 4 estudiantes, y sus producciones al resolver problemas de la fase provincial de la Olimpiada. En la elección de los 4 estudiantes se tuvo en cuenta dos variables: a) sus respuestas a los dos problemas aritméticos, y b) su disponibilidad (contacto con sus profesores en días de fin de curso). Estos estudiantes habían sido caracterizados por comprender los dos problemas; por utilizar estrategias reflexivas e irreflexivas; y resolver de forma parcial o total los problemas (Figura 4).

Diferentes estadios	Olimpiada: Fase comarcal	Olimpiada: Fase provincial
Comprende-Estrategia irreflexiva	B20/M170	----
Comprende-Estrategia reflexiva-No resuelve	B19/M168	B20/M170 B06/M130
Comprende-Estrategia reflexiva-Resuelve	B06/M130 B14/M154	B19/M168 B14/M154

Figura 4. Estudiantes elegidos según el estadio de resolución de los dos problemas aritméticos

El análisis cualitativo realizado a las respuestas de los estudiantes nos había dado información del nivel de comprensión, del tipo de estrategia utilizada, y si la estrategia resolvía o no el problema aritmético. La entrevista posterior, amplió la información que teníamos al poder preguntarles sobre sus dificultades, sus estrategias, su valoración de las dos pruebas, y su valoración sobre los dos problemas aritméticos. El análisis de sus producciones al resolver problemas de la fase provincial de la Olimpiada nos permitió identificar las diferentes estrategias de resolución que habían utilizado al intentar solucionar los cinco problemas de dicha fase.

A continuación, presentamos cómo se hizo el análisis a partir de las respuestas de Inés, la estudiante B20/M170, a su entrevista y a sus producciones. Por su respuesta al problema aritmético comarcal, esta estudiante fue caracterizada como: comprende el problema; y utiliza una estrategia irreflexiva. Durante la entrevista sobre dicho problema (Figura 5), manifestó su dificultad y su estrategia, afirmando: "*no iba a sumar todos los números, yo sabía que había una fórmula, hice pruebas con números más pequeños*"; expresando "6^2-5^2+4^2-3^2+2^2-1^2=*21, 6+5+4+3+2+1=21";* generalizando que la solución será: "*2018+2017+2016+2015+ ...+ 1*"; pero sin resolver el problema, al no poder realizar la suma. Por lo que hay evidencias de que utilizó una **estrategia de generalización de un resultado parcial, reconociendo que desconocía la operación adecuada.**

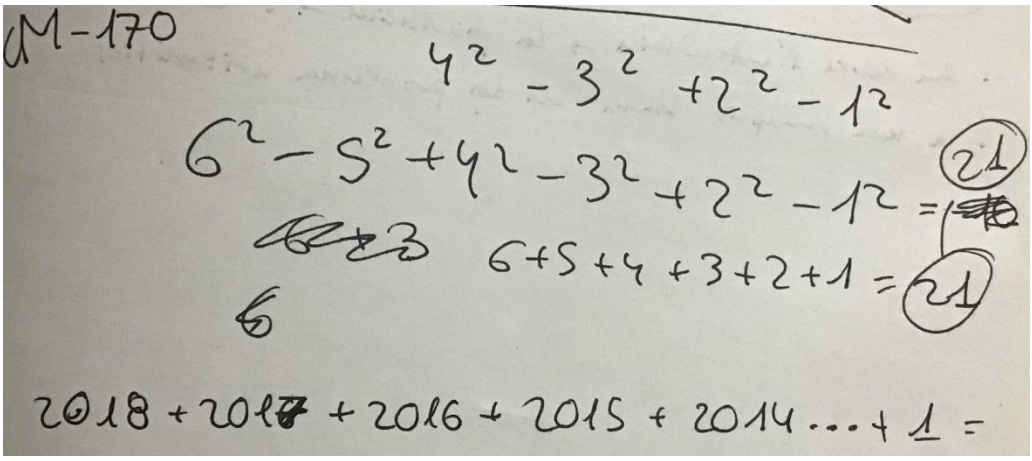


Figura 5. Entrevista a B20/M170 al problema aritmético comarcal

Esta estudiante, B20/M170, por su respuesta al problema aritmético provincial (Figura 6), fue caracterizada como: comprende el problema; utiliza una estrategia reflexiva; y lo resuelve parcialmente. Por lo que hay evidencias de que utilizó una **estrategia en la que, seleccionada la operación adecuada, no utilizó todos los datos**.

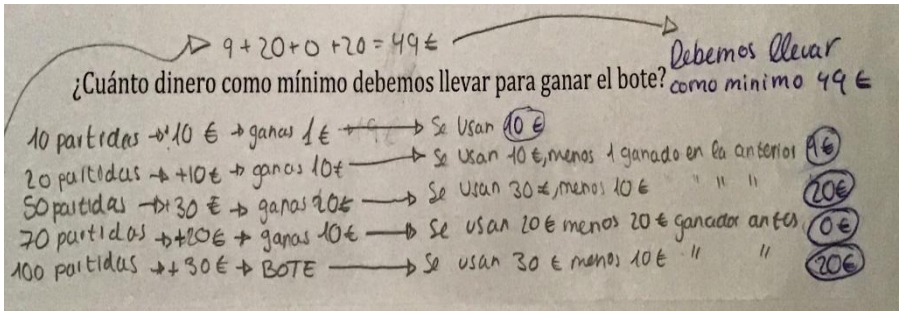


Figura 6. Respuesta de B20/M170 al problema aritmético provincial

Durante la entrevista, B20/M170, repitió el mismo razonamiento que había realizado en la prueba escrita, indicando: "*yo me imaginé la máquina, el dinero que ponía era positivo y lo que ganaba era negativo. 10 partidas, gastas 10€, ganas 1€; 20 partidas, 10€, ganas 10€; 50 partidas, 10€, ganas 20€*". Al preguntarle: *"¿por qué pasas de la 20 a la 50?*", la estudiante B20/M170/ indicó: "*de la 20 a la 30, no te dan nada, ..., ¡ah!, ... ganas 1€*". A partir de ese momento (Figura 7), razonó: "*10 partidas, gastas 10€, ganas 1€; ...; y 100 partidas, gastas 10€, gana el bote*", y lo resolvió: "*necesitaría 54€*"; manifestando que había entendido: "*solo 10 justas, que a las 10 primeras se ganaba 1€, no que cada 10 partidas, por eso me olvidé de las 30, 40, 60, 80, 90 partidas*". Por lo que hay evidencias de que, con ayuda del

entrevistador, utiliza una **estrategia en la que, seleccionada la operación adecuada y toda la información del problema**, lo soluciona.

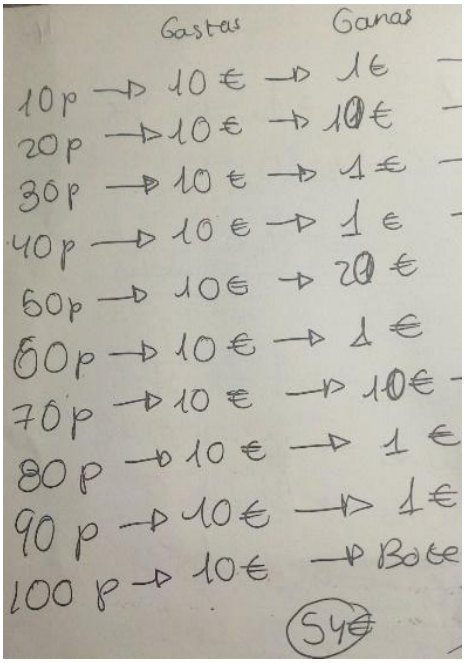


Figura 7. Entrevista a B20/M170 al problema aritmético provincial

Durante la entrevista, B20/M170, manifestó su estado de ánimo: "*yo al principio iba un poco nerviosa, iba haciendo, y al final me salió bastante bien, ..., no los hice todos seguidos, los hice salteados"*; indicando su opinión sobre qué problemas le habían parecido "*más fáciles el problema 1 de la comarcal que lo hice de tres formas distintas, y los problemas 2 y 3 de la provincial, el del hexaedro no me salía, pero cuando vi la figura, no sé si lo terminé, creo que no, no me dio tiempo*"; y más difíciles "*la geometría no se me da muy bien, la geometría es compleja*".

Después de la entrevista, analizamos las estrategias utilizadas por la estudiante B20/M170 al resolver los problemas de la fase provincial.

Su respuesta al problema 2 (Figura 8), fue caracterizada como: comprende el problema; utiliza una estrategia reflexiva; y lo resuelve. Además, podría ser interpretada como que hay evidencias de que utilizó una **estrategia de prueba y error, al probar diferentes pares de valores,** indicando "*N=37 (37+36=73)*".

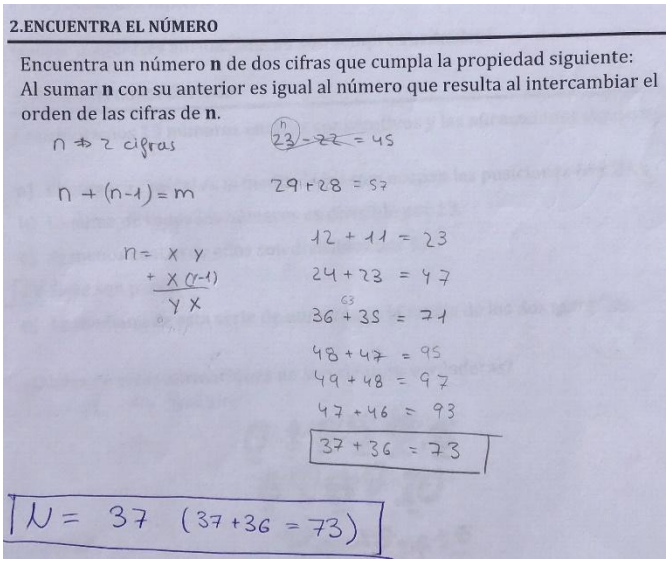


Figura 8. Respuesta de B20/M170 al problema 2 de la provincial

Su respuesta al problema 3 (Figura 9), fue caracterizada como: comprende el problema; utiliza una estrategia reflexiva; y lo resuelve. Además, podría ser interpretada como que hay evidencias de que utilizó una **estrategia de análisis de las diferentes opciones**, **buscando regularidades,** indicando las verdaderas y la falsa: "*d). Falso, tan solo en el caso de que empiece por número par habrá 7 pares, si empieza por impar tan solo habrá 6 pares*".

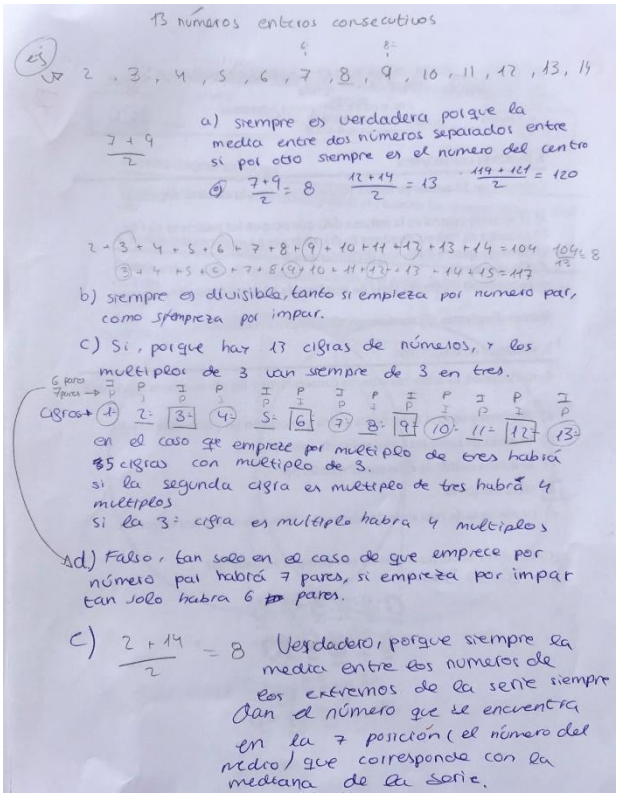


Figura 9. Respuesta de B20/M170 al problema 3 de la provincial

Su respuesta al problema 4 (Figura 10), fue caracterizada como: comprende el problema; utiliza una estrategia irreflexiva; y no lo resuelve. Además, podría ser interpretada como que hay evidencias de que utilizó una **estrategia de visualización externa apoyada en el diseño de un dibujo.**

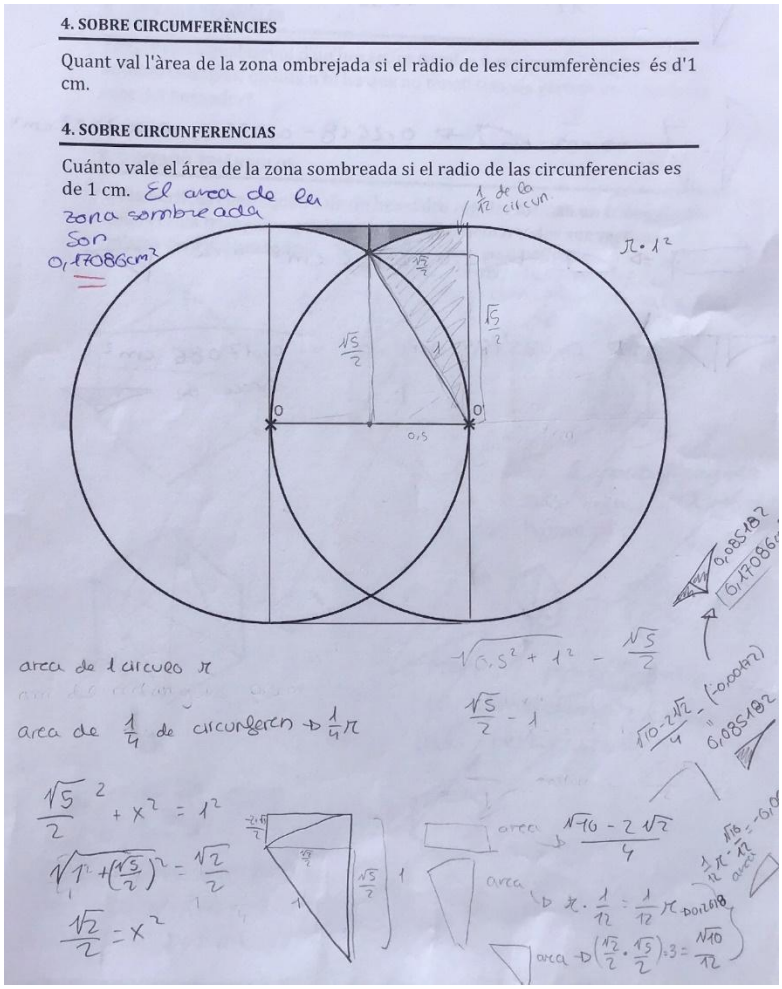


Figura 10. Respuesta de B20/M170 al problema 4 de la provincial

3. Resultados

El análisis realizado nos ha permitido obtener información sobre las dificultades que tuvieron los estudiantes cuando resolvían dos problemas aritméticos de las fases comarcal y provincial de la Olimpiada Matemática. Los resultados los hemos organizado presentando los otros tres casos objeto de análisis, de la misma forma que hemos hecho con la estudiante B20/M170 en la sección de análisis de las respuestas y de la entrevista: sus respuestas a los dos problemas aritméticos, la entrevista realizada, y el posterior análisis de sus producciones de la fase provincial.

3.1. Análisis cualitativo de la estudiante B19/M168

La estudiante B19/M168, Mariló, por su respuesta al problema aritmético comarcal (Figura 11), fue caracterizada como: comprende el problema; utiliza una estrategia reflexiva; y no resuelve el problema. Ella había indicado que "*la operación marcada en este ejercicio será la suma de todos los números, desde 2018 hasta el 1"*; utilizando una estrategia reflexiva de sumas parciales *"[1-10]=55; [11-20]=155; ...; 71-80=755, ...91-100=55+900=5050;1991+...+ 2000=19955*"; resolviéndolo parcialmente. Esto podría ser interpretado como que hay evidencias de que utilizó **una estrategia considerando la suma de todos los números, dividiendo el problema en sumas parciales**, pero sin resolverlo.

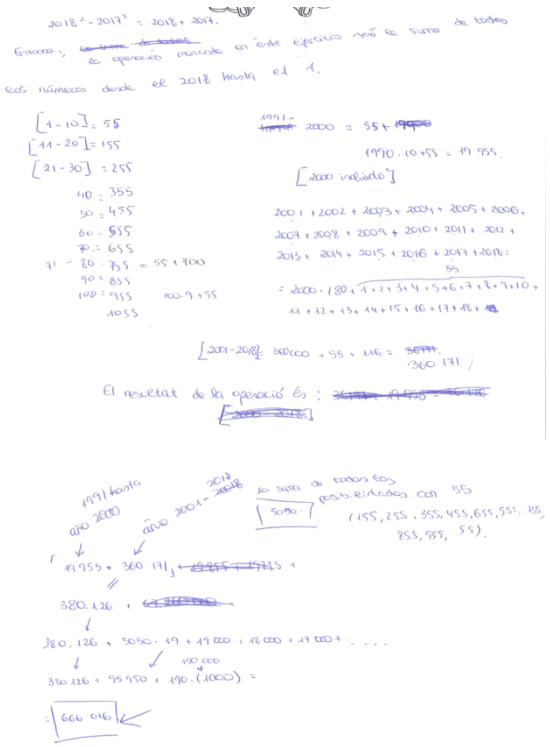


Figura 11. Respuesta de B19/M168 al problema aritmético de la comarcal

Durante la entrevista, B19/M168, al preguntarle si podría resolver el problema comarcal (Figura 12), manifestó su comprensión del problema, afirmando: "*como tenemos dos números consecutivos que se restan sus cuadrados, la solución de esa operación será la suma de esos números sin elevarlos al cuadrado, 2018 +2017 +2016 + ... +4+3+2+1*" (en catalán en el original); y manifestando su dificultad al no realizar la suma de todas las posibilidades, la ve excesiva, después de afirmar: "*se podría hacer con la calculadora, ..., no sé, ..., e intentar sumarlos todos*". Esto podría ser interpretado como que hay evidencias de que utiliza **una estrategia de reducir**

la operación a otra más fácil, **razonando que operación debería efectuar, pero sin saber cómo realizarla,** constatando, como ya había hecho en la prueba escrita, que la suma de todas las posibilidades es excesiva.

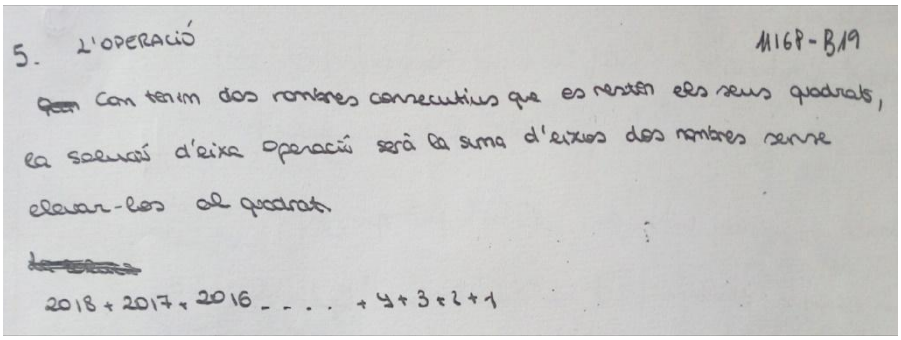


Figura 12. Entrevista a B19/M168 al problema aritmético de la provincial

Durante la entrevista, B19/M168, valoró su participación en las olimpiadas como "*bien, pero me hubiese gustado empezar antes*". Expresando su opinión sobre las dos pruebas. Respecto a los problemas de la fase comarcal, manifestó que *"no entendí bien el enunciado del 1, el 2 me pareció difícil y el 5 también, los más fáciles el 3 y el 4, del área sombreada";* respecto a los problemas de la fase provincial, manifestó que *"el más fácil el 1 y el 4, la circunferencia; y más difíciles el 3 y el 5. Esta prueba (provincial) era más fácil que la primera*". Al pedirle que valorará los dos problemas aritméticos, manifestó que "*más fácil el 1, si más fácil el 1 de la provincial, que el 5 de la comarcal*".

Después de la entrevista, analizamos las estrategias utilizadas por la estudiante B19/M168 en la fase provincial.

Su respuesta al problema 2 (Figura 13), fue caracterizada como: comprende el problema, utiliza una estrategia reflexiva; y lo resuelve. Además, podría ser interpretada como que hay evidencias que utilizó una **estrategia de análisis de diferentes posibilidades**, **excluyendo las que no pueden cumplir las condiciones del problema, indicando la que las cumple:** *"B. Eso significaría qué al sumar un número terminado en 7 con su anterior, daría un número acabado en 3. Este sí es posible porque no hemos descontado los números de 30. El número n=37, porque 37+36=73***"** (en catalán en el original).

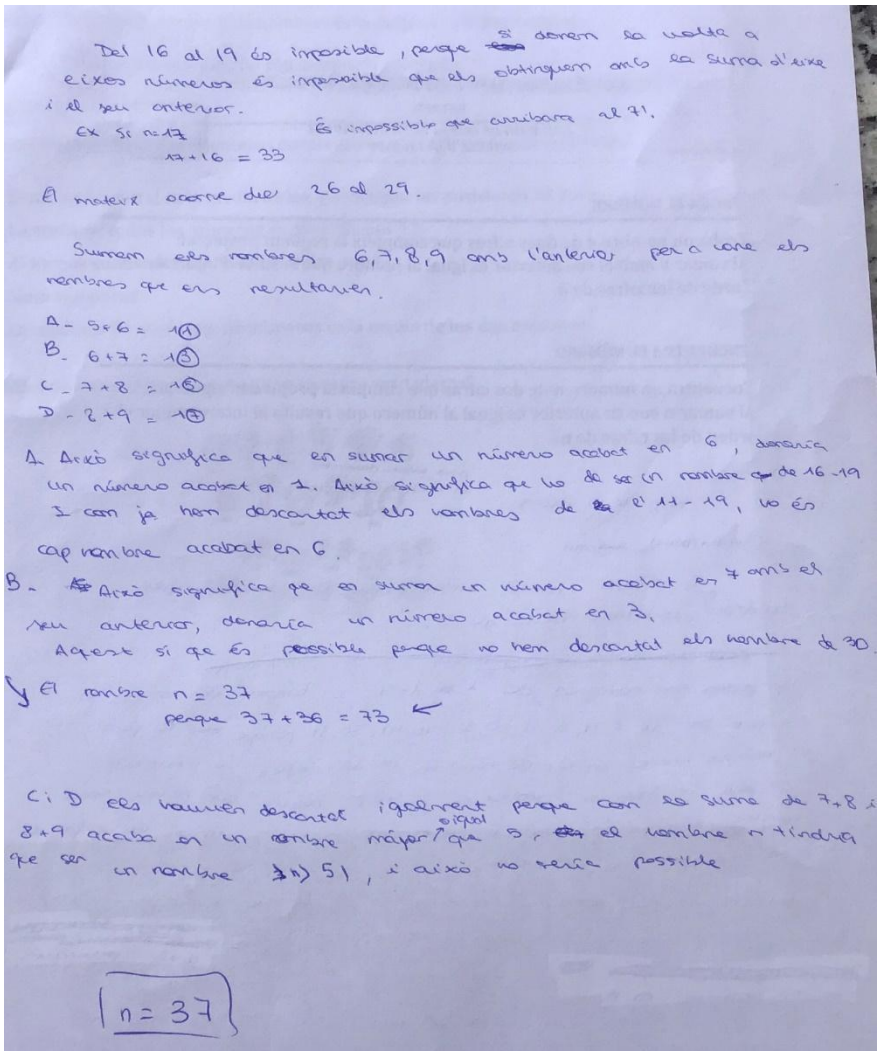


Figura 13. Respuesta de B19/M168 al problema 2 de la provincial

Su respuesta al problema 3 (Figura 14), fue caracterizada como: comprende el problema, utiliza una estrategia reflexiva; y lo resuelve. Además, podría ser interpretada como que hay evidencias que utilizó una **estrategia de análisis de las diferentes opciones**, **buscando regularidades,** indicando las verdaderas y la falsa: "*d). Esta propiedad no siempre se cumple. Sólo es verdad cuando el primer número de la progresión es par. En el caso de que comenzara por un impar, no se conseguiría tener 7 pares"* (en catalán en el original).

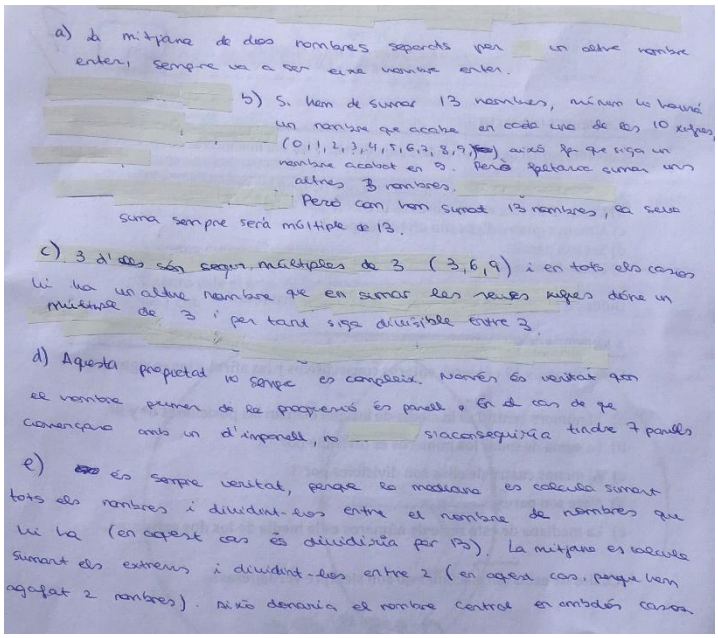


Figura 14. Respuesta de B19/M168 al problema 3 de la provincial

Su respuesta al problema 4 (Figura 15), fue caracterizada como: comprende el problema; utiliza una estrategia reflexiva; y no lo resuelve. La estudiante, indica, de forma muy detallada, el procedimiento para resolverlo, pero sin calcularlo. Llama casquete a la mitad vertical de la intersección de las dos circunferencias: "*Hacemos como si fuese la mitad de un casquete esférico de distancia 0.5, debido a que es la mitad de la figura formada".* Indica con flechas que la mitad inferior la trasladó junto a la mitad superior, sin calcular dicha área*: "A casquete= ---. Si tuviésemos el área del casquete, nos daría la zona rayada, podríamos trasladar la parte rayada de debajo de los centros (marcada con flecha negra) a la parte de arriba, como he indicado con la otra flecha".* Ahora, al cuarto de círculo le resta la del casquete y le queda el área de la zona marcada con puntos, idéntica a la simétrica marcada con triángulos*: "Entonces tendríamos el área ocupada por el casquete, y si la restamos al área del cuarto de círculo (0.79 cm^2), obtenemos la parte señalizada con puntos. Esta parte es la misma que la que hay simétrica en al otro lado (marcada con triángulos)".* Finalmente, conoce el área del cuadrado, la del casquete, y las de las zonas marcadas con puntos y triángulos, solo le queda restar*: "Como ya conocemos el área del cuadrado señalizado (1 cm^2) y conocemos todo menos la zona sombreada, podemos restar todo lo que tenemos al total del área del cuadrado señalizado. Este sería el resultado del área sombreada".* (en catalán en el original).

Además, podría ser interpretada como que hay evidencias de que utilizó una **estrategia de visualización interna apoyada en el dibujo**,

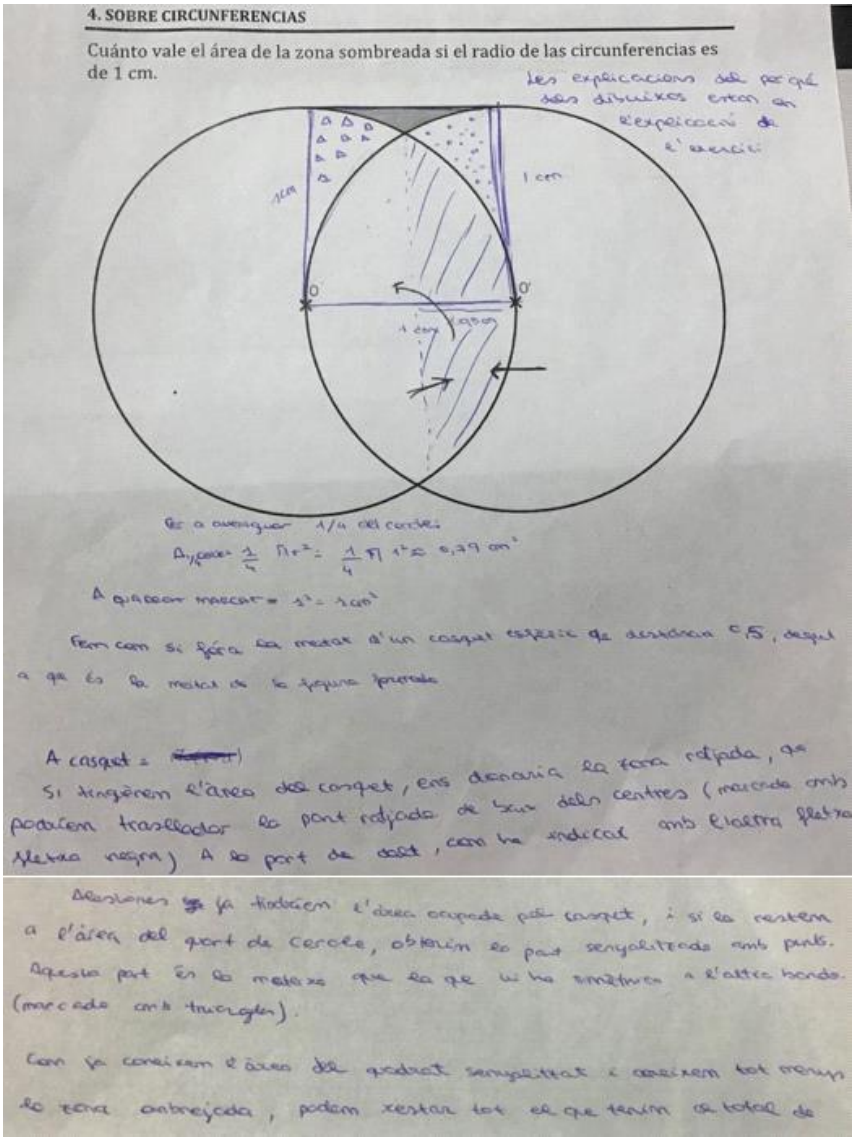


Figura 15. Respuesta de B19/M168 al problema 4 de la provincial

Su respuesta al problema 5 (Figura 16), fue caracterizada como: comprende el problema; utiliza una estrategia reflexiva; y lo resuelve parcialmente. Además, podría ser interpretada como que hay evidencias de que utilizó una **estrategia de visualización apoyada en el diseño de un dibujo**, y no lo resolvió: "*Utilizando las 4 aristas laterales como un cateto del triángulo, y con otro cateto que sea la diagonal de una de las caras, se forman 8 triángulos. Si rotamos el triángulo, se forman otros 8 triángulos con las caras que ahora son aristas horizontales, y lo mismo con las otras 4 aristas. En total se forman 32 triángulos en un hexaedro"* (en catalán en el original).

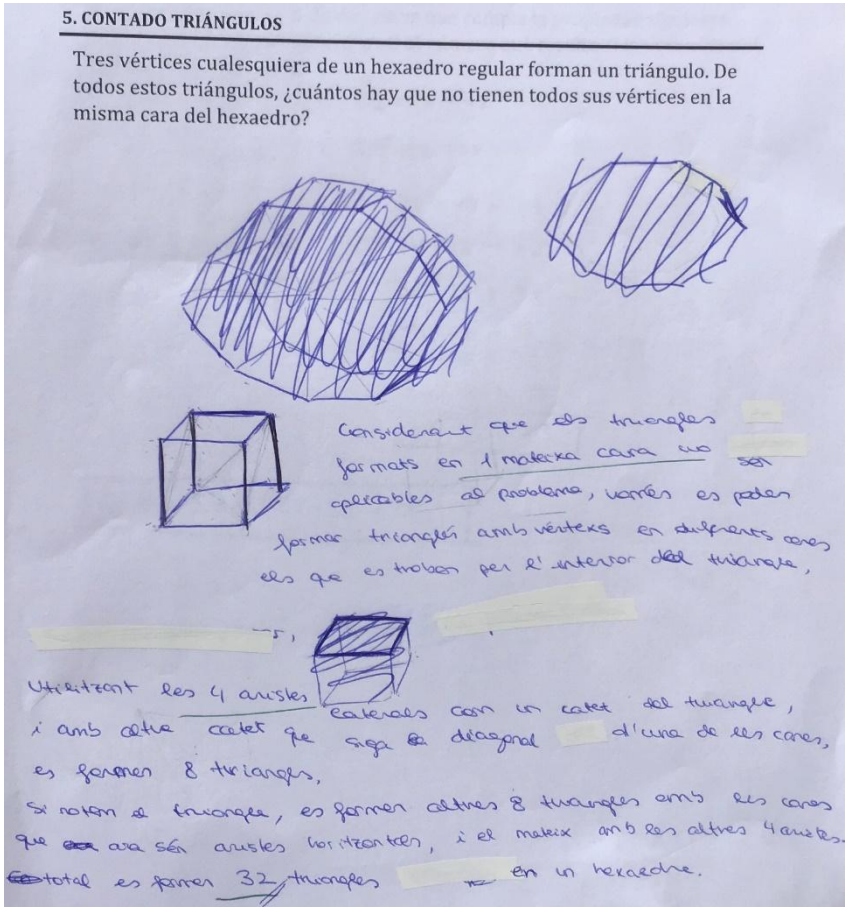


Figura 16. Respuesta de B19/M168 al problema 5 de la provincial

Señalar, que la estudiante B19/M168, fue la única de las 4 personas entrevistadas que manifestó que los problemas de geometría "*eran fáciles*".

3.2 Análisis cualitativo de la estudiante B06/M130

La estudiante B06/M130, Elena, por su respuesta al problema aritmético comarcal fue caracterizada como: comprende el problema; utiliza una estrategia reflexiva, y resuelve el problema. Por su respuesta al problema aritmético provincial, fue caracterizada como: comprende el problema, utiliza una estrategia reflexiva; y resuelve el problema de forma parcial. Durante la entrevista, B06/M130, mostró confianza en haber resuelto el problema comarcal afirmando *"lo hice bien, sí, era el más fácil."*. Mostró menor confianza en haber resuelto el problema provincial afirmando "*lo hice, pero no con tanta seguridad*". Al razonar cómo había resuelto el problema provincial, lo resolvió utilizando las operaciones adecuadas (Figura 17). Cuando le pedí que lo comparara con lo que había hecho durante la prueba, manifestó "*entendí mal que no se te daba un € por la partida 30, 40, 60, 80, 90*". Por

lo que hay evidencias de que, durante la prueba utilizó una **estrategia en la que había seleccionado la operación adecuada, pero no utilizaba todos los datos.** Pero durante la entrevista **razonó, utilizando toda la información del problema**, y lo solucionó.

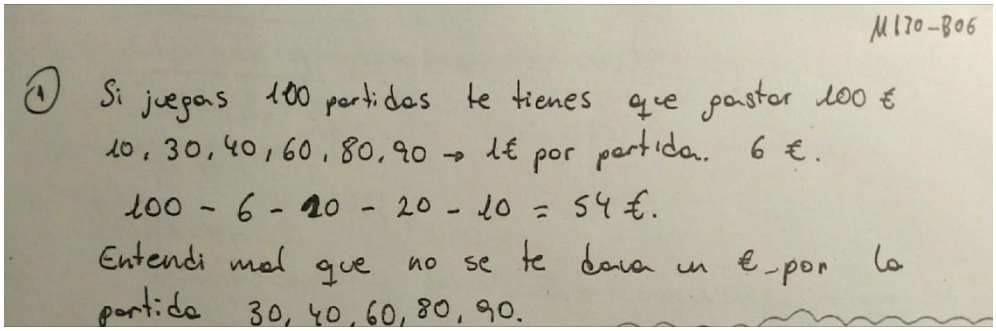


Figura 17. Entrevista a B06/M130 al problema 1 de la provincial

Durante la entrevista, la estudiante B06/M130, expresó su opinión sobre las dos pruebas; respecto a los problemas de la fase comarcal, manifestó que *"fáciles el 1 y el 5, la progresión aritmética es fácil, el 2 lo hice por tanteo y creo que me salió bien; y los difíciles el 3, y el 4, el 3 lo intenté sacar por álgebra, pero salían cosas que no tenían sentido, y el 4, saqué el centro, hice divisiones, lo hice por Pitágoras, pero después no sabía cómo seguir".* Respecto a los problemas de la fase provincial, manifestó que *"el 1 bastante sencillo, el 2 también, y lo hice por tanteo, bastante sencillo, el 5 lo considero después del 2, y los más difíciles el 3 y el 4, que lo intenté por Pitágoras. Esta prueba (provincial) es más compleja que la comarcal*". Al pedirle que valorará los dos problemas aritméticos, manifestó que "*es más complicado el 1 de la provincial que el 5 de la comarcal, ..., y en las dos pruebas, los de geometría son complejos, ..., en las dos pruebas el 3 y el 4 son difíciles*".

Después de la entrevista, analizamos las estrategias utilizadas por la estudiante B06/M130 en la fase provincial.

Su respuesta al problema 2 (Figura 18), fue caracterizada como: comprende el problema, utiliza una estrategia reflexiva; y lo resuelve. Además, podría ser interpretada como que hay evidencias de que utilizó una **estrategia de prueba y error al probar diferentes pares de valores,** indicando "*El número es 37. 36+37=73*".

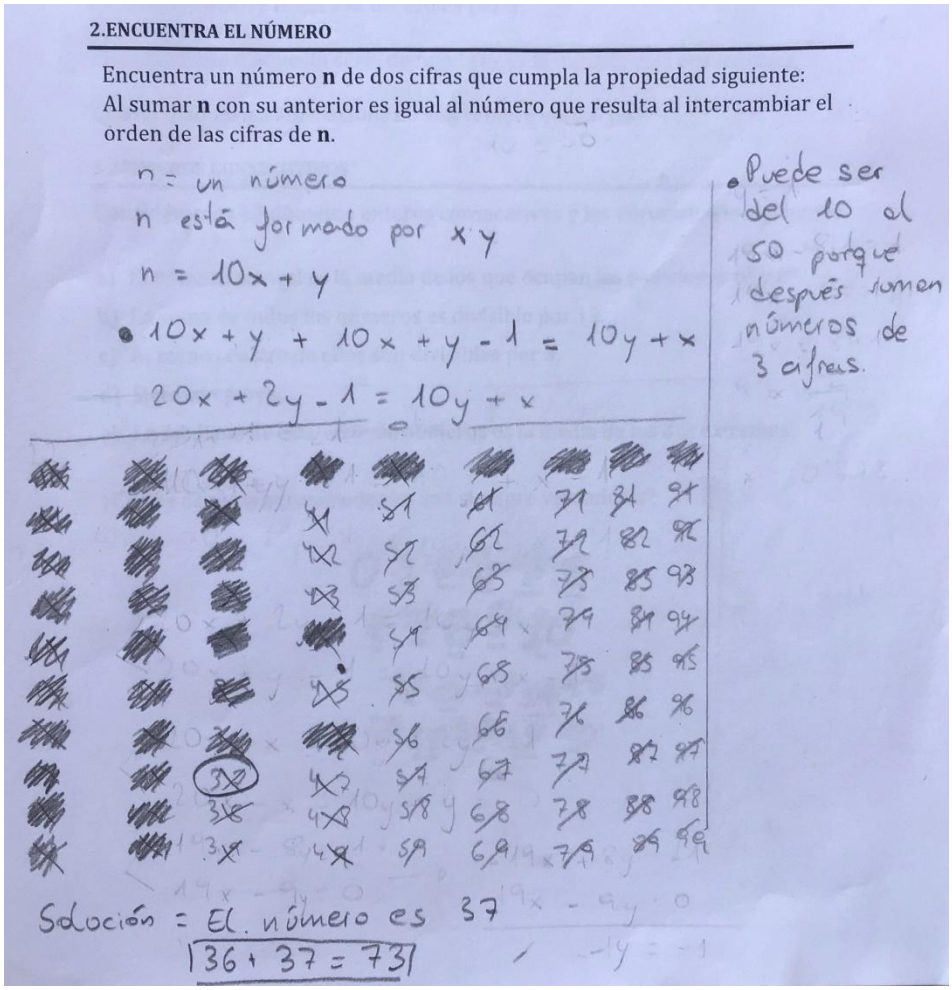


Figura 18. Respuesta a M130/B06 al problema 2 provincial

Su respuesta al problema 4 (Figura 19), fue caracterizada como: comprende el problema; utiliza una estrategia irreflexiva; y no lo resuelve. Además, podría ser interpretada como que hay evidencias de que utilizó una **estrategia de visualización interna y externa apoyada en el diseño de un dibujo**

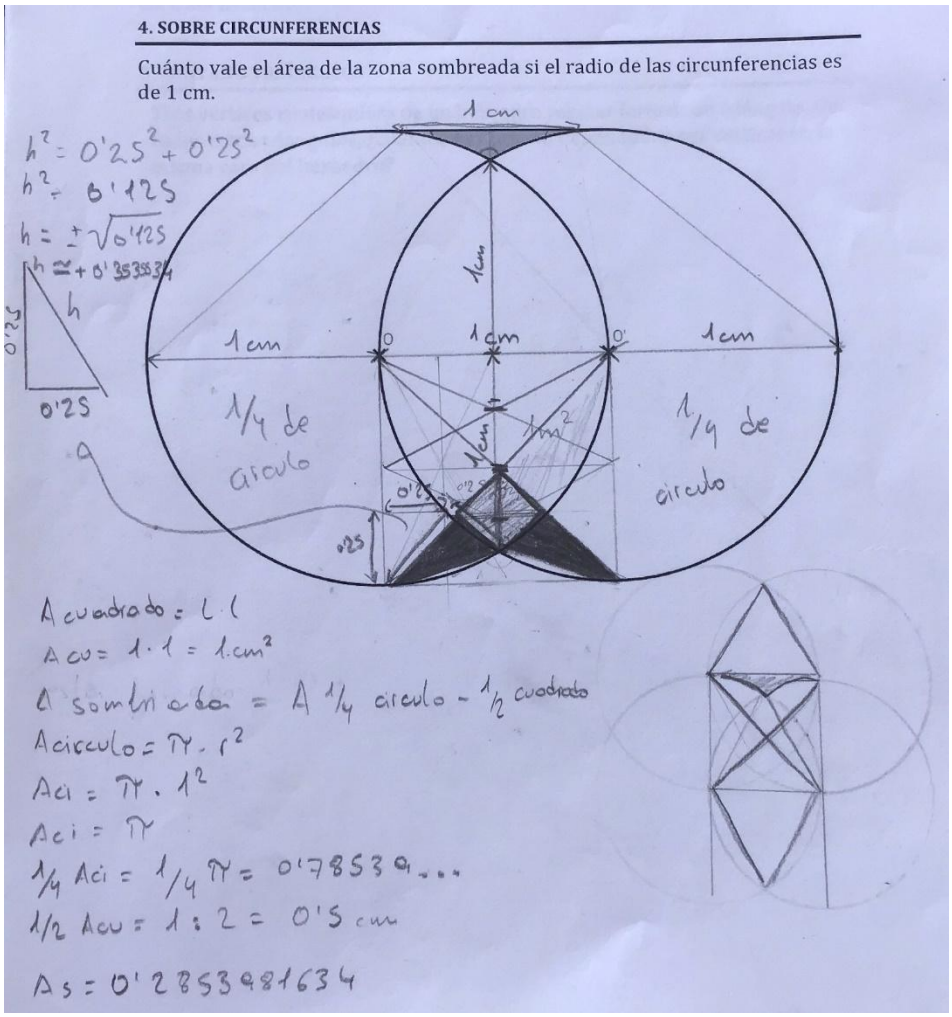


Figura 19. Respuesta a B06/M130 al problema 4 provincial

3.3. Análisis cualitativo del 9estudiante B14/M154

El estudiante B14/M154, Jorge, por su respuesta al problema aritmético comarcal (Figuras 20), fue caracterizado como: comprende el problema; utiliza una estrategia reflexiva; y lo resuelve: "*R final: 2019*1009 = 2037171. Explicación: como he dicho antes, la respuesta es la suma de todos los enteros positivos hasta 2018 (incluido). De esta forma, puedo hacer una especie de "pirámide" sumando el mayor (2018) y el menor (1). Así consigo el número 2019. Si esto lo hago así sucesivamente, puedo realizar 1009 agrupaciones (2018:2=1009), debido a que como hago sumas de 2 en 2, divido el número mayor por 2". Así consigo 1009*2019".* Esto podría ser interpretado como que hay evidencias de que utilizó **una estrategia de reducir la operación a otra más fácil, seleccionando la operación adecuada**.

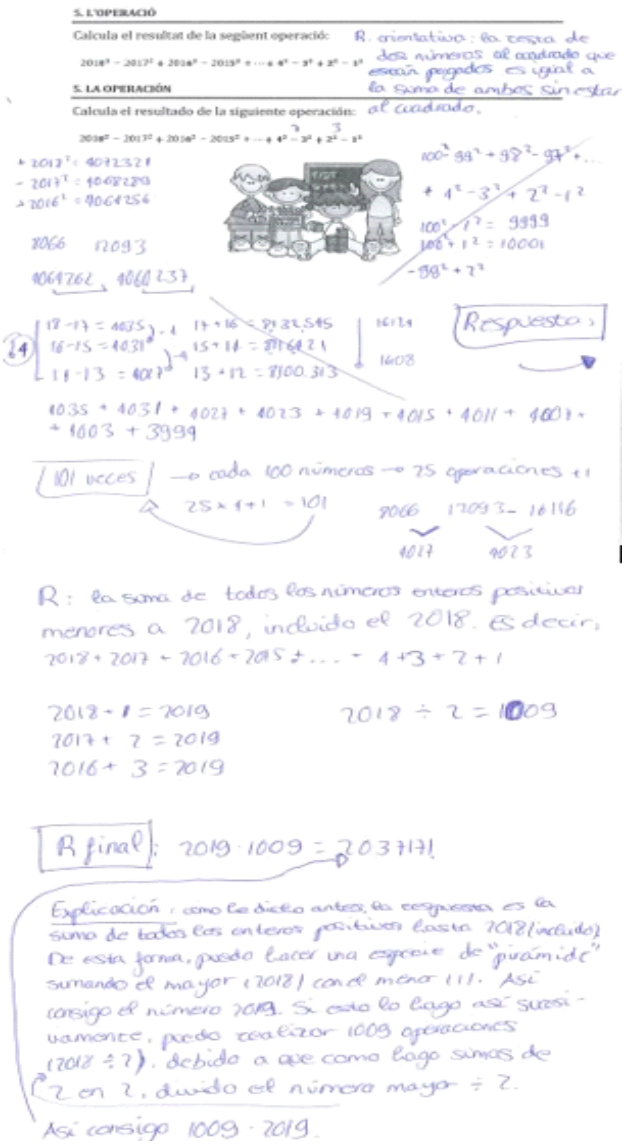


Figura 20. Respuesta de B14/M154 al problema aritmético comarcal

Por otra parte, si observamos la primera parte de la respuesta de B14/M154 al problema comarcal (Figura 20), podemos observar que había iniciado una estrategia reflexiva: "*2018^2=4072324; 2017^2=4068289; 2016^2=4064256*"; realizando las diferencias de los cuadrados: "*18-17=4035; 16-15=4031; 14-13=4027*"; indicando que "*-4*" era la diferencia entre ellos; y había reconvertido el problema a otra suma más fácil: "*4035+4031+4027+4023 +4019+4015+ 4011+4003+3999*", que con una raya por encima indicaba que la había abandonado. Señalando con una flecha que la respuesta estaba en la parte posterior de la hoja que lo resolvía.

Durante la entrevista a B14/M154, le pedí si podía continuar con la primera estrategia (Figura 20), a lo que el estudiante preguntó: "*Con un segundo patrón?*";

operando (Figura 21): "*4035+3=4038; 4031+7=4038; 4027+11=4038*"; conociendo la operación adecuada, resolvió razonadamente: "*2018*1/4*4038 = 2037171, dividimos por 4 porque en cada suma de las anteriores hay cuatro números*"; y comprobando que los dos "*patrones*" conducían a la misma solución. Esto podría ser interpretado como que hay evidencias de que utilizó **una estrategia de rectificación**, **porque inició una vía que abandonó, reinició el proceso, encontró otra vía, seleccionó la operación adecuada y soluciona el problema.** Durante la entrevista, su razonamiento evidencia que "*el patrón*" abandonado también resolvía el problema.

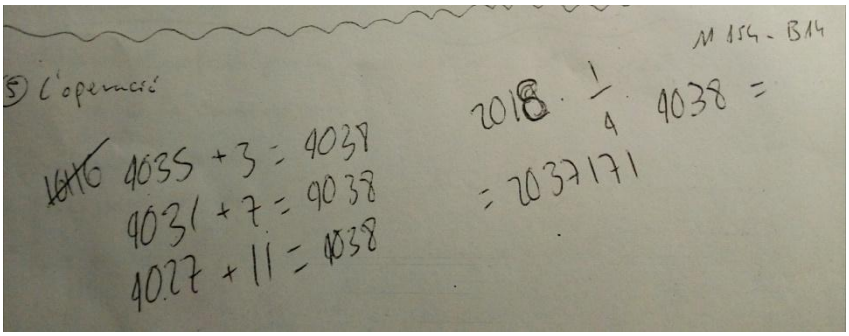


Figura 21. Entrevista a B14/M154 al problema aritmético comarcal

Durante la entrevista, el estudiante B14/M154, expresó su opinión sobre las dos pruebas; respecto a los problemas de la fase comarcal, manifestó que *"el 3 súper fácil, lo saqué muy rápido; el 2 también, probé tres números aleatorios 1,6,9, pero no sé si está bien; el 1 era fácil, no sé si lo hice bien, me lie un poco con la probabilidad; *el 4 de geometría, creo que hice como un triángulo rectángulo, pero después no me daba el área del arco de circunferencia, quería restar las áreas, pero no me salió era más difícil que los anteriores; y el 5 fue el que más me gustó, empecé a sumar los números con la calculadora de 4 en 4, había un patrón y empecé a sacar conclusiones, y al final no se si salió bien, hice una cosa muy rara; pero si, más fácil el 3 y más difícil el 4".* Respecto a los problemas de la fase provincial, manifestó que *"Los dos primeros eran muy, ..., había que pensar, pero eran fáciles, el 2 lo hice, probé unos números y creo que me salió bien; el 3 lo hice con una tabla, y creo que la opción d era la correcta, más o menos fácil también; el 4 de geometría es lo que llevo peor; y el 5 del hexaedro, no sabía que figura era"*. Al pedirle una valoración global de las dos pruebas, dudó, le costó contestar que "*no sabría decir, pero pienso, ..., que el provincial podría ser el más fácil, ..., no sé, ..., sí, sí, yo creo que sí ..., el provincial*" (en catalán en el original).

Después de la entrevista, analizamos las estrategias utilizadas por el estudiante B14/M154 en la fase provincial.

Su respuesta al problema 2 (Figura 22), fue caracterizada como: comprende el problema, pero **no muestra evidencias de estrategia utilizada**.

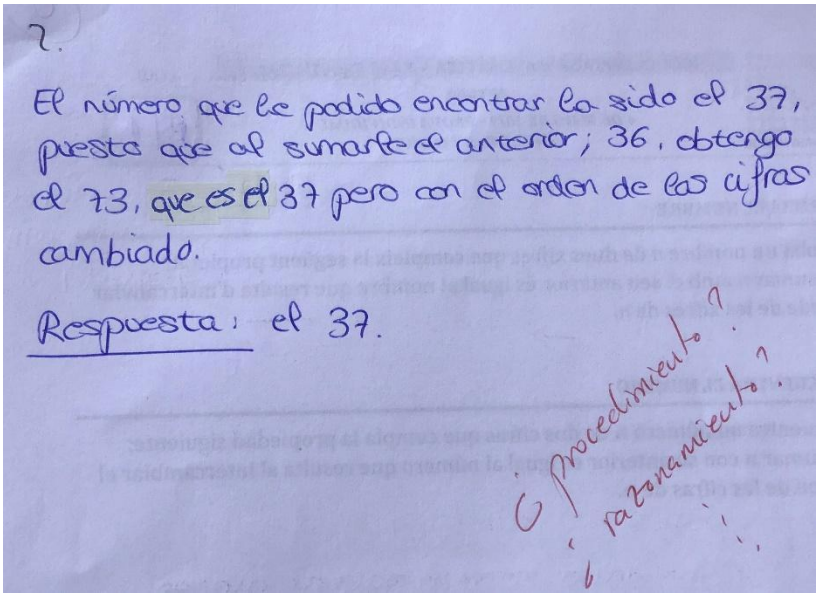


Figura 22. Respuesta a B14/M154 al problema 2 provincial

Su respuesta al problema 3 (Figura 23), fue caracterizada como: comprende el problema, utiliza una estrategia reflexiva; y lo resuelve. Además, podría ser interpretada como que hay evidencias que utilizó una **estrategia de análisis de las diferentes opciones**, **buscando regularidades,** indicando las verdaderas y la falsa: "*la única afirmación incorrecta es la d) "7 son pares", puesto que hay conjuntos (los que comienzan y acaban en número impar) que solo tienen 6 números pares"*.

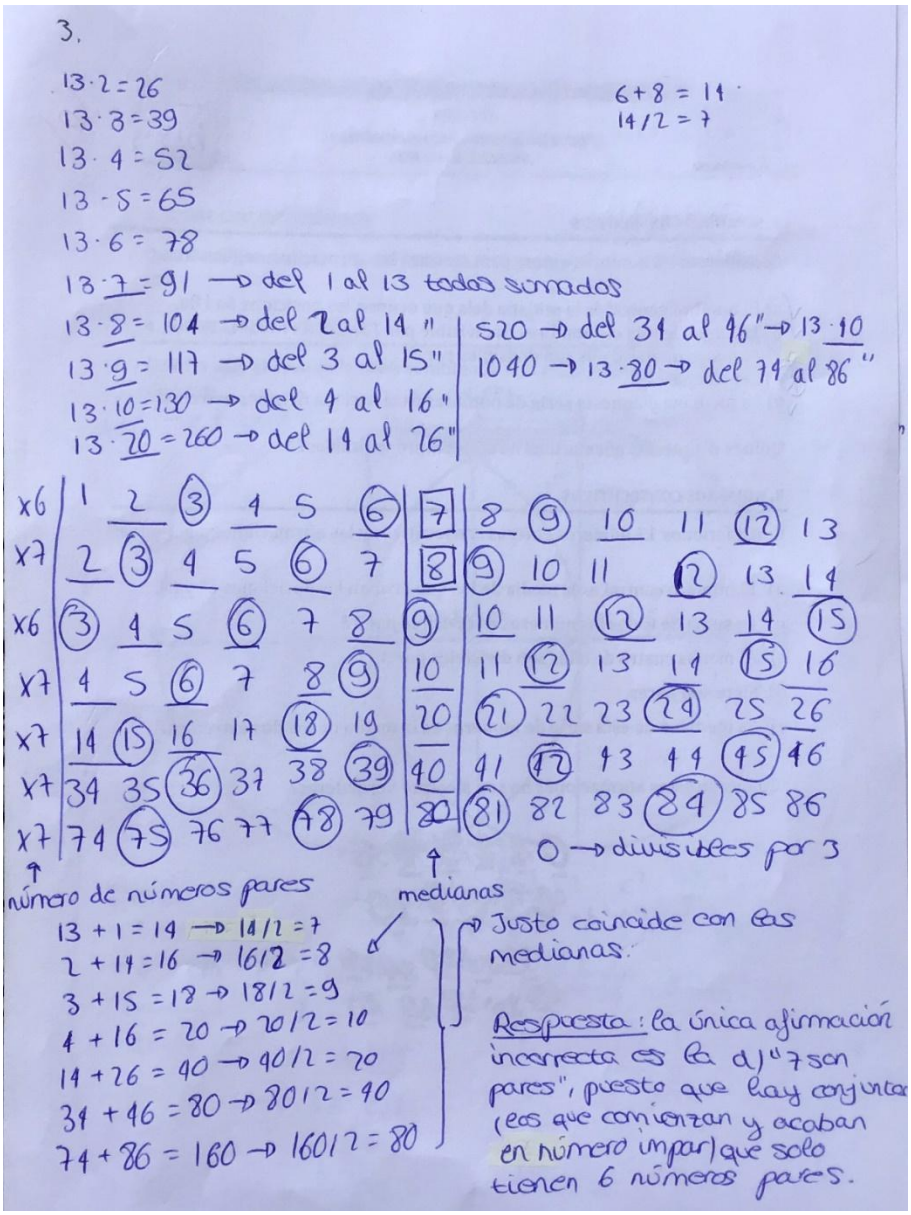


Figura 23. Respuesta de M154/B14 al problema 3 provincial

4. Conclusiones.

El objetivo de esta investigación ha sido analizar e identificar las estrategias o heurísticas utilizadas por cuatro estudiantes de segundo ciclo de la ESO (14-16 años), cuando resuelven problemas en el contexto de un concurso como son las Olimpíadas Matemáticas. Estudiantes que consideramos buenos resolutores de problemas al haber superado la fase comarcal y participar en la fase provincial de las Olimpiadas. Nuestro análisis de las entrevistas y de sus producciones nos han permitido identificar, en los procesos de resolución de problemas, estrategias de: 1)

generalización de un resultado parcial; 2) selección de la operación adecuada; 3) utilización de todos los datos; 4) prueba y error; 5) buscar regularidades; 6) visualización externa apoyada en el diseño un dibujo; 7) visualización interna apoyada en el dibujo; 8) reducir el problema a otro más fácil; 9) analizar diferentes posibilidades, excluyendo las que no cumplen las condiciones establecidas; 10) rectificación, iniciar una vía que se abandona, reiniciar el proceso encontrando otra vía que lo soluciona.

Los resultados obtenidos están en consonancia con los que indican que la utilización de una estrategia reflexiva no siempre permite resolver el problema (Albarracín y Gorgorió, 2013; Gaulin, 2001). También indican que sus valoraciones sobre problemas fáciles o difíciles, se corresponde bastante con la realidad de su proceso resolutivo, además sus percepciones nos indican que consideraron más asequible los problemas de la fase provincial que los de la fase comarca. Estos estudiantes, mostraban confianza en su capacidad para enfrentarse a la resolución de problemas con estrategias diferentes. Finalmente, estos resultados permiten validar la necesidad de la presencia de las estrategias de resolución de problemas en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) como contenido que ha de ser enseñado.

Agradecimientos. Nuestro agradecimiento al alumnado de tercero y cuarto de ESO que participó en las fases comarcal y provincial de las Olimpiadas Matemáticas celebradas en Alacant durante el curso 2018/2019; así como al profesorado que nos puso en contacto con los 4 estudiantes objeto de esta investigación: Noemí Armengol (Mariló); Mari Paz Muñoz (Jorge); José Aurelio Pina (Elena); y Roberto Selva (Inés).

Bibliografía.

Albarracín, Ll. y Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: Modelización e influencia del contexto. *Revista Iberoamericana de Investigación en Educación Matemática, 16 (3)*, 289-315.

Arteaga, J. y Guzmán, J. (2005). Estrategias utilizadas por alumnos de quinto grado para resolver problemas verbales de matemáticas. *Educación Matemática, 17 (1)*, 33-55.

Botella, L.M., Millán, L.M., Pérez, P. y Cantó, J. (2007). *Libro de Recursos y Orientaciones Matemáticas 3er curso ESO*. Editorial Marfil.

Caballero, S. y García, F.J. (1993). *Matemáticas de 4º ESO. Resolución de problemas*. Edita: Generalitat Valenciana.

García-García, J., Rodríguez, F.M. y Navarro, C. (2015). Las estrategias utilizadas por los niños Tee Savi en la resolución de problemas aritméticos. *Revista Iberoamericana de Investigación en Educación Matemática, 18 (2)*, 213-244.

Gasco-Txabarri, J. (2017). La resolución de problemas aritmético-algebraicos y las estrategias de aprendizaje en matemáticas. Un estudio en educación secundaria obligatoria (ESO). *Revista Iberoamericana de Investigación en Educación Matemática, 20 (2),* 167-192.

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma, 19*, 51-63.

Grup Zero (1981). *Matemàtiques I. La mesura i els nombres*. ICE de la Universitat Autònoma de Barcelona. Ed. Vicens Vives.

Grupo Cero (1990). *De 12 a 16. Un proyecto de currículum de matemáticas*.

Martínez, P.J. (2007). Las Olimpiadas Matemáticas, un potente recurso para la Educación Matemática en la Escuela. *XII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Actas JAEM 2005.* Ed. FESPM, 365-374.

Montero, I., Callejo, M.L. y Valls, J. (2020). Instrumentación de una progresión de estrategias de resolución de problemas por estudiantes para maestro. *Enseñanza de las Ciencias, 38 (2),* 83-1001.

NCTM-National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, VA: Autores.

Oliu, V. (2015). Los problemas de los concursos de matemáticas como recurso didáctico. *17 jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Actas JAEM 2015.* FESPM. Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia, SEMRM.

Pifarré, M. y Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en ESO. Un ejemplo concreto. *Enseñanza de las Ciencias, 19(2)*, 297-308.

Pólya, G. (1975). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ed.Trillas México.

Puig, L. (2008). Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación del currículo. *XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. SEIEM.

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE, 76*, de 30 de marzo de 2022, 41571-41789.

CoP006 Trabajamos con la estrella mudéjar

Felisa Gil Meléndez
fgilmelend@gmail.com o fgil@iesvegadelturia.es
IES Vega del Turia de Teruel

Núcleo temático: Procesos, Recursos para el aula

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

Esta experiencia se llevó a cabo con los alumnos de 3º ESO del IES Vega del Turia de Teruel, durante el final del tercer trimestre del curso 2020-21

Los objetivos de la actividad eran:

- Repasar el teorema de Pitágoras y utilizarlo para la resolución de triángulos rectángulos y para resolver cualquier figura geométrica susceptible de descomposición en triángulos rectángulos.
- Conocer las fórmulas de las áreas de figuras geométricas planas y utilizarlas para calcular medidas y resolver problemas.
- Repasar y afianzar los conceptos de geometría.

Para ello se realizaron actividades de investigación, construcción, la parte central que era las actividades geométricas y para finalizar unas actividades lúdicas, todo ello sobre la estrella mudéjar.

La experiencia resulto bien, los alumnos mostraban bastante interés puesto que fueron ellos quienes habían decidido que era divertido trabajar con la estrella de Teruel.

Palabras clave: Geometría, Áreas, Estrella Mudéjar.

Aquí se recoge el desarrollo del Trabajo

TRABAJAMOS CON LA ESTRELLA MUDEJAR – 3º ESO

Esta unidad se realizó en junio de 2021 durante los diez o quince días que van desde la evaluación final hasta la evaluación extraordinaria. Se llevó a cabo con los alumnos de 3º ESO que tenían la asignatura aprobada ya que con el resto se repasaba la asignatura de cara al examen extraordinario de finales de junio.

El objetivo fundamental era repasar y afianzar los conceptos básicos de geometría de una forma divertida.

Fue una experiencia gratificante, ya que los alumnos decidieron que podíamos repasar algo de Geometría, y que mejor que hacerlo con la estrella mudéjar que aparece con mucha frecuencia en nuestra ciudad.

Se plantearon actividades variadas, aunque la parte central eran las actividades geométricas.

1.- Nos toca investigar

Investiga un poco de historia sobre la estrella mudéjar.

Las frases más repetidas por los alumnos son:

“La estrella de ocho puntas o estrella tartésica es una forma geométrica usada por varias culturas bajo distintos nombres y significados…”

“Es el resultado de la superposición de dos cuadrados concéntricos, uno de los cuales ha sido girado 45 grados”.

“Los mozárabes y mudéjares llevaron la estrella de ocho puntas por todo el norte de la península ibérica y los musulmanes y moriscos la difundieron por el Magreb y el Oriente Medio.”

“Esta estrella de ocho puntas representa un sol radiante con ocho rayos, y es el símbolo originario de Andalucía”

Casi todas las respuestas estaban copiadas de dos páginas de Internet “Wikipedia” y de “Aragonalia”

2.- Ponte el casco

Dibuja la estrella mudéjar por dos métodos diferentes.

Los dos métodos más repetidos fueron con dos cuadrados y usando un octógono.

Siguiendo las instrucciones de los alumnos los dibujamos con GeoGebra, se pueden ver dos pantallazos.

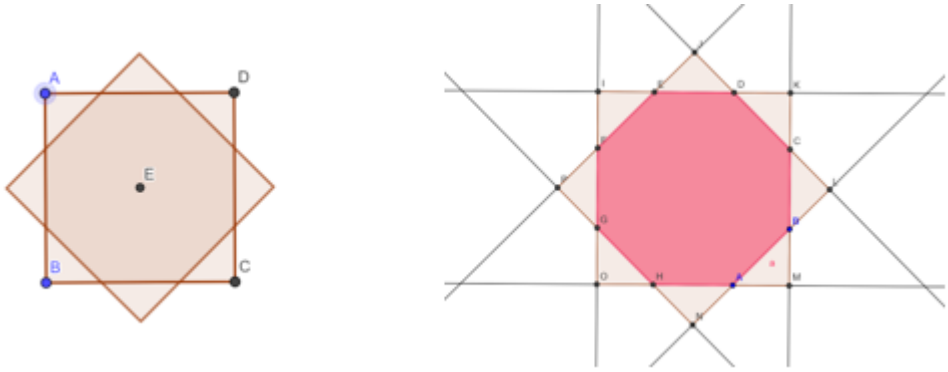


Imagen 1- Construcciones

3.- Nos divertimos con el papel

Dedicamos una clase a construir la estrella mudéjar con papiroflexia. Para ello la profesora preparo ocho papelitos de 10 x 6,5 cm, para cada alumno, y poco a poco fuimos realizando las dobleces necesarias. Los alumnos se fueron a su casa tan contentos con su estrella.

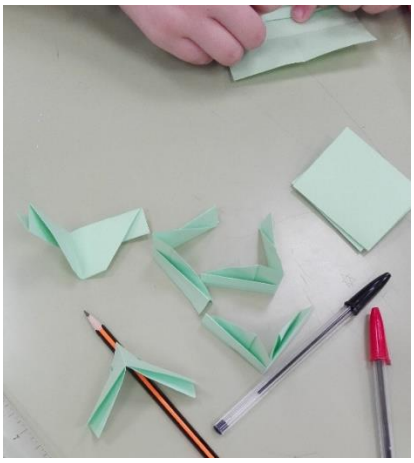


Imagen 2 - Estrella Papel 1

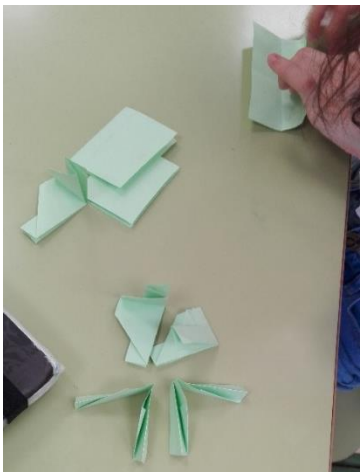


Imagen 3- Estrella Papel 2

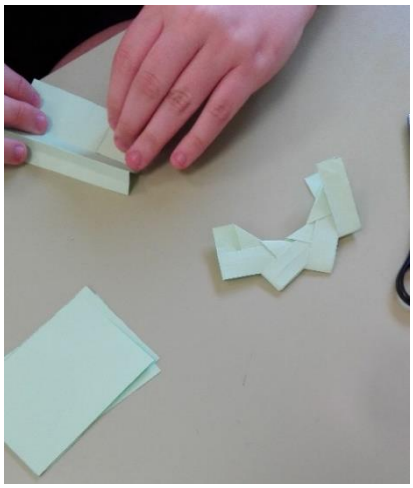


Imagen 4- Estrella Papel 3

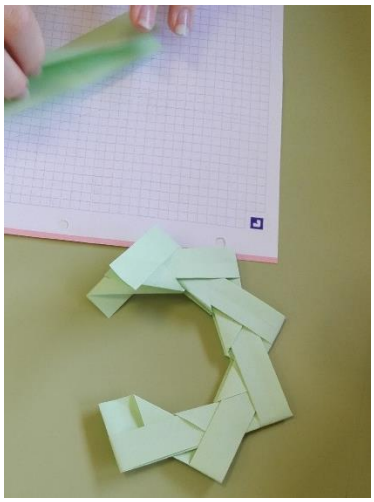


Imagen 5 - Estrella Papel 4

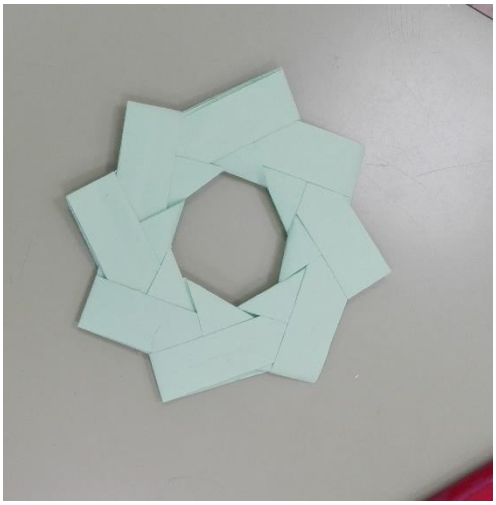


Imagen 6 - Estrella Papel 5

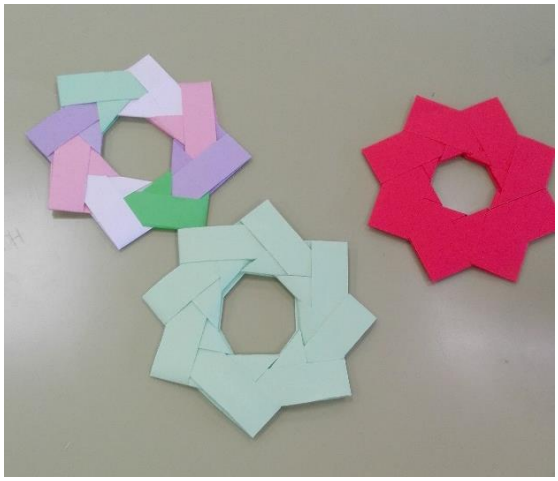


Imagen 7 - Estrella Papel 6

4. -En busca de la estrella perdida….

Debes fotografiar al menos tres estrellas mudéjares en tu barrio, pueblo, ciudad….

Los alumnos buscaban estrellas y las fotografiaban con el móvil, luego las subían a la nube del instituto. A esta actividad se sumaron todos los alumnos del curso. Las fotos debían ser originales. Durante este curso 2021-22 los alumnos siguen aportando sus fotos, se han incluido todas.

Con todas ellas la profesora hizo un PowerPoint “En busca de la estrella perdida…” agrupando las fotos por temas (comida, joyas, ropa, monumentos, adornos…)

Se ha subido la presentación al DRIVE para poder visionarla

Imagen 8 - Presentación

5.- Un traje de ocho puntas

5.1- Señala en la figura siguiente los distintos tipos de ángulos, escribe de qué clase son y calcula su amplitud

Imagen 9 – Estrella ejercicio 5.1

Empezamos con una actividad muy fácil. Se muestran dos respuestas

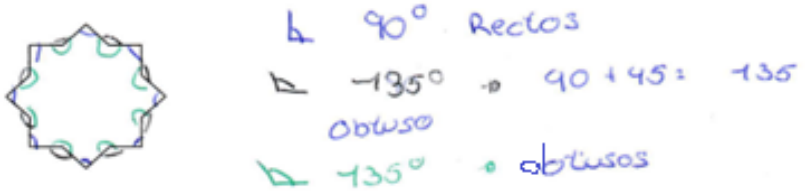


Imagen 10 – Respuesta alumno 1

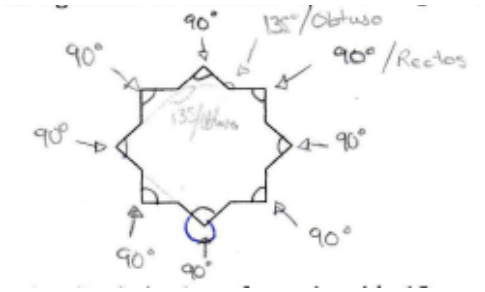


Imagen 11 – Respuesta alumno 2

5.2- Suponiendo que el radio de la circunferencia mide 10 cm, calcula área del cuadrado ACEG, área del triángulo BFH y área del octógono ABCDEFGH

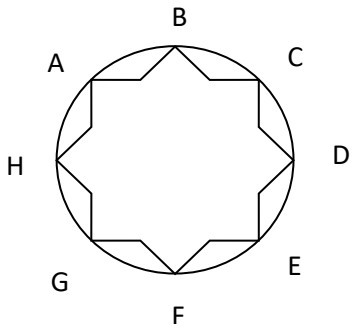


Imagen 12 – Estrella ejercicio 5.2

Soluciones dadas por los alumnos

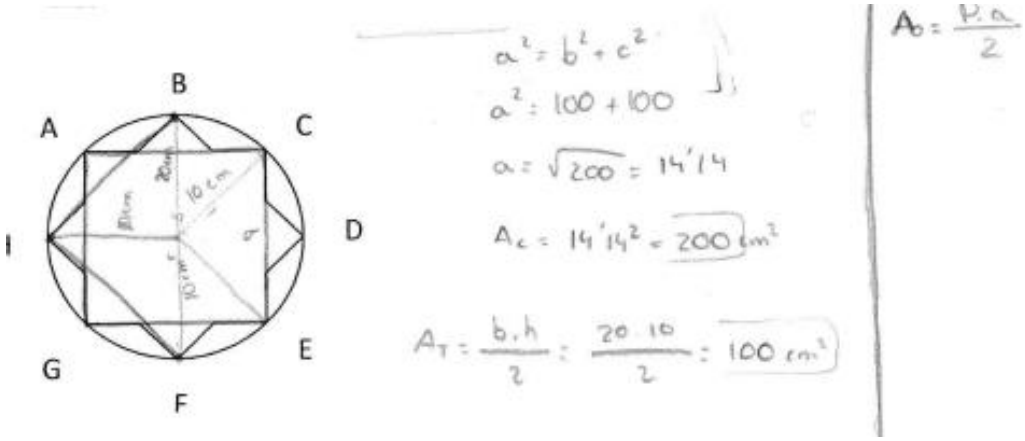


Imagen 13 – Respuesta alumno 3

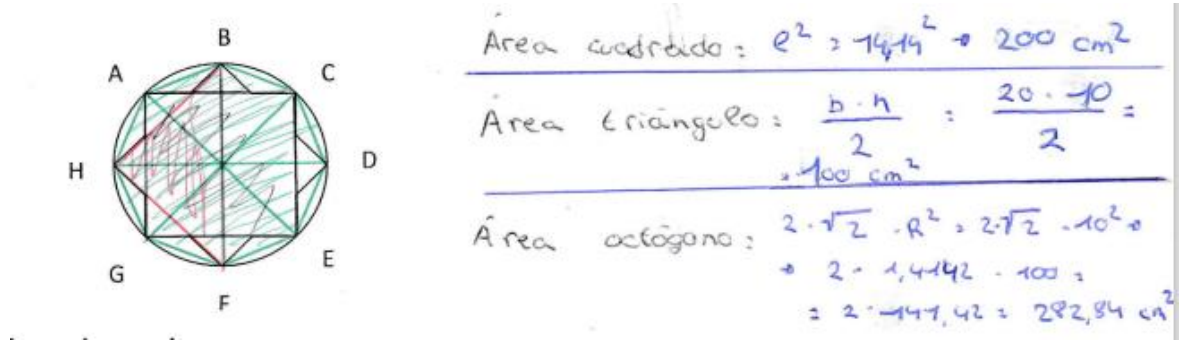


Imagen 14 – Respuesta alumno 4

6.-Sombrero de tres picos

Sabiendo que el lado de la estrella mide 2 cm, calcular: la longitud del segmento BD, la longitud del segmento AE, la longitud del segmento OA, el área y el perímetro del triángulo BCD, el área y el perímetro del octógono sombreado, el área y el perímetro de la estrella

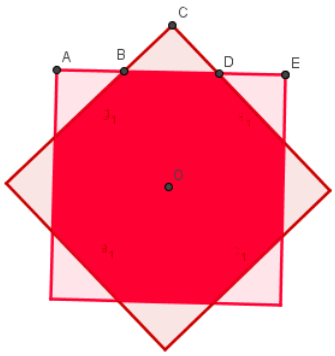


Imagen 15 – Estrella ejercicio 6

Esta actividad quedo pendiente para acabar en casa y la mayoría se olvidó de responderla. Se adjunta la solución de un alumno, sin acabar...

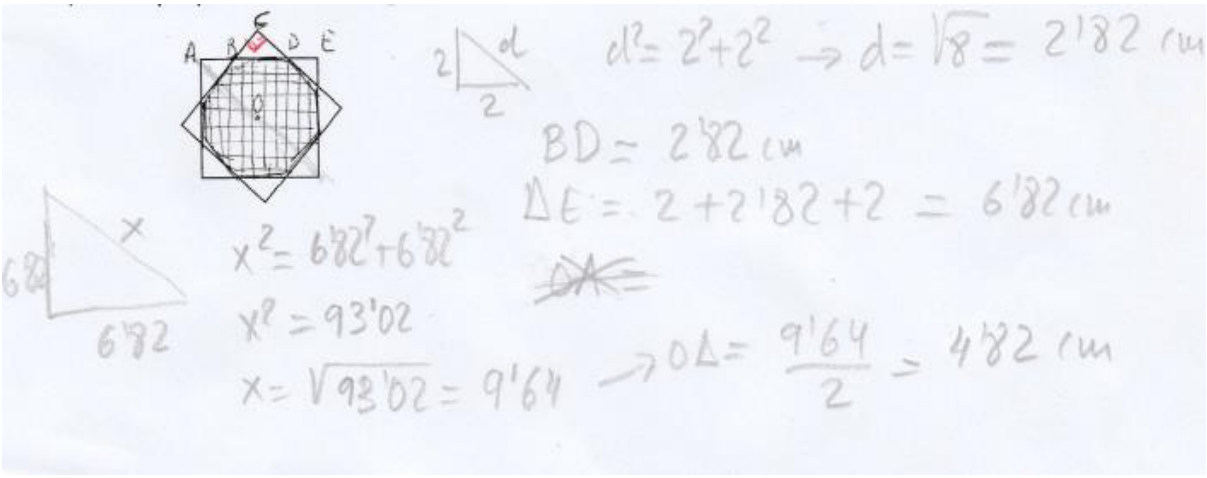


Imagen 16 – Respuesta alumno 5

7.- Sol y sombra

7.1- Calcula las áreas de las zonas sombreadas en las figuras A, B, C, D, E y F suponiendo que el área de la estrella es de 64 m^2.

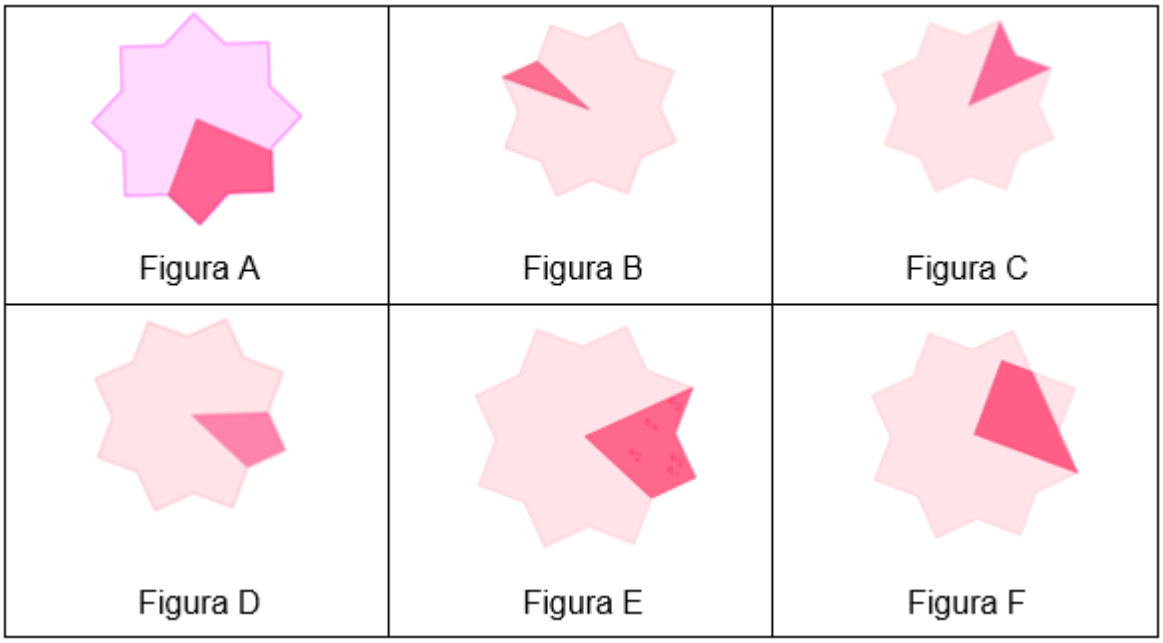


Imagen 17 – Estrellas ejercicio 7.1

En esta actividad las soluciones no aparecen muy explicadas, según los alumnos se ven claras con las líneas de división que se pintan.

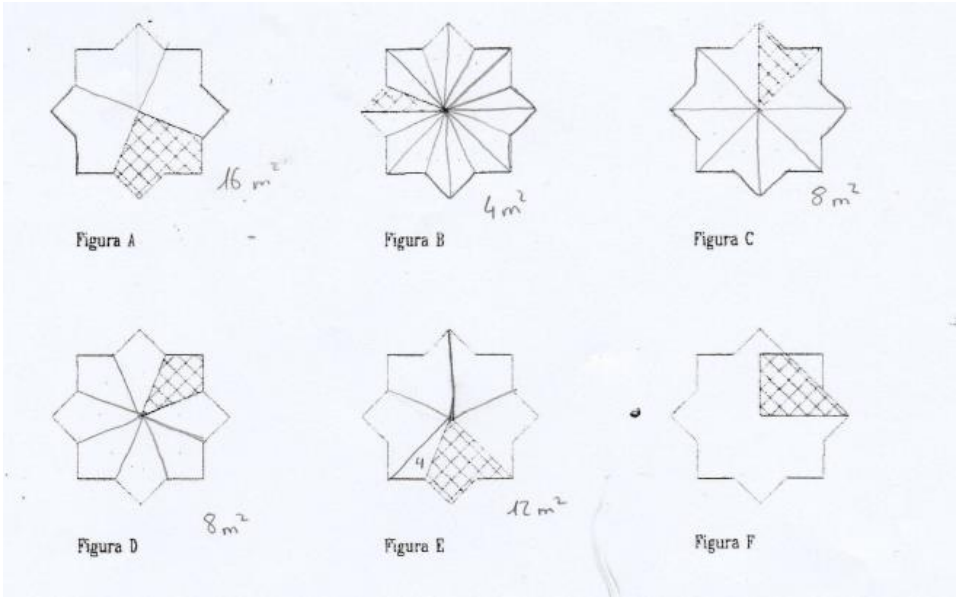


Imagen 18- Respuesta alumno 6

7.2- Calcula las áreas de las zonas sombreadas en las figuras G, H, I, J y K suponiendo que el lado de la estrella mide 10 cm. Emplea el teorema de Pitágoras y los triángulos auxiliares ABC

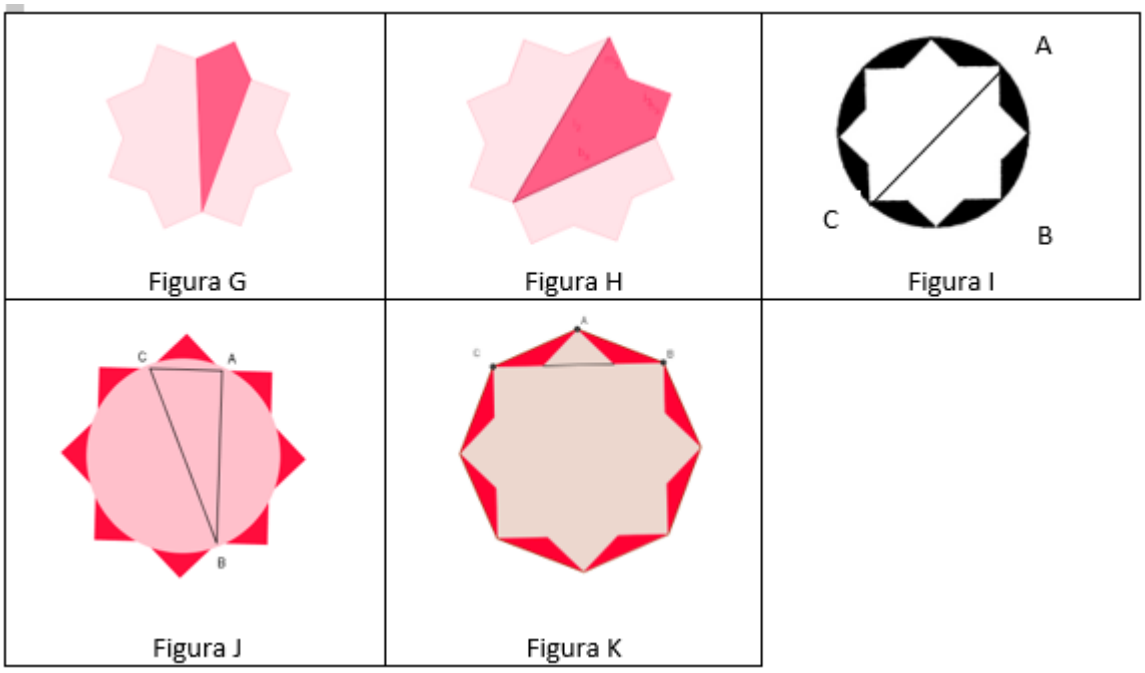


Imagen 19- Estrellas ejercicio 7.2.

Solución de un alumno:

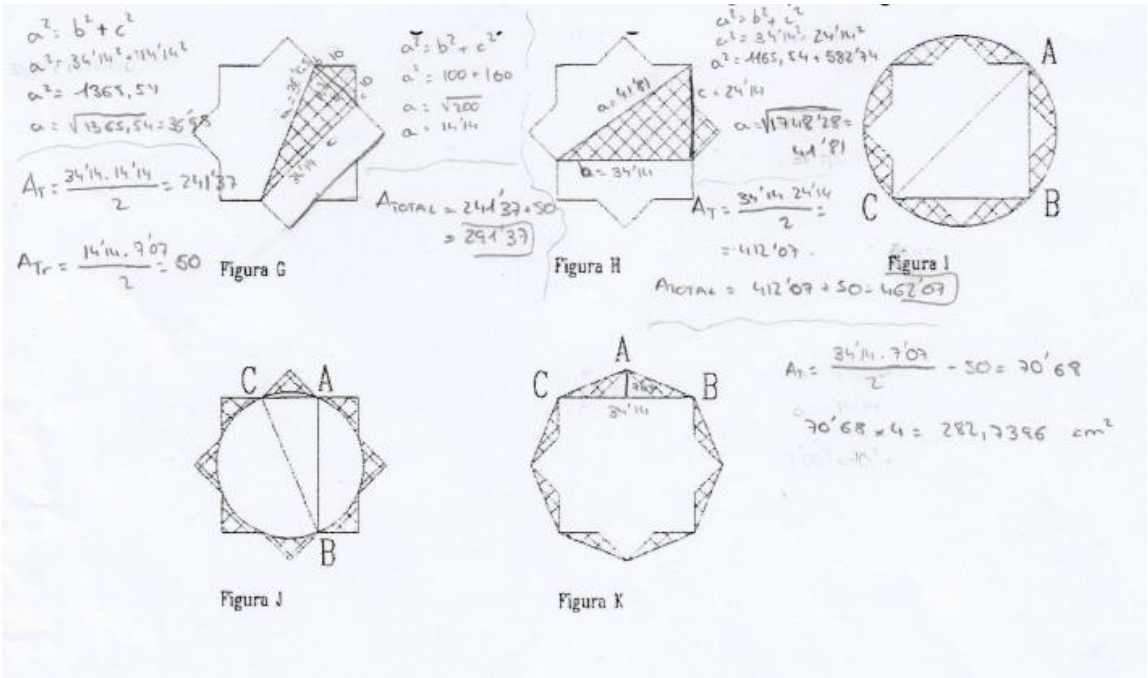


Imagen 20- Respuesta alumno 7

8.- ESTRELLAS MÁGICAS

Una estrella mágica de n puntas es un polígono estrellado en el cual se disponen en cada uno de los vértices e intersecciones los números naturales del 1 al 2n, de tal modo que los números situados en cada línea del polígono sumen lo mismo (constante mágica). La constante mágica de una estrella mágica de n puntas es M = 4n + 2. No existen polígonos estrellados con menos de 5 puntas y la construcción de una estrella mágica de 5 puntas es imposible. El ejemplo más pequeño de una estrella mágica tiene 6 puntas.

8.1- Hay que distribuir los números del 1 al 16 en los puntos de intersección de las líneas de la figura de modo que la suma de los cuatro números que se hallan en cada lado de los dos cuadrados sea 34 y que la suma de los cuatro números que se encuentran en los vértices de cada cuadrado sea también 34. Se denomina Octograma Mágico

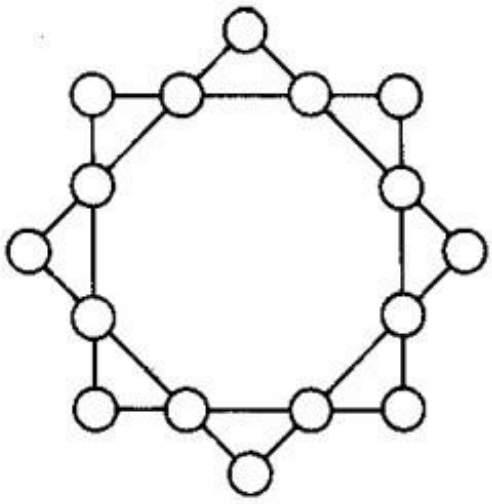


Imagen 21 - Octograma1

En este ejercicio, como los alumnos no encontraban la solución correcta, cambiamos el orden; hicimos primero el 8.2 y de esta forma obtuvimos la solución del 8.1

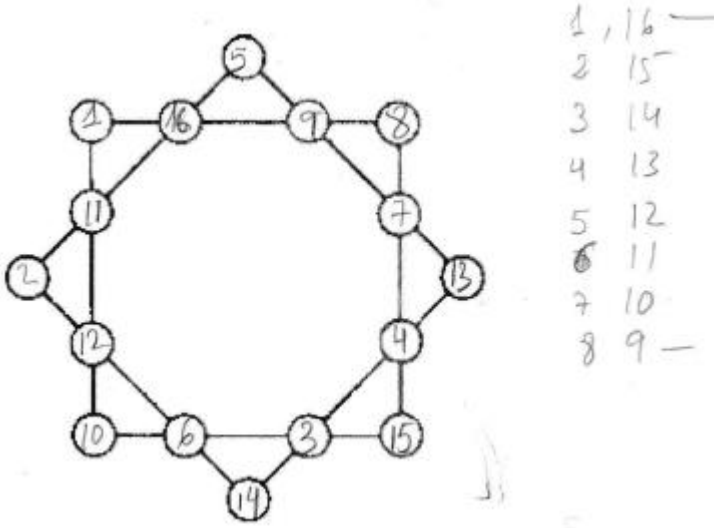


Imagen 22 - Octograma 2

8.2- Como esta **estrella de ocho puntas es mágica**, está formada por dos cuadrados que tienen la propiedad de que la suma de los números que hay en cualquiera de los lados de cada cuadrado es siempre la misma. Los números de las casillas de la estrella original han sido escondidos y sustituidos por expresiones donde aparecen dos letras, a y b. Tienes que encontrar los valores de las letras para poder volver a colocar los números.

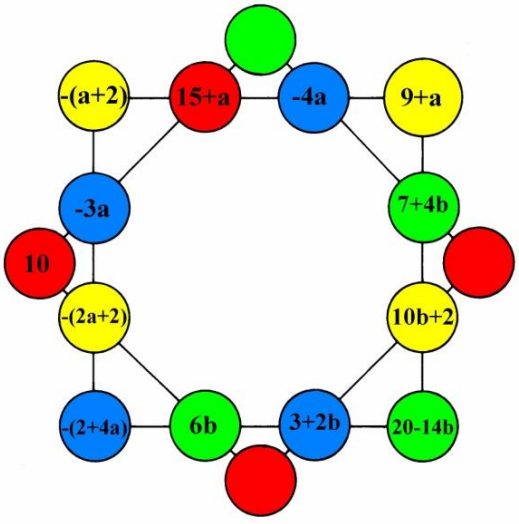


Imagen 23 - Octograma 3

Solución de uno de los alumnos

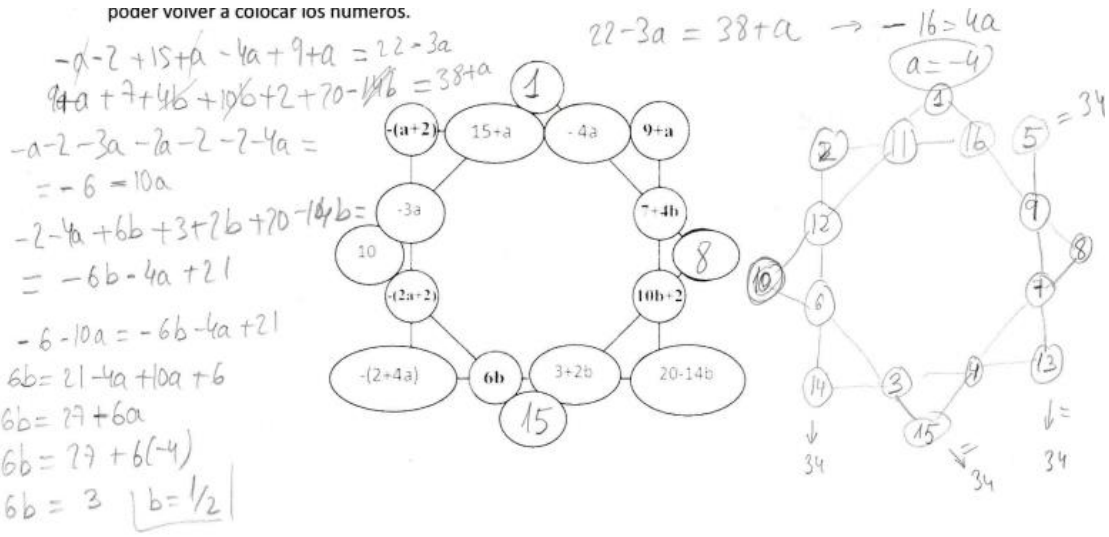


Imagen 24 - Octograma 4

9.- PUZLE MUDÉJAR

La siguiente imagen es un puzle de la estrella mudéjar (debida a Anton Hanegraaf) Debes de recortar las once piezas que la forman, y después construir con ellas una figura en forma de cuadrado. ¿Eres capaz de hacerlo?

Sube la foto de la imagen a la nube 3.0 del Instituto.

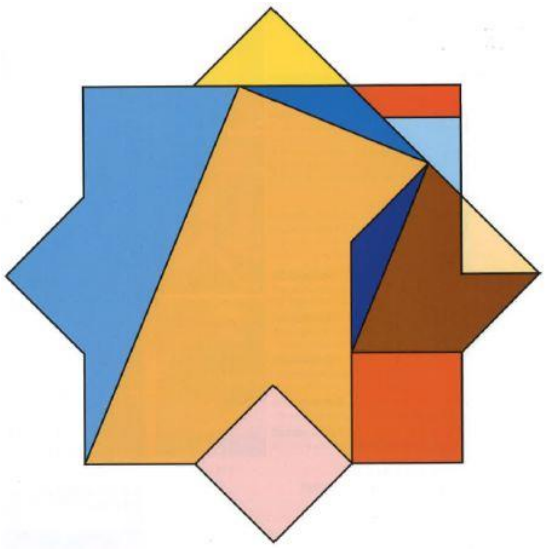


Imagen 25 -Estrella puzle

La solución aparecerá en unos días en la Nube.

Imagen 26 – Solución alumno 8

Referencias

GARCIA AZCARATE, ANA (10 DE ABRIL 2014) Estrellas mágicas: ecuaciones de primer grado. *https://anagarciaazcarate.wordpress.com*

MACHO STADLER, MARTA (3 *DE ABRIL DE 2013)* De un octograma a un cuadrado. *https://ztfnews.wordpress.com*

CoP009 Identidades algebraicas doblando papel

Fernando Blasco Contreras.
fernando.blasco@upm.es
Escuela de Montes de la Universidad Politécnica de Madrid.

Álvaro Sánchez González.
asanchez35@educa.madrid.org / alsanc03@ucm.es
IES Adolfo Suárez (Paracuellos de Jarama, Madrid) y Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid

Núcleo temático: Procesos; Recursos para el aula.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

Pese a la temprana introducción de manejos algebraicos, los alumnos frecuentemente siguen cometiendo errores en el desarrollo de expresiones algebraicas elementales incluso en cursos avanzados de Secundaria, siendo quizá uno de los ejemplos más ilustrativos el de las conocidas como *identidades notables*. A partir de la la interpretación geométrica bien conocida para el desarrollo del cuadrado de una suma, nuestra comunicación se dedica a derivar de ésta los desarrollos del cuadrado de una resta y la suma por la diferencia mediante dobleces en un cuadrado de papel. La generalización de esta idea nos lleva a poder dar una regla manipulativa mediante dobleces en un rectángulo de papel que permite representar la multiplicación de dos expresiones polinómicas de primer grado.

(Comunicación basada en el artículo conjunto de los autores, Blasco y Sánchez, actualmente en progreso para su envío a publicación).

Palabras clave: Polinomios, Identidades Notables, Material Manipulativo.

1. Justificación.

Cuando desarrollamos expresiones algebraicas, es común la aparición de identidades tales como $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, siendo un error habitual en los primeros cursos de Secundaria olvidar el término del doble producto. Este hecho afecta a otros resultados como la falsa propiedad $\sqrt{(a+b)}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$. En la misma línea, la demostración de la identidad $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ se convierte en una agrupación ordenada que multiplica letras y signos de forma inapropiada por una incorrecta aplicación de la propiedad distributiva.

Las identidades algebraicas elementales eran conocidas por los babilonios (Plofker, 2007), siendo la demostración geométrica de Euclides una de las primeras conocidas para el cuadrado de una suma (Byrne, 1847) y que además hace uso de la interpretación geométrica para la demostración de propiedades algebraicas (Boyer, 1999).

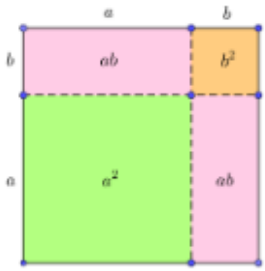


Imagen 1. Representación geométrica del cuadrado de una suma.

Por otro lado, los recursos manipulativos ofrecen una vía de comprensión de argumentos teóricos. El Origami es uno de estos recursos y, por ejemplo, en Row (1966) se describen varias construcciones relacionadas con expresiones algebraicas. Con este trabajo pretendemos dar, a través del doblado de papel, una

demostración geométrico-manipulativa de las identidades notables y extender el resultado a una multiplicación de dos factores lineales.

2. Identidades notables.

A partir de la demostración geométrica del cuadrado de una suma, abordamos las otras dos identidades.

2.1 Cuadrado de una resta.

A partir de la representación geométrica del cuadrado de una suma, podemos doblar por las líneas divisorias y obtener un cuadrado descubierto con área $(a-b)^2$. Se observa que la primera doblez resta el rectángulo $ab+b^2$ del rectángulo a^2+ab, es decir:

$(a^2+ab) - (ab+b^2)= (a^2-ab) + (ab-b^2)$,

y en la segunda doblez se resta $ab-b^2$ del rectángulo $a^2- ab$, por lo que tenemos

$(a^2-ab) - (ab-b^2)= a^2-2ab + b^2$.

En consecuencia, tenemos que $(a-b)^2= a^2-2ab+b^2$.

Hay que remarcar que el segundo paso produce un doble solapamiento de los rectángulos ab que coincide precisamente con b^2. Este doble solapamiento proviene de “restar una parte que ya había sido restada”, lo que se corresponde con la regla escolar de “menos por menos es más”.

Además, la disposición de los cuadrados y rectángulos puede reordenarse mediante doblado, obteniendo así una demostración del teorema de Pitágoras que reproduce la prueba visual de Rufus (1975).

2.2 Suma por diferencia.

Tras la primera doblez, podemos interpretar la región descubierta como un rectángulo de lados a+b y a-b. Además, una sencilla reordenación nos muestra que su área difiere b^2 con respecto a a^2 y por tanto $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$. Es de reseñar la similitud de esta reordenación con la prueba del Teorema de Pitágoras que tradicionalmente se atribuye a Bhaskara (Nelsen, 1933).

Esta reordenación puede pensarse como una operación de doblado, considerando las pestañas en una posición neutral perpendicular al plano del papel. Si realizamos una suma, desplegamos hacia fuera la pestaña mientras que si realizamos una resta entonces terminamos de doblar hacia dentro.

3. Generalización.

Esta idea de pensar en pestañas en posición neutral nos permite desarrollar un método manipulativo de multiplicación con arbitrarios sumandos.

3.1 Una línea.

En primer lugar, debemos establecer cómo disponer adecuadamente una concatenación de segmentos. Dada una operación $\sum a_i$, tomamos un segmento de longitud $\sum|a_i|$ en el que está marcada la concatenación de cada segmento $|a_i|$. La posición neutral de partida en la que debemos plegar este segmento depende del signo de cada sumando: en concreto, si $a_i>0$ entonces a_{i+1} deberá ser perpendicular en sentido positivo con a_i, mientras que si $a_i<0$ entonces a_{i+1} deberá ser perpendicular en sentido negativo con a_i. Por tanto, al hacer efectivo el doblado, los segmentos con signo positivo quedarían desplegados mientras que los segmentos con signo negativo quedarían plegados sobre el segmento precedente. En la figura se muestran diferentes ejemplos:

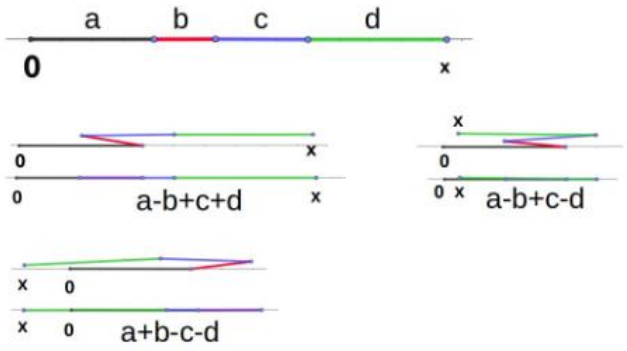


Imagen 2. Algunos ejemplos de configuraciones de segmentos que representan sumas y restas.

3.2 El rectángulo de papel.

Basados en el punto anterior, podemos representar la multiplicación $(\sum a_i)\cdot(\sum b_j)$ en un rectángulo de papel de dimensiones $\sum|a_i|$ y $\sum|b_j|$. Según el caso uno-dimensional, realizamos el plegado según uno de los márgenes del papel y después el plegado según el otro.

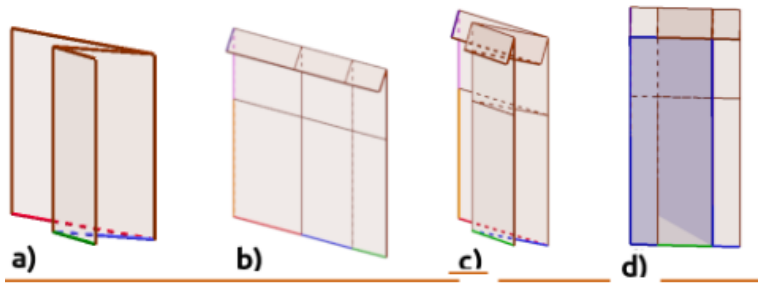


Imagen 3. Pasos de doblado para obtener la representación de una multiplicación.

El área delimitada por la posición final de los márgenes del rectángulo inicial es la que representa el producto planteado. Finalmente, cabe remarcar que, al fijar una orientación inicial del papel, el signo del resultado queda reflejado en si éste área tiene la misma orientación o el área resultante queda en la posición opuesta.

Referencias

Blasco, F. y Sánchez, Á. (en progreso). *Algebraic identities folding a paper.*

Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, NY.

Byrne, O. (1847). *The Elements of Euclid.* Coloured edition by Nicholas Rougeux https://www.c82.net/euclid/

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs Without Words.* Mathematical Association of America, USA.

Plofker, K. (2007). *Mathematics in India. The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam*, 87–186. Princeton University Press, USA.

Row, T. S. (1966). *Geometric Exercices in Paper Folding.* Dover Publications. New York.

Rufus, I. (1975). *Two Mathematical Papers without Words.* Mathematics Magazine, Mathematical Association of America, vol. 48, no. 4, 198–198.

CoP013 Pensar antes de calcular, antes de actuar… y volver a pensar después

Xavier Vilella Miró
xvilella@xtec.cat
Grup Vilatzara – ICE-Universitat Autònoma de Barcelona

Núcleo temático: Procesos, evaluación, formación del profesorado

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

Un alumno, en primero de la ESO, le dice al profesor: “Profe, por favor, no me hagas pensar… ¡Ponme divisiones!” Buena parte del alumnado llega a secundaria sin el hábito de pensar antes de calcular, antes de actuar. Se lanza a realizar cálculos que pueden no ser los más eficientes o, simplemente, ser erróneos. Peor aún: confían en que un resultado exacto y sin errores operacionales es garantía de acierto en la respuesta a un problema, por lo que considera innecesario pensar después de calcular. Algo parecido ocurre cuando comprende a medias el enunciado de un problema, pero *le suena*, y actúa sin pensar, confiando en una intuición que a menudo le traiciona. Así pues, durante la primaria debemos insistir una y otra vez en plantear actividades que exijan pensar antes y después de calcular, para crear en el alumnado la costumbre de comprender la situación, analizarla y decidir el camino más eficiente y las herramientas matemáticas más adecuadas para afrontarla. Y durante la ESO continuar perseverando en esa dirección, cuando enseñamos álgebra o continuamos con el cálculo. En esta comunicación mostraré ejemplos de este problema y algunas propuestas de solución.

Palabras clave: Pensar, Calcular, Actuar, Reflexión, Análisis

Mason (2002) afirma: “El foco en obtener la respuesta correcta guía a los profesores de todo el mundo a presionar, tratando de entrenar estudiantes en cómo hacer cálculos”

Ejemplo 1

Un aula de 1º de la ESO. Sesión de matemáticas, de las primeras del curso.

Profesor: “bien, ¿estáis a punto?”

Alumnos: “Sí”

P: “Resta 199 de 206”

Y 23 alumnos de 28 se ponen a restar utilizando papel y lápiz, casi todos ellos realizan *restas llevando*.

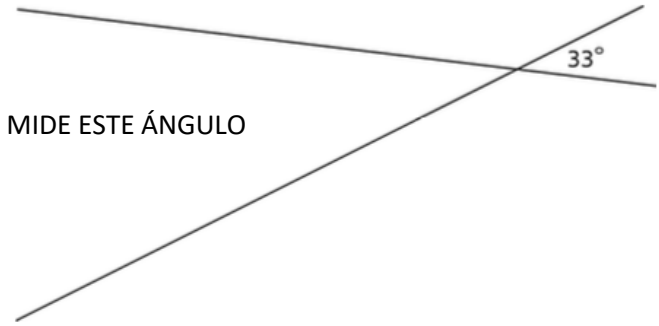
El profesorado de primaria debería saber que buena parte de su alumnado no piensa **antes** de calcular: si lo hiciera, se daría cuenta de que puede resolver la operación mentalmente y ahorrarse *restar llevando*. Por descomposición, es una operación bien sencilla y rápida.

Lo mismo ocurre cuando pedimos que calculen el 20% de 250. Acostumbrados como están a calcular sin plantearse qué tipo de operación más les conviene, muchos alumnos/as se lanzan a aplicar un algoritmo que habitualmente no entienden, pero que funciona. Lo aprendieron con gran esfuerzo, y se acostumbraron a usarlo en todas las situaciones. Es evidente que aquí el cálculo mental es mucho más eficiente: el 10% es 25, el 20%, el doble, 50.

De hecho, en primaria el alumnado debería estar habituado a pensar antes de calcular. Disponemos del cálculo mental, del cálculo estimativo, del cálculo de papel y lápiz, del cálculo aproximado, del cálculo con calculadora… Ante la necesidad de calcular, lo primero que deberíamos hacer es pensar, ¿qué tipo de cálculo es el más eficiente en este caso?

Ejemplo 2

Un aula de 5º de primaria. Sesión de matemáticas, 2º trimestre.

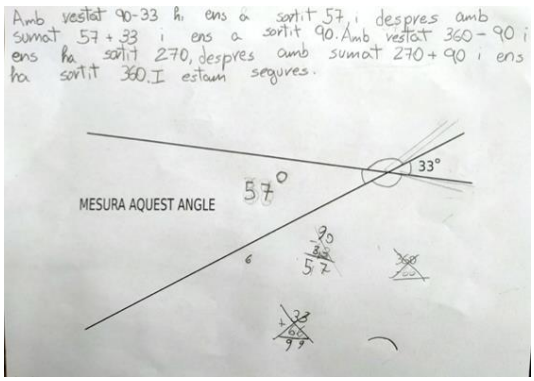


De la tarea presentada por Joan Francesc Arbona Colom, tutor de 5º de primaria, en el curso impartido por Xavier Vilella sobre enriquecimiento de actividades competencialmente pobres realizado en la escuela Sant Vicenç de Paül de Sóller (Mallorca).

Se les pide que no utilicen el semicírculo graduado. Se les ha enseñado en el 2º ciclo el concepto de ángulo y cómo medirlo, han usado el semicírculo graduado, han realizado operaciones con unidades como el grado, minuto y segundo de ángulo. El maestro quiere comprobar lo que realmente han aprendido sobre el concepto de ángulo y les plantea esta situación. Les tiende una *trampa*: uno de los ángulos, el que queda a la izquierda, parece mucho mayor por la longitud de los *segmentos* que aparentemente lo limitan.

Algunas respuestas seleccionadas:

Respuesta 1

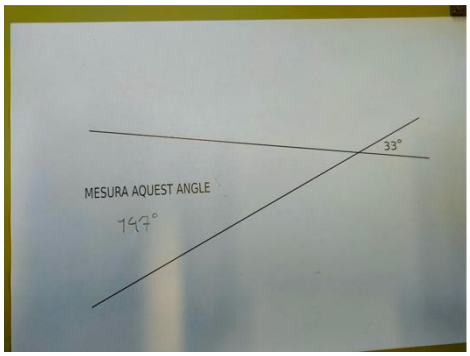


“Hemos restado 90 – 33 i nos ha salido 57, después hemos sumado 57 + 33 y nos ha salido 90. Hemos restado 360 – 90 y nos ha salido 270, después hemos sumado 270 + 90 y nos ha salido 360. Y estamos seguras”

La última frase es rotunda: la seguridad les viene de que las operaciones realizadas dan los 360º esperados. Confianza absoluta en el cálculo, en las operaciones.

Curioso el bucle inicial, restando 33 a 90 para seguidamente sumar 33 a 57, obteniendo los 90º iniciales. Y repiten un bucle restando 90 y sumando 90 para obtener los 360 de partida. ¿Para qué pensar antes de calcular? ¿Para qué pensar después de calcular?

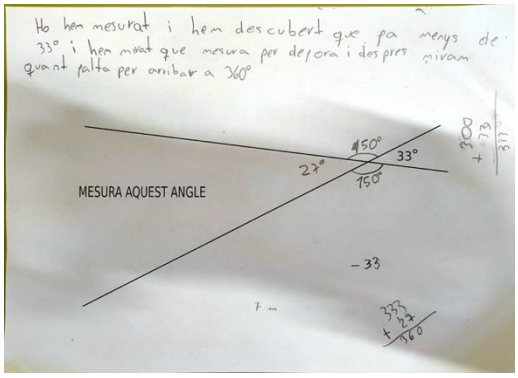
Respuesta 2



En este caso, se conforman con hacer una resta: 180 – 33 = 147. Por lo tanto, han partido del supuesto de que el ángulo *grande* debe de ser mucho mayor que el *pequeño*, y de una propiedad que conocen, los 180º del ángulo plano. El primer error tiene relación con la incomprensión del concepto de ángulo; el segundo, con las propiedades de los ángulos. Pero el hecho de que la operación les ofrezca un resultado exacto (aunque sea completamente disparatado) indica hasta qué punto confían en el cálculo. No necesitan pensar DESPUÉS de calcular, dado que un cálculo correcto asegura la certeza de la solución.

Respuesta 3

“Lo hemos medido y hemos descubierto que mide menos de 33º y hemos mirado qué mide por fuera y después cuánto falta para 360º “



Afirman que lo han medido y que debe ser menor que 33º. Evidentemente, la técnica usada para medir el ángulo desconocido, aun pudiendo ser útil, tiene poca precisión. Por otro lado, no caen en la trampa que ha preparado el maestro, puesto que afirman que mide menos que su opuesto por el vértice, "aunque tiene los lados más largos".

Las únicas operaciones que aparecen en la hoja de respuesta son:

300 + 33 = 333

333 + 27 = 360

La razón de que consideren que los opuestos por el vértice mayores miden 150º, no la explican. Lo que es seguro es que no han partido de los 180º del ángulo plano para restarle los 33 del ángulo conocido, puesto que el resultado no es 150.

Llama la atención que se den perfecta cuenta de que hay dos ángulos opuestos por el vértice que miden lo mismo, y que no lo apliquen a los otros dos ángulos que, hasta cierto punto, es lo que podríamos esperar. Pero la medida (errónea) del ángulo de 150º pasa por delante de una propiedad que podría intuirse observando la imagen… siempre que tengas claro el concepto de ángulo, claro está.

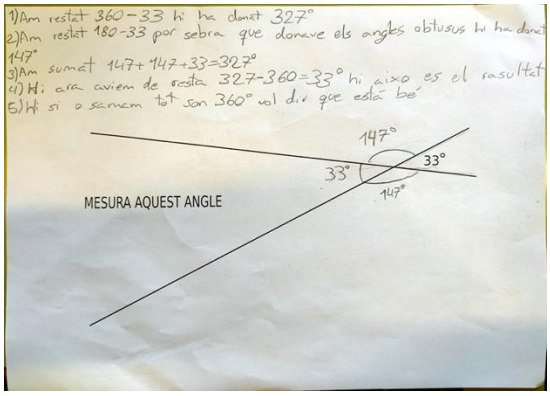
Nuevamente, un cálculo exacto (la suma de los 4 ángulos da 360º) les da seguridad y dan el problema por resuelto. No hace falta pensar **después** de calcular.

Dos de las conclusiones a las que llega el maestro, Joan Francesc, son las siguientes:

- "He notado que muchos alumnos dependen demasiado del cálculo y confían antes en el cálculo que en la observación directa del problema"
- "Se ha de potenciar primero la observación y el análisis crítico"

No puedo estar más de acuerdo con Joan Francesc. Así como las fórmulas son un punto de llegada y nunca de partida, los cálculos deberían ser siempre el paso siguiente a la reflexión inicial basada en la comprensión y el análisis de la situación planteada.

También hubo respuestas correctas (con algún detalle por corregir), como la siguiente:



"Hemos restado 360 - 33 y ha dado 327º. Hemos restado 180 – 33 para saber qué daban los ángulos obtusos y ha dado 147º. Hemos sumado 147 + 147 + 33 = 327º. Y ahora teníamos que restar *327 – 360 = 33º* y este es el resultado. Y si lo sumamos todo son 360º quiere decir que está bien"

Cómo podemos mejorar

Las dos conclusiones de Joan Francesc ya nos dan pistas para la mejora del aprendizaje de nuestro alumnado: por un lado, comprensión del enunciado, análisis de la situación y reflexión de las herramientas disponibles para afrontarla; por otro, seguir una secuencia de aprendizaje que parta de la observación y el análisis crítico para llegar al final al modelo que usamos para resolver el problema.

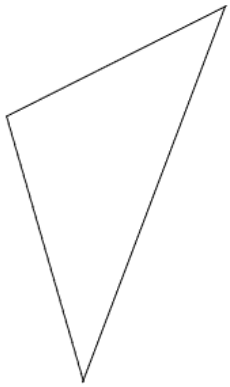
Si deseamos que se vaya implantando la costumbre de pensar antes de calcular, conviene plantear actividades que no permitan calcular sin pasar primero por la reflexión. Seguidamente, presento algunos ejemplos de ello.

Ejemplo 1:

Si se pide al alumnado que calcule el área de un triángulo de 20 cm de base y 15 cm de altura, todos se lanzan a aplicar la fórmula del área del triángulo. Al fin y al cabo, este es un ejercicio competencialmente pobre que no requiere de mucha reflexión.

En nuestras investigaciones (con Manuel Sol Puig y con el Grup Vilatzara) hemos recogido y analizado multitud de respuestas de varias generaciones de alumnos de 1º de la ESO que han dado como resultado que el 93% de alumnos lo resuelven correctamente.

El mismo día, justo al acabar el ejercicio anterior, se les pide que respondan a otro: Calcula el área de **este** triángulo:

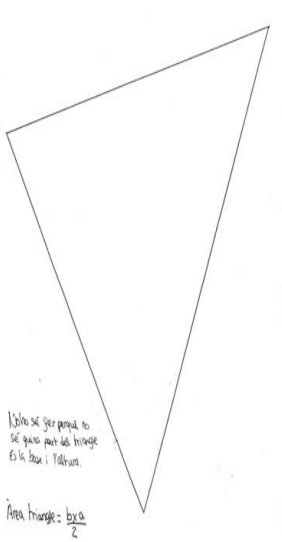


El ejercicio pobre de cálculo de área se ha transformado en un reto dado que no se facilitan las medidas necesarias para aplicar la fórmula, pero, en cambio, se muestra un verdadero triángulo en una posición, eso sí, nada habitual en libros de texto y en pizarras de aula. Lo que era un simple ejercicio de aplicación de una fórmula, con el que poca competencia matemática vamos a desarrollar, se convierte ahora en un problema, un desafío que pondrá a prueba lo que han aprendido respecto del triángulo, de sus características, del concepto de base y de altura, y sobre la medida de longitudes. Finalmente, aplicarán la misma fórmula que el ejercicio anterior. Por otro lado, quizás (así ocurre con frecuencia en cursos medios de primaria) algunas alumnas/os intentaran otras maneras de encontrar el área del triángulo (como cuadricular).

Pues bien, en este caso la estadística de las respuestas nos da el siguiente resultado: 22,5 % de respuestas correctas. El ejercicio, un 91,6 % de respuestas correctas, el problema, un 22,5 %. Quienes responden a este problema son los mismos y las mismas que acaban de responder al ejercicio anterior. El mismo día, a la misma hora. ¿Qué conclusiones podemos sacar?

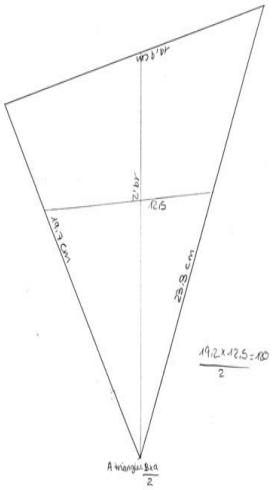
Algunas hojas de respuesta de alumnos evidencian hasta qué punto se les ha acostumbrado a calcular sin pensar. No solamente cuando se trata de realizar una operación aritmética, sino también cuando han de aplicar fórmulas. Seguramente este hecho esté relacionado con la manera como se enseñan las mismas fórmulas, puesto que solamente la comprensión de éstas permite que se reflexione antes de su uso.

Por otro lado, este tipo de problemas ponen a prueba lo que se ha aprendido, como los conceptos de base y de altura, que ponen de relieve algunos cambios necesarios en la enseñanza de dichos conceptos (como la posición del triángulo cuando lo representamos, o la confusión entre verticalidad y perpendicularidad).

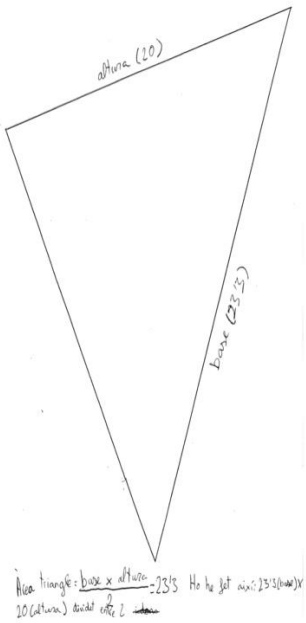


"No lo sé hacer porque no sé qué parte del triángulo es la base y la altura"

Aquí sí que esta alumna ha reflexionado antes de actuar, y llega a una conclusión correcta: no es capaz de identificar una base y una altura del triángulo. Al menos conoce lo que no sabe… por lo que no será difícil enmendar estos errores.



En este caso podemos observar un hecho más preocupante: este alumno lo único que quiere es responder como sea al problema, aunque sea *inventando* una base y una altura inexistentes. Se las inventa puesto que no las sabe encontrar. No hay reflexión previa ni asume sus carencias, porque será mucho más complicado reconstruir lo que no comprendió en su momento.



Una muestra más del salto al cálculo usando la fórmula correcta, pero sin pensar en lo que realmente es una base y una altura del triángulo. Y reafirma la seguridad de su acierto explicando: “Lo he hecho así: 23,3 (base) x 20 (altura) dividido entre 2”,

como si realizar las operaciones indicadas en la fórmula en el orden correcto asegurara la solución correcta al problema.

Ejemplo 2.

El ejercicio pobre, desde el punto de vista del desarrollo competencial que provoca, es el siguiente: ¿Cuántas veces ha latido el corazón de una persona de 80 años, en toda su vida, si suponemos una media de 72 latidos por minuto?

Este ejercicio solamente exige, para llegar a una solución, que se conozcan las equivalencias de unidades de tiempo implicadas (hora, mes, año) y realizar algunas multiplicaciones.

La actividad enriquecida quedó así:

¿Cuántas veces late el corazón de una persona en toda su vida?

Al eliminar los datos numéricos necesarios para el cálculo, al alumnado no le queda otro remedio que reflexionar para establecer una estrategia para resolver el problema. En este camino de reflexión-acción se verá obligado a tomar decisiones (¿cuántos años consideramos que vive una persona?, ¿cómo contamos los latidos del corazón?, etc.) y, al trabajar en equipo, será necesario compartir opiniones argumentadas y llegar a consensos para poder, finalmente, calcular.

Pero finalizado el cálculo no termina la reflexión, dado que en la puesta en común de los resultados de todos los equipos se constata que no coinciden en absoluto. Para continuar con la riqueza de la actividad, el profesor/a debe permitir el debate entre iguales, para que resuelvan cuál de los resultados es el *correcto* (eso es lo primero que esperan que les diga la profesora/r, ejerciendo de *juez*). Este debate aporta argumentos de diversos tipos, y no les resulta nada fácil comprender que sus diferencias dependen de las decisiones que tomaron en su equipo en relación con la edad considerada y los latidos contados. Aún entonces, deben seguir afrontando la situación: “Y… ¿qué resultado debemos dar por bueno?” En este momento el profesor/a puede decidir, si lo desea y lo considera oportuno, entrar en el terreno de la estadística, que es lo que se hace en muchos casos en los que los resultados

experimentales dan cantidades no coincidentes (que son la gran mayoría), y conllevan decisiones como tomar la media aritmética u otros parámetros.

Este enriquecimiento permite desarrollar otros aspectos competenciales, no solamente el Razonamiento y la prueba, la Comunicación y la Resolución de problemas, puesto que al aparecer conexiones con otros bloques de contenido matemático y con otras asignaturas, el profesor/a decide cómo aprovecharlas. Incluso podría convertirse en la semilla de un proyecto STEM.

Pensar el álgebra en secundaria

En secundaria, podríamos reconocer un cierto paralelismo con el problema de calcular sin pensar si consideramos que el razonamiento algebraico (Godino y otros, 2012) es mucho más que el manejo de expresiones algebraicas. Muy a menudo se presiona al alumnado para que calcule, y que lo haga rápido (Mason, 2010, otra vez). Existen multitud de ejemplos que muestran cómo es de habitual este error en la enseñanza del álgebra y en el desarrollo del razonamiento algebraico.

Ejemplo 1

De un libro de texto de la ESO:

“En una fiesta hay un número determinado de personas. Llegan a ella 26 personas más, y ahora hay el triple de las que había en el inicio. ¿Cuántas personas había al comenzar la fiesta?”

Podemos suponer que quien ha preparado este enunciado pretende que el alumno/a plantee una ecuación de primer grado y la resuelva. Pero, si antes de actuar, pensamos en la situación descrita – por cierto, muy desacertada: ¿quién asiste a una fiesta y se queda en la puerta contando los que llegan después? ¿Y cómo sabe que hay el triple que al inicio si esa es justamente la incógnita? - resulta claro que se puede resolver con un simple cálculo mental: 26 son dos tercios, un tercio es la mitad, 13, y ya tenemos la solución. Así, pues, ¿para qué utilizar la maravillosa herramienta del álgebra ineficientemente? Si queremos que avance el

pensamiento algebraico de nuestro alumnado, tendremos que proponer situaciones que lo merezcan.

Para afrontar el problema del que hablan Godino y Mason, un camino de solución creemos que vuelve a ser que las propuestas que propongamos en el aula sean ricas desde el punto de vista competencial, especialmente respecto a la dimensión de Razonamiento y prueba.

Ejemplo 2

$$\mathbf{3\,x + 5 = 2 \cdot (x - 8)}$$

a) Explica por qué x **no puede ser** un número entre 0 y 8

b) ¿Por qué x no puede ser 9?

c) Mira lo que pasa cuando x vale 9 y cuando x vale 10 en cada *lado*. Explica por qué es seguro que x no puede ser un número mayor que 9

d) Explica ahora por qué x **ha de ser** un número negativo

Algunas respuestas:

“Porque a un lado da números positivos y al otro da negativo **y además** da números diferentes”

“Que los dos números están muy lejos, por un *lado* da 32 y en el otro da -7, por tanto no puede ser mayor que 9 porque se alejan mucho”

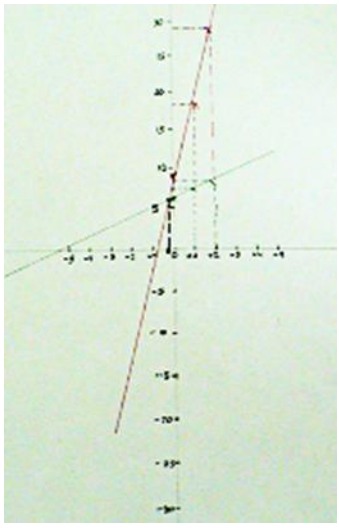
“**x** tiene que ser un número negativo pequeño porque en un lado se multiplica por 3 y en el otro por 2”

Este tipo de propuestas provoca que se piense antes de actuar, de calcular: antes de resolver la ecuación pensamos usando la lógica aplicada a este tipo de igualdades condicionadas. Damos valor a lo que es una igualdad en el álgebra.

Además, conducimos al alumnado a analizar las expresiones antes de aplicar la mecánica de aislamiento de la **x,** incluso a acotar el resultado **antes** de calcularlo, lo

que le permitirá darse cuenta de un posible error de cálculo: pensar **después** de calcular.

Asimismo, este camino de acotación da sentido a la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de igualación, dado que mediante el tanteo inteligente lo que estamos haciendo es buscar el valor de x que satisface tanto un miembro de la igualdad (1ª ecuación) como el otro miembro de la igualdad (2ª ecuación) y, representando gráficamente los distintos resultados de cada miembro para cada valor que probamos, nos dará el punto de intersección de las dos rectas que representan las dos ecuaciones.



Las publicaciones del Grup Vilatzara y sus aportaciones a las diversas JAEM (Sol y Vilella, 2005; Vilella, Sol, Comellas, 2009) muestran algunas propuestas en este sentido.

Referencias

Albarracín, L.; Badillo, E.; Giménez, J.; Vanegas, Y.; Vilella, X. (2018): Aprender a enseñar matemáticas en la educación primaria. Síntesis, Madrid.

Godino, J. D.; Castro, W. F.; Aké, L.; Wilhelmi, M. R. (2012): Naturaleza del razonamiento algebraico elemental https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200005

Mason, J. (2002): Researching Your Own Practice: The Discipline of Noticing. Londres: Routledge Falmer.

Sol, M.; Vilella, X. (2005): Los íberos, las pizzas y los refrescos: el álgebra, más allá de las ecuaciones. Actas de las JAEM de Albacete. Servicio de publicaciones de la FESPM.

Sol, M.; Vilella, X.; Comellas, J. (2009): ¿Álgebra sin incógnitas? Una introducción competencial al álgebra. Taller. Actas de las XIV JAEM. Girona. Servicio de publicaciones de la FESPM.

Vilella, X. (2010): Enriquecimiento competencial de tareas matemáticas: una vía de transición a la interdisciplinariedad. Actas de las XIV JAEM. Girona. Servicio de publicaciones de la FESPM.

Vilella, X.; Sol, M.; Comellas, J. (2009): Álgebra en contexto. Comunicación. Actas de las XIV JAEM. Girona. Servicio de publicaciones de la FESPM.

CoP018 El potencial de los ejemplos genéricos para desarrollar demostraciones en la Educación Secundaria

Georgina Cerqueda Santacreu
gcerqueda@uda.ad
Universitat d'Andorra
Yolanda Colom Torrens
ycolom@uda.ad
Universitat d'Andorra
Jordi Deulofeu Piquet
jordi.deulofeu@uab.cat
Universitat Autònoma de Barcelona

Núcleo temático: Procesos / Inclusión

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

La demostración tiene que tener un papel fundamental en todos los cursos de la educación matemática y los ejemplos genéricos tienen potencial para ser una herramienta que facilite su comprensión y producción. En esta comunicación presentamos la fase previa de un proyecto de investigación cuyo objetivo es analizar la influencia de los ejemplos genéricos en la capacidad de los alumnos de secundaria para demostrar propiedades numéricas. Se ha realizado la prueba piloto del cuestionario inicial de la investigación, con la finalidad de evaluar el nivel de demostración de los alumnos y determinar qué tipos de razonamiento ofrecen más generalidad, explicación y convicción. Hemos observado que ningún alumno es capaz de generar una demostración general completa, produciendo la mayoría de ellos verificaciones empíricas. Las demostraciones genéricas són, en general, explicativas para los alumnos, pero influye el modo de representación, prefiriendo los alumnos aquellas que incluyen un razonamiento visual.

Palabras clave: Demostración, Ejemplos Genéricos, Razonamiento Matemático

Introducción

La demostración es un elemento clave en las matemáticas y desarrollar el concepto de demostración también tiene que ser una parte fundamental de la educación matemática (Mariotti, 2006). De hecho, los documentos de políticas educativas o los

referentes educativos internacionales, como los *Principios y Estándares para la Educación Matemàtica* (NCTM, 2000), reclaman un papel más importante de la demostración en los planes de estudio y defienden que las actividades de razonamiento y demostración deben ser una parte natural de las clases de matemáticas, desde los primeros cursos de la educación primaria hasta bachiller, y deben incluirse en todos los bloques de contenidos (A. J. Stylianides et al., 2016). Aun así, hay una diferencia entre la aceptación a nivel teórico de esta importancia y la aplicación de las recomendaciones, siendo muy marginal el papel de las demostraciones en la práctica educativa de las clases de matemáticas. Además, los estudios realizados muestran que los alumnos de todos los niveles tienen dificultades para entender el concepto de prueba matemática y realizar demostraciones (G. J. Stylianides et al., 2017).

1. La demostración en la educación secundaria

1.1. Una definición de demostración para la matemática escolar

Hay evidencias de que la concepción del significado de demostración que tienen los profesores influye en el modo en que lo aplican en sus clases. En concreto, una concepción formal y rigurosa del término implica creer que la demostración sólo es apropiada para los grados educativos superiores. Cambiar esta concepción de la demostración y considerarla apropiada para todos los alumnos es uno de los retos de los profesores de matemáticas en educación secundaria (Knuth, 2002b). Para A. J. Stylianides (2007), encontrar una definición adecuada a la educación elemental puede ayudar a cambiar las creencias de los profesores, promoviendo así las actividades de demostración en todos los cursos y diseñando programas más coherentes que la trabajen de manera gradual.

Con este objetivo, A.J. Stylanides (2007, pág 291) define demostración como un argumento matemático (es decir, una secuencia conectada de afirmaciones a favor o en contra de un enunciado matemático) con las siguientes propiedades:

1. Utiliza propiedades aceptadas por la comunidad de la clase que son ciertas y no necesitan justificación;

2. Utiliza métodos de razonamiento que son válidos y conocidos (o dentro de su alcance) en la comunidad de la clase;

3. Se comunica con formas de expresión o representación que son apropiadas y conocidas (o dentro de su alcance) por la comunidad de la clase.

El término comunidad de la clase se refiere a los estudiantes. Los elementos que se consideran conocidos por la comunidad hacen referencia a aquellos que se pueden suponer adquiridos y comprendidos en base a las experiencias previas de clase y no a los conocimientos de cada alumno en concreto. El requerimiento de las propiedades, los métodos de razonamiento y los modos de representación de ser aceptados y conocidos por la comunidad de la clase dota a la definición de la flexibilidad suficiente para ser consistente durante todos los cursos educativos. Es decir, un razonamiento puede ser calificado como demostración en un curso y no en otro pero se mantiene la coherencia en la definición de demostración. Además, la definición que propone A. J. Stylianides también tiene en cuenta el punto de vista de la disciplina matemática en cuanto a la validez de las formas de razonamiento y las propiedades utilizadas para calificar un argumento como demostración. El profesor es el que actúa como representante de la comunidad matemática, ayudando a los alumnos a diferenciar cuales son los métodos, razonamientos o representaciones válidos.

1.1.2 Las funciones de la demostración en la matemática escolar

Además de la definición de demostración que se tenga en cuenta, otro de los factores clave para realizar actividades de demostración en el aula es la función que se le otorga. De hecho, definir el rol que tiene la demostración en la matemática educativa es una función fundamental de los docentes para mejorar su uso en las clases (Hanna, 2000).

La función principal de la demostración en las matemáticas académicas ha sido tradicionalmente la de verificación de la certeza de un enunciado: la validez de la una afirmación no está clara hasta que está demostrada. Aun así, el rango de

funciones de la demostración es mucho más amplio y, en particular, se espera también que la demostración sea clarificadora y explique los motivos por los cuales la propiedad es cierta. Algunas de las funciones de la demostración son la verificación, la explicación, la sistematización, el descubrimiento de nuevos resultados, la comunicación y transmisión de conocimiento matemático, la construcción una teoría empírica, la exploración de los significados de una definición y de las consecuencias de las suposiciones (Hanna, 2000).

En el contexto escolar, se ha observado que en las prácticas de la mayoría de los profesores la verificación es el único rol de la demostración que se presenta. Aun así, los estudiantes experimentan esta función de verificación de una manera muy superficial, ya que en muchas de las actividades se les pide de demostrar propiedades intuitivas o presentadas por el profesor de las cuales no dudan de su certeza (Knuth, 2002a). De hecho, la mayoría de los alumnos se convencen de la certeza de una propiedad sin necesidad de producir una demostración, solo con la verificación empírica con casos concretos (Reid y Knipping, 2010).

Desde la perspectiva didáctica, la función de explicación, es decir, de transmitir las ideas por las cuales la propiedad es cierta, es la más relevante en la matemática escolar, ya que esta función es la que permite profundizar en la comprensión de los conceptos de manera que mejore el aprendizaje de los alumnos (Hanna, 2000; Rocha, 2019). Para Hanna (2000), la cuestión fundamental que ha de responder la demostración es “por qué?”. De manera similar, las recomendaciones del NCTM (NCTM, 2000) proponen que el objetivo de las demostraciones sea responder a la pregunta “por qué esto funciona?” en lugar de “esto funciona siempre?”. Aceptando que el propósito clave de la demostración es la explicación, los métodos de razonamiento o de representación se podrán ajustar al nivel y contexto del grupo, reduciendo el formalismo, si esto puede facilitar la comprensión de las ideas matemáticas subyacentes (Hanna y Jahnke, 1996).

1.2 Niveles y esquemas de demostración

Knuth, Choppin y Bieda (2010) definen tres niveles para mostrar la progresión del desarrollo de la capacidad de los alumnos para producir una demostración. En el

nivel 0, los alumnos ignoran la necesidad de una demostración. En el nivel 1, ven está necesidad pero su argumento no es general. Este nivel se subdivide en tres niveles, según el uso que les dan a los ejemplos. En el nivel dos, los alumnos intentan producir un argumento general, pero su argumento no es completo o correcto. Finalmente, en el nivel 3 los alumnos producen un argumento general, aunque pueda faltar formalismo o rigor. En la imagen 1 se detallan estos niveles y subniveles.

Imagen 1. Niveles de demostración (Knuth, Choppin y Bieda, 2010)

2. Ejemplos genéricos

Uno de los primeros usos del término *ejemplo genérico* lo encontramos en (Mason y Pimm, 1984), que lo definen como “el ejemplo genérico es un ejemplo, pero está presentado de manera que destaca su rol como portador de generalidad. Esto se hace acentuando o ignorando características clave, intentando estructurar la percepción” (pág. 287). Para ellos, la demostración genérica es aquella que utiliza un ejemplo genérico y “aunque se dé en términos de un número particular, no recae en ninguna propiedad específica de este número” (Mason y Pimm, 1984, pág. 284). Es decir, usar un número específico como ejemplo genérico implica que solo se utilizan las características que son generales a la clase que representa y no en aquellas que son concretas del ejemplo. Para Balacheff (1988), el ejemplo genérico forma parte de los esquemas de justificación pragmáticos y la justificación se basa en operaciones o transformaciones que se realizan sobre un ejemplo que se

selecciona como representante característico de la clase e implica hacer explícitas las razones por las cuales la propiedad es cierta. De la misma manera, Rowland (1998) distingue entre el razonamiento empírico, que sirve para presentar un caso concreto, y el ejemplo genérico, que proporciona información del motivo por el cual la proposición es cierta para cualquier ejemplo. La característica del ejemplo es el modo en que se ha presentado la verificación y no el hecho de haber verificado la propiedad.

Podemos definir el ejemplo genérico como el razonamiento que se realiza sobre un ejemplo concreto que se puede reproducir sobre cualquier otro ejemplo de la clase. Se muestran a continuación dos ejemplos genéricos utilizados para demostrar propiedades numéricas elementales. En el primer ejemplo (imagen 2) se demuestra que la suma de un número y su cuadrado es siempre un número par.

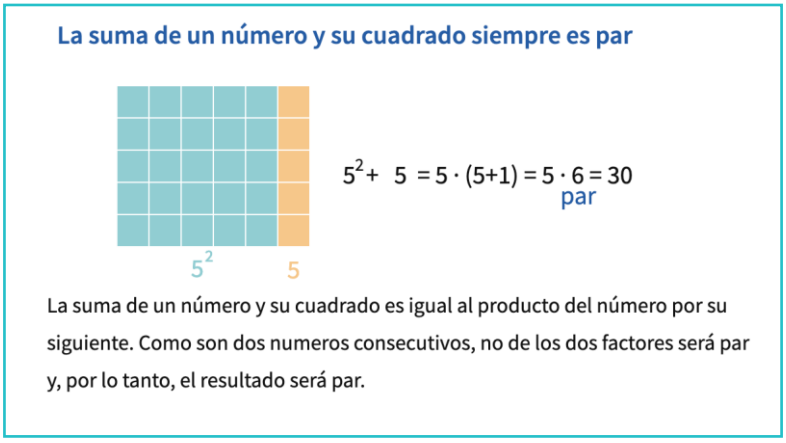


Imagen 2. Ejemplo de demostración genérica - Fuente: Elaboración propia

En el segundo ejemplo (imagen 3) se demuestra que los cuadrados perfectos tienen un número impar de factores.

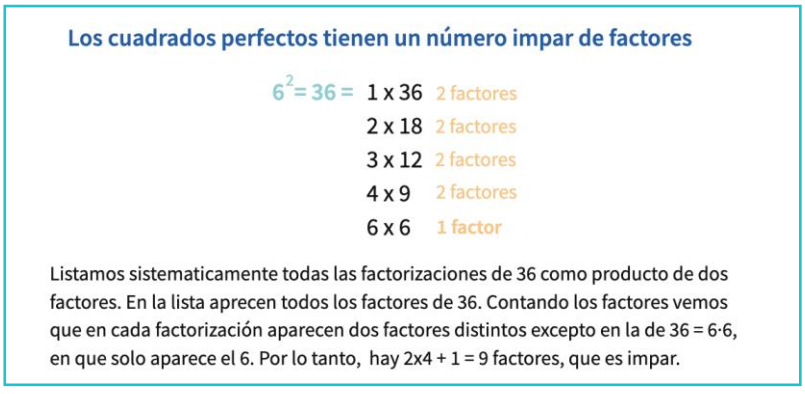


Imagen 3. Ejemplo de demostración genérica - Fuente: Elaboración propia

2.1 ¿Los ejemplos genéricos son demostraciones?

Aunque algunos autores utilizan el término demostración genérica, no hay un criterio bien definido para determinar si un razonamiento que utiliza un ejemplo genérico puede ser calificado como demostración. Según Rowland (1998) los ejemplos genéricos sí que pueden ser considerados como demostración en un contexto escolar, sobre todo en términos de su poder de explicación y convicción, ya que si que muestran generalidad.

Las principales diferencias de criterio dependen de la cantidad de detalles y explicaciones que se necesitan para justificar que un razonamiento aplicado sobre un ejemplo genérico también funcionará con cualquier otro ejemplo. En general, el rigor necesario para aceptar una demostración genérica como demostración dependerá de la comunidad en que se realice y de la intención que tenga el redactor de la demostración, más que por la naturaleza matemática específica del ejemplo genérico (Dogan y Williams-Pierce, 2021)

Reid y Vallejo (2018) establecen unos criterios para aceptar o no una demostración genérica, basándose en un factores sociales y psicológicos. El primer criterio que establecen es la necesidad de producir más ejemplos, puesto que un ejemplo genérico establece un modelo que permite encontrar infinitos ejemplos más y, por lo tanto, elimina la necesidad de producirlos. El segundo criterio es que el ejemplo genérico ha de satisfacer la función explicativa de las demostraciones, es decir, mostrar los motivos por los cuales la propiedad es cierta. En el trabajo escrito, los autores sugieren que para determinar si el alumno ha producido una demostración usando el ejemplo genérico, esta tiene que incluir evidencia de consciencia de generalidad y evidencia de razonamiento matemático. Es decir, se tiene que poder observar que el alumno es consciente de que su argumento es suficientemente general como para ser válido en todos los casos y el profesor debe poder asegurar de que no está usando este ejemplo como evidencia empírica. Además, el ejemplo genérico debe mostrar las razones matemáticas que permiten que la estructura utilizada se pueda extrapolar a cualquier otro ejemplo obteniendo la misma conclusión. Estas evidencias pueden ser mostradas a partir de textos escritos u

otras representaciones que acompañen los ejemplos. Reid y Vallejo (2018) defienden que los profesores y alumnos deben conocer las evidencias que se deben incluir, teniendo así claro que se espera de ellos en el momento de producir la demostración.

2.2 Los ejemplos genéricos como herramienta pedagógica

Varios autores han señalado la importancia de trabajar con ejemplos genéricos y consideran que son una herramienta potente para trabajar la demostración en cualquier nivel (Rowland, 1998; Dreyfus et al. 2012; Reid y Vallejo Vargas, 2018). Por ejemplo, para Leron y Zaslavsky (2014), la demostración genérica puede ayudar al alumno a entender y producir demostraciones, ya que permite a alumnos de todos los niveles acceder a las ideas principales de la demostración, evitando las dificultades que suponen el formalismo, el simbolismo y la generalización total. El ejemplo genérico muestra la estructura que permite reproducir el razonamiento en otro ejemplo de modo que las ideas que aparecen sobre el ejemplo son las necesarias para construir una demostración formal. Es decir, el ejemplo genérico permite eliminar el formalismo y la abstracción, facilitando la observación de la estructura y del razonamiento matemático, lo que dota a los ejemplos genéricos de potencial para facilitar la transición entre los razonamientos empíricos y las demostraciones generales (Leron y Zaslavsky, 2014; Reid y Vallejo Vargas, 2018; Dogan y Willams-Pierce, 2021).

Aunque son varios los artículos teóricos que defienden el uso de los ejemplos genéricos en los distintos niveles educativos, en concreto en la educación secundaria obligatoria, y su potencial para mejorar la comprensión de las demostraciones, se han realizado pocos estudios que ofrezcan datos para evaluar su impacto (Dogan y Williams-Pierce, 2021).

3. Estudio realizado

La experiencia que se describe en este trabajo es la primera fase de un proyecto de investigación que pretende analizar la influencia de los ejemplos genéricos en la

capacidad de producir demostraciones en el alumnado de educación secundaria obligatoria.

3.1 Prueba piloto

En este trabajo presentamos la prueba piloto, que es la primera fase de nuestra investigación. En esta prueba piloto se ha aplicado el cuestionario de diagnóstico inicial a un grupo heterogéneo de 17 alumnos de segundo de segundo ciclo de Segona Ensenyança de l'Escola Andorrana (equivalente a 4º de ESO). Además, dos alumnas han realizado el cuestionario en una entrevista personalizada para poder determinar el grado de comprensión de los enunciados y analizar y determinar sus razonamientos matemáticos, paralelamente a su trabajo escrito. En la elección de las dos alumnas se tuvo en cuenta dos variables: a) que su nivel de desarrollo de la competencia matemática fuera distinto y b) que en el aula tuvieran una buena disposición para el trabajo y que fueran cooperantes, puesto que se les pedía su colaboración en la mejora de los enunciados.

3.2 Instrumento de evaluación diagnóstica inicial

Para realizar la evaluación inicial hemos diseñado una prueba con la finalidad de determinar la capacidad de los alumnos para producir una demostración, determinar la comprensión y las preferencias de los alumnos respecto a distintos tipos de razonamiento, poder observar si los ejemplos genéricos cumplen en los alumnos las funciones de verificación y explicación que ha de tener una demostración, así como determinar en qué medida los alumnos conocen el concepto de demostración matemática.

En la primera parte, los alumnos realizan la actividad 1, en la que se pide de demostrar una propiedad numérica y que valoren si su razonamiento es general. La propiedad que se pide demostrar en esta actividad es que la suma de un número y su cuadrado siempre es un número par. Con esta actividad pretendemos conocer el nivel de demostración de los alumnos sin tener ninguna referencia previa.

En una segunda parte del cuestionario queremos analizar su percepción y comprensión de demostraciones dadas. Por eso, hemos realizado una segunda

actividad (actividad 2.1) en la que mostramos un ejemplo genérico que demuestra que la suma de cinco números consecutivos siempre es un múltiplo de cinco. Basándonos en el modelo de comprensión de la demostración de Mejia-Ramos et al. (2012), pedimos a los alumnos que expliquen una parte del razonamiento, que valoren la generalidad del mismo y que demuestren una propiedad similar. En esta parte también presentamos dos actividades (actividades 2.2 y 2.3) en las que se muestran distintas "demostraciones" de una misma propiedad. Las propiedades presentadas son, respectivamente, que cualquier número par elevado al cuadrado es divisible por cuatro y que la diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es siempre un número impar. Para cada razonamiento presentado, se pide a los alumnos valorar si entienden el razonamiento, si creen que el razonamiento muestra que la propiedad es cierta para todos los números, si el razonamiento sirve para explicar los motivos por los cuales la propiedad es cierta y si el razonamiento sirve para convencer de la certeza de la propiedad. En concreto, buscamos saber si los alumnos son capaces de distinguir entre el uso empírico de los ejemplos y su uso como ejemplos genéricos. Para finalizar esta parte, pedimos a los alumnos que demuestren una propiedad similar, para saber si son capaces de transmitir las ideas de la demostración a otra demostración, que es uno de los elementos que forman el modelo de comprensión de la demostración (Mejia-Ramos et al., 2012).

Para finalizar la prueba, pedimos a los alumnos que escriban qué creen que significa demostrar en matemáticas, con la finalidad de establecer si los razonamientos que han utilizado corresponden a su concepción de demostración o, si por el contrario, no hayan sido capaces de producir razonamientos que califiquen como demostración aunque entiendan el concepto.

4. Análisis de las respuestas

4.1 Niveles de demostración

Hemos clasificado las respuestas de los alumnos a la actividad 1 en función de los niveles de demostración descritos por Knuth, Choppin y Bieda (2010), como se muestra en la tabla 1.

Otros	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
2 (11,1)	3 (16,7)	7 (38,9)	6 (33,3)	0 (0)

Tabla 1. Alumnos (porcentajes) por nivel de demostración

Vemos que tres alumnos, que representan el 16.7%, se encuentran en el nivel 0, es decir, ignoran la necesidad de una demostración. Además, un alumno ha dejado el ejercicio en blanco y otro ha hecho una verificación empírica que no corresponde al enunciado.

Siete alumnos, que representan el 38.9%, se encuentran en el nivel 1, viendo la necesidad de demostración pero produciendo un argumento que no es general. Entre los alumnos que han producido una demostración de nivel 1, cuatro de ellos se encuentran en el nivel 1.a, considerando suficiente testear algunos casos aleatorios para justificar la propiedad. Tres alumnos realizan una verificación empírica sistemática (nivel 1.b), por ejemplo, verificando todos los números del 1 al 10 y asegurando que esto seguirá sucediendo (imagen 4).

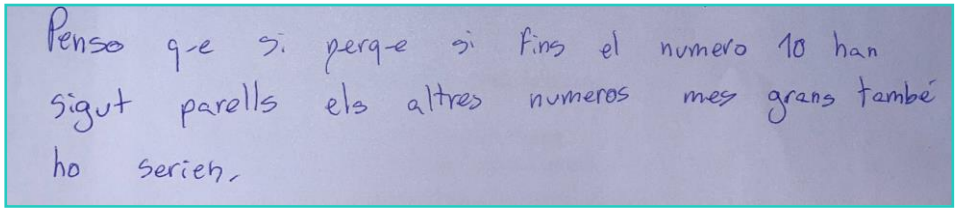


Imagen 4. Justificación de la generalidad en un razonamiento por verificación empírica sistemática producida por un alumno

Por otra parte, seis alumnos, que representan el 33,3%, se encuentran en el nivel 2, intentando producir un argumento general pero su argumento no es completo o correcto. La mayoría de los alumnos que se sitúan en el nivel 2 han intentado producir un argumento general representado narrativamente, sin hacer uso de visualizaciones ni representaciones simbólicas. Además, todos han usado el hecho que un número par al cuadrado es par y un número impar al cuadrado es impar. El nivel de justificación de está propiedad es distinta según los alumnos, encontrando alumnos que la escriben sin necesidad de justificarla y alumnos que realizan una verificación empírica para completar esta parte de la argumentación general (imagen 5).

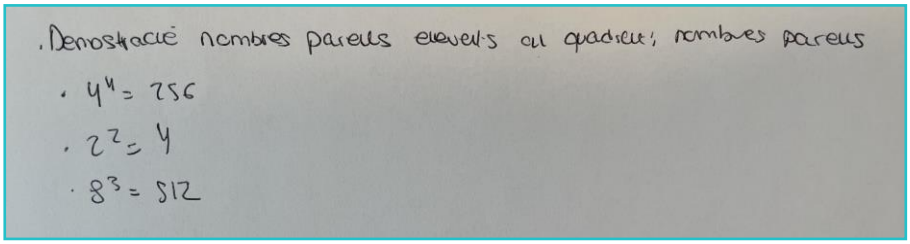


Imagen 5. Justificación de un paso de la "demostración" producida por una alumna

En la realización de la prueba con una alumna de manera individual, se le ha pedido razonar esta parte y ha utilizado un ejemplo genérico para hacerlo, aunque no ha escrito este razonamiento. Se transcribe a continuación la parte de la entrevista traducida:

6:02	Profesora: ¿Que el cuadrado de un número impar es un número impar es algo que te parezca evidente?
6:11	Alumna: Mm…
6:25	Alumna: No. Pero con los ejemplos que me vienen a la cabeza siempre pasa
6:29	Profesora: ¿Siempre pasa?
6:37	Alumna: O sea, porque es como… por ejemplo, con el 5,... Claro, si sumas 5 y 5 se queda par. Pero entonces haces 5 y 5 y sigue siendo par. Pero a la que añades 5 más, que es lo que hace que sea impar, te queda impar el resultado. ¿Sabes?

4.2 Preferencias sobre las demostraciones

Uso de lenguaje algebraico:

El razonamiento algebraico sólo es comprendido por un tercio de los alumnos en la actividad 2.2. Sin embargo, tres alumnos afirman que no entienden el razonamiento algebraico pero aun así dicen que les convence de la certeza de la propiedad. Por otro lado, dos alumnos señalan la demostración genérica visual como el razonamiento que ofrece más explicación pero afirman que prefieren la demostración algebraica. Se muestran a continuación tres de las justificaciones que ofrecen los alumnos para escoger el razonamiento algebraico. El primer alumno (imagen 6) la escoge solo por el hecho de usar álgebra.

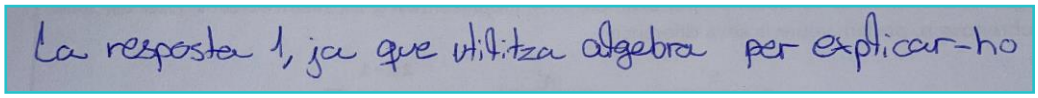


Imagen 6. Motivos para preferir un razonamiento sobre otro

En la imagen 7 y 8 vemos alumnos que escogen la demostración algebraica porque ofrece generalidad.

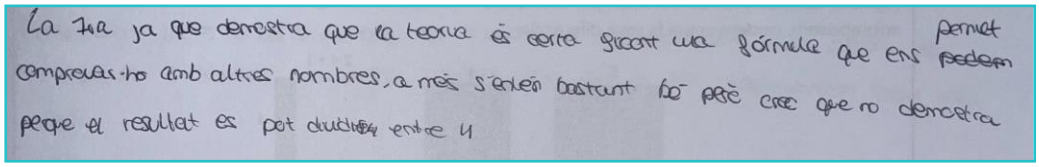


Imagen 7. Motivos para preferir un razonamiento sobre otro

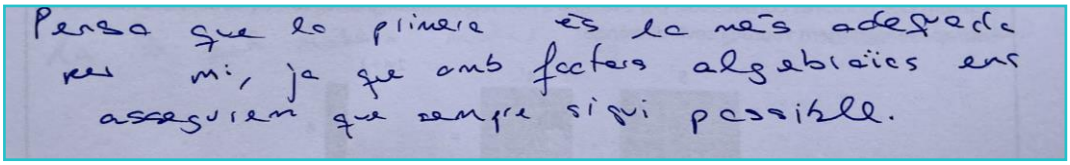


Imagen 8. Motivos para preferir un razonamiento sobre otro

Vemos que esto no significa comprensión ni convicción, puesto que en la imagen 7 leemos que prefiere la demostración algebraica porque "pone una fórmula que permite comprobarlo con otros números… pero creo que no demuestra".

De los seis alumnos que señalan el razonamiento algebraico, cuatro intentan utilizarlo para probar una propiedad similar a la demostrada. Aún así, cometen errores (imagen 9) o solo la utilizan para intentar convertir el enunciado en una fórmula algebraica (imagen 10).

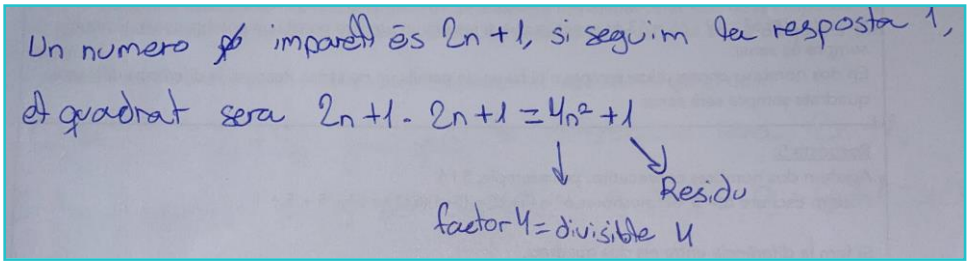


Imagen 9. Demostración con errores en la manipulación del lenguaje algebraico

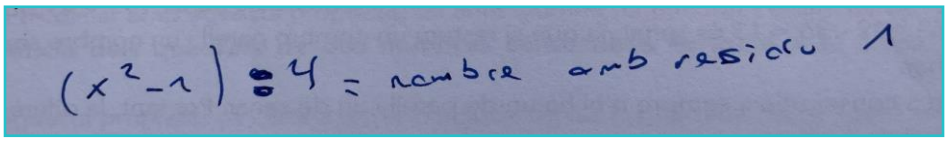


Imagen 10. Transcripción del enunciado a lenguaje algebraico

Demostraciones genéricas visuales:

En la actividad 2.3, la mayoría de los alumnos (72%) escogen como demostración preferida y como demostración más explicativa la demostración genérica visual. De hecho, todos los alumnos, excepto uno, dicen comprender el razonamiento usado. En la actividad 2.2 los alumnos que afirman entender el razonamiento de la demostración genérica visual también son mayoría (66,7%), siendo esté razonamiento el más comprendido después del empírico (88,9%). Sin embargo, solo una alumna intentó (sin éxito) resolver la actividad de demostración de una propiedad similar replicando la misma estructura.

4.3 Generalidad, convicción y explicación de las demostraciones

Demostraciones empíricas:

En las actividades 2.2 y 2.3 el razonamiento empírico es el comprendido por más alumnos. En la tabla 2 se muestran las frecuencias y los porcentajes de las respuestas a si la verificación empírica es comprendida, muestra que el razonamiento es cierto en todos los casos, convence de la certeza y sirve para explicar los motivos por los cuales la propiedad es cierta.

	Verificación empírica – Act 2.2				Verificación empírica – Act 2.3			
	Comprensión	Generalidad	Convicción	Explicación	Comprensión	Generalidad	Convicción	Explicación
Si	16 (88,9)	7 (38,9)	7 (38,9)	11 (61,1)	13 (72,2)	7 (38,9)	5 (27,8)	4 (22,2)
No	2 (11,1)	8 (44,4)	6 (33,3)	3 (16,7)	4 (22,2)	9 (50)	11 (61,1)	10 (55,5)
NS	0 (0)	3 (16,7)	5 (27,8)	4 (22,2)	1 (5,6)	2 (11,1)	2 (11,1)	4 (22,2)

Tabla 2. Frecuencia (porcentajes) de generalidad, convicción y explicación de las verificaciones empíricas

Podemos observar que en ambas actividades aproximadamente la mitad de los alumnos no son capaces de ver, o no están seguros, que el razonamiento no prueba la validez de la propiedad para todos los números. Además, en la primera actividad, la mayoría de los alumnos creen que la verificación empírica ofrece una explicación a los motivos por los cuales la propiedad es cierta (no así en la segunda actividad).

Demostraciones genéricas:

En la actividad 2.1, la mitad de los alumnos entienden el razonamiento del ejemplo genérico y son capaces de explicarlo. Además, todos ellos son capaces de ver que la estructura utilizada sobre el ejemplo se podría reproducir sobre cualquier otro ejemplo. Sin embargo, solo cuatro alumnos (22,2%) lo utilizan correctamente para explicar los motivos por los cuales la propiedad anunciada deja ser cierta si cambiamos las condiciones del enunciado.

En la actividad 2.2, el razonamiento que se realiza con un ejemplo genérico es el que es percibido como general por más alumnos y también es el razonamiento que cuenta con más alumnos que afirman que les muestra los motivos por los cuales la propiedad es cierta. Aun así, este razonamiento solo es explicativo para la mitad de los alumnos que han realizado la prueba.

5. Consideraciones finales

El hecho de que la mayoría de los alumnos que han intentado producir una demostración general hayan escrito un argumento incompleto, en que utilizan propiedades que no se consideran conocidas por la comunidad de la clase sin justificación (o con una justificación autoritaria o empírica), nos hace incluir en la versión definitiva de la prueba un inciso sobre la necesidad de justificar todos los pasos de la demostración. De esta manera, esperamos poder diferenciar a los alumnos que son capaces de completar los agujeros de su razonamiento de aquellos que no, pudiendo hacer un análisis más preciso de sus niveles de demostración.

Entre las distintas demostraciones que se han presentado a los alumnos se incluían varias demostraciones basadas en ejemplos genéricos, que usaban razonamientos narrativos para acompañar cálculos o representaciones visuales. En general, los alumnos han considerado que entendían el razonamiento de las demostraciones genéricas visuales. En cuanto a las demostraciones con ejemplos genéricos, no todas han tenido el mismo nivel de comprensión, convicción o muestra de generalidad. Por ejemplo, la mayoría de los alumnos (65,1%) dicen haber

comprendido la demostración genérica de la actividad 2.2 y la mayoría ha visto que es un razonamiento general (61,1%). Del mismo modo, la primera demostración genérica de la actividad 2.3 ha sido comprendida por 66,6% de los alumnos y ofrece generalidad al 76,5% de los alumnos. En cambio, la segunda demostración genérica de esta actividad solo ha sido comprendida por el 38,9% de los alumnos. Por lo tanto, tendremos que estudiar qué representaciones o formatos de las demostraciones genéricas son más accesibles para los alumnos y cuáles son los motivos por los que se producen estas diferencias.

Referencias

alacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (p. 216-235). Hodder and Stoughton.

Dogan, M. F., y Williams-Pierce, C. (2021). The role of generic examples in teachers' proving activities. *Educational Studies in Mathematics*, *106*(1), 133-150. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10002-3

Dreyfus, T., Nardi, E., y Leikin, R. (2012). Forms of Proof and Proving in the Classroom. En G. Hanna y M. de Villiers (Ed.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (p. 191-213). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_8

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1), 5-23. https://doi.org/10.1023/A:1012737223465

Hanna, G., y Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education: Part 1* (p. 877-908). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_24

Knuth, E. (2002a). Proof as a Tool for Learning Mathematics. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, *95*(7), 486-490. https://doi.org/10.5951/mt.95.7.0486

Knuth, E. (2002b). Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(1), 61-88. https://doi.org/10.1023/A:1013838713648

Knuth, E., Choppin, J. M., y Bieda, K. N. (2010). Middle school students' production of mathematical justifications. En D. A. Stylianou, M. L. Blanton, y E. J. Knuth (Ed.), *Teaching and learning proof across the grades* (p. 153-170). Routledge.

Leron, U., y Zaslavsky, O. (2014). Generic Proving: Reflections on Scope and Method. En M. Pitici (Ed.), *The Best Writing on Mathematics 2014* (p. 198-215). Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400865307-017

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Ed.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (p. 173-204). Brill Sense.

Mason, J., y Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational studies in mathematics*, *15*(3), 277-289. https://doi.org/10.1007/BF00312078

Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., y Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 3-18. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9349-7

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Reid, D. A., y Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: Research, learning and teaching*. Brill. https://doi.org/10.1163/9789460912467

Reid, D. A., y Vallejo Vargas, E. (2018). When is a generic argument a proof? En A. J. Stylianides y G. Harel (Ed.), *Advances in mathematics education research on proof and proving* (p. 239-251). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3_17

Rocha, H. (2019). Mathematical proof: from mathematics to school mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *377*(2140), 20180045. https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0045

Rowland, T. (1998). Conviction, explanation and generic examples. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - Volume 4.*, 65-72.

Stylianides, A. J., Bieda, K. N., y Morselli, F. (2016). Proof and Argumentatiublisheron in Mathematics Education Research. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder, y P. Boero (Ed.), *The Second Handbook of Research on the*

Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues (p. 315-351). SensePs. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_9

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (p. 237-266). NCTM

CoP024 El tour de mates: la carrera de cálculo mental

Diego Alonso Santamaría
elmatematicoquequisoserpivot@gmail.com
IES Arca Real (Valladolid)

Núcleo temático: Procesos, Recursos para el aula.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

Imagen 2: Logo de El Tour de Mates

Este año se ha creado en Valladolid la primera carrera de cálculo mental, *El Tour de Mates*, una competición gamificada en un contexto ciclista.

Su gran aceptación entre la comunidad educativa, con 3359 alumnos participantes de 23 centros educativos, ha impulsado a que este proyecto vaya a ser realizado en toda la comunidad de Castilla y León el próximo curso, así como en otras provincias o comunidades que lo soliciten.

Este proyecto educativo, desarrollado a lo largo de un mes dentro del periodo lectivo, resulta una forma divertida y motivante de trabajar el cálculo mental, a través de una página web con vídeos explicativos y recursos para practicar, y una clasificación interactiva como si de una competición profesional se tratase.

El objetivo de esta comunicación es mostrar y ofrecer este proyecto sin ánimo de lucro a toda la comunidad educativa del país, tanto a profesores de centros educativos concretos como a las distintas asociaciones de profesores para que puedan llevarlo a sus provincias y comunidades autónomas, pudiendo así trabajar el cálculo mental de una forma coordinada, divertida y motivante en todo su territorio.

Y tú ¿Te animas a participar en el Tour de Mates?

Para más información, puedes consultar la web

https://eltourdemates.wordpress.com/

Palabras clave: Cálculo mental, competición, Ciclismo, Gamificación.

1. Introducción

El Tour de Mates es una competición de cálculo mental dirigida a todo el alumnado de ESO y Bachillerato.

El cálculo mental es una de las herramientas matemáticas fundamentales de todo ciudadano y, sin embargo, los libros de texto en su mayoría no le dan la importancia que merece sin citarlo siquiera en algunos casos. Gracias a esta competición hemos conseguido que el cálculo mental se trabaje de forma coordinada en 23 centros educativos de todo Valladolid a lo largo de todo un mes, de forma motivante y divertida para los alumnos.

Esta competición está dividida en dos fases: una competición interna desarrollada en cada instituto, y una segunda fase provincial en la que participan los mejores alumnos de cada centro educativo.

Dicha competición está gamificada en un contexto deportivo, el ciclismo, por ser un deporte que aúna competiciones individuales y colectivas, con la motivación hacia el aprendizaje y el compañerismo que fomentan ambas formas.

Como en toda carrera ciclista, esta competición matemática está compuesta de cinco etapas, cada una especialmente dedicada al aprendizaje y puesta en práctica de una estrategia de cálculo mental.

Y al igual que en una competición ciclista, existen varias clasificaciones donde se premia tanto la excelencia como la constancia o regularidad, se motiva al alumnado joven y se realizan competiciones por clases favoreciendo el compañerismo:

- *Maillot amarillo*: la clasificación general muestra al mejor participante de todo el instituto.
- *Maillot blanco*: para el mejor corredor joven (1º y 2º ESO).
- *Maillot verde o maillot de la regularidad*: para el corredor más regular en todas las etapas.
- *Clasificación por equipos*: donde cada clase competirá por ser la mejor de su centro educativo, siguiendo un sistema de puntuación similar al utilizado en ciclismo.

2. Recursos educativos

Para su ejecución, los centros educativos cuentan con una **página web** con toda la información necesaria:

https://eltourdemates.wordpress.com/

Imagen 3: Portada de la página web www.eltourdemates.com

Todos han recibido el material necesario para realizar las pruebas de cálculo mental (*las etapas del Tour*), y además pueden acceder en la web a **juegos y actividades para entrenar** el cálculo mental.

Imagen 4: Ejemplo de actividades para practicar disponibles en la página web

Además, para la preparación previa a cada etapa, la web cuenta con **píldoras de conocimiento** en forma de vídeo de un minuto en el que se explica la estrategia de cálculo mental que se pondrá en práctica.

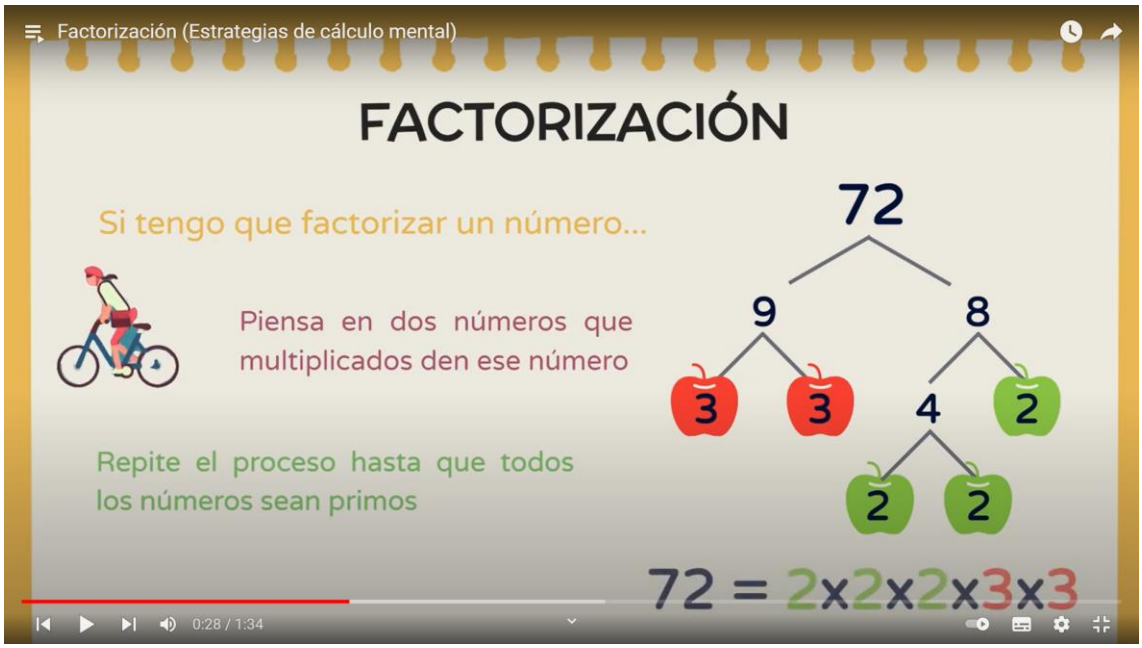


Imagen 5: Vídeo explicativo de una estrategia de cálculo

Y el alumnado también puede acceder a las **clasificaciones** de su instituto, a través de una interfaz **interactiva** como si de una competición deportiva oficial se tratase:

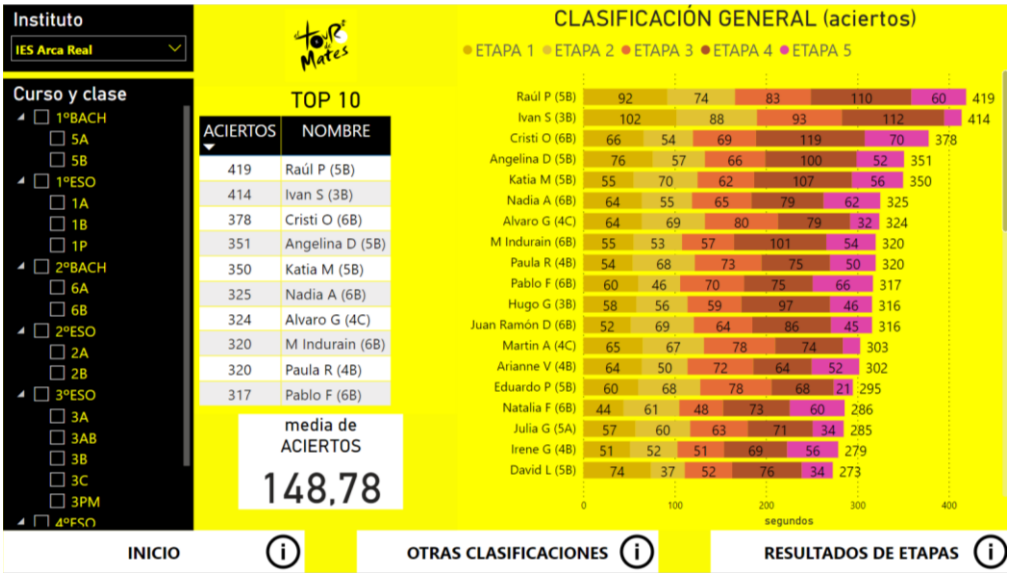


Imagen 6: Visualización de la clasificación general

Imagen 7: Visualización de otras clasificaciones

Imagen 8: Visualización de los resultados de todas las etapas

3. Fases de la competición

La competición se ha desarrollado en dos fases:

Fase 1: La carrera en cada centro: Desde mediados de febrero hasta el final de marzo, la competición realizó en cada uno de los centros educativos. En ella, cada

estudiante competía contra todos los compañeros en las categorías antes mencionadas.

Fase 2: Fase provincial: De cada centro educativo, se clasificaron para la fase provincial el maillot blanco o mejor corredor joven, el maillot verde o corredor más regular y los tres mejores clasificación general del instituto.

De esta forma, más de cien alumnos de todo Valladolid representando a sus centros se reunieron para celebrar una prueba donde se coronó en lo más alto del podio a las mejores calculadoras humanas de la provincia.

4. La competición en números

Las cifras alcanzadas por este proyecto muestran su gran éxito, más aún teniendo en cuenta que solo se ha llevado a cabo en una única provincia y no a nivel regional o estatal:

23 centros educativos

trabajando de forma coordinada.

3359 alumnos

participando y practicando diariamente cálculo mental.

Medio millón

de operaciones de cálculo mental realizadas a lo largo de toda la competición.

5. Feedback del profesorado

Por último, me gustaría finalizar con la gran respuesta de los centros y el feedback recibido por parte de la comunidad docente, lo cual se ha transmitido desde las redes sociales de los propios centros educativos que mostraban con orgullo la participación de su alumnado, hasta la gran cantidad de mensajes vía mail felicitando por la gran iniciativa, pasando por el interés de los periódicos y televisión regional que se han interesado por el desarrollo de esta competición.

Todo ello, ha conllevado la decisión de ampliar el próximo año este proyecto educativo a otras provincias o comunidades que así lo deseen, y esperemos que las *JAEM 20* sean el trampolín perfecto para el fomento del cálculo mental.

.

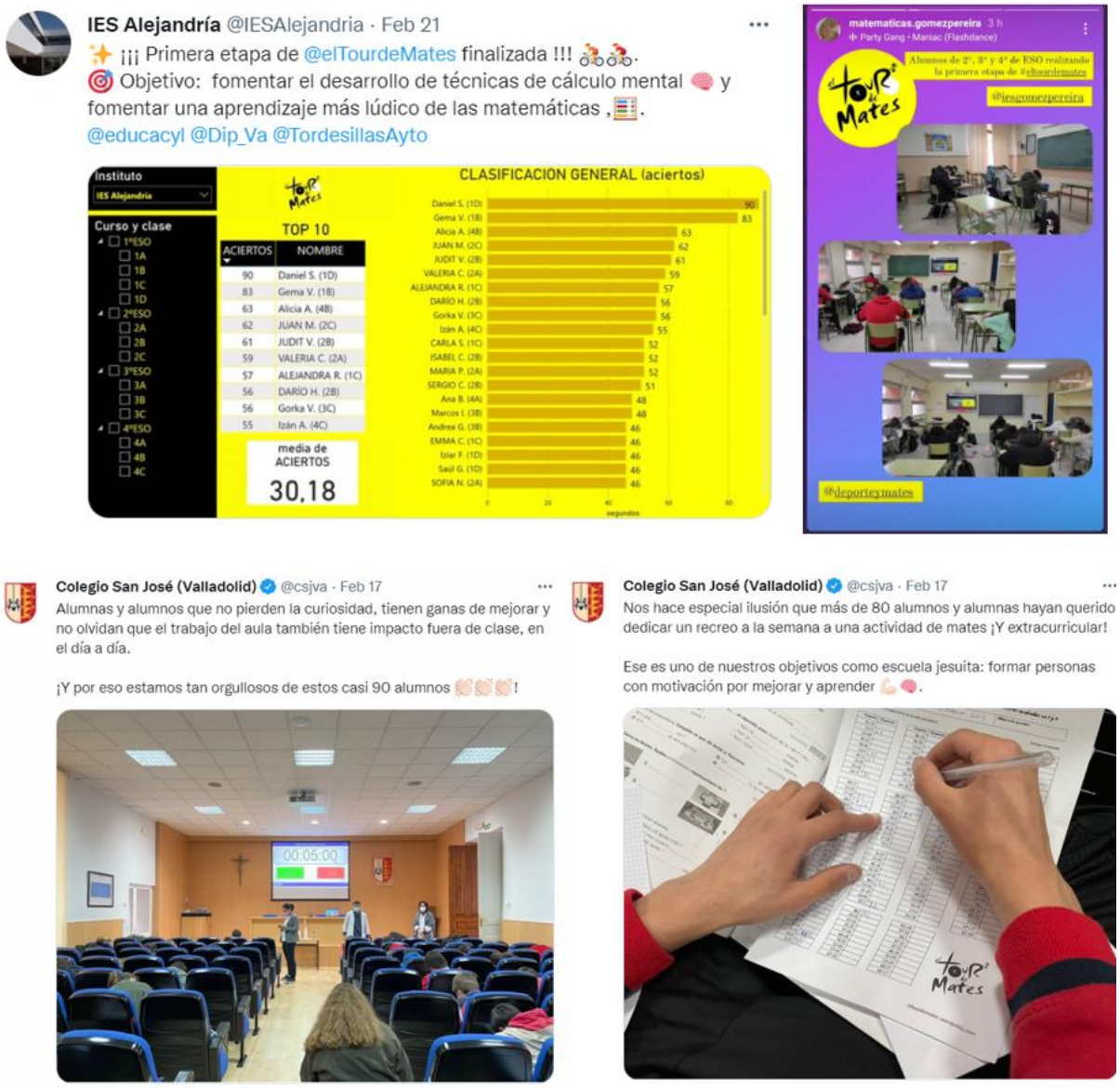


Imagen 9: Feedback de los centros educativos en redes sociales

6. Referencias

Alonso, D. (s. f.). *El Tour de Mates*. El Tour de Mates. Recuperado 8 de abril de 2022, de https://eltourdemates.wordpress.com

Negro, L. (2022, 31 marzo). Juegos y deporte para aprender matemáticas. *El Norte de Castilla*. Recuperado 8 de abril de 2022, de https://www.elnortedecastilla.es/valladolid/juegos-deporte-aprender-20220330193556-nt.html

CoP025 Introducir y desarrollar el sentido estocástico mediante la resolución de problemas

Mireia de Cervelló Minyana i Pastor (1)
mimipas@alumni.uv.es (1)
IES Tirant lo Blanc (Gandia) (1)

M. Pedro Huerta Palau (2)
Manuel.P.Huerta@uv.es (2)
Universitat de València (2)

Núcleo temático: Procesos, Formación del profesorado

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

En este trabajo se muestra un experimento de enseñanza llevado a cabo en dos grupos de 1ºESO basado en el enfoque y metodología del método de resolución de problemas de probabilidad por simulación para problemas formulados en contextos de incertidumbre. Se muestra la potencialidad del método en el desarrollo del sentido estocástico y la adquisición de las competencias específicas del nuevo currículum.

Palabras clave: Simulación, Sentido Estocástico, Competencias, Resolución de Problemas de Probabilidad, Educación Secundaria Obligatoria

1. Introducción

De forma diaria, la mayoría de los problemas a los que nos enfrentamos son situaciones de incertidumbre en las que tenemos que tomar una decisión y con ella asumir un riesgo. Además, en el siglo XXI ha irrumpido con fuerza el análisis de datos y el Big Data, creándose incluso en las universidades Grados y Másteres especializados en la ciencia de datos.

Los encargados de enseñar la resolución de problemas en contextos de incertidumbre, la probabilidad y la estadística es el profesorado de Matemáticas, como indica el currículum (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). Pero, de forma general, las Unidades Didácticas, que tratan la probabilidad y la estadística suelen dejarse para final de curso o para cubrir sesiones sueltas o sobrantes, en el mejor de los casos. Suele suceder que el profesorado prefiere enseñar otras partes del currículum con mayor énfasis y no tanto el sentido estocástico. Puede que las carencias en la formación inicial heredadas, la dificultad conceptual de la probabilidad y la estadística y la escasez de enfoques para su aprendizaje y enseñanza sea el motivo. En efecto, hay factores exculpatorios para el profesorado: la probabilidad y estadística tienen una corta tradición escolar, forman parte de la enseñanza primaria y secundaria obligatoria desde la década de los 90 del siglo pasado, con la LOGSE, lo que obviamente ha influido en el peso que se otorga en relación con la tradición del currículum de matemáticas desde mucho tiempo atrás.

Los problemas de probabilidad que encontramos en los libros enfatizan el cálculo de probabilidades en un mundo extraño de dados, monedas, ruletas o sacos opacos, en los que se enseña al alumnado las reglas de cálculo y fórmulas (Laplace, Bayes, …) de forma que son aplicadas para obtener la probabilidad demandada sin que se ponga en juego la probabilidad subjetiva, por ejemplo, ni tareas propias del quehacer matemático (elaboración de conjeturas, argumentación, discusión, verificación…). En estadística, por su parte, se sigue dando prioridad a una estadística descriptiva, al cálculo algorítmico de parámetros de centralización y dispersión, los datos son dados sin conocer el origen y se da poco espacio para la argumentación, discusión y el análisis exploratorio de éstos. Además, no suele conectarse la probabilidad con la estadística, como si fueran mundos separados, lo que no favorece al aprendizaje y desarrollo del pensamiento estocástico.

El nuevo currículum se caracteriza por su enfoque competencial, adjudicando, además, competencias especificas en cada materia. En este punto adaptamos la definición de César Coll (La Vanguardia, 2021) como la “capacidad de actuar delante de un determinado tipo de situación”, lo que permite hablar de varias competencias en función de la

particularidad de la situación a la que se enfrenta alguien. El currículum, estructura el sentido matemático en cinco sentidos, uno de ellos el sentido estocástico el cual motiva esta comunicación, entendido como aquel que combina y en el que confluyen ideas y constructos de probabilidad y estadística necesarios para la resolución de problemas en contextos de incertidumbre.

2. Nuevas miradas hacia la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y estadística en el siglo XXI

Algunos autores, preocupados por la actual enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y la estadística, plantean la necesidad de un verdadero cambio en el currículum, que capacite realmente a los ciudadanos del s.XXI para que sean ciudadanos alfabetizados estocásticamente, capaces de enfrentarse a los desafíos que demanda la sociedad de la información en estos términos. Pratt (2011) y Pfannkuch (2018) inspiran cambios en los futuros currículums y en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y estadística.

Por un lado, Pratt (2011) se preocupa por el obsoleto currículum de probabilidad basado en ese mundo extraño de monedas, dados, ruletas, … y apuesta por un significado alternativo que esté cerca de la estadística para resolver problemas y conectado con las propuestas actuales. En este sentido habla de la probabilidad como una herramienta de modelización de fenómenos inciertos que debe estar enlazada con el análisis exploratorio de datos y el razonamiento inferencial informal. En este enfoque se considera la simulación como una herramienta para el estudio de dichos fenómenos inciertos. De otro lado, Pfannkuch (2018), siguiendo a Pratt (2011), imagina un nuevo currículum de estadística que ofrezca las experiencias esenciales que permitan a los estudiantes tener la formación adecuada para los niveles de exigencia del s.XXI. Dichas experiencias tienen que ver con:

a) El ciclo completo de la investigación estadística: del problema a la conclusión

b) Construcción y exploración del modelo de probabilidad, y

c) Evaluación crítica de argumentos basados en datos.

Para acceder a estas experiencias se considera también la simulación como un elemento fundamental en los procesos de modelización de la probabilidad y recomienda que la modelización de la probabilidad sea considerada un aspecto importante en el nuevo currículum. De algún modo, estas ideas se van impregnando en las nuevas propuestas curriculares y así se distinguen entre las competencias específicas de matemáticas y sentido estocástico del Real Decreto 217/2022 cuando se habla de: modelizar problemas en diferentes contextos (CE1[23]), usar los principios del pensamiento computacional para modelizar situaciones y resolver problemas (CE4) o comunicar (competencia indispensable en estadística) de forma individual ideas (CE8). El sentido estocástico en el currículum incluye la organización y análisis de datos, la incertidumbre y la inferencia como sus tres ejes dando especial énfasis a la interpretación de datos, la toma de decisiones a partir de la información estadística, la evaluación crítica de argumentos y la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios.

3. El método de resolución de problemas de probabilidad por simulación (MRPPS)

En este trabajo se entiende por resolución de problemas de probabilidad al proceso que consiste en formular y estudiar la fiabilidad de una conjetura en una situación de incertidumbre. Por otro lado, la resolución se contempla desde un punto de vista heurístico, considerando para ello el método de resolución de problemas de probabilidad por simulación (en adelante, MRPPS) (Huerta, 2015).

El MRPPS consta de 8 pasos por los que el resolutor transita de forma organizada para proporcionar una respuesta al problema. Descrito brevemente, el MRPPS parte de una dialéctica hipótesis-conjetura[24] y la formulación de conjeturas como respuestas a las preguntas del problema, conjeturas cuya fiabilidad/credibilidad se ponen en cuestión. Le sigue el diseño e implementación de una simulación del problema que, junto con el análisis de los datos producidos en su ejecución, permite el contraste de las conjeturas iniciales con las conjeturas derivadas del análisis de los datos mediante inferencias informales. El proceso termina con la devolución de

[23] Competencia Específica
[24] Sobre la dialéctica hipótesis-conjetura en contextos de incertidumbre ver Huerta (2020)

las nuevas conjeturas surgidas del análisis de datos al contexto del problema original. Esquemáticamente, el proceso puede verse en el siguiente mapa (Imagen 1).

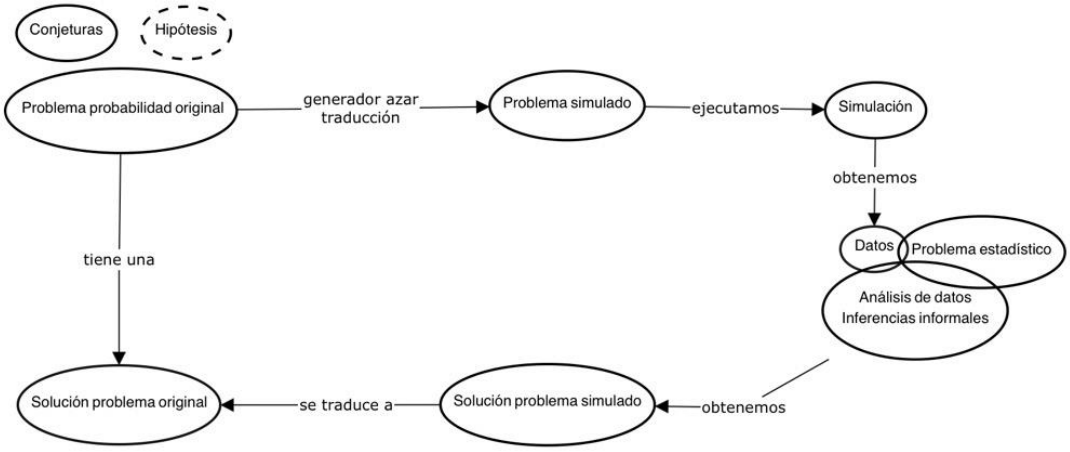


Imagen 1. Esquema del MRPPS

En lo que sigue, mostramos el uso que de este método se hace para la enseñanza, aplicándolo en un curso particular de la ESO y para un problema escogido de una manera intencional para ello.

4. Un ejemplo del uso MRPPS con el problema de la cueva

En este punto se expone como el uso del método MRPPS proporciona no solo un enfoque para la enseñanza en la línea señalada antes sino que, además, una metodología de enseñanza de la probabilidad y estadística basada en la resolución de problemas con alumnado de 1º de ESO, que facilita el acceso al pensamiento estocástico. En la experiencia el alumnado abordó un conocido problema, el Problema de la Cueva (Huerta, 2002) (ver Imagen 2)

EL PROBLEMA DE LA COVA

(1ESO)

En una cova s'han introduït 27 persones. La cova té tres portes. Per una d'elles s'arriba a l'exterior en 1 hora. Per l'altra, després de caminar 2 dies, s'arriba al mateix lloc de partida en l'interior de la cova. Per la tercera, després de caminar 3 dies, es torna també al mateix punt de partida en l'interior de la cova. Cap de les persones és capaç de recordar la porta que tria quan torna a l'interior de la cova, ja que a l'interior la foscor impedeix que recorden quina porta han escollit amb anterioritat, així que sempre que ho intenten ho deixen tot a l'atzar.

Anem a pensar en dos situacions diferents (A i B). Primer estudiarem la situació A i les qüestions que ens demanen. En segon lloc la situació B i les qüestions que ens demanen.

Situació A) Suposem que cada persona té menjar per 5 dies i 1 hora

- Qüestió 1: Creus que serà fàcil o difícil eixir de la cova? Per què?
- Qüestió 2: Podríem calcular la probabilitat que té una persona d'eixir de la cova? Quina és? Que voleu dir amb aquesta probabilitat?
- Qüestió 3: De les 27 persones que hi ha a l'interior de la cova, quantes esperes que isquen en vida de la cova? Per què?

Situació B) Suposem que el menjar és il·limitat

- Qüestió 1: Creus que és fàcil o difícil eixir de la cova? Per què?
- Qüestió 2: Podríem calcular la probabilitat que té una persona d'eixir de la cova? Quina és? Que voleu dir amb aquesta probabilitat?
- Qüestió 3: De les 27 persones que hi ha a l'interior de la cova, quantes esperes que isquen en vida de la cova? Per què?
- Qüestió 4: En quant de temps esperes que una persona pot estar fora de la cova? Per què?

Imagen 2. Problema de la cueva adaptado

Se escogió el Problema de la Cueva por, entre otras, las siguientes razones:

- Ser un problema no usual en el sentido de Polya (1966), un problema distinto a los que el alumnado está acostumbrado a abordar en el aula, tanto por lo que se refiere al contexto como estructura.

- En su resolución se pueden considerar las hipótesis de trabajo: equiprobabilidad e independencia de las pruebas para su modelización.

- Considerarse que su simulación podría estar al alcance del alumnado de 1°ESO y permitir el uso de generadores de azar familiares, como herramientas iniciales que permitieran el tránsito a otras no tan familiares.

- En su enunciado hay supuestos (disponibilidad de alimentos) que modelizan el problema como un proceso aleatorio compuesto por un número finito de pruebas independientes o como un proceso estocástico o Cadena de Markov absorbente con dos estados: Interior (de la cueva), interior y de transición en la cadena, y Exterior (fuera de la cueva), el estado absorbente. Estos modelos teóricos están alejados de los objetivos de enseñanza para el alumnado de 1º pero, el enfoque basado en la simulación hace que el problema sea abordable en este curso, mostrando un gran potencial, como veremos más adelante.

4.1 El experimento de enseñanza

Lo que se ofrece en esta comunicación no es una propuesta didáctica, tal como se suele entender, pues, por ejemplo, los modelos teóricos que modelizan el problema no están prescritos en el currículum de primero ni tampoco se ponen en juego todos los elementos que intervienen en una situación habitual de enseñanza-aprendizaje. Lo que se ofrece es el desarrollo de un experimento de enseñanza el objetivo del cual es explorar la potencialidad del MRPPS como enfoque y metodología de enseñanza. Con este experimento se pretende investigar (se sigue investigando) y analizar qué aportaciones puede tener este enfoque en el currículum para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y estadística, la adquisición de competencias y el desarrollo del sentido estocástico. Como consecuencia de este experimento, se prevé el desarrollo de múltiples unidades didácticas en función de los objetivos de enseñanza que se persigan.

4.1.1 Las clases: descripción de los grupos y de las muestras de estudiantes

El experimento de enseñanza se lleva a cabo en dos grupos independientes, de 20 y 21, estudiantes de primero de la ESO (12-13 años) de un instituto público de la Comunidad Valenciana. El experimento se desarrolla en ambos grupos, por separado y en paralelo, y se aborda sin una enseñanza previa de probabilidad y

estadística, aunque el alumnado sí poseyera conocimientos básicos de cursos anteriores en Educación Primaria, para el experimento no se consideran necesarios ni un requisito para afrontar la resolución del problema.

4.1.2 Aspectos metodológicos y enfoque de enseñanza

El experimento se secuencia en tres partes basadas en el MRPPS:

1. Análisis del enunciado y formulación de hipótesis y conjeturas.

2. Simulación.

3. Análisis de los resultados de la simulación y tratamiento de la credibilidad/fiabilidad de las conjeturas.

El problema se presenta como un reto y se trata de forma colaborativa con los grupos completos, de manera que la profesora (coautora de este trabajo) demanda ayuda al alumnado para resolverlo. A partir de ese momento entra en escena la primera secuencia (se trabaja con el problema original y corresponde a los tres primeros tiempos del método) en la que se analiza la situación aleatoria realizando una lectura intencionada del problema. A partir de ese momento el problema pertenece y solo es del alumnado. El papel de la profesora es el de gestor ilustrado (sabe que hay qué hacer y por qué), proporciona herramientas y sugerencias heurísticas al alumnado para que avancen en la resolución pero que no resuelven el problema. Por ejemplo, las ideas y propuestas iniciales del alumnado, tras una primea lectura del problema, no parecían basarse en algún tipo de razonamiento plausible, ya que buscaban estrategias para esquivar el azar: *"El que salga de la puerta que no es, que avise a los otros que esa no es"* en este caso la sugerencia es redirigir al enunciado del problema y a la importancia de su análisis para resolver las dudas sobre las informaciones que aporta: la causa de la incertidumbre provocada por el azar es la obscuridad y la incapacidad de tomar una decisión determinista en la elección de una puerta. A medida que avanza la experiencia, son capaces de evaluar la idoneidad de respuestas de compañeros que no se corresponden con un análisis competente del enunciado del problema: *"Vas andando una hora y vuelves y dices este camino no es. Vas por el otro camino y lo*

mismo" a lo que le responden *"Pero está oscuro, tú no puedes escoger".* Interpretar informaciones como estas supone que el alumnado trata de dotar de sentido a la noción de azar, más allá de los juegos de azar.

Como consecuencia de la lectura y el debate se decide si hay hipótesis o no, y qué hipótesis para poder formular alguna conjetura razonable a lo que se pregunta en el problema. En la práctica, de un modo informal, se consideran las hipótesis de equiprobabilidad e independencia que modelizan el problema y se formulan conjeturas sobre las preguntas planteadas en el problema, razonadas y consensuadas (algunas) por el grupo.

"Tu supones que puedes utilizar las tres puertas a salir por igual, pero no elegir un porcentaje", "El 33,3% es una suposición de una división por los tres caminos, pero es una suposición que tú haces" o "Cuando tu vas por un camino y vuelves las puertas tienen el mismo porcentaje, puedes volver a entrar"

Desde el inicio el alumnado transita de forma natural entre ambos procesos con solo considerar los supuestos de comida formulados en el enunciado.

"Si estás en el A puedes salir o no y en el B saldrás porque al final de tantas veces que lo probarás saldrás, no es posible que siempre cojas las dos mismas"

Con el análisis de la situación de incertidumbre, se proponen de forma intuitiva diferentes formas de representación y aquí mostramos dos de ellas. Una con cierta estructura que nos recuerda a una estructura en árbol (Imagen 3) y la otra como un listado de posibilidades de terminar el proceso en el interior o exterior de la cueva (Imagen 4). Ambos sistemas de representación tratan de modelizar el problema, el primero distribuyendo a las 27 personas en sus respectivos intentos por salir, atendiendo a una idea de probabilidad basada en el valor esperado. Si hay 27 personas y 3 puertas, se esperaría que 9 fueran por cada una de ellas. El segundo sistema codifica las puertas según los tiempos para salir en 1, 2, y 3. Mediante un análisis combinatorio de estos tres números, apoyado en una representación de la cueva, se hace un listado de las formas que permitirían salir de la cueva y las que no. Considerándolas todas equiprobables se decide que el 50% salen y el otro

50%[25] no sale. Se trata de actuaciones brillantes para alumnado de 1º de la ESO, fruto de la espontaneidad y creatividad.

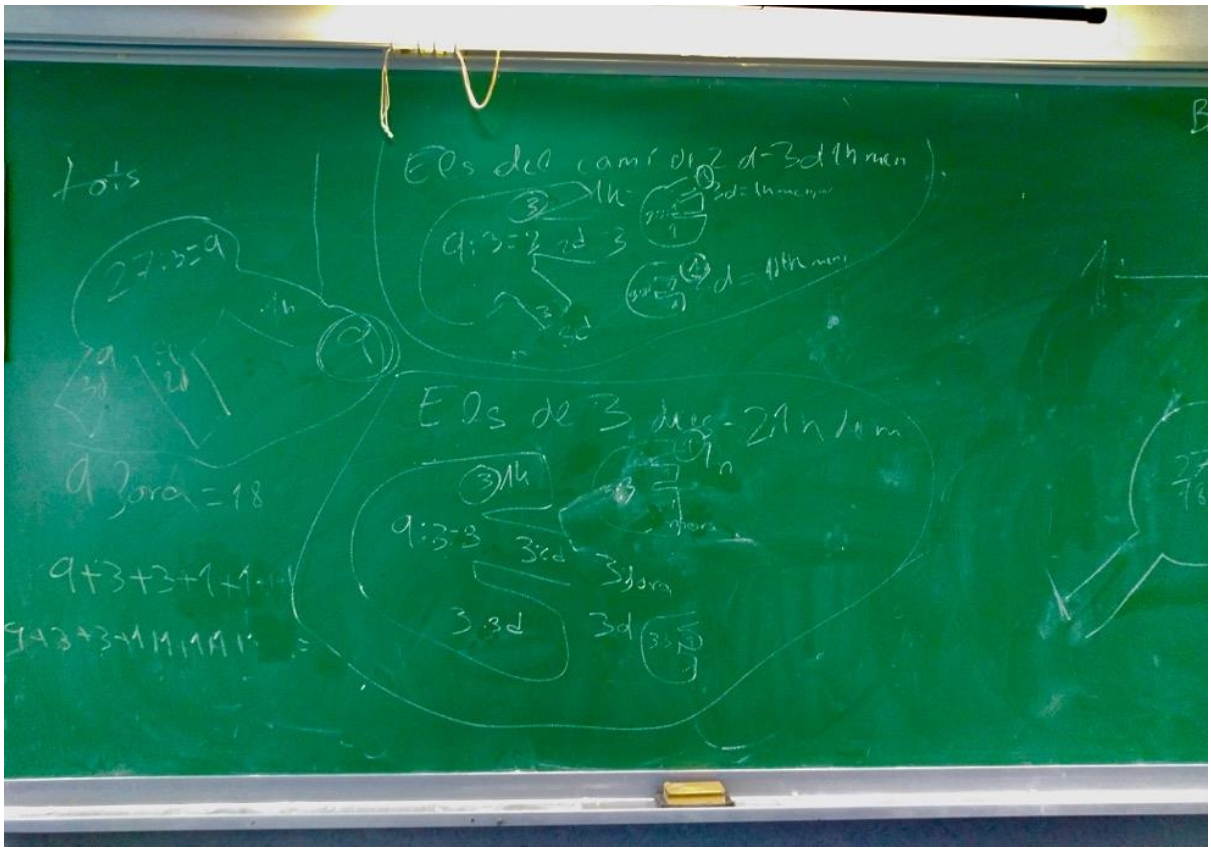


Imagen 3. Árbol construido por el alumnado

[25] El alumno que lo escribe en la pizarra se olvida de (2,3,3) por ello pone 50%-50%. Un compañero le avisa que falta dicha opción y entonces cambia verbalmente a 55%-45%.

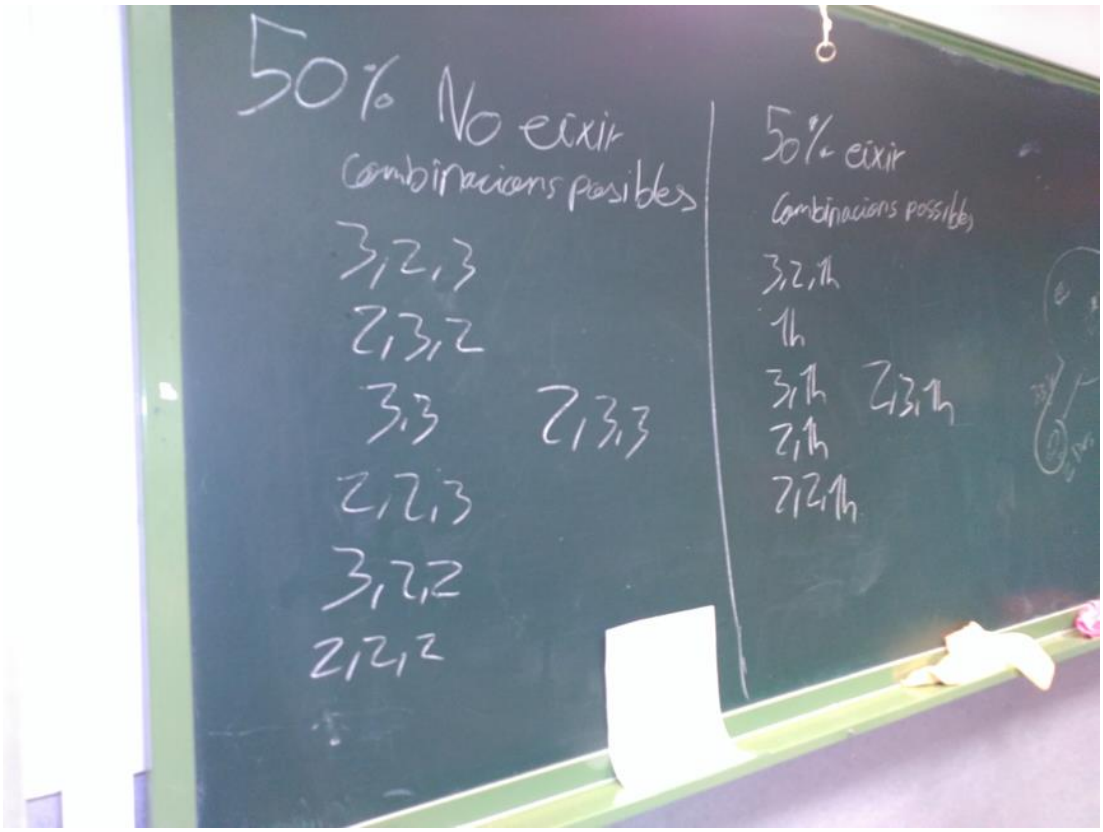


Imagen 4. Listado de posibilidades construido por el alumnado

De la primera secuencia de enseñanza se obtienen diferentes conjeturas con lo que surge la necesidad de decidir cuál de ellas se considera más fiable. Con la construcción del árbol algunos estudiantes conjeturan que será más fácil salir pues contabilizan el éxito de 18 personas (más de la mitad). La gran parte del alumnado considera que será más difícil salir por el examen de posibilidades y por que hay dos puertas que no conducen a la salida directamente; se observa que presentan dificultades en la comprensión de procesos compuestos por pruebas independientes, no es extraño pues sus experiencias con ellos han sido escasas o nulas.

Así entra en escena la segunda secuencia de enseñanza, la simulación, con el objetivo de obtener información del proceso aleatorio en la cueva a través de un proceso alternativo (tiempos 4-5 del método) pero, estocásticamente equivalente. La profesora introduce la simulación como método de resolución del problema, pero

haciendo partícipe al alumnado de su conveniencia, quien evalúa hasta que punto el generador de azar que se le propone y su funcionamiento simula eficazmente la situación problemática original.

Dado que el alumnado no ha tenido experiencias con la simulación, la introducción de los generadores de azar se realiza en tres etapas, y en el orden en el que se citan, en función de las propiedades física, didácticas y metodológicas de cada uno de ellos: uno físico, uno virtual y el uso de un lenguaje de programación. El generador físico permite al alumnado llevar a cabo la simulación y ser consciente del significado del verbo simular en contextos de azar. Con la simulación virtual se progresa en la eficacia y eficiencia de la simulación y, además, con el uso del lenguaje de programación se permite acceder a simulaciones y resultados que de otra forma serian inaccesibles, se incorpora la tecnología como una herramienta útil en la resolución de problemas de probabilidad y se acerca al alumnado a aspectos relacionados con el pensamiento computacional (CE4).

El uso de diferentes generadores de azar implica también que puede haber más de uno, pero que su idoneidad, forma de uso y pertinencia han de ser objeto de discusión en el aula. Así, la profesora propone el dado de seis caras, familiar entre el alumnado, como primer generador de azar físico o de lápiz y papel, cuya pertinencia es debatida. Implícitamente, se asume en la clase las hipótesis de la equiprobabilidad de los tres resultados posibles agrupados por parejas que se pueden considerar al lanzar el dado (1-2 ir por la puerta de 1 hora, 3-4 ir por la puerta de 2 horas, y 5-6 ir por la puerta de 3 horas) y la de la independencia de los resultados cuando el dado se lanza repetidamente. Se reparten algunos dados por la clase, se pide a un alumno que se levante y otro realiza lanzamientos con el dado con el fin de decir si sobrevive o no (en ambos supuestos); se repite varias veces siendo ello atractivo para el alumnado. De esta forma el alumnado se familiariza con la simulación, observa intuitivamente qué información proporciona y con ella se explora el espacio de posibilidades del suceso "salir de la cueva", en cualquiera de los supuestos, ya esbozado en la primera secuencia de enseñanza con el análisis de la situación de incertidumbre.

Posteriormente, se presenta el generador de números aleatorios on-line[26], con el que también se debate, se acuerda su pertinencia y la forma de uso. El alumnado está organizado en grupos de 4-5 estudiantes y disponen de tablas esqueleto (Imagen 5) para la recogida de datos de la simulación con la intención de poder obtener muestras de datos independientes para su uso en la tercera secuencia. La forma de uso se discute en clase y después de explorar el generador se decide: generar 27 números aleatorios del 1 al 3 con repetición y anotar los resultados en la columna INTENT1 de la tabla. Se hace una segunda entrada generando tantos números aleatorios como personas que no han sobrevivido en el primer intento (INTENT2). Finalmente, una tercera entrada generando el número pertinente de números aleatorios (INTENT3). Para el otro supuesto actúan igual hasta que las 27 personas tienen un 1 en alguna columna. Todos los grupos proceden de esta forma con el ordenador[27], recogen los datos y se rellenan las tablas manualmente.

INDIVIDU	INTENT 1	INTENT 2	INTENT 3	TEMPS QUÈ HA TARDAT EN EIXIR (EN HORES)	INTENTS QUÈ HA FET EN EIXIR
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24					
25					
26					
27					

PERSONES QUE SOBREVIUEN:

INTENT / INDIVIDUS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	TEMPS (hores)	INTENTS
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
7																				
8																				
9																				
10																				
11																				
12																				
13																				
14																				
15																				
16																				
17																				
18																				
19																				
20																				
21																				
22																				
23																				
24																				
25																				
26																				
27																				

Imagen 5. Tablas esqueleto

[26] https://numero.wiki/generadores/
[27] disponibilidad de Aula con ordenadores y conexión a internet

Aunque el problema no pregunta explícitamente ni por el tiempo esperado ni por los intentos esperados en salir de la cueva, se considera adecuado su estudio ya que amplia de forma natural el problema y implica el desarrollo del razonamiento estadístico para las variables añadidas. Los datos producidos por la simulación permiten así abordar problemas adicionales, no formulados directamente en el problema: el tiempo esperado hasta salir de la cueva o el número esperado de intentos hasta conseguirlo ya sea en el proceso finito o en la cadena de Markov.

Con la información proporcionada por la simulación, la experiencia se adentra en la última secuencia de enseñanza en la que se trabaja con el problema simulado y el problema estadístico que supone estudiar y contrastar conjeturas (tiempos 6-8 del MRPPS). En efecto, puesto que cada grupo ha producido una muestra de datos estadísticamente independiente del resto, metodológicamente hablando, la profesora anima a que las muestras se compartan entre toda la clase, anotando el resultado en términos de conjetura a la que llegó cada grupo, para la variable aleatoria de interés: número de supervivientes. De este modo, se trabaja con toda la clase ideas estadísticas básicas como, por ejemplo:

a) Variabilidad en los datos: hemos realizado varias simulaciones y vemos que en cada una los datos son distintos, ¿por qué los datos son distintos? ¿podemos responder a las preguntas formuladas en el problema a partir de los datos?

b) Inferencias informales. Si en cada simulación se salvan un número distinto de personas, entonces, si nos preguntan cuántas personas esperamos que se salven más o menos, ¿qué diríamos?

c) Las medidas de centralización como mejor estimador. De esta forma, el alumnado sugiere el uso de la media aritmética para conjeturar cuántas personas se espera que se salven en el caso finito y en el caso infinito para estimar el número esperado de intentos y tiempo esperado para salir de la cueva.

Se motiva a la comparación de las conjeturas iniciales con las nuevas formuladas a partir de los datos. Ello conduce a que los datos apoyen la fiabilidad de la conjetura

previa, dotándola de credibilidad, o que se rechace y se reformule a la luz de los datos. Los estudiantes que habían conjeturado que era más fácil salir, tienen ahora argumentos que le dan credibilidad y aquellos con la conjetura contraria pueden reformularla reflexionando que, en las situaciones de incertidumbre, aquello que se intuye puede que no sea lo más probable.

Una vez resuelto el problema con la formulación de las conjeturas más creíbles para el alumnado, se les introduce en el pensamiento computacional, poniéndolo al servicio de la resolución de problemas. Para ello, se presenta la simulación en el lenguaje de programación Scratch[28], se enseña el código fuente y se explica, a grandes rasgos, como se ha diseñado. Se explica que todo lo que han realizado con lápiz y papel ahora lo hace el programa, almacenado y tratando los datos para aquellas variables estadísticas de interés que ellos han considerado.

El programa se elabora también con intención heurística y demanda como datos de entrada el número de simulaciones y el número de individuos en la cueva, lo que introduce en la resolución del problema la discusión sobre la importancia del número de personas (Imagen 6). De esta forma, el alumnado puede explorar el comportamiento de las variables de interés en función de la variabilidad de los datos de entrada, simular, encontrar patrones y modelizar las situaciones.

[28] https://scratch.mit.edu/

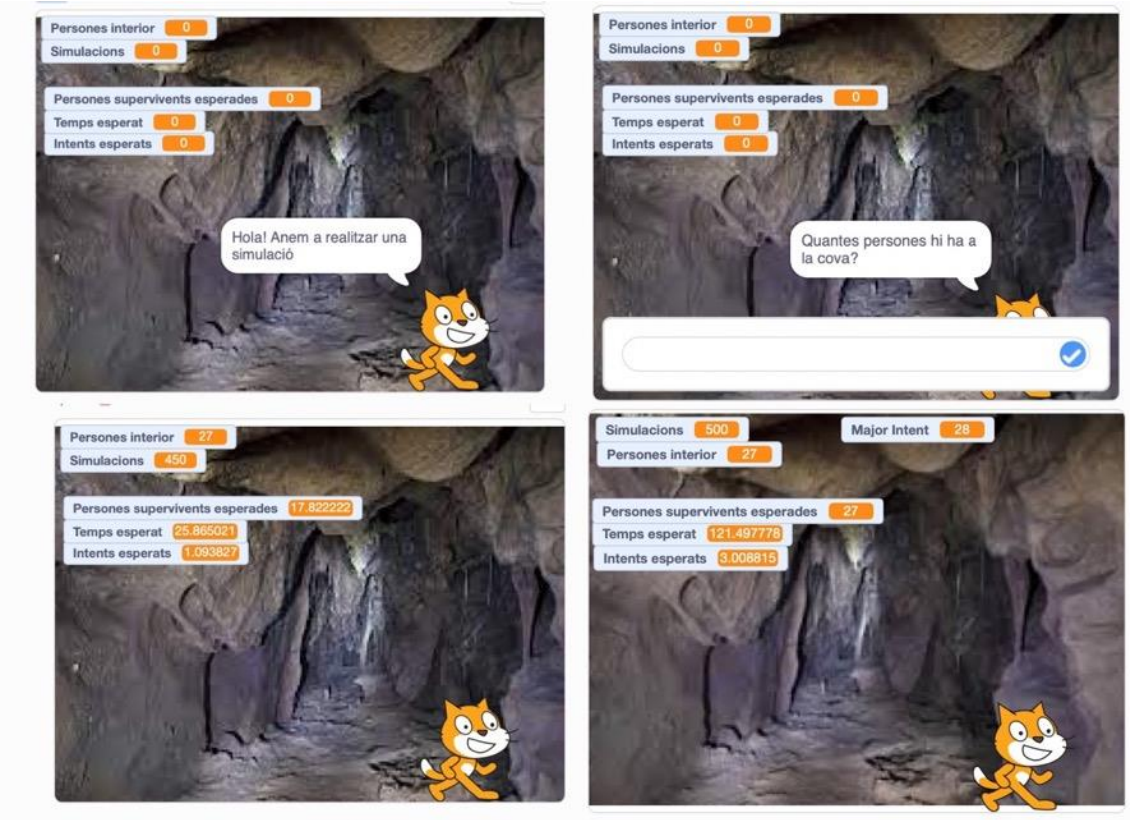


Imagen 6. Pantalla salida en Scratch (supuestos A y B)

5. Aportación del MRPPS a las competencias específicas y sentido estocástico en Educación Secundaria Obligatoria

La experiencia llevada a cabo en el aula permite apreciar la potencialidad del MRPPS para el desarrollo de competencias y la producción de sentido estocástico que expone el currículum de la nueva ley de educación (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). En efecto, el Real Decreto 207/2022 sitúa la resolución de problemas como un bloque principal y cómo enfoque para enseñar y aprender matemáticas e incorpora y destaca dominios que el MRPPS aporta, como: la formulación de conjeturas, la argumentación, la toma de decisiones, la comunicación matemática, el pensamiento computacional o el análisis y organización de datos, entre otros. Así pues, tomando el MRPPS como marco de referencia, el experimento realizado y de la interpretación del currículum, se expone, en la tabla siguiente, un extracto de una tabla mucho más amplia y en construcción,

en la que se relaciona los primeros tiempos del MRPPS y sus aportaciones a las competencias y sentido estocástico. Dada la extensión de lo que supondría hacer esto con los 8 tiempos y que aún se está en proceso de investigación en el aula, se muestra de manera exhaustiva el análisis con los tres primeros pasos, lo que permite inferir el potencial de MRPPS no solo como enfoque sino, también, como metodología de enseñanza.

Tiempos en el MRPPS	**Competencias específicas** **(CE9 y C10 transversales)**	**Aportaciones a la adquisición de competencias estocásticas básicas.**	**Sentido estocástico**. Se pretende que el alumnado dé **sentido** a…
Primero: Exploración de la situación real, identificación de lo que está sujeto a incertidumbre y de lo que no, de lo que es conocido y desconocido.	CE1, CE3, CE6, CE7	Reconocer una situación como una de incertidumbre o aleatoria.	Incerteza. Incertidumbre. Situación de incertidumbre. Aleatoriedad. Elección al azar

		Leer e interpretar informaciones en contextos de incertidumbre.	Experimento aleatorio simple. Suceso elemental como una posibilidad simple. Experimento aleatorio compuesto. Suceso compuesto como una posibilidad compuesta de otras posibilidades. A lo que es cierto, seguro y probable. A proposiciones que se refieran a estas cualidades. A una variable aleatoria y su función de distribución. A la esperanza de que algo incierto ocurra. A medir dicha esperanza.

		Comprender la idea de hipótesis.	A supuestos como hipótesis de trabajo (“se supone que…") cuya veracidad no está sujeta de discusión.
		Valorar la necesidad/uso de hipótesis en una situación de incertidumbre. Reconocer, enunciar y redactar hipótesis del problema.	A la formulación de supuestos o hipótesis de trabajo necesarias y no informadas en el problema. A argumentos que expresen las hipótesis necesarias para la resolución del problema y su justificación.

		Identificar y formular el problema (matemático) sujeto a hipótesis.	A la matematización o modelización de la situación original con la consideración de los supuestos e hipótesis. Al problema matemático que se va a abordar. Al uso de sistemas de representación.

Segundo: Juicios subjetivos, a priori, derivados del análisis del problema.	CE2, CE3, CE8	Formular conjeturas sobre las preguntas del problema. Reconocer la dependencia de las conjeturas de las hipótesis del problema (si las hubiera). Redactar conjeturas.	A argumentos de naturaleza determinista. A argumentos de naturaleza incierta o aleatoria. A la certeza (mostrable o demostrable) de lo argumentos deterministas, frente a lo incierto o probable de los argumentos no deterministas o conjeturas.

Tercero: Fiabilidad / credibilidad de las conjeturas iniciales.	CE3, CE7, CE8	Redactar la solución del problema en términos de conjeturas. Elaborar y redactar argumentos a favor o en contra de una conjetura formulada. Usar la cualidad de fiable o creíble, y su graduación, para referirse a la bondad de una conjetura. Reconocer la necesidad de formular la conjetura más fiable/creíble como respuesta al problema. Relacionar las conjeturas con la toma de decisiones y con el riesgo en términos de probabilidades subjetivas.	A una conjetura como respuesta a un problema formulado en un contexto incertidumbre. A la fiabilidad y a la credibilidad de una conjetura dependiendo de la información disponible. A la argumentación sobre la fiabilidad y credibilidad como una forma de hablar sobre la bondad de una conjetura. Al pensamiento crítico ante una conjetura. A la necesidad de buscar aquellas conjeturas que sean más creíbles.

6. Conclusiones

En esta comunicación, por medio de una experiencia en el aula basada en el método de resolución de problemas de probabilidad por simulación (Huerta, 2015), se ha presentado un enfoque y una metodología de enseñanza que permite introducir y desarrollar el sentido estocástico desde el inicio de la Educación Secundaria. Lo que se ha presentado es una experiencia que tiene vocación de continuidad no solo en el inicio, sino que también en otros niveles superiores de enseñanza y con la ilusión de más profesorado participando, lo que supone una invitación para ello. Se espera que el fruto de esta experiencia y otras que se están ejecutando y analizando permita, por interés y objetivo como profesorado, la elaboración y desarrollo de alguna propuesta didáctica con el MRPPS como enfoque y metodología de enseñanza, enfoque que está en consonancia con corrientes actuales en la investigación y diseñadores de currículum como Shaughnessy (2019), Pratt (2011) o Pfannkuch (2018).

Referencias

Coll. C (2021). ***Uno de los siete expertos que han diseñado el nuevo currículo reflexiona sobre este modelo de aprendizaje/Entrevistado por Carina Ferreras.*** **La Vanguardia**

Huerta, M. P. (2002). El problema de la cueva: elementos para un análisis didáctico de los problemas de probabilidad*. Enseñanza de las Ciencias, 20(1) 75-86.*

Huerta, M. P. (2015). La manera de resolver problemas de probabilidad por simulación. Disponible en*: https://www.researchgate.net/publication/301228530*

Huerta, M.P. (2020). Hipótesis y conjeturas en el desarrollo del pensamiento estocástico: Retos para su enseñanza y en la formación de profesores*. RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 23(1) 79-102*

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 207/2022, de 29 de marzo. Boletín Oficial del Estado. Madrid, 30 de marzo de 2022, núm.76.

Pfannkuch, M. (2018). Reimagining Curriculum Approaches. In: Ben-Zvi, D., Makar, K., Garfield, J. (eds) *International Handbook of Research in Statistics Education*. Springer International Handbooks of Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_12

Pratt, D. (2011). Re-connecting probability and reasoning about data in secondary school teaching. *Proceedings of the 58th World Statistical Congress* (pp. 890-899). Dublin.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible* (Mathematics and plausible reasoning). Madrid: Editorial Tecnos.

Shaughnessy, J. M (2019). *Recommendations about the Big Ideas in Statistics Education: A Retrospective from Curriculum and Research.* Cuadernos, 18, pp. 44-58

CoP027 ¿Cómo llevar juegos de mesa al aula de matemáticas?

Tere Longueira Guerrero
teresa.longueira@gmail.com
tekman Education/SET grup de jocs d'ABEAM
Pol San Barón
pol.san@tekmaneducation.com
tekman Education/SET grup de jocs d'ABEAM

Núcleo temático: Procesos, Recursos para el aula.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

Comunicación en la que trataremos la importancia de los juegos de mesa en el proceso de aprendizaje y el desarrollo cognitivo. Con esta comunicación buscamos ayudar a los docentes a dar un paso más hacia el aprendizaje basado en juegos, que éstos pasen de ser algo puntual de un día en que tenemos algo de tiempo libre o para aquellos alumnos que van más avanzados a formar parte de la metodología de trabajo del aula de matemáticas, dando algunas pautas para seleccionar y llevar de la mejor manera posible juegos de mesa.

Estas pautas surgen del trabajo e investigación que realiza el SET-grup de jocs desde el curso 2016/17.

Palabras clave: ABJ (aprendizaje basado en juegos), matemáticas, objetivos de aprendizaje, juegos de mesa

¿Te diviertes en clase? Es una pregunta importante y no sólo porque hace más ameno nuestro trabajo, también porque hace más ameno el aprendizaje de nuestros alumnos.

Algunos dirán que no es necesario divertirse en clase, ni docentes ni discentes, pero sabemos que si el aprendizaje se produce acompañado de una experiencia positiva y con buenas emociones es más significativo y perdurable en el tiempo. Así que es

interesante realizarte esta pregunta y ser consciente de la respuesta, ¿te diviertes en clase?

Hace ya seis años un grupo de profesores que solíamos coincidir en todas las formaciones, jornadas, concursos matemáticos nos planteamos el poder colaborar de alguna manera, ya que somos unos “frikis” seguro que algo podríamos hacer. Comentando las diferentes estrategias y metodologías didácticas empleadas en el aula, la coincidencia no tardó en aparecer, todos realizamos nuestras clases de matemáticas con material manipulativo, lúdico y con juegos de mesa (o lo intentábamos por aquel entonces). Además a todos nos gustan los juegos de mesa así que dándole alguna vuelta surgieron ciertas preguntas:

Todos en algún momento hemos usado el dominó y sus múltiples adaptaciones, incluso el ajedrez o el parchís, pero ¿se puede aprender matemáticas usando juegos de mesa contemporáneos? ¿Será motivador para nuestro alumnado el uso de juegos de mesa contemporáneos? Y, ¿se puede producir aprendizaje significativo usando juegos de mesa contemporáneos?

Ante estas dudas decidimos constituir un grupo de trabajo en didáctica para el aprendizaje de las matemáticas a partir del juego de mesa: SET - grup de jocs, que en estos momentos está formado por docentes de diferentes niveles educativos, pedagogos y asesores pedagógicos.

El primer paso, y el más necesario, para responder a estas preguntas fue buscar juegos contemporáneos con contenido matemático o con los que se pueda aprender matemáticas.

Como grupo nos reunimos una vez al mes, probamos juegos (es decir, jugamos) y analizamos qué matemáticas se pueden trabajar y, por tanto, en qué nivel y cómo poder utilizarlos como docentes de mates.

Una vez seleccionados los juegos, y la selección es sumamente importante para llevarlos al aula, los llevamos a nuestro entorno realizando actividades como grupo bien en el aula de matemáticas, bien realizando talleres para alumnos, familias o docentes.

Por nuestra experiencia, como docentes y como grupo, y la lectura de diferentes autores, podemos concluir que el uso de los juegos de mesa en el aula de matemáticas cumple con el propósito motivador, permite realizar conexiones entre los contenidos y de estos con el entorno y la vida; y consigue un aprendizaje más significativo y perdurable que otras estrategias más tradicionales.

Para llevar un juego de mesa al aula de matemáticas debemos tener en cuenta diferentes aspectos:

- El 1º y más importante, con qué **objetivo** llevamos ese juego y tener muy claro a nivel pedagógico qué queremos conseguir.

- Debemos **conocer bien el juego**, sus normas y tener claras las adaptaciones y/o preguntas que vamos a realizar y el momento de las mismas para que el juego cumpla con el objetivo pedagógico que nos hemos marcado.

- **Duración de la partida**, ya que vamos a utilizarlo en sesiones de clase, deben ser partidas cortas, de unos 15 minutos de manera que los alumnos puedan jugar varias partidas en una sesión.

- La **rejugabilidad** del juego, y esto podemos verlo desde dos vertientes. Por un lado, las ganas de volver a jugar otra partida, esa sensación nada más acabar de querer volver a empezar y, por otro lado, que el propio juego nos ofrezca la posibilidad de jugar con un escenario diferente, es decir, que la disposición inicial sea diferente o que el desarrollo de la partida genere situaciones diferentes esa sensación que en función de cómo cambian las acciones de los jugadores durante la partida nunca habrá dos partidas iguales y siempre tendré la posibilidad de mejorar mi estrategia para ganar. Si nos encontramos con un juego que de base no tiene o tiene muy poca rejugabilidad o que al acabar no apetece volver a jugar, no cumple con el propósito motivador ni emocional y, por lo tanto, puede ser muy

potente matemáticamente, pero no conseguirá asentar los conocimientos trabajados.

- Los alumnos deben tener **las normas claras** antes de la primera partida. Para esto en función del nivel educativo la explicación de las mismas se realizará de forma diferente: las explicaremos nosotros antes de empezar, las leerán los alumnos en el aula y resolveremos dudas, las leerán los alumnos en casa y las explicaran a sus compañeros, las consensuaran, …

Deberemos evitar juegos con normas muy complejas, que requieran mucho tiempo de explicación o que sean poco claras, o deberemos adaptarlas.

- Intentaremos evitar los juegos que son 100% azar o aquellos que sean demasiado desequilibrados en base al conocimiento de los alumnos. Aunque esto podríamos solventarlo con grupos homogéneos.

- Juegos en los que se eliminan jugadores durante la partida no serán los más adecuados a no ser que las partidas sean relativamente cortas o los jugadores puedan reincorporarse.

- El **número de jugadores** es un factor importante a tener en cuenta por varios motivos, el primero es que si buscamos juegos de dos jugadores necesitaremos muchas copias o tener varios juegos diferentes en el aula para que puedan jugar todos los alumnos. Otro motivo es el entreturno, aquellos juegos que permitan jugar a varios jugadores a la vez de manera dinámica funcionan algo mejor que aquellos en los que hay entreturnos largos.

Una opción para reducir la necesidad de copias de juegos sin reducir el número de jugadores es jugar por parejas o tríos. Puede que esto conlleve una ralentización del juego, pero incrementa de manera exponencial el análisis de las situaciones, las opciones, una mejor búsqueda de la estrategia a utilizar y trabajamos gran cantidad de competencias y habilidades más allá de las matemáticas.

- Será importante tener en cuenta el conocimiento que tenemos sobre nuestro grupo clase, en algunos grupos funcionarán muy bien los juegos competitivos y sin

ningún conflicto y en otros grupos en cambio necesitaremos rebajar esa competitividad llevando juego cooperativos o colaborativos.

- **Reflexión**, es sumamente importante que al acabar la sesión de juego dediquemos unos minutos a reflexionar con los alumnos sobre el objetivo pedagógico que nos habíamos marcado. Es importante que los alumnos sean conscientes del aprendizaje producido, ya que sino corremos el riesgo de que los alumnos salga de la sesiones con la idea de haber estado jugado por jugar.

Una vez tenemos la previa clara y preparada, en el aula deberíamos seguir una temporización similar a esta propuesta:

- De 5 a 15 minutos: disposición grupal e instrucciones. Para comprobar la comprensión de las normas, se realizarán un par de jugadas.

- De 20 a 35 minutos: tiempo de juego. Durante el juego se pueden ir tomando nota de situaciones que se quieran comentar en el periodo de reflexión y se pueden ir haciendo preguntas que puedan servir de autoreflexión. Es importante que las interacciones durante el periodo de juego sean sobre el propio juego, en la fase de formalización haremos reflexión sobre el contenido que queremos trabajar.

- De 15 a 20 minutos: reflexión y formalización. Este es el momento de formalización, de pasar del juego al contenido que queremos trabajar. Es el momento de poner de manifiesto los objetivos de aprendizaje que perseguimos y compartirlos con los alumnos. Al final de este periodo es conveniente acabar con unas conclusiones claras sobre los contenidos trabajados que han de quedar por escrito. Las reflexiones que llevaremos a cabo es recomendable hacerlas a partir de preguntas que lleven a los alumnos a ir más allá del propio juego: ¿Qué hemos estado practicando? ¿Qué dudas teníais que ahora ya no tenéis? ¿Qué estrategias habéis usado? ¿Se podría mejorar? A partir de una situación del juego se puede intentar resolverla reflexionando entre todos.

Si queréis usar el juego como herramienta podéis consultarnos y consultar nuestras maletas pedagógicas.

Como grupo, nos hemos marcado el objetivo de conseguir seleccionar los juegos adecuados para cubrir todo el currículum de matemáticas en los diferentes niveles y cursos.

¿Por qué juegos de mesa?

Porque están pensados para entretener, la parte motivadora ya la tienen diseñada. Además, de manera intrínseca, el propio juego jugado por jugar, genera unos aprendizajes que todos debemos tener: comprensión y seguimiento de normas, respeto del turno, capacidad de adaptación y negociación, gestión de la frustración en la derrota y humildad en la victoria, análisis de situaciones para establecer estrategias ganadoras, optimización de las estrategias ganadoras y desarrollo de pensamiento divergente, convergente y computacional.

Porque es un material fácilmente accesible que se puede tener en casa. Si se conoce el juego antes de la sesión de aula, los alumnos explican las normas y dinámicas a los otros compañeros. Si se usa después de la sesión de clase, potencia lo que hemos trabajado en el aula.

Porque es fácil de llevar al aula: normas claras y establecidas, se puede repetir muchas veces sin mucho problema, al acabar la motivación generada facilita la introducción de los conceptos que se han querido trabajar.

Referencias

Aplicación de juegos en el aula (sf) http://devir.es/juegos-en-el-aula/

Badillo, E., Edo, M., Deulofeu, J. (2012). L'adquisició de competències matemàtiques d'alumnes de primària en contextos de jocs de taula i resolució de problemes. *NouBiaix,* 30, 29-43.

Corbalán, F., Deulofeu, J. (1998). Juegos manipulativos en la Enseñanza de las Matemáticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 7, 71-80.

Deulofeu, J. (2016). Juegos de mesa para aprender matemáticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 74, 7-13.

Navarro, A., Deulofeu, J. (2016). Aprendiendo a resolver problemas en un contexto de juegos de estrategia. *SUMA* 82, 9-17.

Oliver, Diana (27 agosto 2018) Juegos de mesa en el aula: jugar para aprender. https://elpais.com/elpais/2018/07/27/mamas_papas/1532673605_733545.html

VV.AA. (27 abril 2019) Aprendizaje basado en juegos. https://es.wikipedia.org/wiki/Aprendizaje_basado_en_juegos#cite_ref-19

Jordi Deulofeu Els jocs de taula a l'escola: ¿per a què? ¿quins? ¿com? ¿quan? Setembre 2017

CoP029 Funciones y curvas con GeoGebra por toda la ciudad

María del Carmen García González
mcarmengon@gmail.com
Asociación Matemáticas, Creatividad y GeoGebra (AMCG). Profesora de Matemáticas jubilada.

Núcleo temático: Procesos. Conexiones.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

En este trabajo se presentan una secuencia didáctica y un itinerario de modelización de funciones con *GeoGebra* por la ciudad de Las Palmas de Gran Canaria y la isla de Gran Canaria, con el fin de abordar varios aspectos del currículo de la Educación Secundaria; ya que se considera que el programa *GeoGebra* permite, mediante la modelización matemática, realizar conexiones necesarias entre la resolución de problemas y el pensamiento computacional. Se muestra cómo acometer con el programa la construcción de objetos del entorno en 2D y en 3D, mediante la parametrización de curvas y superficies.

Palabras clave: Modelización, Funciones, GeoGebra, 3D, Parametrización.

1. Introducción

La modelización matemática y *GeoGebra* están convirtiéndose, en la actualidad, en un binomio imprescindible en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En particular, para la modelización de objetos reales del entorno, dentro de la perspectiva STEAM, en la conexión entre el plano y el espacio y para el desarrollo de la creatividad.

(Trigueros-Gaisman, 2006, citado en Muñoz Casado, 2022) señala que la modelización matemática propone llevar al aula no sólo problemas para establecer

modelos que analicen situaciones reales, sino también utilizarla para el estudio de las matemáticas.

En las conclusiones del II Seminario de GeoGebra, organizado por la Federación Española de Profesores de Matemáticas, celebrado en Castro Urdiales en 2016 (Alonso Liarte, 2017), se recoge que, dado que los problemas de la vida cotidiana son multidisciplinares, se necesita la inclusión de múltiples herramientas y enfoques, proponer problemas abiertos, invertir los papeles entre los docentes y el alumnado e introducir *GeoGebra*, para desarrollar un aprendizaje creativo y sólido.

En este trabajo se propone la realización de un proyecto en la Educación Secundaria consistente en un itinerario por la ciudad, o el entorno, modelizando objetos reales, descubriendo y visualizando en ellos las distintas funciones que se introducen en esta etapa educativa. Para ello, se muestra una posible secuencia didáctica con el fin de introducir los comandos de *GeoGebra* necesarios, así como la parametrización de curvas y superficies, indispensables para la consecución de dicha modelización.

2. La modelización en el currículo de matemáticas

Los pilares metodológicos en los que se sustenta la propuesta curricular de la nueva ley LOMLOE (2020) son tres: el razonamiento matemático, la resolución de problemas y el pensamiento computacional. Moreno Verdejo (2022) subraya que hablar de competencia matemática significa hablar de razonamiento matemático y de resolución de problemas. La modelización matemática es el nexo de unión entre la resolución de problemas y el pensamiento computacional; ya que comparten perspectivas y procesos mentales similares que el alumnado necesita para tener éxito en un mundo tecnológico.

En el documento Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en la Educación no Universitaria, (Calvo y otros, 2021) se señala que, en el desarrollo de la comprensión matemática en estos niveles, los contextos y los modelos poseen un papel relevante. A su vez, las grandes ideas matemáticas (patrones, modelo, variable, relaciones y funciones, movimientos y transformaciones, distribución,

incertidumbre, magnitud, etc.) vertebran la continuidad y las conexiones dentro de las matemáticas.

Asimismo se indica que saber construir modelos matemáticamente es una competencia matemática que se refiere a la capacidad de ir del mundo real al modelo y del modelo al mundo real, obteniendo e interpretando los resultados.

En los Reales Decretos 217/2022 y 243/2022 que regulan las enseñanzas mínimas de la LOMLOE en las Educaciones Secundaria Obligatoria y de Bachillerato, se contempla la modelización de situaciones reales y el uso de programas de geometría dinámica como *GeoGebra*.

En dos de las competencias generales se menciona expresamente el trabajo por proyectos y el diseño de prototipos creativos e innovadores.

En las competencias específicas de las materias, tanto en Secundaria como en los Bachilleratos de Ciencias y en el General, éste último de nueva creación, se especifican la modelización y la utilización de conexiones entre los diferentes elementos matemáticos para desarrollar una visión integrada de las matemáticas y aplicarlas en situaciones reales y diversas.

Así, en el sentido espacial se señala:

Construcción de figuras geométricas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada…).

En el sentido algebraico, y dentro del pensamiento computacional:

Formulación y análisis de problemas de la vida cotidiana mediante programas y otras herramientas.

Y como parte del sentido socioafectivo:

Estrategias de fomento de la curiosidad, la iniciativa, la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas.

3. La modelización de funciones con GeoGebra

H.O. Pollack (citado en Alsina, 2018) describe la secuencia a seguir en los procesos de modelización matemática:

1. Se identifica algo en el mundo real que queremos conocer, hacer o entender. El resultado es una cuestión en el mundo real.

2. Seleccionamos "objetos" que parecen importantes en la cuestión del mundo real e identificamos las relaciones entre ellos. El resultado es la identificación de conceptos clave en la situación del mundo real.

3. Decidimos lo que consideraremos o lo que ignoraremos sobre los objetos y su interrelación. No se puede tomar todo en cuenta. El resultado es una versión idealizada de la cuestión original.

4. Traducimos la versión idealizada a términos matemáticos y obtenemos una formulación matematizada de la cuestión idealizada. A esto lo llamamos un modelo matemático.

5. Identificamos los apartados de la matemática que pueden ser relevantes para el modelo y consideramos sus posibles contribuciones.

6. Usamos métodos matemáticos e ideas para obtener resultados. Así surgen técnicas, ejemplos interesantes, soluciones, aproximaciones, teoremas, algoritmos…

7. Tomamos todos estos resultados y los trasladamos al principio. Tenemos entonces una teoría sobre la cuestión idealizada.

8. Ahora debemos verificar la realidad. ¿Creemos en el resultado? ¿Son los resultados prácticos, las respuestas razonables, las consecuencias aceptables?

a) Si la respuesta es sí, hemos tenido éxito. Entonces el siguiente trabajo, que es difícil pero extraordinariamente importante, es comunicar lo encontrado a sus usuarios potenciales.

b) Si la respuesta es no, volvemos al inicio. ¿Por qué los resultados no son prácticos o las respuestas no razonables o las consecuencias inaceptables? Seguramente el modelo no era correcto. Examinamos lo que pudimos hacer mal y porqué y empezamos de nuevo.

En *GeoGebra*, y gracias a su versatilidad, capacidad y diversidad de comandos en la ejecución de proyectos que comportan la modelización de funciones a partir de

objetos reales, actuaremos siguiendo estos mismos pasos, teniendo en cuenta las características del programa.

Una posible secuencia didáctica para modelizar funciones con *GeoGebra* consistiría, en primer lugar, observar objetos del entorno, identificar la función a la que puede corresponder y fotografiarlos. A continuación, insertar la imagen en la vista 2D de *GeoGebra*, e intentar encontrar un modelo funcional que se ajuste. Esta operación la podemos realizar con varios métodos. Si conocemos el modelo, mediante la creación de deslizadores para encontrar sus parámetros o, en el caso de no tenerlo tan claro, dibujando puntos sobre el propio contorno del objeto que queremos modelizar, crear una lista de puntos y efectuar un ajuste polinómico. En otro caso, siempre puede utilizarse el comando *spline*, aunque la ejecución del programa se ralentiza. A continuación, si *f(x)* es nuestra función, definiremos los límites de la variable independiente entre los que variará. Si estos puntos son A y B, escribiremos en la línea de entrada: Si(x(A)<x<x(B), f). Con esta simple construcción se pueden modelizar muchos objetos y estudiar distintas propiedades (extremos, raíces, optimización, etc.). Si queremos proseguir con la vista 3D, podemos definir, en los ajustes de la vista gráfica 3D, el eje Y como eje vertical. A partir de ahí, si decidimos continuar con el estudio (por ejemplo, crear una superficie de revolución), estaremos sujetos a que nuestra función está definida en el plano XY. Si optamos por la superficie de revolución, se efectuará alrededor del eje X.

3.1 La parametrización: la clave

En el caso de que nuestro proyecto pretenda modelizar un objeto en la vista 3D, o bien queramos profundizar en el trabajo en 2D, tendremos que actuar de otra forma: parametrizar la función de partida para crear una curva paramétrica. Para ello, utilizaremos el comando:

Curva(Expresión, Expresión, Expresión, Parámetro, Valor inicial, Valor final)

Adecuaremos el número de expresiones a dos, según nos convenga, si es en 2D.

Parametrizar una función no es más que crear otra función γ de R en R^3 (o en R^2):

$$\gamma: [a,b] \rightarrow R^3$$
$$t \rightarrow (x,y,z)$$

Imagen 1. Parametrización.

La parametrización más sencilla es la de un segmento. Si los extremos son los puntos A y B, escribiremos: Curva(t B + (1 - t) A, t, 0, 1).

La parametrización de una recta, como curva, utilizaría el comando antes descrito. Por ejemplo, si queremos dibujar una recta que varíe entre dos puntos A y B de abscisas x(A)=2, x(B)= 4, en el plano XZ, sería: Curva(t, 0, 2t + 1, t, 2, 4).

A su vez, podremos utilizar el comando "curva" para construir las que necesitemos; para ello bastará escribir en función de t, la función que hayamos creado en 2D.

Puede mostrarse con *GeoGebra* qué significan las distintas parametrizaciones y cómo se construyen (García González, 2022):

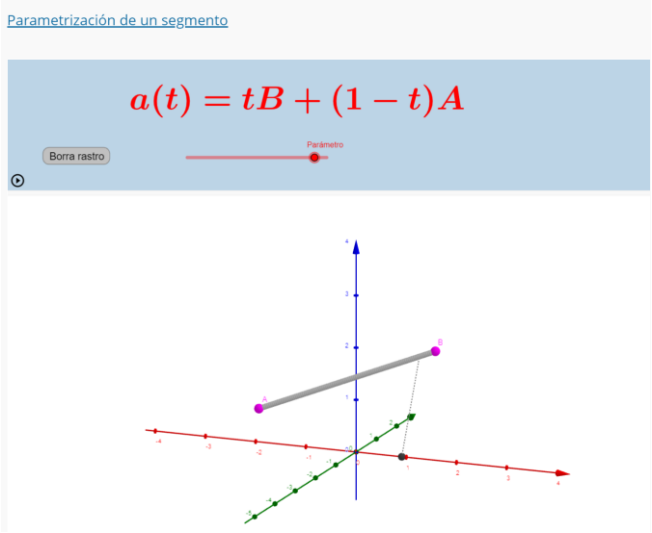


Imagen 2. Parametrización de un segmento.

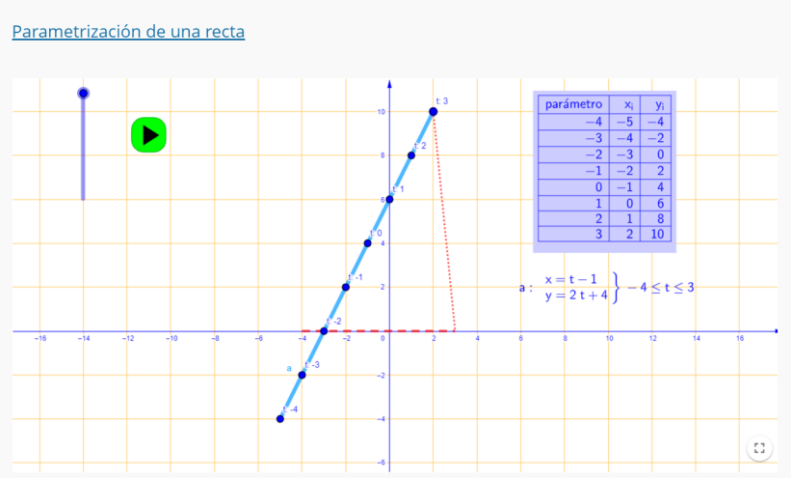


Imagen 3. Parametrización de una recta

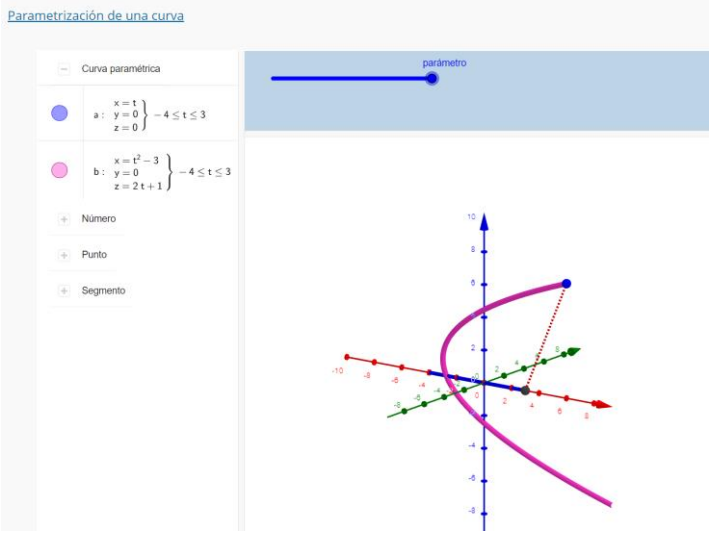


Imagen 4. Parametrización de una curva.

3.2 Construyendo prototipos

A partir de lo expuesto en el apartado anterior, se pueden realizar muchas construcciones en 3D, simplemente utilizando las herramientas y los comandos que nos facilita el programa y guiados, por ejemplo, por las enseñanzas y creaciones de Ancochea (2022) y Arranz (2022).

Se considera que existen dos instrucciones imprescindibles para este trabajo: el comando secuencia y la división de un segmento (o una curva, en general) en *n* partes iguales:

Secuencia(<Expresión>, <Variable>, <Valor inicial>, <Valor final>)

Por ejemplo, creamos un triángulo, que se llame t1 y si lo queremos rotar 45º, cuatro veces alrededor del punto C, introducimos en la línea de entrada:

Secuencia(Rota(t1, i *45º, C), i, 1, 4).

Para la construcción de los n puntos en una curva *a(t)*, también utilizaremos el comando secuencia; pero esta vez, después de crear primero un deslizador entero n, escribiremos:

Secuencia(a(i / n), i, 0, n, 1 / n)

De esta forma se pueden crear prototipos interesantes, tales como una pirámide de base cuadrada mediante cuadrados que se muevan por los segmentos paramétricos de dos aristas consecutivas, para después utilizar otra secuencia que las rote. Mediante este tipo de construcciones, podremos calcular el volumen del objeto. En el caso de la pirámide el volumen lo da el propio programa, pero si es otro objeto irregular, se puede calcular con esta técnica. En el caso de la pirámide, podría interesar estimar el error cometido utilizando los dos métodos.

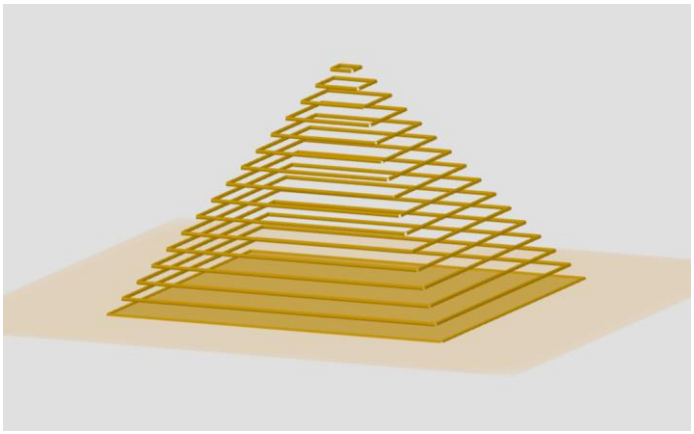


Imagen 5. Pirámide de base cuadrada.

Para las superficies en Secundaria, se propone construir superficies de revolución y superficies regladas. Las primeras se podrán abordar en la Secundaria Obligatoria y las superficies regladas en el Bachillerato, o en ambas, según los niveles del alumnado.

Para las superficies de revolución, utilizaremos el comando:

Superficie(<Curva>, <Ángulo de rotación (en sentido antihorario)>, <Lado (semi/recta o segmento)>)

Por ejemplo, en la imagen 6, la curva se ha creado parametrizando una función exponencial y se la ha hecho rotar 360º alrededor del Eje Z:

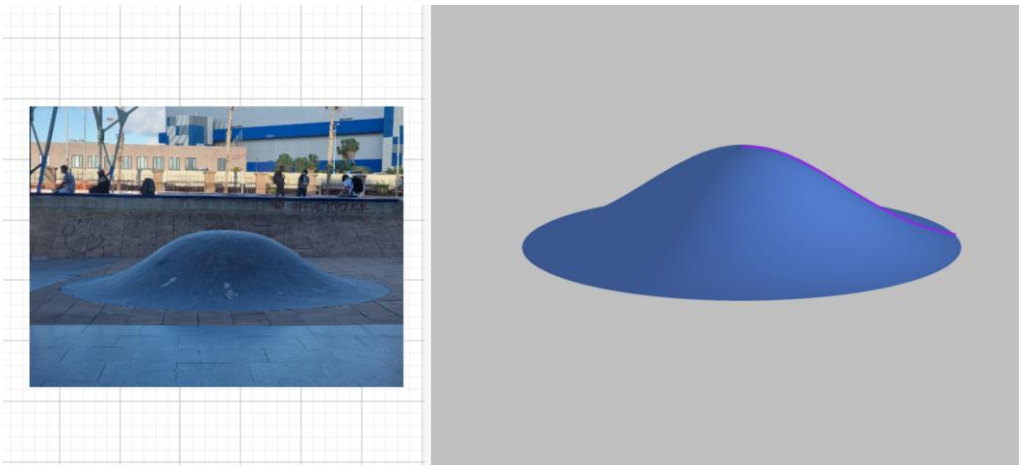


Imagen 6. Gaussiana en el skate.

En el caso de las superficies regladas, si las curvas entre las que vamos a crearla son *b(t)* y *c(t)*, y ambas tienen sus valores comprendidos entre t_1 y t_2, entonces la instrucción será:

Superficie(k b(t) + ((1-k) c(t), k,0,1, t, t_1, t_2)

En la imagen 7 se ha creado la superficie reglada entre dos curvas sinusoidales:

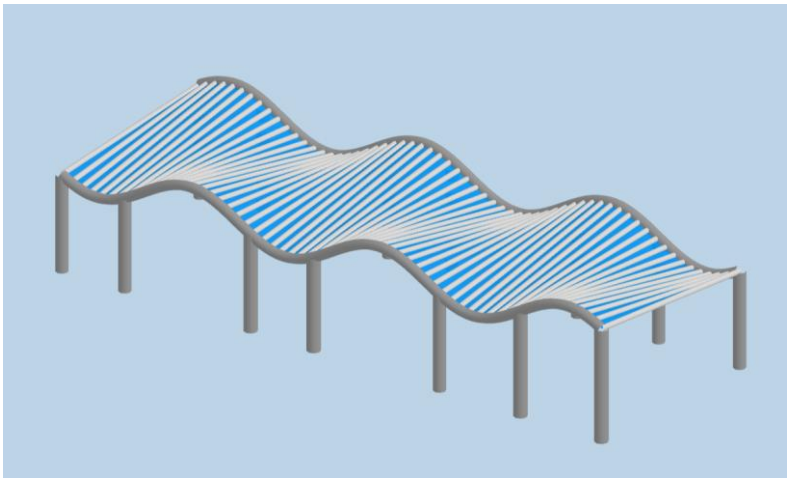


Imagen 7. Superficie reglada en Torremolinos.

De la misma forma que se hizo con las curvas; se puede definir la parametrización de superficies, en este caso, como una función de R^2 en R^3 :

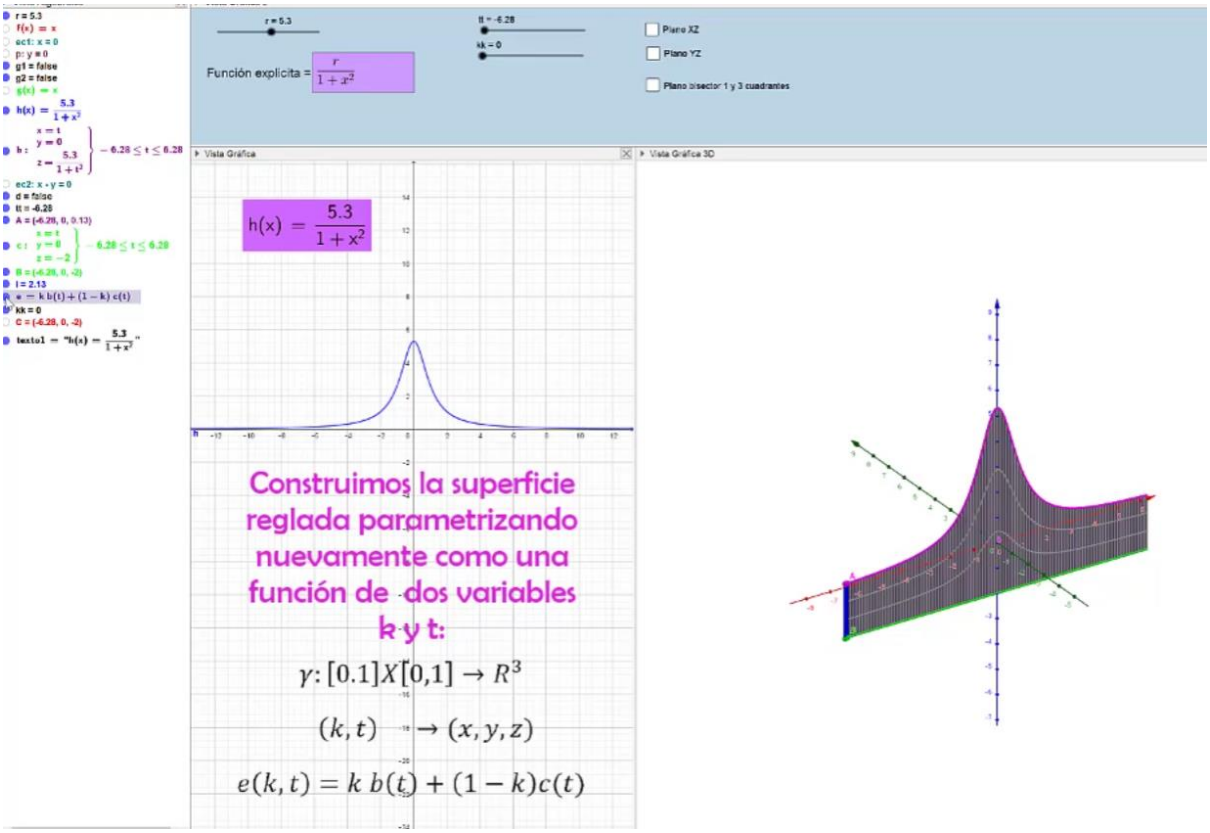


Imagen 8. Parametrización de superficies regladas.

A veces, cuando las curvas en cuestión tienen valores distintos de los parámetros, hemos de ajustar sus límites. Tener en cuenta los contenidos auxiliares mostrados en el libro de *GeoGebra* (García González, 2022).

4. Ejemplos de construcciones del itinerario

A continuación, se presentan algunos ejemplos de la ruta matemática por la ciudad de Las Palmas de G.C. y de la isla de Gran Canaria, utilizando diferentes modelos funcionales, (García González, 2022):

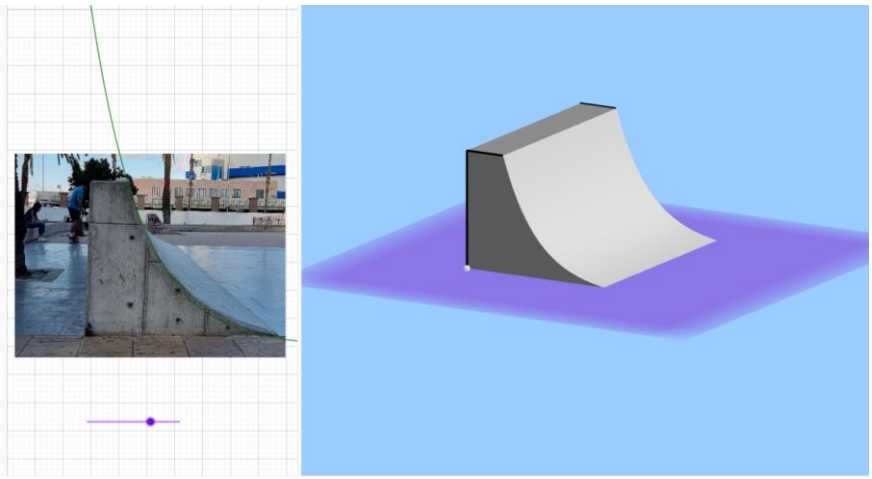


Imagen 9. Exponencial en el skate.

Imagen 10. Sinusoide en Vegueta.

Imagen 11. Parábola y racional en reja del mercado de Vegueta.

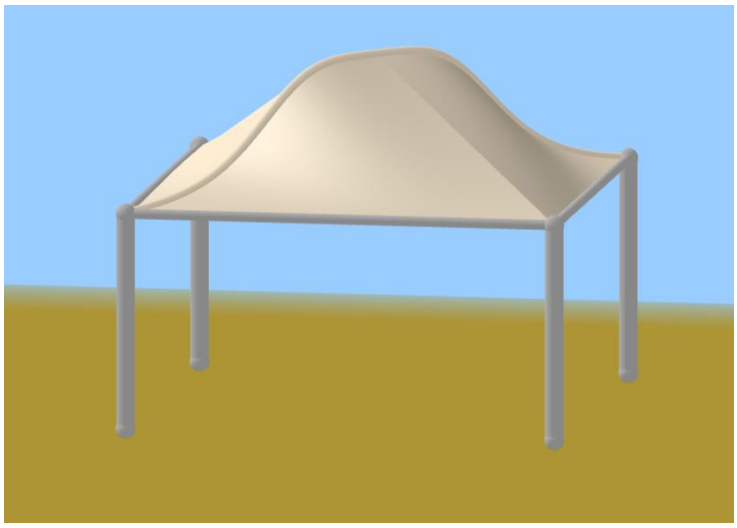


Imagen 12. Racional en la playa de Las Canteras.

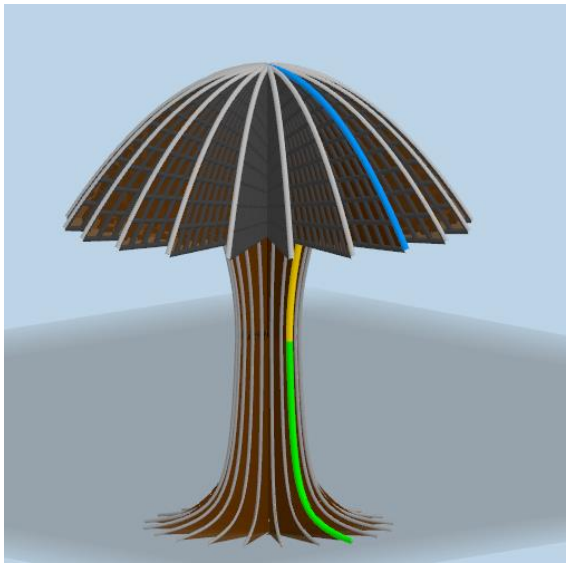


Imagen 13. Función a trozos en Telde.

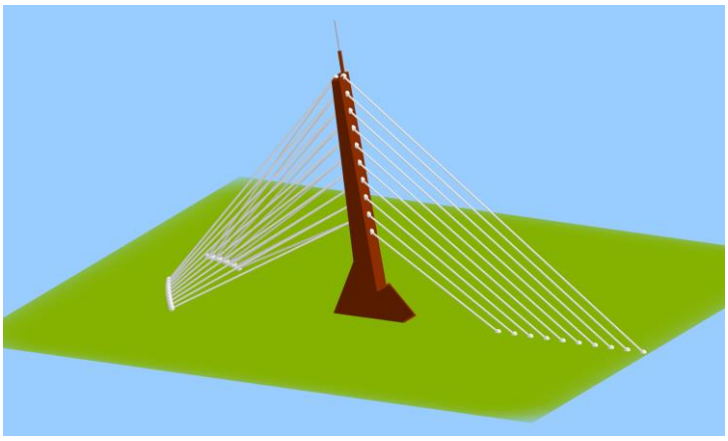


Imagen 14. Rectas en el puente de la Ballena.

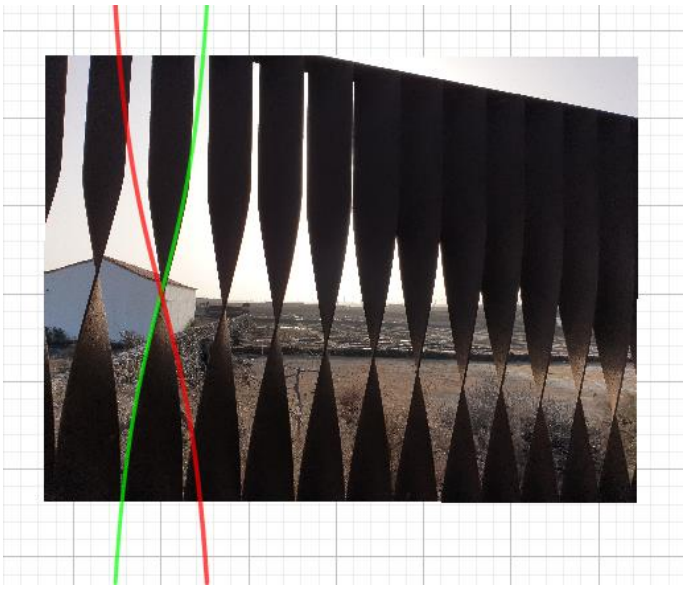


Imagen 15. La tangente en Las Salinas de Arinaga.

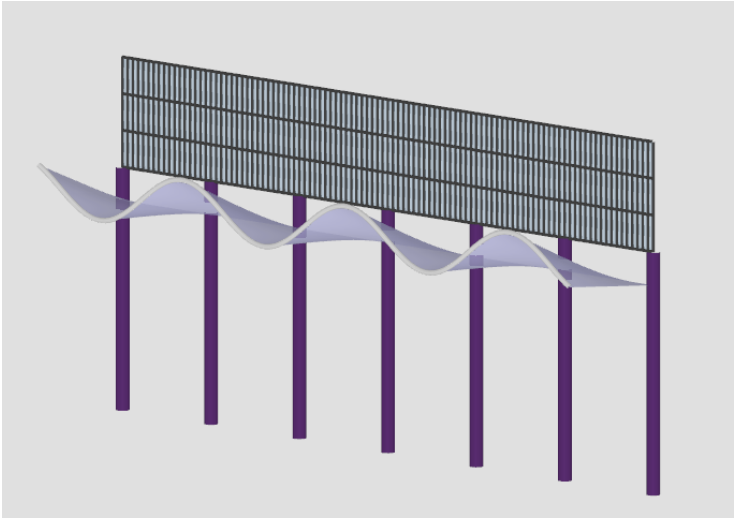


Imagen 16. La función seno en el Edificio de la Jefatura Superior de La Policía de Las Palmas de G.C.

5. Conclusiones

A la vista de lo que señalan muchos autores, *GeoGebra* permite, mediante la modelización matemática, realizar conexiones necesarias entre la resolución de problemas y el pensamiento computacional.

Teniendo en cuenta que el currículo de Matemáticas promueve tanto la modelización matemática como la conexión con el entorno y el trabajo con programas de geometría dinámica, creemos que la secuencia didáctica y el tipo de

itinerario de modelización de funciones con *GeoGebra* por la ciudad que aquí se presentan, pueden ser considerados como una propuesta a tener en cuenta para llevar a cabo estos aspectos centrales del currículo en la Educación Secundaria.

Referencias

Alonso Liarte, R. (2017). Crónica del Segundo Seminario Enseñar matemáticas con GeoGebra: retos, roles, resultados. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/21037/

Alsina, C. (2018). Elogio de la modelización matemática hoy. *Revista Educan*. Recuperado de: http://www.revistaeducan.es/2018/01/elogio-de-la-modelizacion-matematica.html.

Ancochea, B. (2022). Recuperado de: https://www.geogebra.org/u/bernat_geogebra

Arranz, J.M. (2022). Recuperado de: https://www.geogebra.org/u/arranz

Calvo, C. *y otros* (2021). Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria. Recuperado de: https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf.

García González, M.C. (2022). Taller Jornadas ACG febrero 2022. Recuperado de: https://www.geogebra.org/m/x269mjnh

LOMLOE. Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. BOE, núm. 340, de 30 de diciembre de 2020, págs. 122868 - 122953. Recuperado de: https://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2020-17264.

Moreno Verdejo, A. (2022). Principios metodológicos para el desarrollo curricular. Curso Bases nuevo currículo. FESMP. Recuperado de: https://youtu.be/TkQj-B7Sh_o

Muñoz Casado, J.L. (2022). Modelización matemática. Recuperado de: https://www.elcuadradomagico.es/jlmunoz/modelizacion/

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Recuperado de: https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con

Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. Recuperado de: https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/04/05/243/con

CoP030 Retos en un entorno virtual de aprendizaje de matemáticas propedéuticas para adultos

Joana Villalonga Pons
jvillalongapo@uoc.edu
Universitat Oberta de Catalunya
Mireia Besalú
mbesalu@ub.edu
Universitat de Barcelona
Rosa Presas
rpresas@uoc.edu
Universitat Oberta de Catalunya
Teresa Sancho
tsancho@uoc.edu
Universitat Oberta de Catalunya

Núcleos temático: Procesos, Recursos para el aula

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Bachillerato y Universidad (Ciencia de Datos Aplicada; Ingeniería Informática e Ingeniería de Tecnologías; Servicios de Telecomunicación).

RESUMEN

Una de las últimas actividades implementadas en el curso propedéutico *Iniciación a las matemáticas para la ingeniería* que, de acuerdo con el modelo educativo de la UOC, se imparte a distancia y de manera asincrónica, son *Los Retos*. Se trata de una actividad complementaria y no evaluable, que invita a los alumnos a resolver un problema y compartir su resolución, con el objetivo de promover, en particular, el compromiso activo en el aula virtual.

Se presenta el estudio exploratorio sobre la impresión y actitud de los estudiantes en relación a su implementación en las 6 aulas (330 estudiantes) donde la materia se impartía en español. Los datos, procedentes de la encuesta realizada a los estudiantes y de su actividad en el Foro, muestran el alcance del objetivo al tiempo que describen el perfil de estos estudiantes, en cuanto a sus condiciones y modos de aprendizaje, aspecto en que conviene seguir indagando.

Palabras clave: Educación Matemática Universitaria, Educación Matemática en Adultos, Entorno de Aprendizaje Virtual, Active Engagement

1. Introducción

En el presente artículo se describe una de las últimas actividades implementadas en el curso *Iniciación a las matemáticas para la ingeniería* que se ofrece como asignatura optativa en tres de los 33 programas de grado que actualmente ofrece la Universitat Oberta de Catalunya (UOC): Ciencia de Datos Aplicada, Ingeniería Informática e Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación.

La UOC fue fundada en 1995 y es pionera en la educación superior a distancia. Su modelo organizativo y educativo se basa en un enfoque a distancia asincrónico de manera que los docentes no tienen que coincidir en horarios con los alumnos para el desarrollo de su aprendizaje. Las actividades de docencia, investigación y gestión universitaria se desarrollan a través del Campus Virtual (Sancho y Masià, 2007).

Los resultados académicos de los diferentes programas de ingeniería que ofrece la UOC muestran que los conocimientos previos de los estudiantes suelen ser insuficientes, les cuesta entender los contenidos y su nivel de motivación es bajo. (Sancho y Masià. 2007). Nuestra experiencia en esta materia nos ha llevado a desarrollar un proceso de innovación docente contínuo en el área de matemáticas de las carreras de ingeniería. Su principal objetivo se centra en diseñar y desarrollar un entorno virtual que facilite el proceso de aprendizaje de contenidos matemáticos básicos para futuros estudiantes de ingeniería de la UOC.

El curso *Iniciación a las matemáticas para la ingeniería* se sitúa en este contexto y surge para garantizar que los estudiantes alcancen el nivel de conocimientos necesarios para desempeñar con éxito su actividad profesional. Los programas de estudios de todos los cursos de ingeniería, particularmente los de telecomunicaciones, incluyen muchas materias que requieren una comprensión de los conceptos y procesos matemáticos. Las materias de matemáticas básicas de estos programas cubren los fundamentos del álgebra lineal y el cálculo diferencial y proporcionan las herramientas necesarias para resolver ecuaciones diferenciales

simples (Sancho y Masià. 2007). Se trata entonces de una asignatura propedéutica que tiene como objetivo capacitar a los estudiantes para poner en práctica de manera crítica la terminología, las técnicas y los contenidos fundamentales del álgebra y el análisis matemático que son imprescindibles en las materias de los grados respectivos.

El curso se distribuye en dos bloques, Álgebra, que abarca las seis primeras semanas, y Análisis, que se desarrolla durante las diez últimas semanas del curso. El proceso de seguimiento y evaluación se fundamenta en el trabajo personal de cada estudiante y presupone la autenticidad de la autoría y la originalidad de los ejercicios realizados. La forma de evaluar el progreso de cada estudiante es a través de la evaluación contínua. Es decir, no se realiza ningún tipo de prueba final ni existe ninguna convocatoria de recuperación. Cada semana, el estudiante debe trabajar unos contenidos concretos y realizar un cuestionario de evaluación en la plataforma Moodle. El formato de estos cuestionarios es estable: se inicia con cinco cuestiones a las que se debe dar o marcar la respuesta correcta, y una última cuestión abierta, con doble valor a las anteriores y obligatoria, en la que el estudiante debe presentar no solo la solución final, sino el desarrollo con el que justifica su respuesta. El tiempo de dedicación estimado para cada tema es de 10 horas semanales y los estudiantes reciben la valoración de su prueba en un tiempo máximo de tres días al cerrarse el periodo de entrega.

El seguimiento del curso es totalmente a distancia y flexible. No contiene sesiones síncronas e implica un trabajo personal y adaptado a las disponibilidades de cada estudiante. El peso de la evaluación recae en el envío y calidad de la prueba de evaluación semanal: para superar el curso es necesario que tanto la media de cuestionarios como la media de las preguntas abiertas estén aprobadas. Además se tiene en cuenta la participación en el Foro de los estudiantes, tanto en cantidad como en calidad y finalidad de los mensajes, a la hora de asignar posibles matrículas de honor.

2. Estudiantes en la educación universitaria

En el contexto de la educación universitaria, conviene una distinción entre estudiante universitario tradicional, que responde al estereotipo de un aprendiente, de entre 18 y 22-23 años que dedica el 100% de su tiempo laboral a su formación universitaria, al estudiante universitario no tradicional. Interpretaciones actuales describen un estudiante universitario no tradicional como el aprendiente que responde a una o más de las características siguientes, tal y como recopilan Jameson y Fusco (2014): no accede a la educación universitaria en el mismo año en que completa la educación secundaria, asiste a tiempo parcial durante al menos parte del año académico, trabaja a tiempo completo, se considera financieramente independiente de un tutor legal, tiene dependientes que no sean su cónyuge, es padre soltero y/o no tiene la certificación de escuela secundaria.

De manera paralela conviene describir qué se entiende por estudiante adulto, puesto que su definición es nebulosa atendiendo a, al menos, el aspecto biológico, legal, social y psicológico (FitzSimons y Godden, 2000). En este artículo se considera por adultos aquellas personas que tienen una edad o un estatus en el que la educación es postobligatoria en su sociedad particular.

En el campo de la educación matemática, la investigación en educación de adultos es realmente una novedad. El término Educación Matemática de/en Adultos (AME) no se formalizó/estableció hasta el CERME11, celebrado en 2019, con la formación del grupo de trabajo TWG17 (Hoogland et al. 2019). Los investigadores involucrados destacan que este concepto gira en torno al alumno y no al nivel de matemáticas que se estudia, y que varía de un país a otro. Se apunta que la educación matemática para adultos entrelaza el aprendizaje de las matemáticas con el lenguaje y el diálogo, el afecto y el trato con la realidad de los alumnos, pero también con las estructuras de poder social y los conceptos sociológicos como la equidad, la inclusión y el autocontrol (Hoogland et al. 2019). Las referencias consultadas (FitzSimons y Godden, 2000; Jameson y Fusco, 2014) muestran que la conducta académica entre estos dos tipos de estudiantes es también diferente, tanto por los potenciales que muestran como por las dificultades con las que se encuentran.

La teoría de la andragogía, entendida como “el arte y la ciencia de ayudar a los adultos a aprender” (Knowles, 1990) considera el aprendizaje de adultos como parte de un aprendizaje continuo que tiene lugar a lo largo de toda la vida (McDonough, 2014; Salleha et al. 2015). Las observaciones de Knowles (1990) junto con los estudios que se han llevado a cabo a posteriori, revelan que los estudiantes que se encuentran en la situación no tradicional se caracterizan por (Jameson y Fusco, 2014; Salleha et al. 2015):

- ser autónomos y autodirigidos
- haber acumulado una base de experiencias de vida y conocimientos
- estar orientados a objetivos
- estar orientados a la relevancia
- ser prácticos
- la necesidad de sentirse tratados como iguales en experiencia y conocimiento y se les debe permitir expresar sus opiniones libremente en clase.

Si bien estos rasgos parecen justificar una motivación interna mayor en estos estudiantes que en los estudiantes tradicionales, no son escasos los aspectos que pueden generar retrasos, dificultades o deficiencias en su proceso de aprendizaje. Entre ellas se encuentran barreras personales, profesionales, institucionales y afectivas (Jameson y Fusco, 2014; Salleha et al. 2015).

Por otro lado, se ha visto que no solo la alfabetización matemática es clave en el aprendizaje, sino también la actitud de los propios estudiantes frente a la materia. Se constata que el llamado *active engagement,* al cual nos referiremos como compromiso activo, de los estudiantes adultos es fundamental para que se produzca el aprendizaje (McDonough, 2014). De acuerdo con las referencias McDonough (2014) el compromiso activo corresponde a la inversión de tiempo y energía que los estudiantes adultos invierten en actividades educativas útiles y el esfuerzo que las instituciones dedican a utilizar prácticas educativas eficaces; resulta particularmente crítico en los cursos a distancia y parece estar compuesto por:

- aprendizaje centrado y colaborativo
- participación en actividades académicas desafiantes, interacciones regulares con instructores y compañeros

- creencia de ser respetado y apoyado por la comunidad universitaria de aprendizaje.

En este sentido McDonough (2014) asegura que lo más probable es que los estudiantes adultos participen activamente en el aprendizaje cuando se les de alguna opción y control sobre su proceso de aprendizaje puesto que, enmarca en su estudio, y se involucra activamente en el proceso al hacer una "inversión psicológica" en el aprendizaje. La motivación y el modo de aprendizaje parecen ser claves en este sentido (Jamesson y Fusco, 2014; McDonough, 2014; Salleha, 2015). Zhou y Wang (2019) enfatizan que el aprendizaje está muy influenciado por la motivación y las estrategias de aprendizaje autorreguladas de los estudiantes. Muestran la existencia de relaciones positivas entre los estilos de aprendizaje y el rendimiento en matemáticas (Middleton y otros, 2013), así como una relación positiva entre las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento (Bramlett y Herron, 2009). Sin embargo, hay escasez de trabajos que investiguen la relación entre los estilos de aprendizaje y las actitudes hacia las matemáticas (Middleton y otros, 2013). Identificar la preferencia de estilos de aprendizaje de los estudiantes, ofrece beneficios tanto al estudiante como al instructor para mejorar el rendimiento del aprendizaje (Anuar et al., 2020).

3. Experiencia

Al diseñar un curso de matemáticas para la ingeniería en un entorno virtual son distintos los aspectos a considerar. Destacan el nivel de conocimientos previos de los alumnos (Sancho y Masià, 2007) así como el compromiso activo (McDonough, 2014). Paralelamente, se enfatiza que para que los estudiantes adultos tengan éxito académico se deben contemplar los principios teóricos y las estrategias de aprendizaje de adultos en la preparación de los cursos (McDonough, 2014).

Entre los materiales para preparar cada uno de los temas del curso que tratamos en este artículo se encuentran los apuntes teóricos básicos, vídeos explicativos, ejemplos virtuales, resúmenes, explicaciones virtuales, cuestionarios Moodle de autoevaluación y el Foro de discusión, además de la posibilidad de contactar con el consultor de curso a través del correo electrónico. Si bien el Foro de discusión se ve

activo al inicio del curso, su uso va disminuyendo a medida que avanza el curso y, en caso de ser muy activo, las intervenciones suelen concentrarse en cuestiones técnicas o prácticas del curso, y no tanto de la materia en sí. Con el objetivo de dinamizar este espacio de comunicación así como ofrecer a los estudiantes la oportunidad de desarrollar y redactar resoluciones no sólo en los cuestionarios de evaluación, y teniendo en cuenta el perfil de los estudiantes, se optó por integrar la actividad denominada “Retos”.

La actividad de los Retos se presenta en el Foro del aula durante la primera semana del curso como una actividad complementaria no evaluable, en la que, semanalmente, se propone un problema matemático relacionado con el tema en curso. Al inicio de cada unidad se abre un nuevo hilo en el Foro donde se publica el Reto de la semana. Los estudiantes disponen de una semana para hacer sus aportaciones en abierto siguiendo el mismo hilo. Sus aportaciones pueden ser de distinta índole: ideas de resolución, algún apunte a una resolución de otro compañero, peticiones de aclaraciones, felicitaciones, comentarios aclaratorios o complementarios, un resultado final o, como no, una posible resolución completa. En tal caso, hay la opción de escribir la resolución directamente en el Foro utilizando el editor de fórmulas que tiene integrado - y que coincide con el que se debe escribir la respuesta a la pregunta a desarrollar en los cuestionarios semanales de evaluación. El objetivo es que, entre todos los participantes, se llegue a la solución del reto pudiendo ver y entender distintas maneras de resolverlo. De previo y mutuo acuerdo entre los docentes de la asignatura, el docente responsable en cada aula puede hacer tres aportaciones en un margen de 1 o 2 días a lo largo de la semana (dar alguna pista, animar a los alumnos, hacer alguna reflexión), siendo la última de ellas la explicación de un modo de resolver el reto planteado.

La selección de los problemas responde a tres requisitos: a) estar vinculado al tema con el que se va a asociar (esto significa que los contenidos del tema en curso deben de ser importantes a la hora de resolver el reto) b) ser un problema amplio y diverso en cuanto a la resolución (es decir, que su resolución permite distintas estrategias de resolución y requiere de argumentaciones enriquecedoras) pero que c) su solución sea concreta y única (para que los alumnos sientan el gusto de llegar

a una solución específica). Aunque con posibles matices y algunas adaptaciones, los problemas presentados proceden de Worldwide Center of Mathematics, las Pruebas Cangur de Cataluña o de Olimpíadas Matemáticas en España.

Dada una función f tal que para cualquier valor de x e y

$$f(x) + f(2x + y) + 5xy = f(3x - y) + 2x^2 + 1.$$

Encuentra cuánto vale $f(10)$.

Imagen 2. Reto funciones - Fuente: Worldwide Center of Mathematics

En este sentido, la propuesta de los Retos pretende responder a las premisas que, de acuerdo con (McDonough, 2014) son claves en la promoción del compromiso activo en entornos de aprendizaje a distancia.

4. Primeros resultados

El curso *Iniciación a las matemáticas para la ingeniería* se ofrece en español y en catalán. El número de aulas en cada lengua varía en cada edición del curso. Los datos que se presentan aquí corresponden a la fase piloto de la implementación de los Retos, que se realizó de manera simultánea en las 6 aulas en español en el semestre febrero-junio del curso escolar 2020-2021. El principal objetivo de esta primera fase era conocer la impresión y actitud de los estudiantes en relación a la iniciativa. Para ello se pidió a los alumnos que contestaran de manera voluntaria una encuesta de valoración. La encuesta fue creada y valorada con el equipo docente de la asignatura teniendo en cuenta la base teórica descrita anteriormente.

De los 330 estudiantes que finalizaron el curso, contestaron la encuesta 186 estudiantes, lo que equivale a un poco más de la mitad de los estudiantes, un 56,36%. De acuerdo con sus respuestas, la media de edad en las aulas era de 33 años con una desviación típica de 8,35 años.

Destaca cierta uniformidad en cuanto a su relación con estudios superiores. Las respuestas de los estudiantes muestran que un 53,76% de alumnos eran novicios en estudios universitarios mientras que para el 46,24% su vía de acceso a la universidad era la de otros estudios superiores. Así mismo, una gran mayoría de alumnos no se dedican a dichos estudios de manera exclusiva. Concretamente, el

87,64% confirmó que no seguían los estudios de manera exclusiva, es decir que debían combinar estos estudios con otras tareas, mientras que el resto, 12,36%, aseguró que se dedicaban a los estudios de manera exclusiva.

La valoración de los estudiantes en cuanto a la propuesta de los Retos es realmente positiva en tanto que un 76,88% de los estudiantes que respondieron la encuesta consideraron la experiencia como algo más que significativa (69 estudiantes) o muy significativa (74 estudiantes) en su aprendizaje, enfrente un 10,22% de casos en los que la experiencia se percibe como casi nada (7 estudiantes) o nada significativa (12 estudiantes).

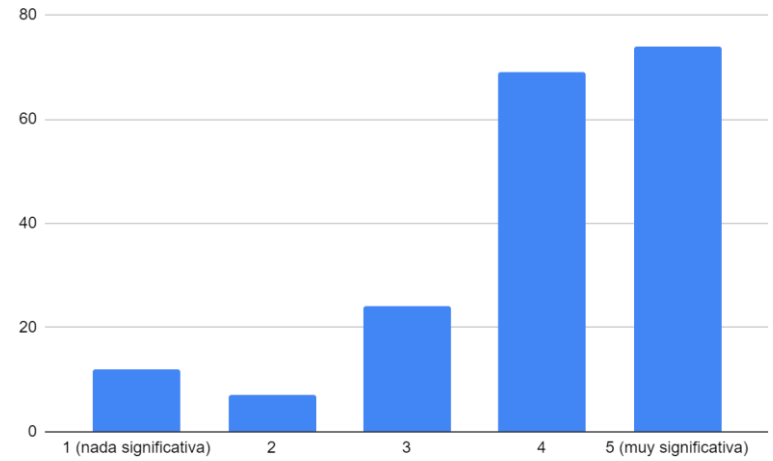


Imagen 2. Relación de las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta de valoración general de los Retos “En general, valoro la actividad de los retos…”

Más allá de estos valores, sus respuestas constatan que 31 (16,67%) de los 186 estudiantes que respondieron la encuesta afirmaron no haber leído ninguno de los retos. De los 155 restantes, 52 estudiantes (27,96 % del total) afirmaron haber leído todos los retos propuestos mientras que 103 (55,38% del total) aseguraron haber leído solo algunos de ellos. Sin embargo, solo 52 alumnos de los encuestados confirmaron haber hecho alguna aportación en abierto; 43 estudiantes ocasionalmente y 9, siempre, es decir, que hicieron alguna aportación en todos los retos propuestos. De hecho, al analizar las aportaciones de los estudiantes en cada uno de los Foros, se obtiene que son 63 estudiantes distintos los que participaron activamente en ellos, lo que supone un 19% del total de alumnos matriculados que terminaron el curso. La Tabla 1 recoge el número de retos en qué hicieron alguna aportación dichos estudiantes. Si bien la mayoría de ellos participó principalmente

en 1 o 2 retos, cabe destacar que 7 de los 63 estudiantes hicieron alguna aportación en 10 o más retos de los 15 planteados a lo largo del curso.

Número de retos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	>9
Número de Estudiantes	22	11	8	3	4	2	1	1	4	7

Tabla 1. Tabla de frecuencias que informa sobre la cantidad de estudiantes que han hecho alguna aportación en cada uno de los retos

El análisis de sus aportaciones en los respectivos Foros informa, además, que estos 63 estudiantes hicieron un total de 606 intervenciones en los Retos. El total de intervenciones en en el conjunto de los Foros por parte de los alumnos fue de 1395. Resulta entonces, que el 43,44% de la participación de los estudiantes en el Foro fue exclusivamente en consecuencia de los Retos. Al analizar la participación no solo de los estudiantes sino conjuntamente con los docentes en los Foros se observa que hay un total de 2214 entradas de las cuales 1111 son aportaciones a los Retos. Se deduce entonces que el 50,18% de la participación en el Foro fue exclusivamente relacionada con los Retos.

Entonces, ¿a qué se debe la reducida participación de los estudiantes en la actividad de los Retos y la concentración de la participación en unos pocos?

Entre los comentarios que los propios estudiantes expusieron destaca la falta de tiempo debido a sus quehaceres -laborales y familiares, principalmente- como causa principal a la limitada actividad en el Foro.

> *Me parece una actividad complementaria muy interesante y que aporta un valor adicional a la asignatura. Por desgracia en mi caso, tengo un trabajo que me consume entre 10-12H diarias y una niña recién nacida, por lo que no dispongo más que del tiempo justo para dedicar al temario de la asignatura, pero sin duda, son actividades que aportan "frescura" a la asignatura y la hacen interesante, espero que otros le estén sacando el partido que yo, por desgracia, no puedo.* [A2:3]

> *Me parece una actividad muy interesante, pero la falta de tiempo es una variable de peso a la hora de resolverlos.* [A2.7]

Esta falta de tiempo no radica solamente en la resolución del problema en sí, sino en el hecho de redactar y publicar la resolución en el Foro para compartirla con el resto de compañeros del curso:

> *Es muy buena propuesta y algunos de los retos han sido muy interesantes la verdad. Lo malo es la falta de tiempo. con 4 asignaturas y trabajando a media jornada no da el tiempo para mucho. He resuelto algunos retos por cuenta propia (yendo en el tren a trabajar), pero realizar publicaciones me supone un tiempo que, con lo "verde" que estoy en el tema estudiar, no me acaba de llegar.* [A1:1]

> *Bastante tiempo de dedicación exclusiva al reto, tanto resolverlo como exponerlo.* [A2:12]

La posibilidad de trabajar con los retos se presenta como una preparación para la evaluación, para algunos estudiantes:

> *Creo que es algo muy útil para preparar la evaluación. También opino que tenemos suerte en el aula que somos 3 o 4 que intentamos resolverlos ya que puede darse el caso que solo 1 lo haga.* [A5:10]

Aunque la falta de tiempo hace que algunos estudiantes prefieran o vean más claro centrarse en la preparación de la prueba a través de los materiales más estándares y parecidos a los de la prueba académico.

> *Los retos me parecen muy interesantes, pero para una persona que se pasa la mayor parte de la semana en un trabajo agotador, donde quiero usar mi escaso tiempo libre es en poder estudiar las asignaturas y aprobar los exámenes.* [A4:4]

En este sentido, puede ver incluso “perdido” el tiempo de inversión en los retos:

> *Los retos son muy interesantes, e incluso diría, que divertidos en muchos casos, pero restan tiempo de estudio, de cosas que se puntúan al final de la evaluación. Algunos estudiantes, disponemos de un tiempo limitado, para dedicarle al estudio, por lo que perderlo en los retos, por muy interesante que sea, al final es perderlo.* [A4:1]

Aunque esta visión no parece compartirse con los estudiantes que han trabajado con algún reto. Estos estudiantes reconocen y valoran que trabajar con el reto les ha llevado a un trabajo de reflexión significativo al mismo tiempo que lo han disfrutado. Además, apuntan a una emergente cooperación y debate entre distintos estudiantes:

> *Aunque no siempre he llegado a resolverlos, sí que me ha hecho pensar y, además, me resulta muy divertido. En los últimos dos retos hemos interactuado más en el foro, ya no solo exponiendo la solución sino planteando debates y ha sido muy enriquecedor.* [A5:4]

Valoran que trabajar con los retos les permite aplicar los contenidos trabajados y poner en práctica los conocimientos adquiridos:

> *Creo que los retos son una gran idea para cualquier estudiante que empieza a interesarse por las matemáticas. Es una manera distinta de trasladar lo académico a lo real. Cuanto más se pueda aprender de forma práctica y menos basada en memorización, mejor para retener conocimientos a largo plazo. Sin embargo, la principal limitación de poder disfrutar de estos retos adecuadamente es la falta de tiempo, lo que a nivel personal me impide dedicarle lo suficiente.* [A3:10]

En este sentido, algunos alumnos quisieran que esta aplicación fuera aún más aplicada a su entorno cotidiano y no tanto en cuestiones matemáticas, por muy amplias que éstas sean:

> *Creo que no es mala la iniciativa, pero está muy orientada a la matemática purista, en mi opinión, me gustaría más que fueran casos reales aplicados con una utilidad real.* [A2:4]

El hecho de que las publicaciones sean visibles al acto, puede ser un obstáculo para algunos estudiantes a la hora de publicar. Unos comentan que a veces no han participado porque ya se ha publicado una resolución que lleva a la solución correcta. Entonces, en el mejor de los casos, simplemente la contrastan a nivel

particular. Otros por dejar espacio a que distintos estudiantes puedan publicar sus propuestas de resolución:

> *Lo veo una propuesta muy interesante, pero la mayoría de veces no la llevo a cabo por falta de tiempo, y cuando lo tengo alguien ya la ha realizado. Aun así, consulto las soluciones a mayoría de veces.* [A2:2]

> *Me gusta mucho, aparte de que cuenten o no para la nota final de la asignatura, si te gustan las matemáticas te resultan muy entretenidos la mayoría de ellos. Si no he participado en más, ha sido bien por falta de tiempo, o bien por dar la oportunidad a otros compañeros de también participar* [A4:6]

Una posible solución a este problema sería el hecho de que el reto se presentase como una sucesión de etapas de manera que se puedan ir resolviendo y comentando las distintas fases de manera gradual, de esta manera se ganaría más apertura no solo a la participación sino también a la colaboración:

> *En general me gustan mucho los retos, pero sin duda el que más me ha gustado ha sido el de los triángulos porque se resolvía de forma colaborativa y conjunta. Sé que es difícil, pero buscar o plantear retos que tengan apartados o requieran varios pasos fácilmente identificables podría aumentar la participación, crear un mayor seguimiento y ser mucho más divertido para todos.* [A4:2]

Otras ideas para potenciar la participación en los Retos proponen de disponer de un margen más amplio para trabajar con los retos, la participación entre aulas e incluso darle cierto peso en la evaluación.

> *[…] creo que es una idea que debe seguir presente, quizás con otro formato (un reto cada dos semanas para dar más márgen?). Gracias* [A3:10]

> *Otra propuesta podría ser crear una 'competición' entre todas las aulas. Por ejemplo, en el reto de los triángulos, solo permitir que un alumno resuelva solo un triángulo. El primer aula en llegar al resultado final obtener un*

'premio'. Por ejemplo, +0.5 en el cuestionario de ese tema. Esta iniciativa creo que fomentaría mucho la participación, la implicación y el trabajo en equipo en los retos. [A4:2]

5. Conclusiones

De acuerdo con las bases teóricas, el conjunto de estudiantes de la asignatura corresponde a un perfil de estudiante adulto universitario no tradicional. Por un lado, la media de edad de los estudiantes es de 33 años. Si bien, no hay diferencia significativa en cuanto a su relación con estudios universitarios previos, sí la hay en cuanto a su dedicación actual a estos estudios, puesto que casi el 90% de los encuestados los realiza como una tarea complementaria a su dedicación principal y en distintos casos se constata estar al cargo de familiares más allá de su cónyuge.

Casi el 90% de los encuestados valora la posibilidad de participar voluntariamente en la resolución de retos, entendidos como problemas matemáticos de participación libre que van más allá del temario y ejercicios imprescindibles para superar el curso, como un aporte significativo o más que significativo en su proceso de aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, los estudiantes valoran los aspectos de reflexión, conexión y aplicabilidad de los contenidos que se trabajan en el curso; placer al resolver; una emergente cooperación y debate entre estudiantes así como ser un soporte extra, aunque no alternativo, a la preparación de la prueba. Los propios estudiantes dan alternativas para una participación más activa. Entre ellos destacan cinco: a) los retos traten el entorno cotidiano en mayor medida, b) los retos sean presentados de manera gradual, para dar más apertura tanto a la participación como a la colaboración, c) disponer de un margen más amplio de tiempo, d) facilitar la participación/colaboración entre aulas y, e) darle cierto peso en la evaluación. Los estudiantes consideran los Retos como un aspecto significativo en su proceso de aprendizaje y muestran cierta preferencia para que formen parte del conjunto de actividades evaluables de la asignatura.

Si bien poco más del 83% de los participantes en la encuesta afirmó haber leído al menos uno de los retos, el compromiso activo de estos estudiantes se vio reducido alrededor del 27%, concentrándose, en realidad, al 19% del total de estudiantes del

curso. La poca participación se explica por la confluencia de tres aspectos: el tiempo tanto de resolución como de publicación, dejar tiempo a otros para que publiquen, y la falta de tiempo debido a sus quehaceres diarios de carácter no universitario, que se centra en básicamente los laborales y familiares.

Poco más del 43% de las intervenciones de los estudiantes en el conjunto de los Foros fue en motivo de los Retos. Este porcentaje supera ligeramente el 50% al considerar la actividad de los docentes. Se cumple con ello el objetivo inicial de los Retos en cuanto a dinamizar la actividad en el Foro.

Del estudio se desprende que los estudiantes del curso responden al perfil de un estudiante de matemáticas adulto en un entorno virtual como un estudiante autónomo orientado a la practicidad y relevancia, pero también a objetivos de desarrollo personal, que agradece el placer y la comunicación entre iguales así como el reconocimiento de su compromiso activo en la evaluación global de la asignatura. Los quehaceres en que invierte la mayor parte de su tiempo son el sumo obstáculo para desarrollar el placer y la comunicación entre iguales de manera voluntaria (Jameson y Fusco, 2014; Salleha et al. 2015). Con ello cabe destacar la participación de los estudiantes en compartir resoluciones pero sin detenerse a analizar, públicamente, las resoluciones de sus compañeros.

De acuerdo con la caracterización de compromiso activo (McDonough, 2014) resulta efectiva la implementación de Los Retos como una actividad voluntaria para dinamizar los Foros de las aulas, aunque parece necesaria una gradación o sistema de publicación de los retos o de sus resoluciones en que la colaboración o participación entre iguales conlleve un mayor reconocimiento en la asignatura para que la participación sea más significativa.

Sin duda resulta clave la lectura de las actitudes de los estudiantes en cuanto a sus condiciones de estudio para seguir adecuando materiales y modos de aprendizaje que permitan el desarrollo de su aprendizaje de manera significativa. Cabe profundizar sobre los estilos y las estrategias de estos estudiantes y cómo ello afecta en su adquisición de la competencia matemática.

Referencias

Anuar, N., Abdullah, N., Syed Hod, S.N. (2020). Pre-University Students' Learning Styles and Attitude towards Mathematics Achievements. *Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal*, 5 (6), 269–273

Bramlett, D.C., Herron, S. (2009). A study of African-American college students' attitude towards mathematics. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education*, 4, 43–51

Knowles, M.S. (1990). *The adult learner: A neglected species* (4th ed.). Houston, TX: Gulf Publishing Company

FitzSimons, G.E. y Godden, G.L. (2000). Review of Research on Adults Learning Mathematics. In D. Coben et al. (eds.), *Perspectives on Adults Learning Mathematics*, 13–45. Kluwer Academic Publishers: Netherlands

Hoogland, K., Kelly, B. y Díez-Palomar, J. Introduction to TWG07 Adult Mathematics Education (2019). *Eleventh CERME*, Utrecht University, Netherlands

Jameson, M.M., Fusco, B.R. (2014). Math Anxiety, Math Self-Concept, and Math Self-Efficacy in Adult Learners Compared to Traditional Undergraduate Students. *Adult Education Quarterly*, 64(4) 306–322

Middleton, K., Ricks, E., Wright, P., Grant, S. (2013). Examining the Relationship Between Learning Style Preferences and Attitudes Toward Mathematics Among Students in Higher Education. *Institute for Learning Styles Journal*, 1 (15 pp.)

McDonough, D. (2014). Providing Deep Learning through Active Engagement of Adult Learners in Blended Courses. *Journal of Learning in Higher Education*, 10(1)

Salleha. K.M., Khalidb, N.H., Sulaimana, N.L., Mohamada, M.M., Serna, L.C. (2015). Competency of adult learners in learning: Application of the Iceberg Competency Model. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 204, 326–334

Sancho, T.; Masià, R. (2007) A virtual mathematics learning environment for engineering students. *Interactive Educational Multimedia*, 14, 1–18

Zhou, Y., Wang, J. (2019). Goal orientation, learning strategies, and academic performance in adult distance learning. *Social Behavior and Personality: An international journal*, 47(7)

CoP031 ¿La covid-19 afecta por igual a hombres y a mujeres?: una experiencia con alumnado de educación secundaria

Pablo Giadas
giadaspablo@uniovi.es
Departamento de Estadística e I.O. y Didáctica de la Matemática, Universidad de Oviedo
Pedro Alonso
palonso@uniovi.es
Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo
Laura Muñiz-Rodríguez
munizlaura@uniovi.es
Departamento de Estadística e I.O. y Didáctica de la Matemática, Universidad de Oviedo
Luis J. Rodríguez-Muñiz
luisj@uniovi.es
Departamento de Estadística e I.O. y Didáctica de la Matemática, Universidad de Oviedo

Núcleo temático: Procesos. Recursos para el aula.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

Un correcto manejo de la estadística pasa por un uso de datos contextualizados en temas cercanos y relevantes para la sociedad. Con el objetivo de mejorar la alfabetización estadística del alumnado de tercer curso (15 años) de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), así como su interés y capacidad de trabajo y de reflexión, a la hora de interpretar datos estadísticos en contexto, se ha llevado a cabo, durante el curso 2020-2021, una experiencia de aula en el marco de la COVID-19. Se concluye que, al desviarnos de los datos con frecuencia descontextualizados que aparecen en los libros de texto, el alumnado presenta dificultades y comete errores a la hora de aplicar correctamente sus conocimientos estadísticos.

Palabras clave: Alfabetización Estadística, Contexto, Datos, Gráficos Estadísticos.

1. Introducción

Las siglas COVID-19 hacen referencia a una nueva enfermedad infecciosa causada por el virus SARS-CoV-2 que afecta a los humanos y que tuvo su origen en diciembre de 2019 en la ciudad de Wuhan (China). Al principio de esta nueva enfermedad se desató una terrible crisis sanitaria en determinados países pero, con el tiempo, afectó a toda la población mundial, llegando incluso a declararse el 11 de marzo de 2020 pandemia mundial por la OMS (Organización Mundial de la Salud). En consecuencia, en algunos países, y en concreto en España, se declaró un estado de alarma con confinamiento domiciliario, salvo por motivos justificados, durante un periodo que se extendió a casi dos meses. Por esta razón, la COVID-19 no solo causó una crisis sanitaria, sino que también provocó una importante crisis social y económica a nivel mundial, de la cual actualmente todavía nos estamos recuperando.

Esta situación ocasionó la exposición de la ciudadanía a una ingente cantidad de conceptos matemáticos, en particular estadísticos, relacionados con la pandemia en los medios de comunicación. Algunos de estos contenidos fueron: la propagación del virus (explicada a través de la probabilidad de contagio), las cifras de contagios diarios (expuestas a través de soporte gráfico o tabular) o la limitación de la vida social (mostrando, a través de diagramas de árbol, la propagación de los contagios a partir de los contactos). Para entender correctamente esta información es necesaria la alfabetización matemática, definida por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (2019) como la capacidad de cada individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos, incluyendo el razonamiento matemático y el uso de los conceptos matemáticos, los procedimientos, hechos y herramientas utilizados para describir, explicar y predecir fenómenos. Dentro de esta alfabetización cobra relevancia el sentido estadístico, que definiremos más adelante. Ahora bien, la realidad es que una parte significativa de la sociedad no es capaz de interpretar la información transmitida por los diferentes medios de comunicación en forma de, por ejemplo, gráficas o tablas estadísticas (Muñiz-Rodríguez et al., 2020), resultando en la

aparición y propagación de noticias falsas (o *fake news*) y creándose, tal y como señaló el director general de la OMS (2020), una situación de infodemia.

De manera más reciente, otra evidencia de la falta de conocimientos estadísticos por parte de la sociedad se muestra con la campaña de vacunación contra la COVID-19, y la negativa de muchas personas a ser vacunadas, por temor a determinados efectos secundarios, con una baja probabilidad de ocurrir. Así, una vez más, se puede apreciar la influencia negativa que tiene el modo en el que la información se transmite en los medios de comunicación.

La problemática expuesta con anterioridad en relación con la falta de alfabetización estadística en general, y en particular del alumnado, es consecuencia, entre otros factores, de las prácticas docentes en el ámbito de la educación estadística en las distintas etapas educativas (Muñiz-Rodríguez y Rodríguez-Muñiz, 2021). A menudo, los contenidos del bloque “Estadística y Probabilidad” se trabajan de forma mecánica, con datos descontextualizados, sin que el alumnado tenga conciencia de su origen, su necesidad y su utilidad. Asimismo, es necesario resaltar que el profesorado tiene creencias referentes a los contenidos y los fines de la enseñanza que pueden incidir fuertemente en la forma en la que enseñan estadística (Batanero, 2009). Algunas de las dificultades señaladas por docentes en ejercicio, a la hora de promover la alfabetización estadística, son la falta de tiempo debido a un currículo demasiado extenso, la falta de formación del profesorado en estadística y en su didáctica (Estrada y Batanero, 2008), la escasa capacidad de coordinación y la dificultad de evaluar el aprendizaje estadístico del alumnado (Muñiz-Rodríguez y Rodríguez-Muñiz, 2021).

En consecuencia, la experiencia de aula que aquí se presenta pretende adentrarse en esta problemática, mediante la propuesta de una actividad para trabajar contenidos estadísticos en contextos reales, que permita concienciar al alumnado sobre la necesidad de analizar los datos en su contexto e interpretar la información que se nos presenta de manera crítica, fomentando de esta manera la alfabetización estadística. La actividad que se plantea está dirigida a alumnado de 3º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) de la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, en la unidad didáctica Estadística y Probabilidad.

Con el desarrollo de esta experiencia de aula se pretenden conseguir dos objetivos:

- Mejorar el interés del alumnado hacia la estadística, así como su capacidad de trabajo y reflexión.
- Afianzar los contenidos propios de la estadística en este nivel.

2. Marco teórico

Batanero et al. (2013) señalan la importancia de trabajar el sentido estadístico de forma progresiva desde la Educación Primaria hasta la Universitaria, definiendo esta noción como la unión de diferentes conceptos recogidos en la literatura por otros autores como son el pensamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999) y la cultura o alfabetización estadística (Gal, 2002).

Por un lado, Wild y Pfannkuch (1999) entienden el pensamiento estadístico como un modelo formado por cuatro dimensiones:

- El ciclo de investigación, el cual hace referencia a la manera de actuar y al tipo de pensamiento que se utiliza durante el desarrollo de cualquier investigación estadística.
- Los tipos de pensamientos, los cuales se clasifican en aquellos que se consideran inherentes al pensamiento estadístico y en aquellos que son empleados en procesos genéricos de resolución de problemas.
- El ciclo de interrogación, que se trata de un proceso de pensamiento genérico de carácter recursivo, que interviene siempre en la resolución de problemas estadísticos y consta de cinco componentes (generar, buscar, interpretar, criticar y juzgar).
- Las disposiciones, consideradas como cualidades personales que afectan o incitan a la entrada en un modo de pensamiento, distinguiéndose la curiosidad y conciencia, la imaginación, el escepticismo y la lógica.

Por otro lado, Gal (2002) no solo define la cultura o alfabetización estadística como la capacidad de las personas para interpretar, evaluar críticamente, discutir y comunicar información estadística o argumentos relacionados con fenómenos

aleatorios en diversos contextos, sino que también resalta los siguientes conocimientos clave para alcanzar el pleno desarrollo de la alfabetización estadística:

1. Saber por qué se necesitan los datos y cómo se pueden reproducir.
2. Familiaridad con las ideas y conceptos básicos relacionados con la estadística descriptiva.
3. Familiaridad con las representaciones gráficas y tabulares y su interpretación.
4. Comprender las nociones básicas de probabilidad.
5. Saber cómo se llega a las conclusiones o inferencias estadísticas.

Con anterioridad a la conceptualización de estas ideas, Cobb y Moore (1997) ya señalaban la importancia de la estadística y distinguían entre personas dedicadas a las matemáticas y a la estadística por su uso o no del contexto. Así, se defiende que para alcanzar un desarrollo pleno en estadística es necesario conocer el origen de los datos con los que se está trabajando, de manera que se requiere de un tipo de pensamiento diferente, porque los datos no son solo números, sino que se trata de números en contexto.

El desarrollo pleno del sentido estadístico entre toda la población no ha sido únicamente defendido por autores dedicados a su investigación. Este enfoque también es promovido por entidades, como el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), que define los principios y estándares que enfatizan las habilidades relacionadas con el análisis de datos mediante la formulación de preguntas que puedan ser respondidas mediante la recogida, organización, representación e interpretación de los datos a través de métodos estadísticos apropiados.

Asimismo, complementando esta visión, la American Statistical Association (ASA), junto con el NCTM, propone un marco de Directrices para la Evaluación y Enseñanza en Educación Estadística (GAISE, *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education*) que contiene seis aspectos (recientemente

actualizados por Bargagliotti et al., 2020) que tener en cuenta a la hora de enseñar estadística (Franklin et al., 2005):

a) Enfatizar la alfabetización y el pensamiento estadístico a través del planteamiento de preguntas que permitan discutir sobre el razonamiento más adecuado para su resolución, dando lugar incluso al descubrimiento de nuevos interrogantes de investigación.

b) Emplear bases de datos reales que sean de interés para el alumnado, debido a que sirven de estímulo y permiten al alumnado comprender mejor el problema que se le plantea.

c) Dar más importancia a la comprensión de los conceptos que al conocimiento de procedimientos, puesto que esto favorece a posteriori una buena comprensión del procedimiento.

d) Impulsar y favorecer un aprendizaje activo en el aula, para que de esta manera el alumnado se implique más en el proceso de enseñanza-aprendizaje y sea capaz de asumir y adquirir esta alfabetización estadística.

e) Hacer uso de la tecnología para favorecer el desarrollo de los conceptos y poder analizar los datos, teniendo en cuenta la facilidad de su manejo y la forma en la que se muestran los resultados para poder interpretarlos.

f) Emplear instrumentos de evaluación para medir el razonamiento estadístico, debido a que el aprendizaje del alumnado está altamente condicionado por los conocimientos que se evalúen.

La importancia de fomentar el aprendizaje del sentido estadístico del alumnado también viene documentada en el currículo de la ESO del Principado de Asturias (contexto en el que se desarrolló la experiencia de aula que aquí se describe), ya que en él se recoge como orientación metodológica:

> "[…] identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos y otros) presentes en los medios de comunicación, internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones

que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes" (Consejería de Educación, Cultura y Deporte, 2015, p.163).

En particular, la interpretación de gráficos estadísticos juega un papel significativo en la ESO, siendo este además uno de los principales contenidos que se trabajan en la actividad propuesta. De tal forma, autores como Curcio (1987, 1989), Friel et al. (2001) o Arteaga et al. (2011) plantean cuatro niveles para evaluar la dificultad de lectura de gráficos estadísticos:

- Lectura de los datos: consiste en extraer información explícita de un gráfico de forma literal para dar respuesta a cualquier pregunta relacionada con el mismo.

- Lectura entre los datos: consiste en utilizar algún procedimiento matemático simple, interpretando así la información presentada en el gráfico para pasar de una pregunta a su respuesta.

- Lectura más allá de los datos: consiste en aprovechar la información del gráfico para predecir, inferir o extrapolar una respuesta a la pregunta asociada a este.

- Lectura detrás de los datos: consiste en analizar críticamente la validez y fiabilidad del método empleado en la recogida de datos para poder extrapolar las conclusiones del gráfico a otros contextos.

En definitiva, a partir de este marco teórico la experiencia de aula que a continuación se describe consiste en la implementación de una actividad que se ajusta a las directrices del informe GAISE y que pretende promover la capacidad del alumnado en relación con la lectura de gráficos estadísticos.

3. Metodología

La experiencia de aula que se presenta toma como referencia una actividad planteada por Rodríguez-Muñiz et al. (2020) para promover la alfabetización

estadística a partir de datos generados por la COVID-19 (Imagen 1). Además, está relacionada con un proyecto llevado a cabo en varias comunidades autónomas por Rodríguez-Muñiz et al. (2022).

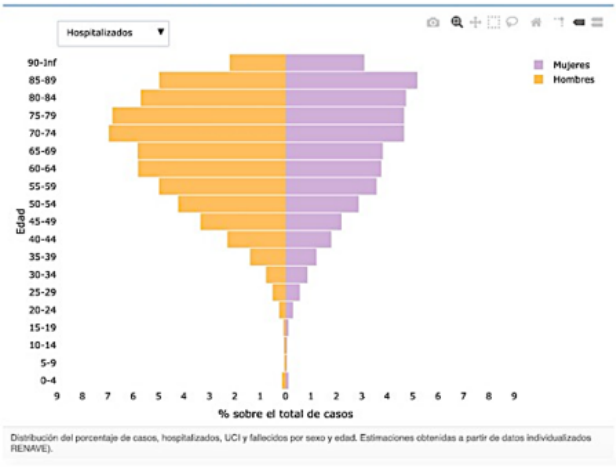


Gráfico 1

Pirámide de población del porcentaje de hospitalizados según grupos de sexo y edad en España (17/05/2020)

Tramo de edad	% sobre total H	% sobre total M	% conjunto H+M
0-4	0.14	0.11	0.25
5-9	0.03	0.03	0.06
10-14	0.06	0.05	0.11
15-19	0.08	0.11	0.19
20-24	0.25	0.29	0.54
25-29	0.51	0.56	1.07
30-34	0.77	0.86	1.63
35-40	1.4	1.21	2.61
40-44	2.3	1.8	4.1
45-49	3.35	2.2	5.55
50-54	4.23	2.88	7.11
55-59	4.98	3.58	8.56
60-64	5.81	3.77	9.58
65-69	5.82	3.83	9.65
70-74	6.96	4.67	11.63
75-79	6.82	4.66	11.48
80-84	5.7	4.74	10.44
85-89	4.95	5.19	10.14
90-Inf	2.2	3.1	5.3
Total	56.36	43.64	

Tabla 1

Datos del porcentaje de hospitalizados según grupos de sexo y edad en España (17/05/2020)

Actividad 1. Fíjate en el gráfico 1 y responde individualmente las siguientes preguntas:

a) ¿Qué información observas que muestra el gráfico estadístico?
b) ¿Cuáles consideras que son las variables que se muestran?
c) Las barras que se muestran, ¿qué es lo que indican? ¿Por qué hay dos colores?
d) ¿Son cantidades absolutas o relativas? ¿Cómo lo sabes?
e) Según el gráfico, si sumamos todos los valores de las barras de la derecha, ¿qué es lo que se obtiene? ¿y si sumamos el valor de todas las barras a la vez? ¿cómo interpretas estos resultados?

Actividad 2. Seguimos estudiando el gráfico estadístico anterior. Según lo observado:

a) ¿Qué tramo de edad consideras que ha tenido más casos positivos entre los hombres?
b) ¿Y entre las mujeres?
c) Ahora vamos a calcular la media de edad. Ten en cuenta que para ello necesitas el valor intermedio de cada intervalo (llamado marca de clase). ¿Cuál es la media de edad de hospitalizados? ¿Hay diferencias entre la media de hombres y mujeres? Escribe los cálculos o proceso en el recuadro.

Actividad 3. Llamamos intervalo mediano al intervalo de edad, en este caso, que ocupa la posición intermedia. Esto es, teniendo en cuenta que las áreas de las barras representan el porcentaje de casos, el intervalo mediano será el que separa el total de las áreas sombreadas en dos mitades iguales.

a) Explica con detalle o realiza los cálculos necesarios e indica cuál es el intervalo mediano, teniendo en cuenta la gráfica y su tabla de valores correspondiente.
b) ¿Has hecho el cálculo del intervalo mediano globalmente o por sexo? Explica tu razonamiento.

Actividad 4. Ahora nos interesa conocer la dispersión de los datos. La dispersión de los datos es un indicador acerca de la separación de los datos. Generalmente se toma un valor o un dato como referencia y se observa cuánto se separan de él los datos.

a) En la gráfica de casos hospitalizados por la COVID-19, ¿dirías que los hombres tienen mayor, menor o igual dispersión que las mujeres? Justifica tu respuesta.
b) Para determinar la dispersión habría que tomar alguna referencia (un dato, un intervalo, una representación, un cálculo, un parámetro, ...), ¿en qué te has fijado para responder a la pregunta anterior?

Actividad 5. Resumiendo todo el estudio realizado, retomamos la pregunta que nos hacíamos al principio de este trabajo: ¿ataca por igual a hombres y mujeres? Por tanto,:

a) ¿Crees que hay diferencias entre las hospitalizaciones según sea un hombre o una mujer?
b) A la vista de lo anterior, ¿habría indicios para pensar que la COVID-19 afecta de forma diferente a hombres y mujeres? Explica tu respuesta.

Imagen 1. Actividad planteada al alumnado (Rodríguez-Muñiz et al., 2022).

La implementación de esta actividad pretende que el alumnado alcance los siguientes objetivos de aprendizaje:

- Trabajar con datos y gráficos reales utilizados durante la pandemia causada por la COVID-19.
- Analizar gráficos estadísticos y su tabla de frecuencias correspondiente.
- Interpretar datos estadísticos en el contexto de la COVID-19.

Estos objetivos permiten trabajar algunos de los contenidos propios de la asignatura relacionados con la estadística, como son los histogramas (en concreto, las pirámides de población), las medidas de centralización (media, mediana, moda) y de dispersión (varianza, desviación típica, rango) y los datos agrupados (marcas de clase, amplitud de los intervalos). De manera transversal, también se trabajan aquellos contenidos propios del bloque “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”.

La experiencia de aula se estructuró en tres fases.

Fase I: incluyó la preparación de una lista del alumnado de la clase ordenados alfabéticamente y la codificación numérica del alumnado, empezando por el número 1 (primero de la lista) hasta el final de la lista, con el objetivo de facilitar el futuro análisis de los datos obtenidos durante el desarrollo de la actividad.

Fase II: se destinó a repartir la ficha de trabajo del alumnado (fotocopia de la actividad) según el orden establecido, a explicar el trabajo que debían realizar durante la sesión de clase (de aproximadamente una hora de duración) y a indicarles que podrían utilizar en el desarrollo de la misma materiales de escritura, calculadora y dispositivos electrónicos (para acceder a la hoja de Excel con los datos de la actividad). Además, en esta fase el alumnado debía intentar resolver por escrito la actividad planteada por el profesor responsable de la misma.

Fase III: se dedicó a la resolución de las diferentes actividades planteadas en la propuesta para de esta forma abrir un debate con el alumnado en el que se

interpretaron las diferentes respuestas aportadas por cada uno de ellos. Además, en esta última fase el docente hizo hincapié en aquellos fallos más comunes cometidos por el alumnado.

3.1 Participantes

La actividad se plantea para alumnado de 3º de ESO después de impartir los contenidos estadísticos de la unidad didáctica Estadística y Probabilidad. El grupo con el que se desarrolló constaba de 16 estudiantes pertenecientes al Programa Bilingüe, de los cuales 9 eran chicos y 7 eran chicas. Además, este grupo se caracterizaba por tener un alumnado poco trabajador y participativo; que definitivamente podría esforzarse más. Sin embargo, ningún estudiante era conflictivo, ni ocasionaba problemas, por lo que la convivencia durante las clases era buena.

La propuesta fue implementada por los tres docentes presentes en el momento de su desarrollo: la profesora titular del grupo, con 31 años de experiencia, y dos docentes en periodo de prácticas (alumnos del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Formación Profesional). La actividad tenía carácter evaluable ya que formaba parte de las actividades previstas en la unidad didáctica correspondiente.

3.2 Recogida y análisis de datos

Para evaluar la consecución de los objetivos, tanto de la experiencia de aula como de aprendizaje del alumnado, se recogieron las respuestas del alumnado a las actividades planteadas. Además, se solicitó a los docentes presentes en el aula que indicasen su percepción sobre el nivel de interés, participación, capacidad de trabajo y de reflexión del alumnado durante el desarrollo de la actividad, utilizando una escala Likert desde (1) *Nivel muy bajo* hasta (5) *Nivel muy alto*, y que anotasen aquellos aspectos que considerasen relevantes para analizar la capacidad de reflexión del alumnado así como las principales dificultades que hubiesen surgido en el aula durante el desarrollo de la experiencia.

A posteriori, se realizó un análisis mixto, de carácter descriptivo y exploratorio. Los datos aportados por los docentes fueron analizados desde un punto de vista cuantitativo, mientras que para las respuestas del alumnado a las actividades planteadas se optó por un análisis del contenido, de naturaleza cualitativa.

4. Resultados

En la Imagen 2 se muestra la mediana relativa a cada uno de los ítems que debían valorar los docentes, pudiendo observarse que el grado de interés y de participación fue alto. Sin embargo, si nos fijamos en la capacidad de trabajo y la capacidad de reflexión vemos que las valoraciones no fueron tan buenas.

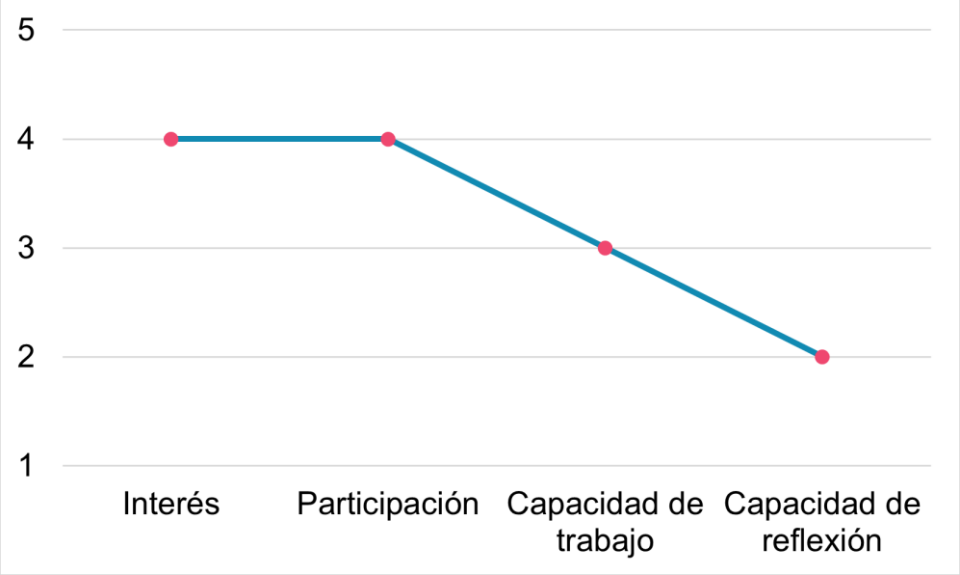


Imagen 2. Valoraciones de los docentes. Fuente: Elaboración propia.

Además, los docentes señalaron que en numerosas ocasiones el alumnado realizó inferencias a partir de valoraciones personales, sin basarse en las evidencias estadísticas, es decir, que el alumnado no dominaba el tercer nivel de dificultad de lectura de los gráficos estadísticos (lectura más allá de los datos), ya que no usaba la información del gráfico para obtener conclusiones. Este aspecto estaba quizá influenciado por haber tenido poco tiempo para asimilar los contenidos de la unidad didáctica. Además, las respuestas a las preguntas de naturaleza reflexiva fueron escasas, siendo posiblemente una consecuencia de los hábitos diarios de comunicación del alumnado a través de mensajes cortos y poco explicativos.

Por otro lado, centrándonos únicamente en las respuestas proporcionadas por el alumnado a cada una de las actividades planteadas y después de realizar un análisis del contenido de los datos, se observa lo siguiente:

En la actividad 1 el alumnado debía identificar el contenido y la variable trabajada en el gráfico estadístico, y reconocer qué tipo de valores se trabajaban en la actividad (primer nivel de dificultad: lectura de los datos). Tal y como se observa en la Imagen 3, 15 alumnos supieron interpretar correctamente la información del gráfico estadístico que se le muestra en la actividad, mientras que tan solo, 5 interpretaron correctamente las variables del gráfico y 6 distinguieron las variables que se trabajan e identificaron si se está trabajando con cantidades absolutas o relativas. Además, tan solo 2 estudiantes justificaron de manera correcta que se está trabajando con cantidades relativas, mientras que los otros 4 aportaron argumentos incorrectos como por ejemplo: “porque no le da información justa, es entre dos edades”.

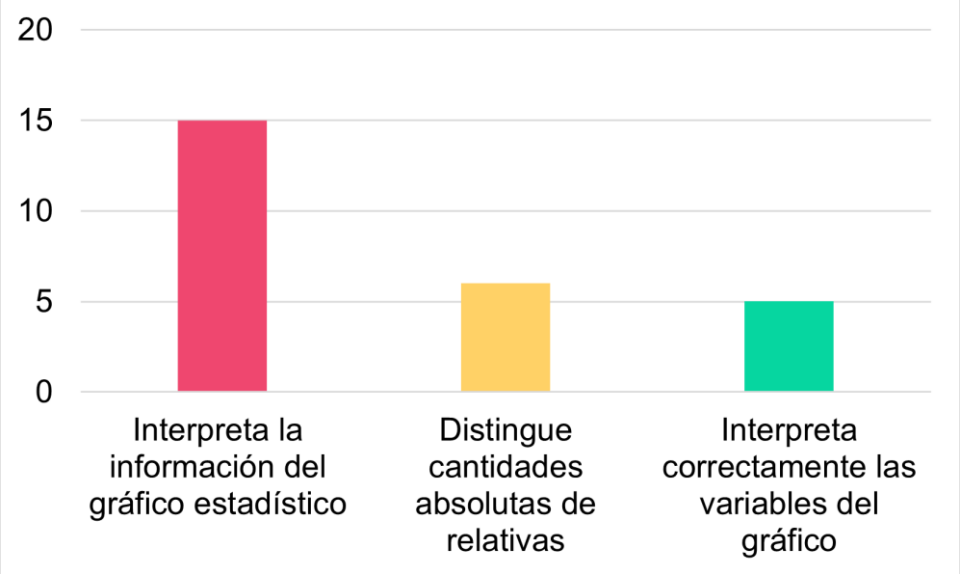


Imagen 3. Análisis de las respuestas del alumnado a la actividad 1. Fuente: Elaboración propia.

En la actividad 2 el alumnado debía identificar aquellos tramos de edad que más casos tenían, tanto en hombres como en mujeres (primer nivel de dificultad: lectura de los datos), y las edades medias de los contagiados en cada grupo (segundo nivel de dificultad: lectura entre los datos). Tal y como podemos observar en la Imagen 4,

el total de participantes supo identificar perfectamente el tramo de edad más frecuente en hombres y en mujeres, mientras que solo 3 de los estudiantes fueron capaces de calcular correctamente la edad media de los datos de forma conjunta, y 2 de ellos de calcular de forma correcta las edades medias tanto en hombres como en mujeres. En este caso, el uso de herramientas digitales como Excel para dar respuesta a esta pregunta dificultó la interpretación de los errores cometidos por el alumnado, puesto que en muchos casos únicamente había constancia de un valor numérico incorrecto sin evidencia del proceso aplicado.

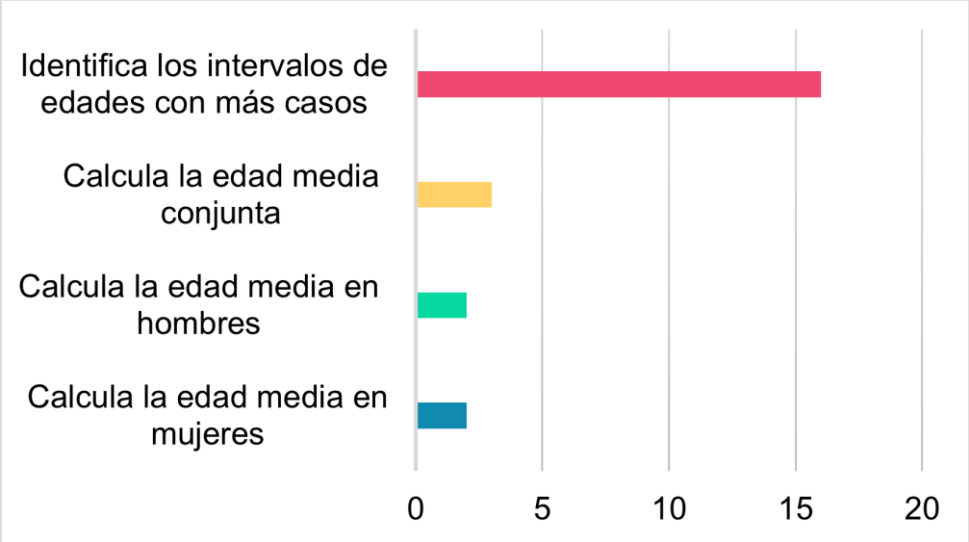


Imagen 4. Análisis de las respuestas del alumnado a la actividad 2. Fuente: Elaboración propia.

La actividad 3 consistía en el cálculo del intervalo mediano, lo que se correspondería con el valor de la mediana para las marcas de clase (segundo nivel de dificultad: lectura entre los datos). En este caso, nos encontramos con que ninguno de los estudiantes fue capaz de determinar el intervalo de edad mediano de forma correcta, habiendo dejado en blanco esta actividad 5 de los 16 estudiantes participantes. Además, se evidencia cómo el fallo más común fue colocar los intervalos de edades en orden y tomar el que ocupa la posición intermedia sin tener en cuenta el número de veces que aparece cada intervalo de edad, es decir, la frecuencia de los mismos. En definitiva, se aprecia cómo el alumnado no comprendió qué es el intervalo mediano.

La actividad 4 pretendía que el alumnado identificase cómo de dispersos estaban los datos entre sí, es decir, si alguno de los dos grupos (hombres o mujeres) presentaba más dispersión en sus datos (primer o segundo nivel de dificultad de lectura de los gráficos estadísticos en función del procedimiento aplicado). Dentro de las respuestas a esta pregunta tenemos que tan solo 1 alumno indicó que los datos se encontraban igual de dispersos, mientras que 15 de los estudiantes señalaron que los hombres presentaban una mayor dispersión, cuando realmente las evidencias estadísticas no indican que existan diferencias en la dispersión de los datos en hombres y mujeres. Es importante destacar que una de las técnicas más utilizadas por los estudiantes fue comparar cómo de grandes eran las barras de cada tramo de edad de los hombres y de las mujeres. Sin embargo, no se fijaron en que se trataba de porcentajes y por lo tanto las diferencias que observaban eran insignificantes.

Finalmente, en la actividad 5 el alumnado debía responder, con ayuda de las actividades anteriores, a la pregunta planteada al principio de esta actividad, y que da nombre a la experiencia de aula: “¿La COVID-19 afecta por igual a hombres y a mujeres?” (tercer nivel de dificultad: lectura más allá de los datos). De los estudiantes que respondieron a la pregunta planteada, 11 indicaron que finalmente la COVID-19 ataca más a los hombres que a las mujeres frente a 2 de ellos que únicamente indicaron que existen diferencias, cuando una vez más las evidencias estadísticas no indican eso, sino que afecta a ambos por igual. Centrándonos en las justificaciones que aportaron los estudiantes, tenemos que 4 de ellos hicieron referencia a algún dato de la tabla (“a los hombres nos afecta más “jóvenes” (60-80) y con mayor cantidad de hospitalizados, mientras que a las mujeres les afecta en menor cantidad pero a más anciana edad (70-85)”), 2 de ellos se basaron en el gráfico estadístico (“su representación es mayor que la de las mujeres”) y finalmente, otros 2 estudiantes lo relacionaron con otros argumentos como los hábitos de los hombres (“los hombres suelen tener costumbres más perjudiciales, como fumar, beber, etc. ahora ya esos roles de sexo no están tan marcados, pero en la tercera edad sí”).

5. Conclusiones

En definitiva, podemos concluir que, a pesar de haber estudiado los contenidos de estadística con anterioridad a la realización de esta experiencia de aula, no es suficiente con trabajarlos a través de ejercicios extraídos del libro de texto, sino que los docentes deben fomentar la alfabetización estadística a través de bases de datos reales, contextualizados y cercanos al alumnado, como pueden ser no sólo la COVID-19 sino también algunos de los objetivos relacionados con el desarrollo sostenible (hambre, pobreza, igualdad de género, etc.) establecidos por las Naciones Unidas para la Agenda 2030, cumpliendo de esta forma con las directrices del informe GAISE (Franklin et al., 2005). Además, esta experiencia ha permitido detectar debilidades del alumnado sobre distintos conceptos relacionados con la estadística.

Referencias

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., y Contreras, M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas, 76*, 55–67.

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Pérez, L., y Spangler, D.A. (2020). *The Pre-K–12 Guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II).* American Statistical Association. Recuperado de https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEIIPreK-12_Full.pdf

Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. En J. A. Fernandes, M. H. Martinho, F. Viseu, y P. F. Correia (Eds.), *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 52-71). Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M., y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas, 83*, 7-18.

Cobb, G., y Moore, D. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly, 104*(9), 801-823. https://doi.org/10.2307/2975286

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education, 5*(18), 382-393. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.18.5.0382

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. NCTM.

Estrada, A. y Batanero, C. (2008). Explicación de las actitudes de los profesores hacia la estadística. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Comisión Internacional de Instrucción Matemática y Asociación Internacional de Educación Estadística.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education. PreK-12*. American Statistical Association. Recuperado de https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/Spanish.pdf

Friel, S., Curcio, F.R., y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158. https://doi.org/10.2307/749671

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-51. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x

Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L.J. (2021). Análisis de la Práctica Docente en el Ámbito de la Educación Estadística en Educación Secundaria. *Revista Paradigma, 42*(Extra 1), 191-220. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p191-220.id1023

Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L.J., y Alsina, A. (2020). Deficits in the statistical and probabilistic literacy of citizens: Effects in a world in crisis. *Mathematics, 8(*11), 1-20. https://doi.org/10.3390/math8111872

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. The Council.

OCDE (2019). PISA 2018 *Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing: https://doi.org/10.1787/b25efab8-en

OMS (2020). Managing the COVID-19 infodemic: Promoting healthy behaviours and mitigating the harm from misinformation and disinformation. Recuperado de: https://www.who.int/news/item/23-09-2020-managing-the-covid-19-infodemic-promoting-healthy-behaviours-and-mitigating-the-harm-from-misinformation-and-disinformation

Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L., García-Alonso, I., López Serentill, P., Vásquez, C., y Alsina, A. (2022). Navigating between abstraction and context in secondary school statistics education. *Culture and Education* (aceptado, pendiente de publicación)

Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L., Vásquez, C., y Alsina, Á. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y de datos en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para educación secundaria. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas, 104*, 217-238.

Wild, C.J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-248. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x

CoP032 Funciones y gráficas con GeoGebra

Débora Pereiro Carbajo
deborapereirocarbajo@gmail.com
IES As Barxas, Moaña (Pontevedra)

Núcleo temático: Procesos. Recursos para el aula

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

Se presentan distintas actividades realizadas con *GeoGebra*, pertenecientes a una secuencia didáctica llevada a cabo en el IES As Barxas, en Moaña (Pontevedra) durante el curso 2021/22, para trabajar el bloque de Funciones, en 3º y 4º de la Educación Secundaria Obligatoria. Se han categorizado en varios tipos; atendiendo a los distintos momentos o tareas que pueden realizarse: actividades para mostrar contenidos y/o propiedades, generadores de actividades, problemas de aplicación y experiencias de modelización.

Palabras clave: *GeoGebra, Funciones, Modelización.*

1. Introducción

El programa *GeoGebra,* por sus características, presenta una gran versatilidad, capacidad y diversidad de comandos que lo hacen muy necesario para desarrollar los distintos contenidos en la clase de matemáticas. (Bua, 2020).

En una revisión bibliográfica sobre la definición de modelización matemática (Muñoz, 2022), señala que todas comparten algo; la modelización sirve para explicar el mundo real a través de las matemáticas. Sigue describiendo este autor, citando a (Trigueros-Gaisman, 2006), que hablar de modelización matemática en la enseñanza significa proporcionar al alumnado problemas suficientemente abiertos y complejos en los que puedan poner en juego su conocimiento previo y sus habilidades creativas para sugerir hipótesis y plantear modelos que expliquen el

fenómeno en cuestión mediante revisión, reflexión, aplicación y comunicación de resultados.

El nuevo currículo de matemáticas de secundaria (Real Decreto 217/2022) establece que se han de utilizar programas de geometría dinámica:
Construcción de figuras geométricas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada…).
Y además señala en su articulado, en varias ocasiones, la importancia de la modelización y el pensamiento computacional. Es en este sentido, donde consideramos que *GeoGebra* tiene un papel determinante.

En la presente comunicación se muestran actividades diseñadas con *GeoGebra* para trabajar las funciones en Secundaria Obligatoria: unas sirven para ayudar a visualizar contenidos y propiedades de funciones; otras para generar ejercicios de consolidación y refuerzo; y otras son experiencias de modelización en la que el alumnado ha utilizado *GeoGebra* y *Tracker*.

Las actividades propuestas se han alojado en el aula virtual *Moodle* del grupo mediante enlaces y tareas. Para llevar un control del trabajo del alumnado se ha utilizado principalmente la plataforma *GeoGebra Classroom*, alojada en *GeoGebra*, que guarda automáticamente el trabajo de los estudiantes y nos permite ver su trabajo en tiempo real o más tarde. El alumnado accede a las actividades para realizarlas por primera vez o para revisarlas desde el enlace proporcionado en *Moodle* o desde su perfil de *GeoGebra*. También han realizado construcciones fuera de *GeoGebra Classroom* (con *GeoGebra Clásico y Suite*) y han enviado sus trabajos al aula *Moodle* en formato tarea.

Los contenidos a desarrollar en esta secuencia didáctica son los siguientes:
Modelización de situaciones reales mediante funciones.
Interpretación de gráficas.
Características de funciones dadas mediante gráficas: dominio, recorrido, monotonía, continuidad, simetría, periodicidad, tasa de variación media.

Funciones elementales: lineales, cuadráticas, racionales, radicales, exponenciales y logarítmicas.

2. Modelización de funciones con actividades de GeoGebra

A continuación se muestra el primer bloque de actividades y ejemplos que pueden servir para iniciar los contenidos de la unidad y/o que el alumnado manipule y obtenga conclusiones (Pereiro Carbajo, 2022):

Función lineal: https://www.geogebra.org/m/dm4rwykf
Coste de llenar un depósito de gasolina según su cantidad (Imagen 1).

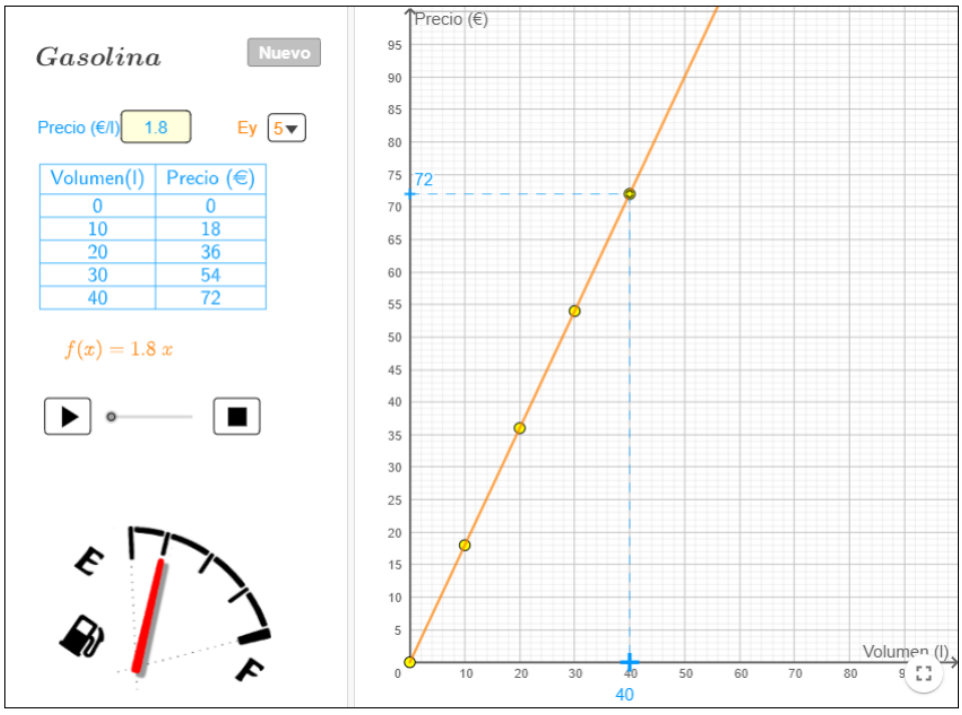


Imagen 1. Función lineal.

Función cuadrática: https://www.geogebra.org/m/nq58ddvv
Trayectoria de una pelota en un tiro a canasta (Imagen 2).

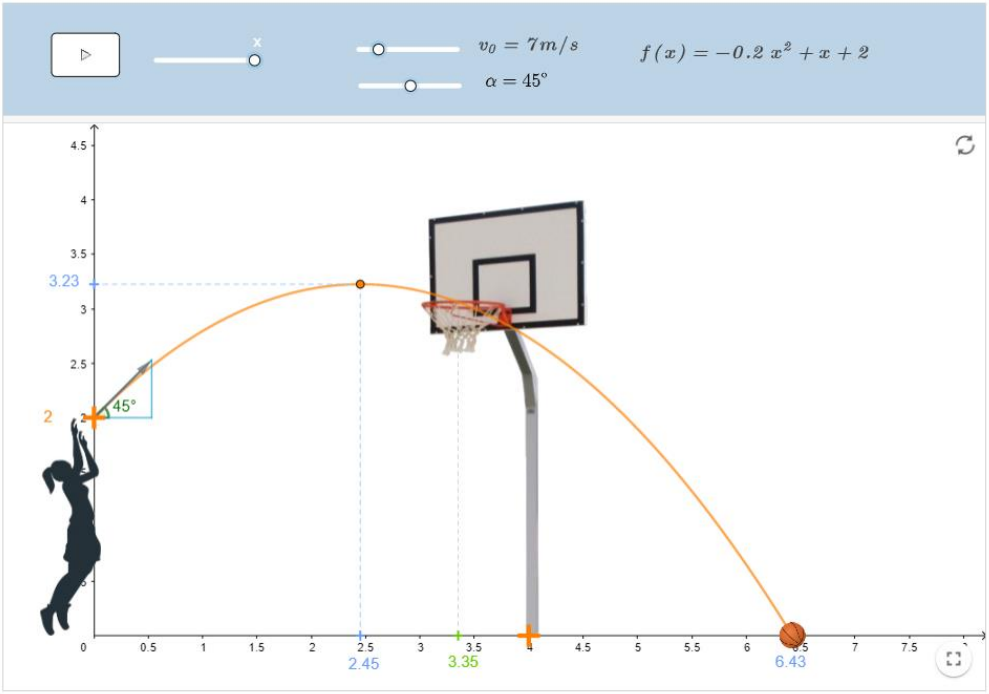


Imagen 2. Función cuadrática.

Función periódica: https://www.geogebra.org/m/pphpkqns

Altura a la que se encuentra el cestillo de una noria que gira durante un tiempo (Imagen 3).

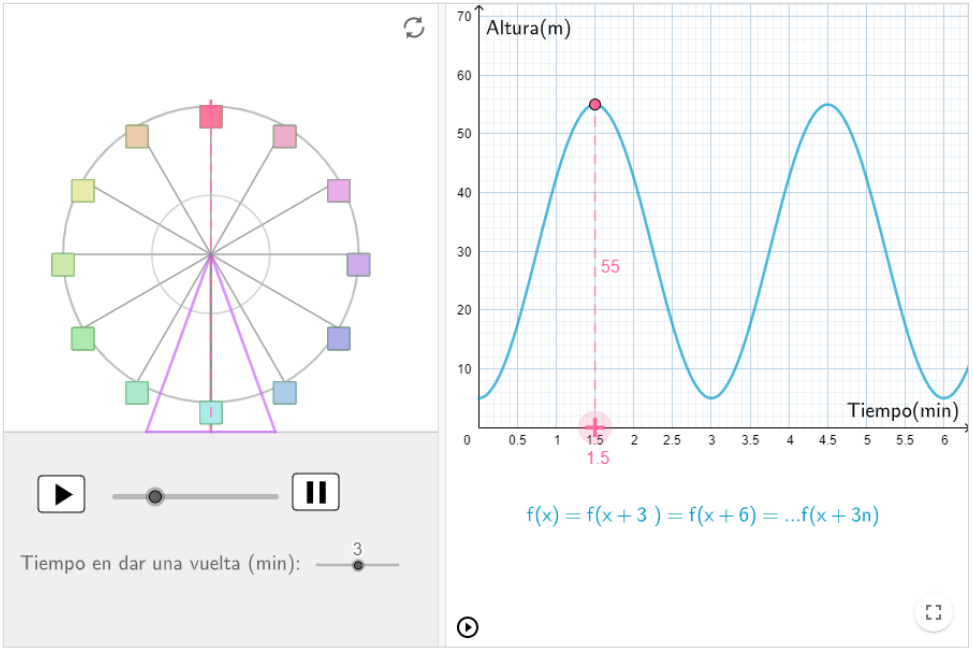


Imagen 3. Función periódica.

Tasa de Variación Media: https://www.geogebra.org/m/rgvdqhct

Distancia recorrida por un coche durante un tiempo (Imagen 4).

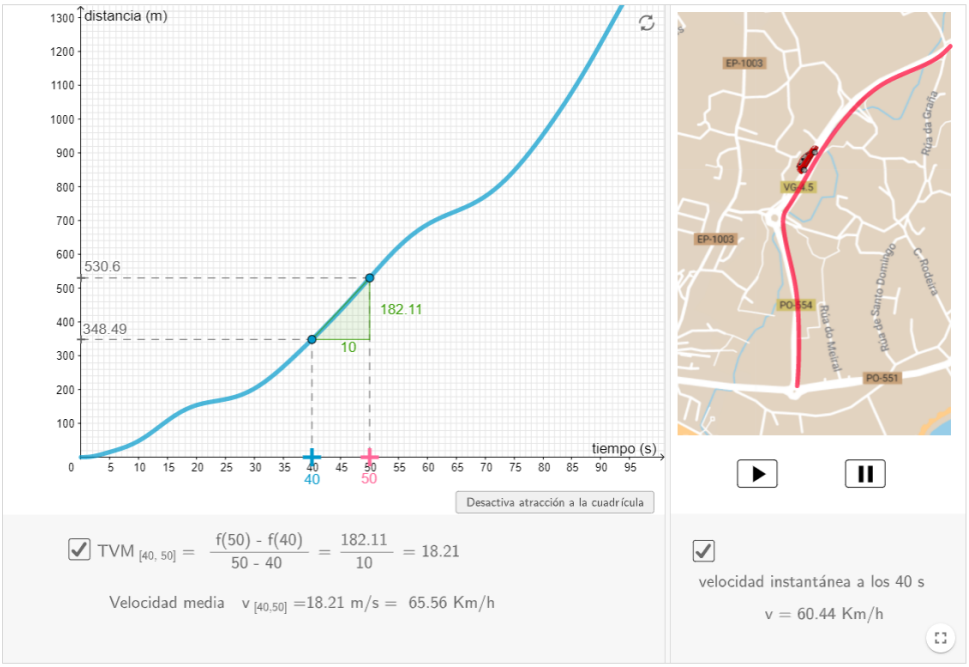


Imagen 4. Tasa de variación media.

Función a trozos: https://www.geogebra.org/m/gjsuurp5

Volumen de un líquido en función de la altura que alcanza en un envase (Imagen 5).

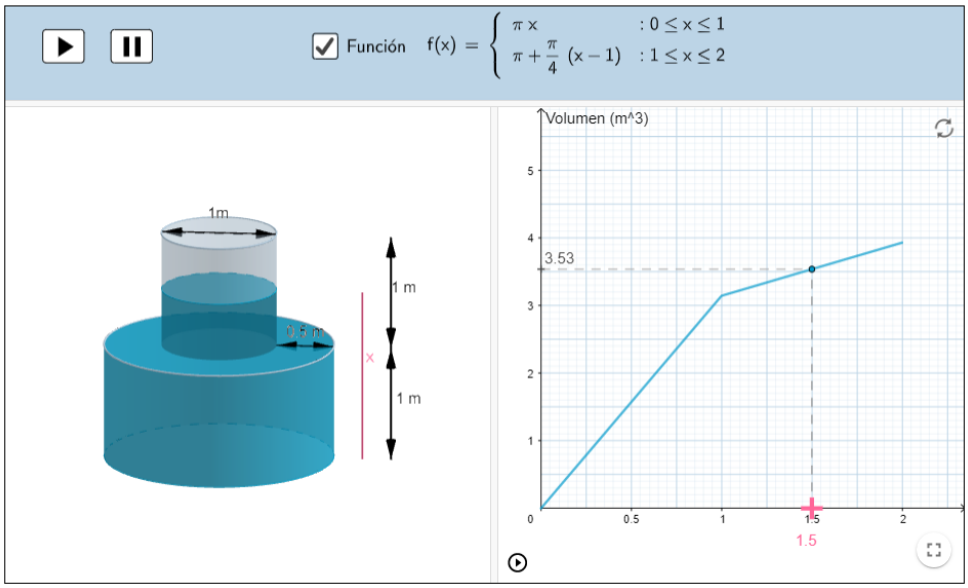


Imagen 5. Función a trozos.

Funciones elementales: https://www.geogebra.org/m/qamjrsms

Funciones del perfil 3D de flores (Imagen 6).

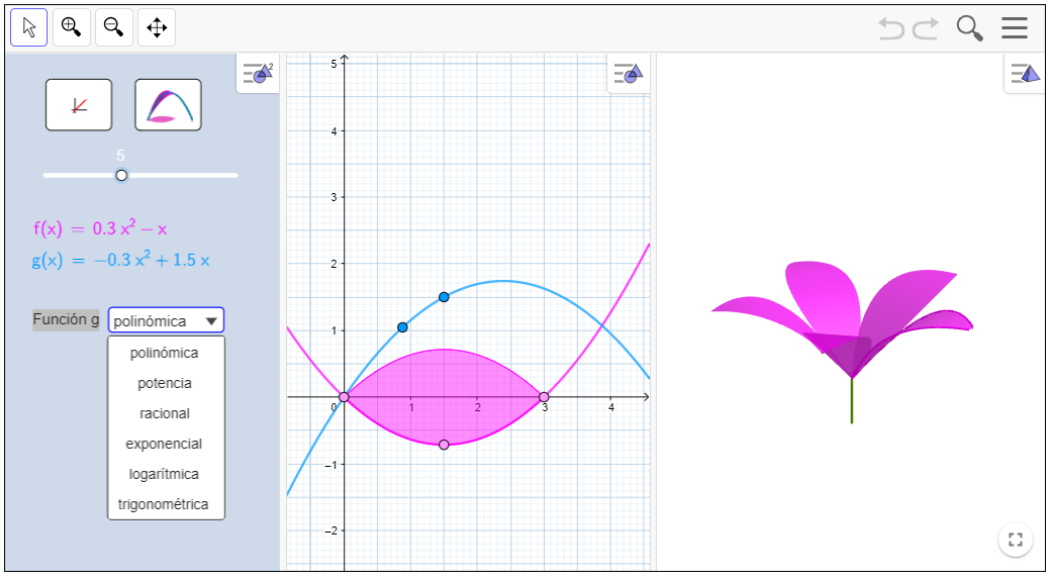


Imagen 6. Flores con funciones elementales

3. Generador de actividades

A continuación, se muestra cómo crear actividades de consolidación y refuerzo a partir de una actividad que sea sencilla de modificar y adaptar, o desde cero. (Pereiro Carbajo, 2022):

Con un mismo applet *GeoGebra* podemos generar muchos ejemplos para clase. Por ejemplo, para generar ejercicios a partir de la actividad *dominio y recorrido* (https://www.geogebra.org/m/gh6hwswm) (imagen 7) podemos crear una actividad en la web de *GeoGebra* en la que incluyamos varios applets que contengan la actividad anterior. A continuación se modifica la función de cada uno de los applets y se ocultan los objetos innecesarios (vista gráfica 2 en este caso). El resultado es una actividad *GeoGebra* con muchos ejercicios sobre el mismo contenido que podemos proponer a nuestro alumnado y tutorizar con *GeoGebra Classroom*.

Ejemplos de actividades de consolidación y/o refuerzo:
Dominio y recorrido: https://www.geogebra.org/m/yhz8b8fs

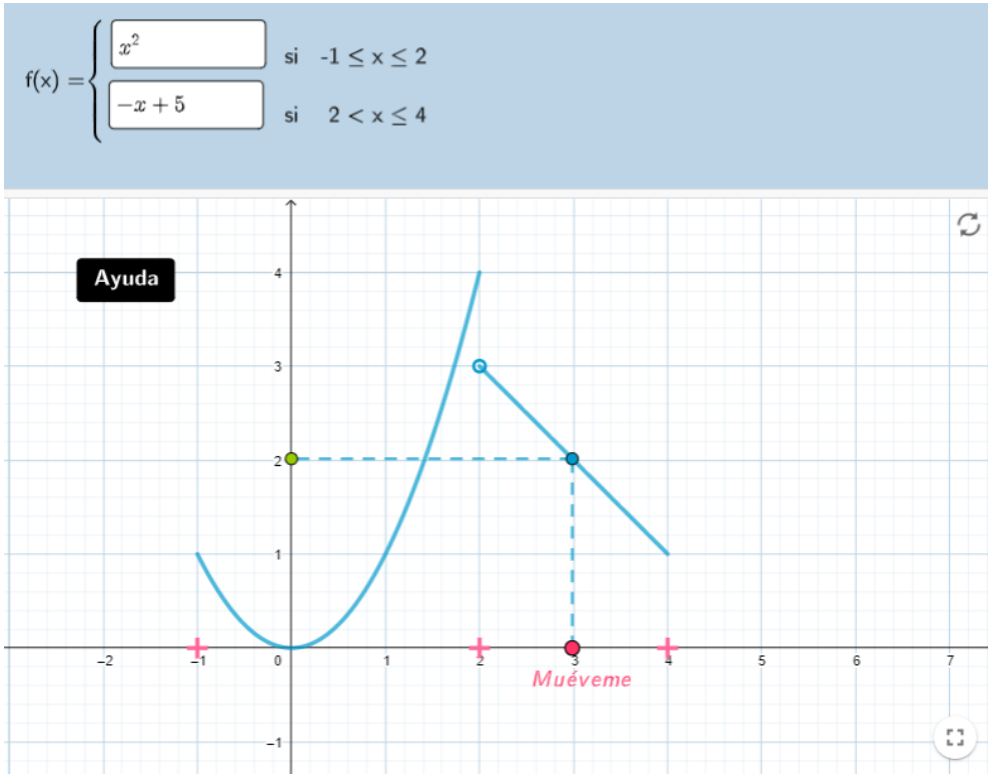


Imagen 7. Dominio y recorrido

Continuidad (Imagen 8): https://www.geogebra.org/m/yny3wppv

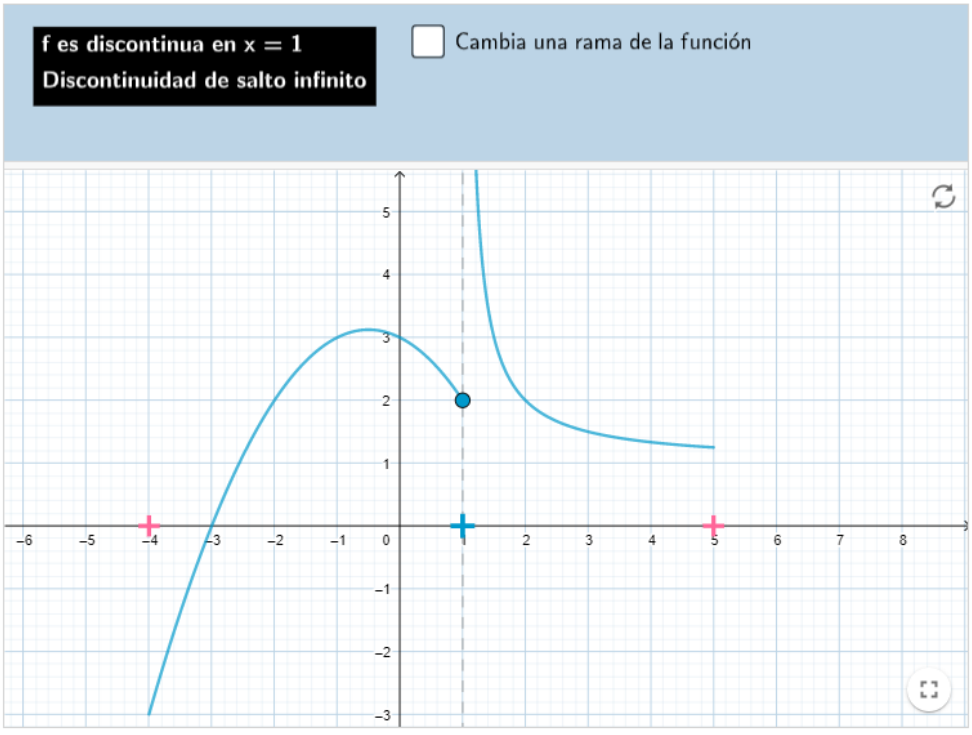


Imagen 8. Discontinuidad de salto infinito

También se pueden crear actividades con applets en blanco que contengan además de las herramientas habituales otras que consideremos de interés, por ejemplo, herramientas para representar parábolas (Imagen 9).

https://www.geogebra.org/m/pxm78tct

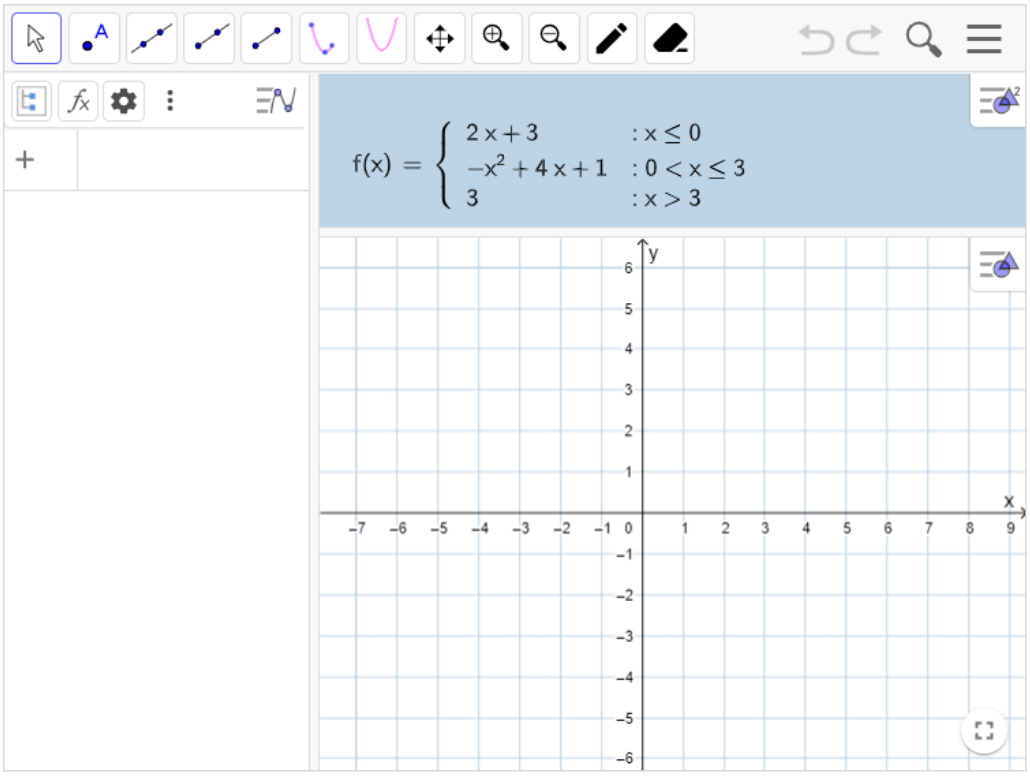


Imagen 9. Funciones a trozos

4. Problemas de aplicación de funciones

La plataforma virtual *GeoGebra Classroom* es un sitio ideal para plantear tareas interactivas al alumnado de cualquier bloque de matemáticas y en concreto de funciones por la facilidad de la representación de las funciones para su posterior análisis. Ejemplos (Pereiro Carbajo, 2022):

Aplicación de la función cuadrática: *Terraza rectangular de perímetro dado y área máxima* (Imagen 10) https://www.geogebra.org/m/uyphczfn

Una cafetería quiere montar una terraza con forma rectangular y dispone de una valla de 24 m para cerrarla. ¿Cués deben ser las medidas de la terraza rectangular de perímetro 24 m para que ocupe la mayor superficie posible?

Imagen 10 Función cuadrática- Terraza

- Aplicación de la función racional: Coste de una excursión (Imagen 11) https://www.geogebra.org/m/ted4627p

Pixabay

Excursión en autobús

Estamos organizando una excursión. El alquiler de un autobús de 54 plazas cuesta 300 € y se pagará entre todos los que vayan a la excursión a partes iguales.

a) ¿Cuanto debe pagar cada persona si apuntan 30? ¿Y si se apuntan 10? ¿Y 50?
b) Determina la ecuación del precio que debe pagar cada uno/a según el número de personas que se apunten a la excursión.
c) Representa gráficamente la función

Imagen 11 Función racional- Excursión

Aplicación de la función exponencial: *Número de células en un proceso de división celular por mitosis* (Imagen 12) https://www.geogebra.org/m/rn55pw9m

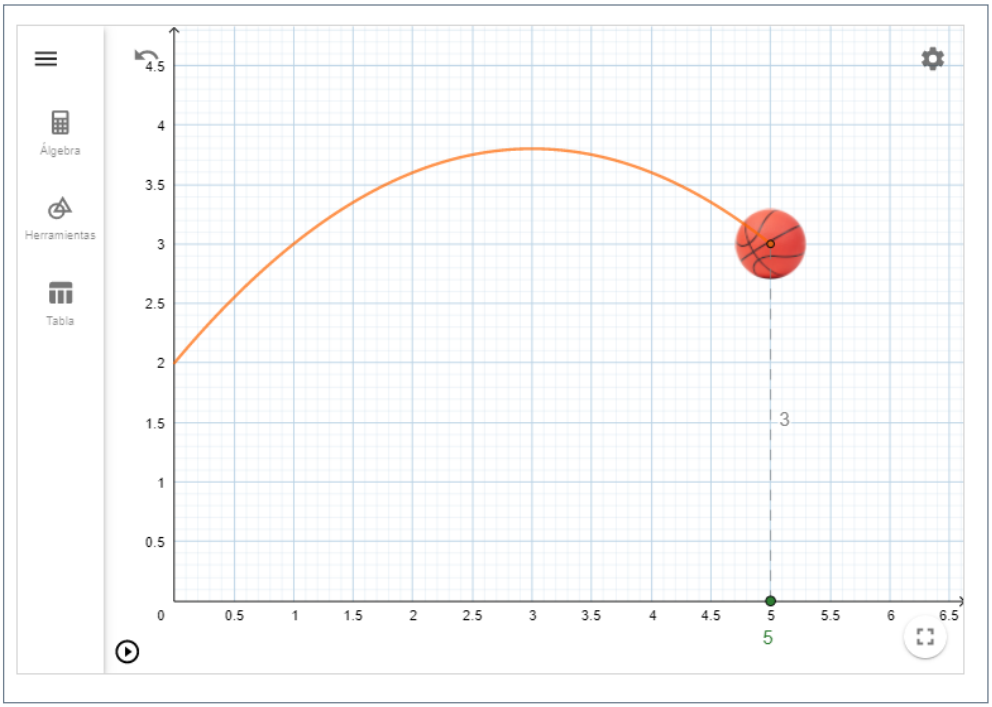
Imagen 12 Función exponencial- Mitosis

5. Actividades de modelización

Se mostrarán experiencias de aula en las que el alumnado ha obtenido las funciones cuadráticas asociadas al movimiento de la pelota en un tiro a canasta. Utilizaron *GeoGebra, Tracker* y *VLC*. (Pereiro Carbajo, 2022).

Primero bajaron al patio y se grabaron realizando tiros a canasta. Tuvieron que tener cuidado de que en la grabación apareciese la trayectoria completa de la pelota y un cono que situaron al lado de la persona que realizaba el tiro y que les serviría luego para graduar los ejes coordenados en *GeoGebra* y *Tracker*.

A continuación, en el aula y con *GeoGebra*, obtuvieron una primera aproximación de la función de la trayectoria de la pelota. Para ello escribieron en la entrada algebraica ax^2+bx+c y modificaron "a ojo" los valores de los deslizadores a,b y c (Imagen 13).



Aproximación de la trayectoria : https://www.geogebra.org/m/jmrt7hrr

Imagen 13 Aproximación con GeoGebra de la trayectoria

Para obtener las funciones cuadráticas asociadas a cada uno de sus tiros a canasta fijaron un sistema de referencia y determinaron las coordenadas de la pelota durante su trayectoria. Esto lo hicieron de dos maneras diferentes:

Con *GeoGebra* y *VLC* (Imagen 13): https://www.geogebra.org/m/nqbd4kd9

Utilizaron el programa de vídeo *VLC* para extraer 5 imágenes del vídeo en las cuales la pelota estuviera en distintas posiciones. Llevaron las imágenes a GeoGebra y obtuvieron las coordenadas de la pelota en cada una de ellas. Con el comando *AjustePolinómico(<lista de puntos>, <grado del polinomio>)* determinaron la función cuadrática de la trayectoria.

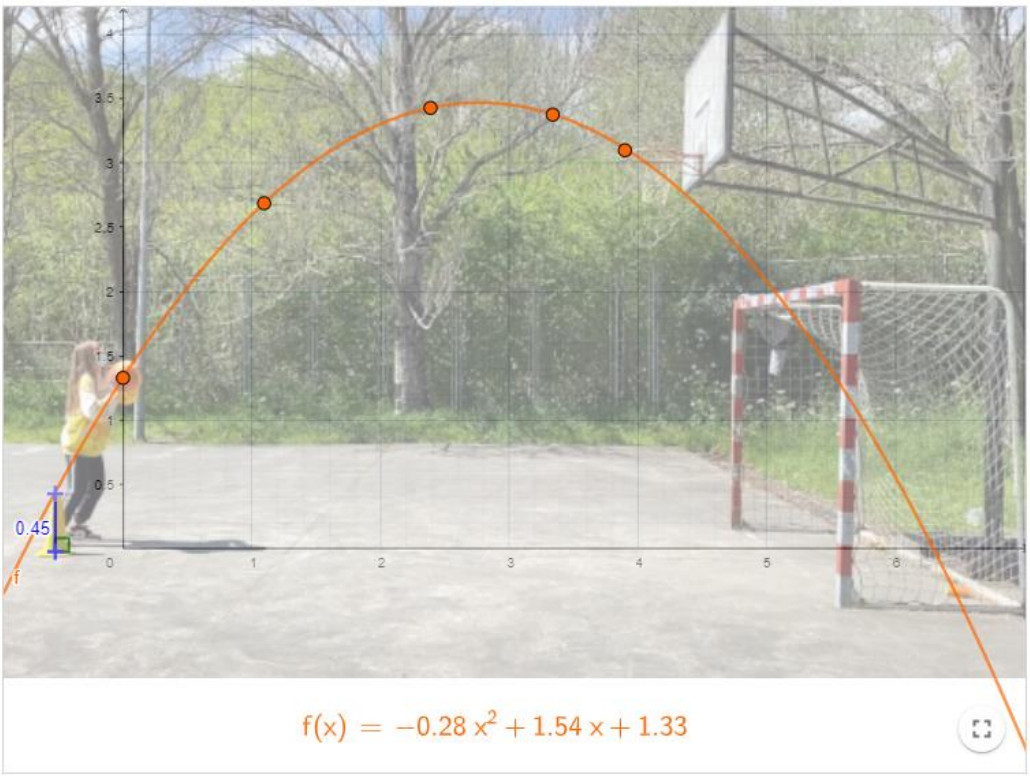


Imagen 14 Trayectoria de la pelota

Con *GeoGebra* y *Tracker* (Imagen 14): https://www.geogebra.org/m/uskgdccc

Utilizaron el programa *Tracker* para rastrear las posiciones de la pelota en el vídeo (tiempo y coordenadas horizontal y vertical) y llevaron los datos obtenidos a la hoja de cálculo de *GeoGebra*. En *GeoGebra* situaron en la vista gráfica los puntos (x,y) con la herramienta *lista de Puntos* y con el comando *AjustePolinómico(<lista de puntos>, <grado del polinomio>)* determinaron la función cuadrática de la trayectoria. Además, con los mismos datos obtenidos en *Tracker* pero considerando

el tiempo (t) y la altura (y) obtuvieron la ecuación de la altura de la pelota en función del tiempo.

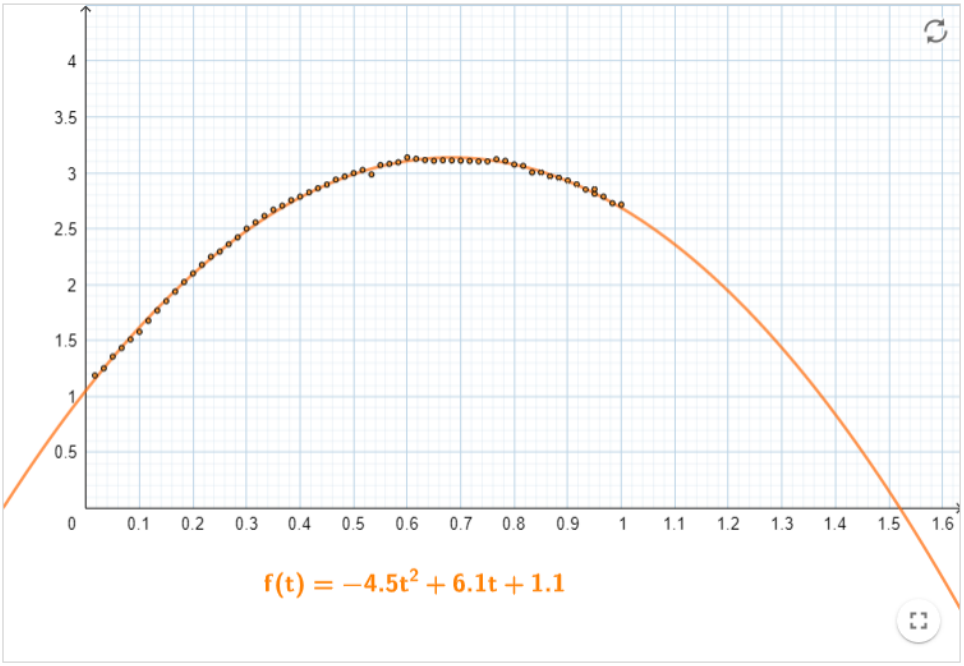


Imagen 15 Atura de la pelota en función del tiempo

6. Para acabar

Con este trabajo se pretende mostrar al profesorado una amplia variedad de actividades sobre funciones, listas para la clase, y animarlo a usar *GeoGebra* con su alumnado. Además, gracias a la plataforma virtual *GeoGebra Classroom* es muy sencillo crear actividades para el aula, tutorizar y llevar un registro del trabajo de nuestros estudiantes. En tiempo real, se les puede dar retroalimentación, lo que ayuda enormemente en la evaluación formativa.

Referencias

Bua, J B. (2020). Implementación de actividades de modelización, STEM y Maker en Enseñanza Secundaria. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, nº. 104, 83-102.

Muñoz Casado, J.L. (2022). Modelización matemática. Recuperado de: https://www.elcuadradomagico.es/jlmunoz/modelizacion/

Pereiro Carbajo, D. (2022). Funciones - ESO. Recuperado de: https://www.geogebra.org/m/e5e6ee6y

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Recuperado de: https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con

Tutorial de GeoGebra Classroom: Recuperado de: https://www.geogebra.org/m/fstbrmvt

CoP033 Maquinando en Educación Primaria Proyecto STEAM – Cómo hacer matemáticas en Steam.

Fraile Rey, Arantzazu
Arantzazu.fraile@uah.es
Universidad de Alcalá (UAH)
Grupo ICC (https://icc.web.uah.es/)

Núcleo temático: Conexiones – Procesos

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Primaria, Universidad (Grados de Magisterio Educación Primaria y Posgrado: formación de maestros de primaria en ejercicio).

RESUMEN

Presentamos el proceso de creación, desarrollo y evaluación de un proyecto educativo completo dentro del paradigma STEAM que ha permitido establecer una relación de beneficio mutuo entre el Grupo de Investigación ICC de la Universidad de Alcalá (https://icc.web.uah.es/) y los centros educativos en los que se ha implementado.

"Maquinando en el Antiguo Egipto" trabaja interdisciplinarmente contenidos de matemáticas, música y ciencias de acuerdo con el currículo oficial de educación primaria, se adapta a la programación de aula de los cursos de 4.º y 5.º de los dos centros en los que se implanta e incorpora tecnología e ingeniería.

En este entorno nos centramos en los contenidos matemáticos y su interdisciplinaridad.

Palabras clave: STEAM, Educación Primaria, Interdisciplinaridad, 5E.

Introducción

En el mundo educativo actual existe una tendencia creciente al trabajo interdisciplinar y más concretamente hacia la integración de las áreas de conocimiento referidas a las ciencias, la tecnología, la ingeniería, las artes y las matemáticas, se trata del paradigma metodológico STEM (las siglas del acrónimo provienen del inglés: Science, Technology, Engineering and Mathematics). Se trata de un conjunto de metodologías que está muy en boga en el mundo educativo tanto a nivel de investigación como de aplicación en las aulas y busca conseguir una mayor motivación en el alumnado, un aprendizaje más integrador, y fomentar vocaciones científicas que contribuyan a reducir la brecha de género que existe actualmente en estas áreas de conocimiento. Sin embargo, es un paradigma muy joven que aún carece de una metodología y desarrollo realmente efectivos. Se da también la tendencia a incorporar las Artes y las Humanidades dentro del paradigma STEM (Perignat & Katz-Buonincontro, 2019). Este movimiento se ha venido a llamar STEAM, donde la A se refiere a las “Arts” -en sentido más amplio a “All”- el cual está siendo aplicado en diversos programas nacionales (Castilla la Mancha, País Vasco, Madrid, etc.) e internacionales (Bush et al., 2016). Sin embargo, diversos autores denuncian una cierta falta de claridad pedagógica y metodológica tanto en el movimiento STEM como en STEAM (Coluccy-Gray, 2017). Para la mayoría de autores es crucial para avanzar en el afianzamiento, aplicabilidad y efectividad del STEAM, que sus conceptos clave, y su propia metodología sean adecuadamente establecidas, así como los modos efectivos de aplicación (Perignat, 2019). Recientemente en un artículo publicado en la revista *Enseñanza de las Ciencias*, Toma y García Carmona (2021) han puesto de manifiesto numerosas dificultades y problemas que existen en la aplicación, desarrollo y conceptualización del enfoque STEM.

En este sentido, la primera acción a desarrollar como equipo consistió en una exhaustiva revisión de las metodologías de enseñanza propuestas para el desarrollo de competencias propias de las áreas de conocimiento STEM/STEAM, que nos llevó a crear una propuesta metodológica para el desarrollo de proyectos STEAM basada en el modelo de enseñanza constructivista 5E (Bybee, 2006), propuesta que nos ha permitido extender y adaptar al marco competencial STEAM (STEAM-5E)

dando a la “A” su sentido más amplio como veremos más adelante y contextualizando la “M” más allá de un lenguaje para trabajar.

Presentamos la génesis del proyecto “Maquinando en el antiguo Egipto” surgido como trabajo de investigación del grupo multidisciplinar ICC (investiga, construye, crea) de la Universidad de Alcalá (UAH en adelante) y transferencia de conocimiento que se ha convertido en una relación de beneficio mutuo entre el Grupo de Investigación y los centros en los que se ha implementado.

Después de una breve descripción del proyecto y los materiales desarrollados nos centraremos en los aspectos del proyecto en los que las matemáticas no solo son protagonista, sino que juegan un papel interdisciplinar y cohesionador de conocimientos.

En “Maquinando en el antiguo Egipto” hemos buscado aportar a la metodología STEAM de diversas formas: i) desarrollando de una metodología apropiada y bien definida; ii) diseñando actividades STEAM adaptadas al currículo educativo de Educación Primaria; iii) colaborando y formando maestros para la puesta en práctica de las actividades; iv) evaluando y analizando el resultado de dicha práctica.

Objetivos del proyecto.

Maquinando en el Antiguo Egipto de plantea objetivos a diferente nivel por un lado los propios del paradigma STEAM que en este proyecto asumimos como propios y los propios del desarrollo curricular que para los cursos en los que se implementan se trabajan en las disciplinas de matemáticas, ciencias naturales y música. Estos últimos los presentamos junto con los materiales de aula desarrollados para el maestro y los alumnos (ver apartado ZZZZ)

1.2 Objetivos STEAM

Fomentar el desarrollo de aprendizajes complejos en las materias básicas de matemáticas y ciencias. Informes como TIMSS y PISA nos muestran que en muchas ocasiones los aprendizajes de las alumnas y alumnos en educación Primaria sobre las áreas de ciencias son demasiado superficiales y puramente procedimentales en el área de matemáticas, se hace necesario ayudar a generar un conocimiento más complejo de los procesos implicados en la ciencia y la comprensión de los conceptos matemáticos en toda su diversidad.

Imbricar las capacidades propias de la ingeniería –el uso de la ciencia y la tecnología para desarrollar productos y servicios útiles– a la competencia clave "Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología" (CMCT) de la educación Primaria. De esta manera se refuerza la enseñanza de las habilidades y actitudes específicas de cada tipo de alfabetización: a) matemática –comprensión y uso de los números y símbolos, comprensión y uso de operaciones básicas, uso de razonamiento matemático para interpretar y producir información-; b) científica – exploración de hechos y fenómenos, análisis de problemas, observación, recolección y organización de información relevante, análisis, búsqueda de explicaciones, curiosidad, espíritu crítico, persistencia, trabajo en equipo, etc.-; c) tecnológica - comprender, evaluar, usar y transformar objetos, procesos e instrumentos-. Todo ello en pro de que el aprendizaje se centre en la resolución de problemas del siglo XXI.

Integrar las artes como un elemento vertebrador de los procesos de aprendizaje de las ciencias, así como fomentar la creatividad.

Fomentar las vocaciones científicas. Desde múltiples organismos se destaca la falta actual, y cada vez mayor ante la creciente demanda del mundo empresarial, de personas formadas en las áreas científicas en toda Europa, sector clave para el avance económico y social de nuestro estado de bienestar.

Luchar contra la desigualdad de género. Los trabajos más remunerados y más solicitados por las empresas son y serán pertenecientes a estas áreas de conocimiento, por lo que es crucial el crecimiento de la ratio de mujeres en estos ámbitos para lograr la tan deseada equidad social.

Para lograr estos fines nuestro proyecto se organizó de acuerdo con las siguientes fases:

Fase 1: DISEÑO: SEPTIEMBRE 2019 -MARZO 2020

1.1 Se identificaron y analizaron buenas prácticas educativas basadas en metodologías STEAM de integración interdisciplinar y transdisciplinar.

1.2 Se elaboró una metodología STEAM apropiada para lograr un aprendizaje integrador real, adaptado a la realidad de las aulas y flexible en su aplicación. Tras las reuniones mantenidas en el grupo y en colaboración con dos centros educativos de Guadalajara se acordó que la propuesta iría dirigida a cuarto curso de Educación Primaria y además se daría apoyo específico a otros cursos.

1.3 Se diseñaron acciones educativas adaptadas al currículo para el nivel de Educación Primaria teniendo en cuenta las programaciones de cada centro educativo.

1.4 Se estableció una estrecha colaboración con los maestros de los Colegios implicados para la adaptación adecuada del proyecto a su contexto educativo. Para ello se programaron reuniones periódicas en las que se presentaba el material desarrollado y se facilitaba formación específica en matemáticas, ciencias y tecnología a los maestros de las aulas de cuarto y quinto curso.

1.5 Se diseñaron herramientas de evaluación del proceso de creación del proyecto y de su implementación que permitan llevar a cabo una exhaustiva evaluación de lo acontecido.

Al surgir el confinamiento en la primavera de 2020 y las condiciones de trabajo en “grupos burbuja” a lo largo del curso 2020-21 la implantación del proyecto se paralizó por completo y uno de los centros se descolgó del mismo, surge en junio de 2021 otro centro de la Comunidad de Madrid que desea implementar el proyecto en el segundo cuatrimestre del curso 2021-22.

Fase 2: IMPLEMENTACIÓN: OCTUBRE 2022 – ENERO 2022 (primer centro) y ENERO 2022 – MARZO 2022 (segundo centro)

2.1 Implementar el proyecto con la participación en las aulas de miembros del equipo de la Universidad de Alcalá y los maestros al frente de las materias de ambos centros. La Tabla 1. Calendario de sesiones de intervención, muestra la planificación llevada a cabo en el primer centro, se elabora una similar para el segundo centro. Esto ha requerido la asistencia periódica de los profesores del grupo ICC al centro escolar.

Semana	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1	ENGANCHAMOS Gymkhana (2 sesiones)	MATEMÁTICAS Fracciones (1 sesión)	MATEMÁTICAS Fracciones (1 sesión)	MATEMÁTICAS Fracciones (1 sesión)	MATEMÁTICAS Fracciones (1 sesión)
2	CC. NATURALEZA Ruedas y ejes (1 sesión)	CC. NATURALEZA Correas (1 sesión)	CC. NATURALEZA Engranajes (1 sesión)	MATEMÁTICAS Decimales (1 sesión)	MATEMÁTICAS Decimales (1 sesión)
3	MATEMÁTICAS Decimales (1 sesión)	MATEMÁTICAS Decimales (1 sesión)	CC. NATURALEZA Palancas (1 sesión)	CC. NATURALEZA Poleas (1 sesión)	MÚSICA Sonidos de Egipto (1 sesión)
4	MÚSICA Sonidos de Egipto (1/2 sesión)	MÚSICA Sonidos de Egipto (1 sesión)	CC. NATURALEZA Plano inclinado (1 sesión)	CC. NATURALEZA Máquinas compuestas (1 sesión)	
5			MÚSICA Cualidades (1 sesión)	MÚSICA Interpretación (1 sesión)	
6	MÚSICA Interpretación (1 sesión)	TÉCNOLOGÍA-INGENIERÍA (2 sesiones)	TÉCNOLOGÍA-INGENIERÍA (2 sesiones)	TÉCNOLOGÍA-INGENIERÍA (2 sesiones)	TÉCNOLOGÍA-INGENIERÍA (2 sesiones)
7	ELABORAMOS Abu Simbel (2 sesiones)	ELABORAMOS Abu Simbel (2 sesiones)	ELABORAMOS Abu Simbel (2 sesiones)	ELABORAMOS Abu Simbel (2 sesiones)	ELABORAMOS Abu Simbel (2 sesiones)
8		EVALUAMOS Visual Thinking (1 sesión)	EVALUAMOS Visual Thinking (1 sesión)	EVALUAMOS Visual Thinking (1 sesión)	

Tabla 1. Calendario de sesiones de intervención

Bloque 3: EVALUACIÓN: MAYO-JULIO 2022

3.1 Aplicar los cuestionarios creados y validados durante la fase de diseño, tanto los dirigidos a los maestros y profesores para evaluar el proceso formación y de implementación de los proyectos como los dirigidos a los alumnos para evaluar la efectividad de la metodología y su influencia en diversos aspectos como aprendizaje, motivación, fomento de vocaciones y actitudes hacia las áreas implicadas, etc.

3.2. Realizar entrevistas a los participantes para conocer los aspectos de mejora.

3.3. Análisis de algunas de las sesiones de clase para poder comprender los procesos de aprendizaje implicados.

3.5 Reflexionar sobre los resultados obtenidos y sobre mejoras para el futuro y su difusión. Este es el punto en el que nos encontramos en este momento.

Metodología.

El marco teórico bajo el que se diseña y trabaja en este proyecto es conocido como 5E. Una metodología muy conocida dentro de las Ciencias Experimentales y que hemos adaptado para dar cabida al paradigma STEAM.

¿Por qué 5E?, en el grupo se analizaron también las diferentes metodologías que cada disciplina potenciaba dentro de la formación inicial y permanente del alumnado de los grados de Magisterio, (partir de una forma de hacer conocida nos permitiría movernos en un terreno más familiar y valorar más objetivamente los riesgos asumidos), observamos que en particular en las asignaturas de matemáticas, ciencias de la materia y la energía, robótica educativa y sus didácticas y laboratorios asociados trabajamos principalmente bajo las premisas “exploramos – aprendemos – practicamos – evaluamos”, buscábamos también entre las propuestas metodológicas analizadas un forma de trabajar inter- y trans-disciplinar de todas las áreas implicadas (el grupo incorpora especialistas en física aplicada, paleontología química-física, didáctica de las ciencias experimentales, electrónica, psicología evolutiva y de la educación, educación musical, educación artística y didáctica de las matemáticas) haciendo énfasis en la inclusión real de la tecnología, la ingeniería, las artes y las humanidades en pos de un currículo integrado (Santome,1994). Llegamos así mismo a la conclusión de que la metodología 5E incluye, además, aspectos propios de otras metodologías como el ABP (aprendizaje basado en proyectos), el aprendizaje dialógico y las matemáticas Singapur.

Como ya hemos señalado, 5E es una propuesta metodológica pensada y diseñada para la enseñanza de las Ciencias Experimentales con un amplio grado de implantación en los países anglosajones y asiáticos (en la red

podemos acceder a más de 73,000 ejemplos de materiales curriculares desarrollados bajo este modelo, más de 97.000 entradas que corresponden a universidades que en su syllabus recogen este modelo, currículos educativos de estados como Tejas, Connecticut, Maryland, Nueva York o países como Singapur) que permite desarrollar secuencias de aprendizaje en el campo de las matemáticas permitiendo la interdisciplinariedad de esta con otras disciplinas. (

Tabla 2).

Matemáticas - Singapur	5E	Maquinando en el Antiguo Egipto
Exploramos: Planteamos el problema, facilitamos al alumno materiales que le permitan el aprendizaje a través de la manipulación, exploración. **Aprendemos:** Puesta en común de las soluciones, contrastamos lo aprendido. **Practicamos:** Aplicamos en diferentes contextos. **Evaluación**	**ENGANCHAR:** Detectar conocimientos previos y estimular la curiosidad del alumno. **EXPLORAR:** Desarrollar conceptos, mediante actividades de rico concepto matemático y científico. **EXPLICAR:** Comunicar y contrastar lo comprendido. **ELABORAR:** Aplicar conceptos en contexto y ampliar la comprensión. **EVALUAR:** Resumir significativamente y evaluar la comprensión de conceptos.	**Gymkhana:** actividad en grupos reducido con el objetivo de incitar preguntas y exponer la necesidad de lo que se trabaja después. **Exploramos**: trabajar los objetivos de cada disciplina en base al diseño de tareas ricas de indagación. **EXPLICAR:** Comunicar y contrastar lo comprendido. Ampliar esta discusión con aportaciones de maestro que enlazan. **ELABORAR** El traslado de Abbu Sinbel. **EVALUAR:** Observación por parte del alumno y el maestro de los procesos dialógicos. Elaboración por parte de los alumnos de resúmenes significativos y de la exposición de los comprendido y trabajado. Evaluar la comprensión de conceptos.

Tabla 2. Comparativa metodología en el aula de matemáticas vs 5E

El desarrollo de actividades debe también contemplar la inter y/o transdisciplinariedad de las distintas áreas, así por ejemplo los contenidos de ciencias se apoyan en los conceptos y procedimientos matemáticos, y en tecnología nos encontramos con la integración de contenidos matemáticos. El aprendizaje colaborativo, todos hemos tenido la ocasión de observar a los alumnos de secundaria y universidad trabajar en equipo: reparto de tareas entre los miembros del equipo y una persona que se encarga de la integración final del trabajo unos minutos antes de la entrega. En el proyecto nos proponemos un trabajo verdaderamente colaborativo, que el éxito de la tarea se alcance solo cuando el equipo dialoga, consensua y colabora. Aun así, se plantean tareas para hacer trabajar a nivel de pequeño grupo (cuatro a cinco miembros), en pareja e individualmente. Por último, la tarea final de Elaboramos está inspirada en el aprendizaje basado en proyectos.

Nos hemos propuesto una integración real de de las artes y la tecnología, fomentar la creatividad tanto artística como científica y artesanal y el desarrollo de la competencia dialógica y emocional. Por todo ello empezamos por trabajar como miembros del grupo el diseño de un logo y plantillas que bajo un mismo tema dieran un aspecto integrador a todo el trabajo y nos obligaran a revisar nuestros procesos creativos. Tal y como se muestra en la Imagen 10

Imagen 10. Tema desarrollado para el material del proyecto. Logo del grupo ICC

1. Etapas del proyecto.

Respondiendo al marco metodológico empelado el proyecto finalmente se compone de las siguientes etapas, que se suceden de acuerdo con el flujo de proceso mostrado en la Imagen 2.

1ª Fase o Enganchamos: Ghymkana para la que los alumnos se han organizado en equipos, se crea un avatar para cada equipo y todos ellos han de cumplir una misión: descifrar el mensaje de su papiro. Las matemáticas están muy presenten en esta actividad. La Ghymkana consta de cuatro pruebas en las que se presentan y

GYMKHANA
(FICHA PARA EL ALUMNADO)

RETO 2: Piezas Lupo y teorema de los 4 colores (20 minutos)

Resumen de la prueba: Modelar las piezas lupo con arcilla blanca o pasta DAS para montar el puzle y se colorear cada pieza con un gomet de colores. Todo puzle puede colorearse con un máximo de 4 colores según siguiendo la regla del teorema de los cuatro colores.

Instrucciones:

❶ Construir 13 piezas con los 7 moldes Lupo y la arcilla blanca (o pasta DAS).

Formas de moldes Lupo

Deben ser 2 de cada uno de ellos y 1 del que tiene forma de puente, de modo que son 13 piezas en total.

❸ Construir la caja para montar el puzle (tangram) dentro de ella y guardarlo.

Solicita que te cambien las piezas de arcilla por otras secas y montar el puzle.

❹ Colorear el puzle con gomets de colores.

Tenéis gomets de 4 colores diferentes. Sobre cada pieza pon un gomet y consigue el reto del teorema de los 4 colores: *dos piezas vecinas (que se tocan un lado, no importa si se toca un vértice)*

No olvidéis mostrar el resultado al personal docente para conseguir el sello en la casilla correspondiente de la tarjeta de consecución de retos y pedir el segundo trocito de papiro (2/3).

(Reto adicional: ¿podrías hacerlo con solo tres colores?).

trabajan diferentes aspectos: de carácter socio-cultural como es la conservación del patrimonio (prueba de los ladrones de tumbas), de carácter artístico-artesano y matemático (el teorema de los cuatro colores), historia – matemáticas y arquitectura (construir la pirámide de Serpinsky) el papel de la mujer en la sociedad egipcia, no solo hubo faraones – matemáticas (desencriptando el mensaje).

Imagen 11. Ficha del alumno prueba dos de la Ghymkana

2ª Fase o Exploramos: Todos estos contenidos se trabajan de forma manipulativa a través de pequeñas actividades que ponen a los alumnos en situaciones de aprendizaje colaborativo. La tabla muestra los contenidos curriculares trabajados en cada materia. Se desarrollan también en este proyecto las competencias propias de la **tecnología** y la **ingeniería** junto a otras áreas de conocimiento curricular. Como sabemos la ingeniería no se contempla de forma específica en el currículo, pero en este proyecto se incluyen una serie de actividades relacionadas con la programación, la comprensión del funcionamiento de diversos sensores y la electrónica que llevarán a los alumnos a construir un "Lector de partituras". La interconexión de la tecnología y la ingeniería con las matemáticas es natural, en este proyecto incorporamos también la música y las ciencias de la naturaleza.

E.E.A.A. del D.O.C.M.	
Matemáticas	**Fracciones - Decimales** **Ángulos – Construcción y lectura de tablas**
Ciencias Naturales	**Bloque de máquinas simples**
Música	**Registros voz - Familias instrumentos** **Lenguaje musical (esquemas rítmicos)**
Tecnología e Ingeniería	**Programas de tratamiento de voz – Sensores** **Diseño**

Tabla 3. Contenidos curriculares trabajados de cada una de las disciplinas

3º Fase o Explicamos: en ella se aborda desde cada disciplina con los contenidos curriculares a trabajar. Al abordar el trabajo de matemáticas nos planteamos las siguientes cuestiones: ¿cuál es el papel de las matemáticas en estas actividades: soporte, herramienta, fundamento, auxiliar, ¿etc.? ¿cómo vertebrar las actividades para que el ensamblaje de las distintas materias involucradas sea natural y no

artificioso? ¿quedan relegados los contenidos cuando se realizan actividades STEAM? Las matemáticas hemos observado que requieren de una instrucción particular, los conceptos matemáticos como el de fracción admiten una contextualización histórica adecuada dentro del tema que aborda el proyecto, pero requieren de un trabajo específico para su profunda comprensión. Por este motivo se han trabajado primero de manera manipulativa y siguiendo la premisa de Concreto-Pictorico- Abstracto de Gerome Brune los conceptos de fracción, decimal y ángulos para después incorporarlos de manera natural al trabajo de máquinas simples.

En las fases de "**exploramos**" y "**explicamos**" utilizamos el **aprendizaje guiado** y **colaborativo** para ir introduciendo a los niños y niñas en los nuevos conceptos de cada área y conectándolos entre ellos. Todas las áreas se trabajan de una manera práctica y manipulativa. El proyecto ha dado lugar a una secuencia de aprendizaje para el trabajo de máquinas del currículo de cuarto que integra los contenidos matemáticos trabajados: Ros, G., Fraile Rey, A., Calonge, A., & López-Carrillo, M. D. (2022). The Design of a Teaching-Learning Sequence on Simple Machines in Elementary Education and its Benefit on Creativity and Self-Regulation. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(1), em2066. https://doi.org/10.29333/ejmste/11487.

4ª Fase o Elaboramos: esta fase se trata de generar un producto final en la que todo el grupo utilizará los aprendizajes desarrollados para elaborar un gran producto final de la clase: el traslado de Abu Simbel. ¿Seréis capaces de construir el templo de

Abu Simbel y que el rayo de luz incida sobre Ramsés II? ¿Podemos darle vida al templo de modo que el ratón active música del Antiguo Egipto?

Imagen 12. Infografía proyecto Maquinando en el Antiguo Egipto

5º Fase o Evaluamos: esta fase sirve para reflexionar sobre lo que se ha aprendido, y valorar el proceso y el resultado. Los profesores han diseñado pruebas de evaluación de los contenidos trabajados y han valorado el grado de implicación y satisfacción de los alumnos como muy positivos.

Por parte del grupo estamos en el trabajo de análisis de los cuestionarios que tanto los profesores como los alumnos nos han completado. En el proceso de evaluación de los trabajos en de los alumnos (contamos con una gran cantidad de fichas de alumno y sesiones de clase grabadas para evaluar) y en el proceso de entrevistas y discusiones en grupo por disciplinas y también en conjunto. También nos hemos

propuesto generar una reunión en la que participen todos los profesores involucrados en ambos centros que nos permita recoger aspectos relevantes a conservar o modificar dentro del proyecto.

Con esta comunicación queremos presentar que la integración de los contenidos matemáticos en posible que se pueden incorporar tareas ricas al aula.

2. La formación de los maestros.

Previa a la implantación del proyecto tuvo lugar la formación presencial de los maestros en las áreas de matemáticas y tecnología. También se elaboraron vídeos que están disponibles en el canal Youtube del grupo. En estos por disciplinas se facilitan instrucciones para abordar las tareas en el aula de forma que no solo los maestros que han participado en este proyecto sino cualquiera que quiera implementarlo puede acceder a ellos: https://www.youtube.com/c/GrupoICCUAH

Los materiales para el docente, así como las fichas de alumno están disponibles en: Materiales de proyecto.

3. Conclusiones.

El proyecto presentado permite llevar al aula un trabajo en el que se integran las disciplinas de matemáticas, ciencias, música, ingeniería y tecnología permitiendo así mismo el desarrollo de actividades creativas como el pensamiento visual, la creación de piezas artísticas, y los procesos metacognitivos.

Solo contamos en este momento con la valoración verbal de los profesores y el grado de implicación de ellos y los alumnos que ha sido muy alto y positivo.

Estamos analizando los resultados de los test pre y post intervención tanto a maestros como alumnos así como los trabajos de los alumnos y el resultado de los grupos de discusión.

Nos centraremos en el análisis de los resultados del área de matemáticas para poder aportar en Valencia durante las jornadas el resultado de estos. Si podemos aportar a la comunidad docente nuestra experiencia y debatir con ellos.

Referencias

Bush, S. B., Cook, K. L., Ronau, R. N., Rakes, C. R., Mohr-Schroeder, M. J., & Saderholm, J. (2016). A highly structured collaborative STEAM program: Enacting a professional development framework. *Journal of Research in STEM Education, 2*(2), 106-125.

Bybee, R. W., Taylor, J. A., Gardner, A., Van Scotter, P., Powell, J. C., Westbrook, A., & Landes, N. (2006). T*he BSCS 5E instructional model: Origins and effectiveness*. Colorado Springs, Co: BSCS, 5, 88-98.

Colucci-Gray, L. (2017). *BERA Technical Report*. 10.13140/RG.2.2.22452.76161.

Ros, G., Fraile Rey, A., Calonge, A., & López-Carrillo, M. D. (2022). The Design of a Teaching-Learning Sequence on Simple Machines in Elementary Education and its Benefit on Creativity and Self-Regulation. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(1), em2066. https://doi.org/10.29333/ejmste/11487

Perignat, E., & Katz-Buonincontro, J. (2019). STEAM in practice and research: An integrative literature review. *Thinking Skills and Creativity*, 31, 31-43.

Santomé, J. T. (1994). *Globalización e interdisciplinariedad: el currículum integrado*. Ediciones morata.

Toma, R. B., y García-Carmona, A. (2021). «De STEM nos gusta todo menos STEM». Análisis crítico de una tendencia educativa de moda. Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 39(1), 65-80

CoC001 Maquetem Mataró. Un proyecto de trabajo en red

Roser Garcia Ferrer
rgarc253@xtec.cat
INS Damià Campeny

Núcleo temático: Conexiones; Procesos.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

El proyecto consiste en diseñar y construir una maqueta de la ciudad de Mataró en colaboración con los diferentes institutos de la ciudad. El objetivo principal es el desarrollo de las competencias matemáticas conectándolas con otras áreas, y con situaciones del entorno, de resolver problemas, de comunicar y representar ideas matemáticas sobre todo. Los contenidos que trabajamos són los que corresponden a 2º de ESO.

El diseño de una maqueta de la propia ciudad es un contexto ideal para trabajar proporcionalidad geométrica y geometría tridimensional: se calculan las escalas, se observa la conservación de ángulos, se trabajan los desarrollos planos de figuras tridimensionales compuestas y el cálculo de superficies. Durante todo el proceso de construcción, se utilizan también herramientas tecnológicas como GoogleMaps, hojas de cálculo o documentos de texto compartidos con compañeros de los grupos de trabajo.

Palabras clave: Cooperación, Redes Educativas, Geometría.

1. ¿De dónde surge el proyecto *Maquetem Mataró*?

El Grup Vilatzara estamos trabajando desde hace un par de años en la secuencia de geometría para la ESO y la presenta en un taller en estas jornadas. En este

contexto, se propuso recuperar una actividad que habíamos elaborado hace unos años sobre la aplicación de escalas y geometría tridimensional en la elaboración de una maqueta de un edificio con su informe de elaboración correspondiente.

Desde el ICE (Instituto de Ciencias de la Educación de la Universitat Autònoma de Barcelona) se nos propuso también pensar en actividades que implementaran la colaboración entre centros educativos de una misma ciudad y el proyecto empezó a cobrar forma.

Nos pusimos en contacto con el CRP (Centro de Recursos Pedagógicos) de la zona para que nos facilitaran el contacto con los distintos centros educativos y se les mandó el documento preliminar del proyecto con la propuesta de los pasos que se proponían seguir. Hicimos una ronda de reuniones con algunos departamentos de matemáticas de los centros que lo pidieron para explicar personalmente la idea.

Finalmente, se incorporó el proyecto *Maquetem Mataró* como actividad de formación en la modalidad de Grupo de Trabajo para el siguiente curso. Cuatro centros educativos se apuntaron en su primera edición y cabe decir que empezar algo nuevo después del agotamiento que tenían muchos profesores por el confinamiento de 3 meses echó para atrás a algunos.

Aunque *Maquetem Mataró* estaba pensado desde sus inicios para ser un proyecto del propio centro educativo además de colaborar entre distintos centros educativos, el curso pasado, en su primera edición, tampoco conseguimos que se apuntaran al proyecto profesores de otras materias, así que lo enfocamos únicamente desde la perspectiva matemática y consideramos que resultó un éxito no tanto por el producto final sino por la implicación que se consiguió del alumnado de la que hablaremos más adelante que conllevó su desarrollo competencial.

Imagen 13: Maqueta de la primera edición del Maquetem Mataró

Este curso, seguimos siendo cuatro centros educativos los que colaboramos en este proyecto pero hemos incorporado profesores de Ciencias Sociales, de Tecnología y de Dibujo así que trabajamos para organizar que todas las aportaciones se integren bien en el producto final de la maqueta que se expondrá en mayo.

2. ¿Y cómo nos organizamos?

Podemos decir que el proyecto está en fase de continua actualización ya que según las condiciones con las que nos encontramos cada curso, vamos introduciendo las mejoras que creemos oportunas y las adaptaciones necesarias.

En la primera edición del proyecto, el profesorado implicado fue únicamente de matemáticas y estábamos en un contexto de cierto distanciamiento social provocado

por el SARS-COV19 por lo que hicimos las reuniones telemáticas correspondientes para ir planificando cada paso.

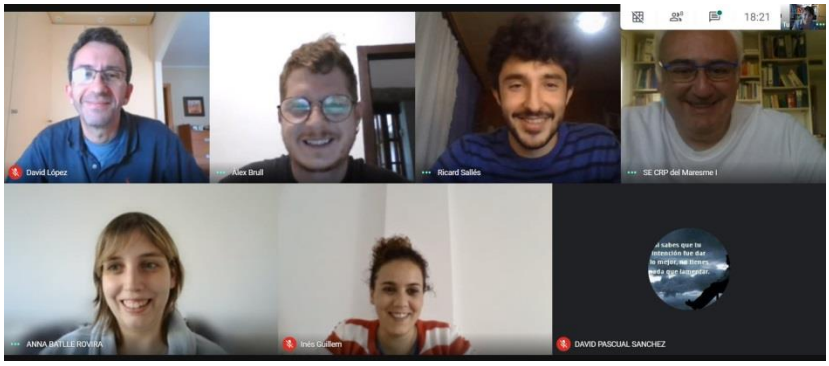


Imagen 14: Grupo de profesores de la 1a edición del Maquetem Mataró

Este curso 21-22 hemos llevado a cabo la segunda edición del proyecto. En este caso los profesores de matemáticas lideran el trabajo en red en sus centros respectivos con el resto de departamentos participantes en el proyecto. Así que podemos decir que se trata de un trabajo en red con una cooperación a 2 niveles:

- una cooperación a nivel externo entre centros educativos de la ciudad y
- una cooperación a nivel interno entre departamentos de un mismo centro.

En la cooperación a nivel externo, por las posibilidades que tenemos en el momento actual con confinamientos varios, grupos burbujas, etc. seguimos haciendo las reuniones telemáticas. Como era de esperar, al ser una segunda edición, hay muchas cosas que se han podido aprovechar y tenemos más tiempo para dedicar a las mejoras como, por ejemplo, los mapas con más detalle para facilitar la toma de medidas al alumnado.

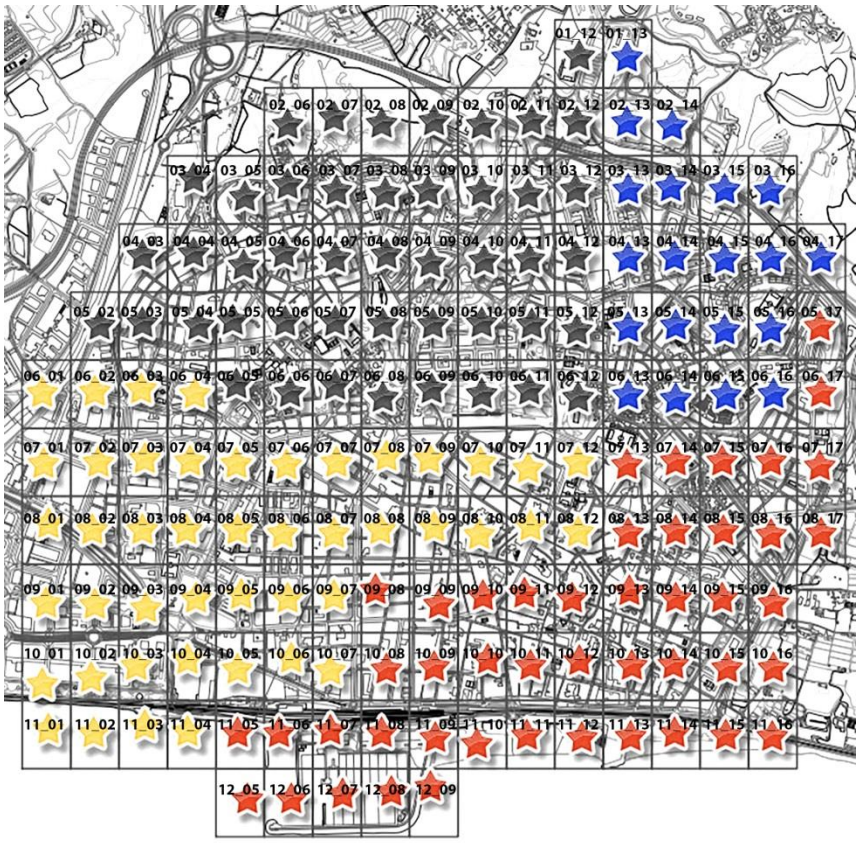


Imagen 15: Mapa de Mataró con la distribución de placas por centro educativo

En cambio, consideramos que el cuadro utilizado en la primera edición para ponernos de acuerdo con las medidas de los bordes de las placas para que cuadre el trazado de calles nos fue muy útil y es por eso que lo seguimos utilizando igual.

Imagen 16: Hoja de cálculo donde poner las medidas de los extremos de las placas

Con pocos cambios hemos consensuado también los colores a utilizar para cada tipología de elemento urbanístico que hemos considerado destacar.

Negro	Gris Plomo	Gris Perla	Chocolate	Cuero	Verde Amazona	Verde Abeto
Verde billar	Verde Manzana	Azul Ultramar	Azul Mar	Azul Maldivas	Azul Turquesa	Azul Cielo
Violeta	Lila	Rosa	Fucsia	Granate	Rojo	Tomate
Naranja	Mandarina	Gualda	Amarillo Canario	Amarillo Limón	Crema	Blanco

	Carrers: en blanc (directament el cartró pluma)
Gris Perla	Autopista i N II: en gris
Gris plomo	Vies del tren: gris fort
Cuero	Illes de cases: beige (el 2n color per l'esquerra)
Verde Abeto	Zona ajardinada: en verd
Lila	CAP: lila
Violeta	Hospital: lila fort
Verde Billar	Gimnàs municipal i Camps de futbol o altres espo
Chocolate	Museus / Monuments arqueològics / Biblioteques
Rojo / Granate	Instituts/Escoles/Universitats tant públics com p
Naranja	Polígon industrial
Azul Maldivas	Mar: blau

Imagen 17: Elección de colores en la primera edición del Maquetem Mataró

En definitiva, reeditar este proyecto nos permite ganar seguridad en los pasos a seguir, calcular los tiempos a dedicar a cada parte y podernos dedicar mejor a la gestión del proyecto con nuestros grupos.

Haremos unas cinco reuniones de 3 horas aproximadamente a lo largo del curso. Las dos primeras es importante hacerlas antes de empezar el proyecto con nuestros alumnos ya que son las que nos sirven de planificación del trabajo:

- preparamos los mapas con los que trabajaremos,
- prevemos la escala a utilizar,
- proponemos distintos espacios posibles para la exposición,
- fijamos el material a utilizar para la maqueta
- proponemos rúbricas de evaluación del proyecto

- e incorporamos las ideas de colaboración de los distintos departamentos de nuestros centros para ver cómo puede encajar todo.

Una vez empezado el proyecto con nuestros alumnos haremos otra reunión para acordar las medidas de los bordes de las placas colindantes entre distintos centros. De este modo, los alumnos ya podrán empezar a construir la parte 2D de la maqueta.

Finalmente, las dos últimas reuniones sirven para resolución de dudas que van saliendo en el proceso de construcción de la maqueta, organizar la exposición y valorar puntos fuertes y débiles del proyecto.

En la colaboración a nivel interno entre departamentos de un mismo centro dependerá de las posibilidades horarias de cada centro para dedicar a la coordinación del proyecto. Por el momento, algunos centros han conseguido disponer de alguna hora puntual para coordinarse entre los departamentos participantes y otros se han ido coordinando en horas libres coincidentes entre los profesores implicados. Sea como sea, el fruto de la colaboración entre departamentos ha aportado elementos enriquecedores en la maqueta como son

- los soportes de los edificios fabricados con impresora 3D,
- una maqueta topográfica pequeña para ver el relieve real de la ciudad también fabricada con impresora 3D,
- códigos QR con itinerarios de las rutas de autobús de la ciudad para conocer los distintos barrios de ésta,
- códigos QR con algunos de los edificios de la ciudad graficado con Autocad.

3. Pero... ¿esto entra en el currículum?

En el currículum de la Generalitat de Cataluña que ha habido hasta este curso, teníamos las 12 competencias matemáticas, de las cuales cito literalmente la Competencia 11: “*Emplear la comunicación y el trabajo colaborativo para compartir*

y construir conocimiento a partir de ideas matemáticas". Esta competencia se ve totalmente potenciada con este proyecto ya que es el modo de trabajo diario que utilizamos, trabajando en pequeños grupos que tendrán que decidir, investigar, redactar conclusiones y explicar pasos de elaboración durante todo el proceso de construcción de la maqueta.

Y no pasa únicamente con esta competencia ya que podemos considerar que se potencian otras muchas competencias. Por ejemplo:

- Al calcular la escala de la maqueta, traducen un problema a lenguaje matemático a una representación matemática utilizando variables, símbolos, diagramas y modelos adecuados (C1)

- Al representar en la placa los distintos elementos urbanísticos que aparecen en el mapa, utilizan propiedades de las matemáticas como la conservación de ángulos en las figures proporcionales o la búsqueda del centro de algunas figures geométricas para analizar los pasos a seguir para plasmar estos elementos en cada placa y para describirlos en su informe (C8).

- Al investigar las medidas reales de los edificios a reconstruir, podrán encontrar la planta del edificio en GoogleMaps pero normalmente no encontrarán en internet la información sobre la altura de los edificios, así que tendrán que hacer pequeñas investigaciones para descubrirla. Con lo que podemos afirmar que tendrán que seleccionar y usar tecnologías diversas para gestionar y mostrar información y visualizar y estructurar ideas o procesos matemáticos (C12) y tendrán que mantener una actitud de investigación frente a un problema ensayando estrategias varias (C3).

En el borrador del nuevo currículum, las competencias aparecen agrupadas en cinco bloques:

- Resolución de problemas

- Razonamiento y prueba,

- Conexiones,
- Comunicación y representación,
- Socioemocional

Parece evidente pues, que también se verán potenciadas las nuevas competencias. El último de los bloques, el Socioemocional, es el que hace referencia a lo que hasta el momento llamamos competencias Personales i Sociales, ya que es donde se trabaja la responsabilización y participación activa en los trabajos en equipo, el desarrollo de la curiosidad, la iniciativa y perseverancia en el trabajo. También se ve potenciado con el proyecto ya que al saberse participantes en un trabajo con otros alumnos de otros centros, saben que tienen la responsabilidad de cuadrar al máximo todas las medidas y refinar tanto como puedan sus producciones. Llega a ser algo competitivo, no quieren que su parte del proyecto sea menos que la de los demás.

Además, el contexto de la maqueta genera un tema ideal para conectar no conceptos propios de las matemáticas sino de otros que se pueden considerar transversales como, para poner un ejemplo, las curvas de nivel trabajadas en Sociales, vistas en Matemáticas y ahora trabajadas con impresora 3D en Tecnología.

Desde el punto de vista de contenido matemático, durante el proyecto se trabajan distintos aspectos de geometría incluidos en todos los currículums que ha habido hasta el momento. Partiendo del currículum de la Generalitat de Cataluña vigente hasta este curso el proyecto cubre los siguientes contenidos clave:

- CC8. Sentido espacial y representación de figuras tridimensionales.
- CC9. Figuras geométricas, características, propiedades y procesos de construcción.
- CC10. Relaciones y transformaciones geométricas.
- CC11. Magnitudes y medida.

- CC12. Relaciones métricas y cálculo de medidas en figuras.

Que se concretan con los siguientes contenidos:

- Espacio y forma
    - Figuras geométricas de dos dimensiones (CC8, CC9)
        - Identificación y descripción a partir de objetos reales, imágenes y modelos.
        - Clasificación y propiedades.
        - Posición y orientación de las figuras.
        - Elementos básicos de la geometría plana (paralelismo y perpendicularidad).
    - Simetría (CC10)
        - Identificación en entornos cercanos (naturaleza, construcciones, fotografías...).
        - Representación y construcción.
    - Herramientas e instrumentos (CC9)
        - Materiales manipulables (recortables, geoplanos, papeles pautados).
        - Instrumentos de dibujo (regla, escuadra, compás y transportador).
        - Herramientas digitales (applets diversos y software libre de geometría dinámica, tipo GeoGebra).
- Medida

- Unidades de medida de magnitudes, longitudes, ángulos y de áreas (CC11)
    - Selección de las unidades adecuadas a cada situación.
    - Relación entre unidades y conversión entre unidades.
- Longitudes, perímetros y áreas de figuras en dos dimensiones (CC11, CC12)
    - Estimación a vista de medidas de objetos del entorno.
    - Uso de los instrumentos adecuados en las medidas de objetos.
    - Toma de medidas de longitudes.
    - Cálculo de longitudes, ángulos, perímetros y áreas.

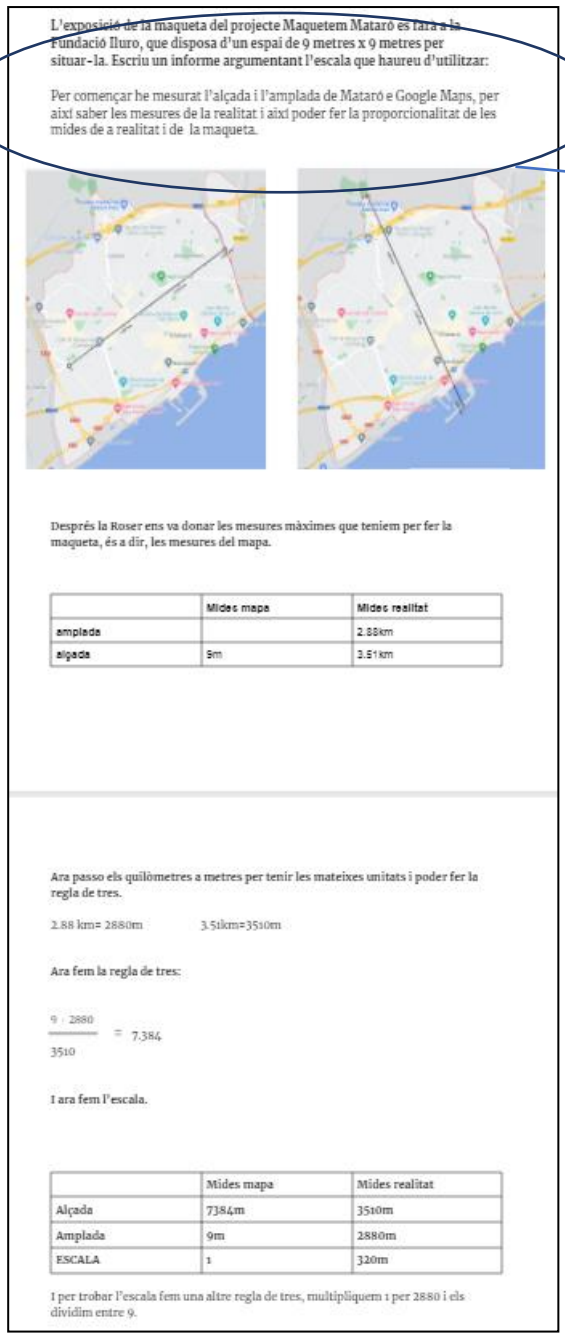
Consideramos que aunque los distintos currículums puedan cambiar la organización del contenido a trabajar, esta parte de geometría estará presente de una manera u otra.

Para concretar la parte metodológica del proyecto en el aula con los alumnos, tenemos que tener presente que un factor imprescindible es la teatralización del anuncio de cada paso con nuestros grupos.

Como contamos anteriormente, el grupo de trabajo formado por los profesores ya ha previsto en sus dos primera reuniones las escalas a utilizar, el espacio, el material, etc. pero esto no significa que se les dé directamente esta información al alumnado. Sencillamente se ha previsto todo para saber hacia dónde se tienen que orientar los debates que se generarán en el aula.

Para empezar, los alumnos no saben la escala a utilizar, se les explica que estamos buscando un local para la exposición y que según las medidas de éste, la maqueta deberá tener unas medidas u otras. Así el día que consideramos oportuno se les confirman las medidas del espacio disponible y ellos calculan cuál debería ser la escala a utilizar y lo explican en un pequeño informe.

En tono solemne se les dice que en la siguiente reunión del grupo de trabajo llevaremos sus cálculos a ver si coinciden con los de los otros centros y así pactaremos entre todos la escala a utilizar.



L'exposició de la maqueta del projecte Maquetem Mataró es farà a la Fundació Iluro, que disposa d'un espai de 9 metres x 9 metres per situar-la. Escriu un informe argumentant l'escala que haureu d'utilitzar:

Per començar he mesurat l'alçada i l'amplada de Mataró e Google Maps, per així saber les mesures de la realitat i així poder fer la proporcionalitat de les mides de a realitat i de la maqueta.

Després la Roser ens va donar les mesures màximes que teniem per fer la maqueta, és a dir, les mesures del mapa.

	Mides mapa	Mides realitat
amplada		2.88km
alçada	9m	3.51km

Ara passo els quilòmetres a metres per tenir les mateixes unitats i poder fer la regla de tres.

2.88 km= 2880m 3.51km=3510m

Ara fem la regla de tres:

$$\frac{9 \cdot 2880}{3510} = 7.384$$

I ara fem l'escala.

	Mides mapa	Mides realitat
Alçada	7384m	3510m
Amplada	9m	2880m
ESCALA	1	320m

I per trobar l'escala fem una altre regla de tres, multipliquem 1 per 2880 i els dividim entre 9.

Imagen 18: Ejemplo de un informe de cálculo de la escala a utilizar

La exposición de la maqueta del proyecto Maquetem Mataró se realizará en la Fundación Iluro, que dispone de un espacio de 9 metros x 9 metros para situarla. Escribe un informe argumentando la escala que debe utilizar:

Para empezar he medido la altura y el ancho de Mataró e Google Maps, para así saber las medidas de la realidad y así poder hacer la proporcionalidad de los tamaños de la realidad y de la maqueta.

Una vez decidida la escala, se les tiene que comunicar que hemos considerado oportuno construir la maqueta plana con placas de cartón pluma que según nuestro proveedor miden 50cm x 70cm. (según el tiempo de qué se disponga, se puede hacer el debate en clase sobre el material a utilizar para la base de la maqueta que pueda sostener todo y que nos permita dividir el trabajo).

A partir de allí toca tomar sus medidas, así que se debe insistir en la exactitud de estas para cuadrar bien las calles con las placas de otros grupos. Hablamos entonces de cómo se agrandan los errores en las medidas y lo que pueden provocar al juntar dos placas.

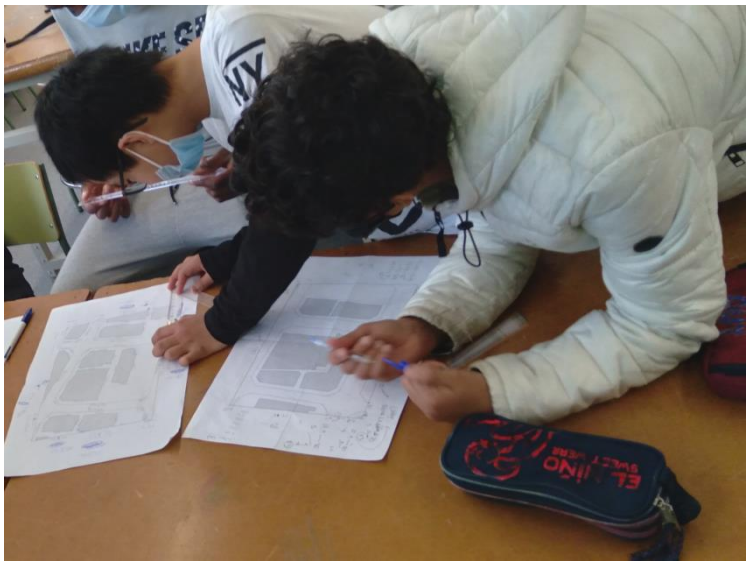


Imagen 21: Alumnos tomando medidas de los bordes de su placa

Imagen 22: Ejemplo de errores de medición

Con el mismo *modus operandi*, se repite el proceso al decidir la escala a utilizar para crear los edificios de manera que se pueda ver un poco el detalle de cada uno. Además, con los edificios incluso se puede hacer un concurso interno del instituto para decidir entre los 3 o 4 edificios iguales que salen de cada uno de los que nos toca por centro.

Finalmente, nos llega la puesta en escena con el cartel del anuncio de la exposición y el montaje de la maqueta por turnos para no coincidir los distintos centros educativos.

4. Y... ¿vale la pena tanto jaleo?

En DOGC Núm 6945-28.8.2015 (DECRET 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria.) la palabra “coopera” sale un total de 49 veces. En el borrador del nuevo currículum, aumenta a un total de 72 veces.

En el *Maquetem Mataró* encontramos la situación perfecta para trabajar la cooperación entre alumnos de distintos grupos de un centro educativo y entre alumnos de distintos centros educativos. Al trabajar en red con otros centros, los alumnos adquieren un sentido de pertenencia y trabajo común que les provoca estar más implicados en cada tarea.

Además, esta cooperación nos permite trabajar la diversidad sin complicaciones añadidas ya que en la representación de cada placa hay distintos niveles de dificultad según la que les toque. Así, todos los alumnos pueden participar según su nivel de competencia logrando que se sientan incluidos en una actividad importante del centro.

A nivel del profesorado, como indican estudios como el de Hernández de la Torre, E., & Navarro Montaño, M. J. (2018) el trabajo en red genera motivación para el análisis colectivo de los temas de interés entre profesionales, llegando a conclusiones compartidas y participativas a partir del desarrollo de una

comunicación eficaz entre compañeros, tomando decisiones conjuntamente. Es una oportunidad para propiciar cambios en las actitudes del profesorado respecto a su propia formación y encaminada hacia la mejora de la institución escolar.

Maquetem Mataró también es un proyecto de interés municipal. Con cerca de 130.000 habitantes, con mucha historia y con algunos edificios emblemáticos no dispone de ninguna maqueta al nivel de la propuesta por este trabajo. Por esto y por el interés por las nuevas metodologías de colaboración que implementamos, desde el área de Educación del Ayuntamiento de Mataró, nos han ayudado a encontrar las salas de exposición, a tramitar los permisos e incluso en esta segunda edición nos han financiado el alquiler de la Sala de exposición.

Imagen 9: Vista aérea de la ciudad (Wikipedia)

Imagen 10: Yacimiento arqueológico Torre Llauder (Wikipedia)

Imagen 11: Casa Coll i Regàs (Wikipedia)

A nivel de organización de las sesiones, este proyecto ciertamente nos ocupa bastantes horas de matemáticas. Al no disponer de franja horaria de dedicación a proyectos, cada departamento ha trabajado su parte en sus horas de clase.

De todas formas cabe decir que en el global del curso hemos seguido dedicando exclusivamente el segundo trimestre entero a la Geometría. El proyecto *Maquetem Mataró* lo hemos ido trabajando de forma paralela al resto de las actividades

planificadas para la unidad. Nos ha servido como actividad de aplicación de lo que hemos ido aprendiendo y por lo tanto, también ha sido en gran parte un modo de evaluar a nuestros alumnos según sus producciones y sus informes de realización del proyecto.

5. ¿Qué se puede mejorar?

Una de las posibles mejoras que parece más obvia, sería la de llevar el grado de cooperación a otro nivel que sería el de los alumnos. Hasta el momento hemos hablado de una cooperación a nivel interno entre profesores de distintos departamentos de un mismo instituto y de una cooperación a nivel externo que se basa, hasta el momento, en la cooperación entre los profesores de distintos centros educativos para coordinar el trabajo de los alumnos.

Por este motivo, es posible que en futuras ediciones la cooperación entre alumnos de distintos centros pueda ser más evidente para ellos, y que sean ellos mismos los que protagonicen reuniones para concretar medidas de las placas para que cuadren o que una representación de alumnos pueda asistir a las reuniones de profesores para organizar el reparto de zonas y edificios por centros educativos.

Con una mayor colaboración entre los alumnos de los distintos centros, ya estaríamos hablando de un proyecto menos pautado, que no menos planificado, con lo que se potenciarían además de las competencias que se adquieren hasta el momento, las competencias que hacen referencia a la planificación y organización.

En un futuro sin SARS-COV19, al no tener que hablar de grupos burbuja ni grupos confinados, nos podríamos plantear (como era la idea inicial del boceto de este proyecto) que el día de montaje de la maqueta fuese un día con un aire festivo donde coincidiríamos los distintos centros y se podrían organizar actividades matemático-recreativas para compaginarlas con el montaje de la maqueta.

Otra mejora sería la de conseguir un espacio horario conjunto para coordinar el grupo de profesores del mismo instituto participantes en el proyecto desde distintos departamentos.

Además, sería deseable que los departamentos y profesores que nos hemos implicado en esta segunda edición, consolidemos nuestra participación conjunta y que eso pueda generar una colaboración entre los profesores de distintos centros de otros departamentos, paralela a las reuniones de los profesores de matemáticas.

Las valoraciones de los profesores participantes en este proyecto hasta el momento han sido positivas en todos los niveles: participación del alumnado, aprendizaje conseguido, colaboración entre centros educativos, etc. Incluso los que no repitieron se comprometieron a intentar participar en futuras ediciones si tenían la oportunidad de estar en un centro de Mataró.

Referencias

DECRET 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria.

Hernández de la Torre, E., & Navarro Montaño, M. J. (2018). Redes educativas locales para la mejora escolar. *Revista electrónica de investigación educativa*, *20*(3), 29-42.

CoC002 Educar la mirada matemática, enseñar a mirar: La potencialidad didáctica de los microrrelatos matemáticos a partir de fotografías

María del Pilar Menoyo Díaz
mpmenoyodiaz@gmail.com
Miembro de la Red Iberoamericana de Docentes (RID) Formación IB

Núcleo temático: Conexiones. Recursos para el aula

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato

RESUMEN

Propuesta interdisciplinar cuyo objetivo es educar la mirada matemática de lo que nos rodea y plasmarla en una fotografía para describirla con conceptos matemáticos en formato de microrrelato de un máximo 280 caracteres, como si fuera un tuit. La descripción puede sugerir un relato de índole social, de historia de las matemáticas, un problema o puede ser utilizado para paradas de una ruta.

Puede tratarse de manera puntual, formato exposición o ruta, o formar parte del contenido curricular de la materia de Matemáticas ya sea dentro de un bloque de contenido o de todo el currículum, desde 1º de ESO hasta 2º de Bachillerato.

El curso pasado se experimentó con alumnado de 1º de ESO y sus resultados se comunicaron en los congresos: III CTEM de la Comunitat Valenciana y II Iberoamericano de docentes. Complementamos la experiencia mostrando cómo este curso, la están experimentando en otros centros y niveles.

Palabras clave: Mirada Matemática, Fotografía, Microrrelato Matemático, Secundaria

Introducción

Presentamos una propuesta que corresponde a una actividad matemática para realizarla básicamente fuera del aula y que ayuda a la matematización del entorno cercano, utilizando la fotografía como herramienta didáctica para fomentar y desarrollar la mirada matemática por parte del alumnado y por ello la hemos clasificado en el núcleo temático de *Conexiones.* Por otra parte, al ser una propuesta que utiliza la fotografía como herramienta didáctica planteando una contextualización de los aprendizajes en la vida cotidiana del alumnado, elaborando a través de ella un microrrelato matemático, la hemos clasificado en el núcleo temático: *Recursos para el aula.*

Hemos estructurado la presentación de la propuesta partiendo en qué nos hemos basado para plantear una nueva mirada del mundo a través de la mirada matemática, indicando los aspectos novedosos y por lo tanto las aportaciones que introducimos para fomentar y desarrollar en el alumnado la mirada matemática. En el apartado 2, indicamos cuándo empezamos a divulgarla y en qué marcos lo hicimos, tanto de manera individual, como en cooperación con la profesora Marisa Domínguez Tasias del instituto, Caterina Albert de Barcelona, anteriormente, llamado Juan Manuel Zafra.

En el apartado 3 mostramos la justificación de la propuesta y diferentes maneras de enfocar su puesta en marcha, así como la evaluación del proceso por parte del alumnado, tomando como base, experiencias realizadas en los niveles de 1º y 4º de ESO y en 2º de Bachillerato. Además se muestra cómo la utilización de microrrelatos matemáticos a partir de una fotografía puede formar parte de una ruta matemática, como la que hemos llevado a cabo en Barcelona, mostrando elementos singulares de la ciudad en cuanto a su tranformación desde la Manchester Catalana hasta el 22@.

El último apartado, el 4, previo a las referencias bibliográficas, lo dedicamos a las consideraciones finales, haciendo un alegato de la potencialidad de la propuesta como una actividad más, para fomentar en el alumnado el gusto por las matemáticas a través de la mirada del mundo.

1. Antecedentes y aportación de la propuesta

La utilización de la fotografía como herramienta didáctica en la clase de matemáticas se empezó a utilizar de la mano de Evaristo González González, en el CP Sierra Nevada de Granada el curso 1986-87 como lo reseña en la revista SUMA n 2 el propio autor. Esta propuesta dió lugar a la convocatoria de concursos de fotogafía matemática que se extendieron por todo el territorio español, posteriormente, en 2016, a propuesta de Karina Rizzo se han creado y organizado concursos FotoGebra en el que como base una fotografía matemática, se modeliza la imagen utilizando GeoGebra[29].

Por otra parte es sabido las poesías de índole matemático que poetas como Rafael Alberti o Miguel de Unamuno escribieron para deleite de todos, desde la mirada llamada de “letras” y la mirada de “ciencias” (La divina proporción, La tabla de multiplicar..). Y si seguimos la red social Twitter podemos leer poesía matemática todos los jueves, escritas por Anabel Forte Deltell, profesora Titular en el departamento de Estadística de la Universitat de València, bajo el perfil de @AnaBayes.

Y sobre relatos matemáticos escritos en prosa tenemos como referente la propuesta de un grupo de profesores de la Universidad de Alicante en cuanto a concursos pi-relatos (desde el 2009) y e-relatos (desde el 2016) y que consisten en elaborar un relato que tenga como máximo veinte palabras y que cumplan el requisito de que el número de letras de cada palabra sea la cifra correspondiente a la constante en cuestión. Esta experiencia está referenciada en Mulero, Segura y Sepulcre (2014: 135).

Por último indicar que se ha escrito sobre la relevancia de la fotografía como mediador instrumental del aprendizaje de las matemáticas, citando por ejemplo a Tirado-Carvajal y otros (2019) que estudiaron el fortalecimiento de la competencia

[29] https://www.fotogebra.org/inicio

de Comunicación Matemática, utilizando la fotografía por parte de estudiantes de noveno grado de una institución pública colombiana (14-15 años).

Con esta base aportamos una nueva manera de mostrar las matemáticas, describiendo el mundo a través de los ojos de mirada matemática, plasmarla en una fotografía, pero no asignando un título, sino elaborando una historia que puede, o no, acompañarse o sugerir la utilización de su modelización con GeoGebra; dicha historia debe ser descrita utilizando palabras que corresponden a conceptos matemáticos, tal como se hace desde la poesía, pero con la condición de escribir en prosa utilizando únicamente 280 caracteres, como es condición en la red social Twitter y se puede utilizar emoticonos y frases de autoría conocida y referenciada que recoja historia de las matemáticas.

La idea nos surgió paseando por la playa de la Malvarrosa (Valencia) viendo a unos bañistas pasear y al hecho de querer poner título matemático a una fotografía de hamacas y socorrista y tener la dificultad de focalizar un único concepto matemático de todos los que en la imagen había captado y así lo compartí en Twitter con el perfil de @Zafrainvestiga, primero en julio de 2020 y como Microrrelato Matemático en enero de 2021. Las sombrillas, han sido motivo de microrrelatos, un ejemplo en la siguiente figura.

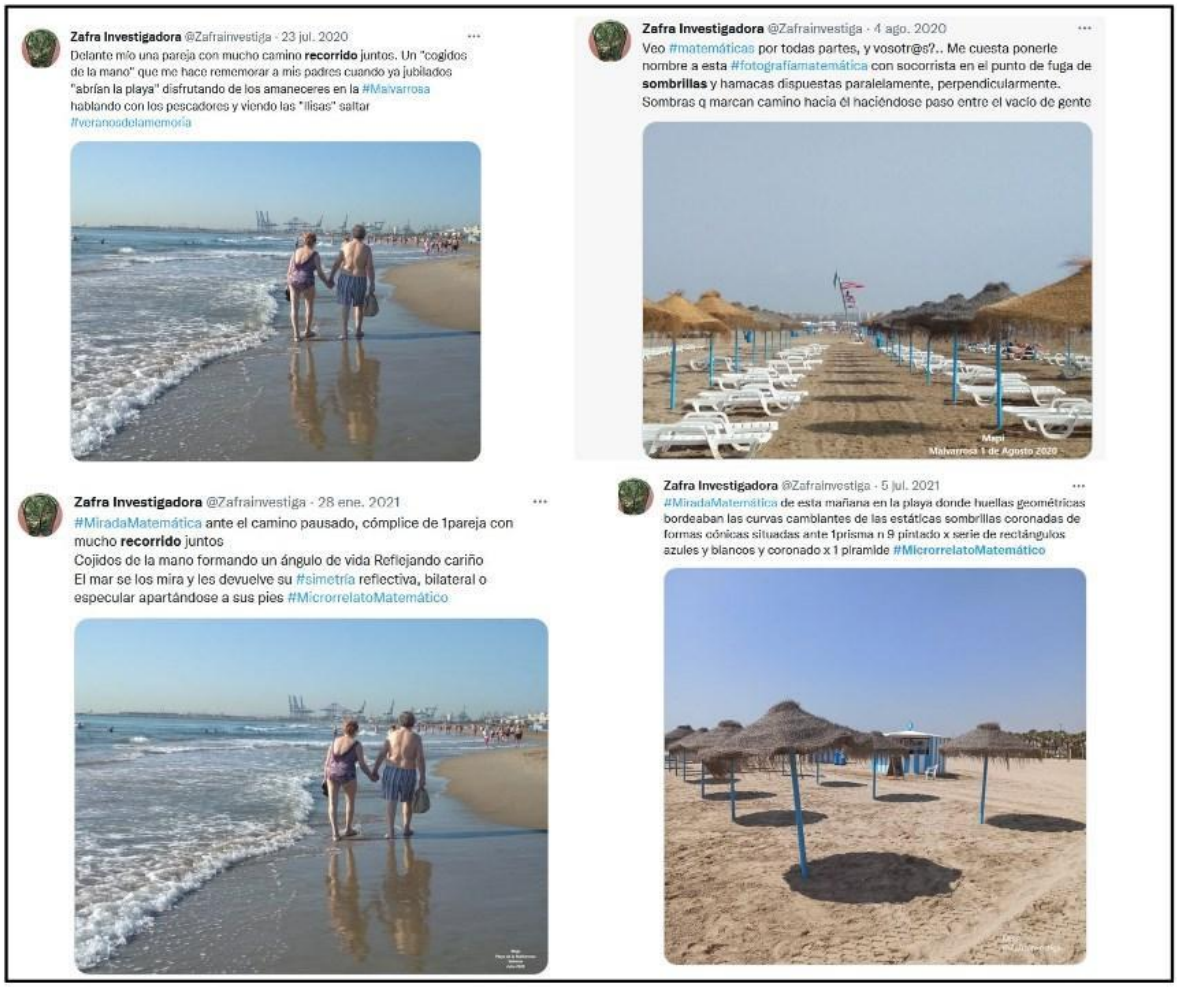


Imagen 1. Playa de la Malvarrosa que me inspiraron la realización de Microrrelatos Matemáticos

Desde el primer momento pensé en la potencialidad de proponer la actividad de escribir microrrelatos matemáticos a partir de una fotografía captada mientras paseamos, al alumnado y así la divulgué en la revista Formación IB (Menoyo, 5 de abril de 2021). En este primer artículo ya la planteé como una actividad didáctica en la que constaba:

Introducción de lo qué es un microrrelato matemático

Pautas para que el alumnado elaborase un texto con conceptos matemáticos, de tal manera que se le orientaba a través de preguntas sobre una fotografía que mostrábamos como ejemplo. Las preguntas serían: *¿Qué veo? De lo que veo, ¿qué puedo relacionar con conceptos matemáticos?* ¿Cuántos caracteres he de escribir *?* ¿Qué historia quiero contar? ¿Cómo quiero presentar el texto? ¿Quiero poner

emoticonos y otros elementos? ¿En qué idioma quiero escribir? ¿Qué voy a escribir? ¿Cómo queda finalmente en formato tuit?

Imagen 2. Guía para elaborar un microrrelato matemático en formato tuit a partir de una fotografía

Y proponía unos criterios de evaluación en cuanto a la historia que contaba utilizando conceptos matemáticos y en cuanto a la realización de la fotografía, y teniendo en cuenta siempre el hecho de mostrar la evaluación como la responsabilidad compartida entre alumnado y profesorado, es decir, compartiendo y consensuando los criterios de valoración y calificación.

Una vez elaborada la propuesta la diseñamos como una unidad didáctica para mostrarla a la profesora Marisa Domínguez Tasias[30], con el objetivo de que la valorase y la pudiera aplicar con su alumnado de 1º de ESO, ya que debido a nuesta situación de jubilada no la podíamos aplicar directamente a un grupo de estudiantes.

2. Implantación de la propuesta y divulgación

Si tenemos presente el proverbio indú " Si quieres ir rápido ve solo, si quieres ir lejos ves acompañado", la propuesta que le hicimos a Marisa Domínguez Tasias, fue

[30] Profesora de Matemáticas en el Instituto Caterina Albert de Barcelona, antes llamado Juan Manuel Zafra, en el que durante una veintena de años compartimos, departamento, formación y amistad.

aceptada, adaptada y mejorada en cuanto a la evaluación de la actividad y con los primeros resultados satisfactorios de la propuesta participamos en el III Congreso CTEM de la comunitat valenciana, celebrado de forma híbrida, los días 7 y 8 de mayo de 2021 y cuya presentación en forma de comunicación se puede consultar en la sección de vídeos del congreso[31] con el nombre de: *Educar la mirada matemàtica a partir de fotografies per elaborar un microrelat matemàtic.*

Posteriomente, en el marco del II Congreso Iberoamericano de Docentes, celebrado on line, del 5 al 16 de Julio de 2021, presentamos la propuesta como ejemplo de comunicación en una situación híbrida, como la que se había generado debido a la pandemia por la Covid19 en modalidad, conferencia "*Importancia de la comunicación en una educación híbrida: Experiencias en Secundaria"* y que se puede consultar en el libro de actas del congreso (Menoyo, 2021, 365-379) y también se puede visionar[32].

Desde ABEAM[33] contactaron con nosotras para poder mostrar los Microrrealtos Matemáticos en formato tuit en el marco de la XXIII Jornada Didàctica celebrada en Barcelona el 6 de Noviembre de 2021. Presentamos nuestra propuesta junto a Marisa Domínguez Tasias, en forma de ruta circular bajo el títuo de "*Itinerari per Sant Martí: De la Manchester Catalana al 22@, una mirada matemàtica del passat i el present a través de la descripció amb microrelats".*

Y por último, decir que desde enero de 2021, periódicamente, hemos ido compartiendo en twitter microrrelatos matemáticos a partir de la mirada matemática del mundo, bajo el perfil de @Zafrainvestiga y posteriormente los hemos ido clasificando y recopilándolos en nuestro blog recercaasecuncaria[34] de tal manera que están agrupados en paseos con mirada matemática utilizando fotografías realizadas en nuestros paseos por la playa (Barcelona y Valencia), por la Sagrada Familia, por el antiguo cauce del río Turia, por la Manchester catalana y el 22@,

[31] http://cefire.edu.gva.es/mod/resource/view.php?id=974346

[32] https://youtu.be/CjfrqzW1QcA

[33] https://abeam.feemcat.org/web/

[34] recercaasecundaria.wordpress.com

focalizando la mirada en puertas, mosaicos, mirando al cielo y al suelo, en la vegetación...

El hecho de divulgar la propuesta en diferentes entornos, ha producido un efecto "lluvia fina que va calando y mancha de aceite que se va extendiendo", así, se está llevando a cabo en diferentes lugares del territorio español, en el colegio CODEMA (Corazón de María) de Gijón, de la mano de la profesora Carmen González Sánchez con alumnado de 2º de Bachillerato, como se puede consultar en su perfil de Twitter @carmenglsmate[35] y en el instituto Cambrils de la localidad del mismo nombre, por parte de Lluís Mora Cañellas[36] con alumnado de 4º de ESO tal como podemos consultar bajo el perfil de @lluismora[37], por citar como ejemplo de profesorado que más ha compartido sobre el enfoque y resultados de la implantación de la propuesta con su alumnado.

3.Maneras de enfocar la propuesta didáctica

El diseño de una propuesta didáctica y concretamente una unidad didáctica pasa por establecer y tener presente, desde dónde parte el alumnado, qué se quiere introducir, para qué y cómo ponerla en práctica y evaluar los resultados.

Evidentemente, esto dependerá del modelo didáctico que tenga el profesorado, que ni es único, ni estático, es decir, la llamada plasticidad del modelo didáctico como indica Grau (2010: 70), así, el modelo a tener presente puede basarse en mostrar:

Los contenidos desde un enfoque formal a uno aplicado.

Las estrategias de enseñanza desde la aplicación de metodologías expositivas hasta la aplicación de metodologías interactivas.

[35] https://twitter.com/carmenglsmate/status/1438120883994992640?s=20&t=qe8_Gq-xuBMuIQQYxSScwQ

[36] https://twitter.com/lluismora/status/1435241969043791872?s=20&t=qs7w-410KEBI9b82xxe6rA

[37] https://twitter.com/lluismora/status/1438245480505413639?s=20&t=qs7w-410KEBI9b82xxe6rA

Las estrategias de aprendizaje desde aquellas que permiten al alumnado la retención de la información, o las que permiten usar el conocimiento en otros contextos o aquellas que además fomentan en el alumnado conocer y poner en práctica diferentes estrategias.

La evaluación únicamente de carácter social a través de una nota o aquellas que además fomentan la evaluación formadora y por tanto de responsabilidad compartida con el profesorado, con compañeros y compañeras y con ellos y ellas mismas.

Y todo ello tiene como marco de actuación, el cómo se gestiona l'aula, trabajo individual o cooperativo, guiado o autónomo, etc. Unas veces el profesorado estará más en un extremo que en otro, o irá cambiando con el tiempo e interactuando con otros profesionales, además de la interacción con el alumnado.

Ahora bien, no existe "el modelo didáctico" que garantice aprendizajes múltiples y genere entornos de aprendizaje sin ningún problema para aplicarlo, ni son universales, ni son válidos de la misma manera para cada uno de nuestro alumnado, pero sí podemos decir que tenemos que tener en cuenta aquellos modelos que faciliten conexiones entre el alumnado y con el mundo que les rodea, facilitándoles desarrollar las capacidades necesarias para entender y habitar el mundo en el que vivimos, por ello es muy importante contextualizar las actividades que diseñamos, crear un ambiente de cooperación y autonomía en el trabajo, así como las interacciones necesarias para aprender y evaluar el aprendizaje.

Todo ello supone compartir significados y favorecer la apropiación de objetivos y criterios de evaluación, en la fase inicial o de presentación. En la fase de realización de la actividad supone acompañamiento, ayuda, orientación para la regulación continua de los aprendizajes y ofrecer recursos para que el alumnado sea cada vez más autónomo. Y por último, una vez realizada la actividad supone hacer partícipe al alumnado de su propia evaluación, ya sea autoevaluándose, ya sea realizando una evaluación mutuo o coevaluación. Es decir, todo ello supone potenciar la comunicación y la escucha activa (Menoyo, 2021: 374).

3.1. Justificación de la propuesta

La utilización de la fotografía como recurso didáctico inclusivo, es un elemento motivador y un medio para que el alumnado asimile o aplique conocimientos disfrutando del aprendizaje.

Para Tirado-Carvajal y otros (2019) se establece un fortalecimiento de la competencia de Comunicación Matemática, empleando la fotografía como mediador instrumental del aprendizaje y los resultados que se obtienen sugieren que la fotografía es un medio didáctico que permite generar procesos de comunicación y de vinculación de la cotidianidad con las matemáticas, además de permitir al estudiante establecer regularidades y propiedades, reproducirlas mediante lenguaje matemático, usar nociones y procesos que lo llevan a construir representaciones, verificarlas y ponerlas a prueba. Dentro de las conclusiones de la investigación de estos autores, pudieron establecer que el uso de la fotografía en las clases de matemáticas favorece la motivación en los estudiantes, lo que sugiere una estrategia para hacer las clases más interesantes ante sus ojos.

La fotografía como recurso es una herramienta didáctica para atender a la diversidad, porque todo el alumnado es capaz de realizar una fotografía utilizando su móvil y nos permite desarrollar por igual:

La observación, desarrollando la mirada, en este caso la mirada matemática del mundo.

La creatividad, ya que permite la conexión entre la cotidianidad y en nuestro caso, las matemáticas.

La positividad y la inclusión, ya que es adecuada a las posibilidades y habilidades de todo el alumnado.

El sentido crítico ya que permite hacer valoraciones, en función de unos parámetros que orientarán los criterios de evaluación y de resultados.

Además, el uso del lenguaje nos permite hablar y escribir matemáticas para aprender matemáticas y por otra parte contribuimos a eliminar fronteras entre las letras y las ciencias.

Dicho lo cual, planteamos el diseño de la actividad consistente en la elaboración de un microrrelato matemático utilizando 280 caracteres, como si se tratase de un tuit y por lo tanto también podían utilizar emoticonos, a partir de una fotografía de su entorno cercano visto con mirada matemática.

Ya hemos indicado en el resumen que puede enfocarse de manera puntual, formato exposición o ruta, o formar parte del contenido curricular de la materia de Matemáticas a lo largo de toda la Secundaria.

3.2. Propuestas de diseño de la actividad: Elaboración de un microrrelato matemático a partir de una fotografía del entorno

Hemos indicado anteriormente que cuando se diseña una actividad didáctica, es muy importante determinar cómo se mostrará al alumnado, qué se pretende con su realización y cómo se evaluará su trabajo y su implicación en la evaluación, por ello la actividad se estructuró de la manera siguiente:

Presentación

¿Por qué lo hacemos?

¿Qué es un Microrrelato Matemático?

¿Cómo hacerlo?

¿Con qué modelos contamos?

¿Dónde compartimos las producciones?

Y después, qué...¿Cómo lo evaluamos?

¿Qué nota me supondrá?

ACTIVITAT : MICRORELAT MATEMÀTIC

Aquesta és una proposta de l' ex-professora (Maria Pilar Menoyo o Mapi) del nostre Institut, que va fer de les matemàtiques una manera diferent d'ensenyar i aprendre aquesta matèria. Actualment ja jubilada, no s'atura en seguir al peu del canó amb xerrades, cursos, conferències, articles, llibres, i ...sobretot ben activa a Twitter!
Amb ella vam compartir 1001 experiències i d'ella n'he après molt... Gràcies per fer-nos partíceps d'aquesta genial idea que avui posem en marxa!
N'estem segurs Mapi, que gaudiràs amb els nostres microrelats, i ens coneixeràs a través d'ells i des de les matemàtiques, esperem que t'agradin!

1.-PER A QUÈ HO FEM?

- Per relacionar les matemàtiques amb el nostre entorn.
- Per fomentar la creativitat
- Per connectar amb aprenentatges anteriors
- Per sintetitzar allò que volem dir
- Per expressar-nos de manera clara i senzilla
- Per mostrar la nostra competència comunicativa
- Per emocionar-nos amb una mirada matemàtica
- Per fomentar l'autoavaluació i coavaluació

2.-QUÈ ÉS ?

Un escrit on s'utilitzen paraules que corresponen a conceptes matemàtics com per exemple : simetria, angle, recta, polígon, capacitat, magnitud, circumferència, esfera, perpendicular... i que tinguin a veure amb la fotografia associada.

2.-COM FER-HO?

2.1.-En primer lloc observar bé la imatge i escriure tot el que hi veus.

-Una palmera
-Mar i cel
-Fanals distribuïts de diferents maneres
-La separació entre els dos carrils
-la barana d'un pont
-Altres arbres...

2.2.-Tot seguit ens cal relacionar el llistat anterior del què hi veus, amb conceptes matemàtics

-La palmera : fulles que semblen radis d'una circumferència.
-Mar i cel: es veu una línia que els separa, l' horitzó.
-Fanals: ens uns, les llums estan creuades i en altres estan perpendiculars al pal, i oposats entre sí.
-La separació entre els dos carrils: una mateixa direcció i dos sentits de circulació. Dos carrils paral·lels i una línia discontínua que els separa.
-La barana d'un pont: com un arc de circumferència

Imagen 3. Información que el alumnado de 1º de ESO disponía para elaborar un microrrelato matemático, página 1

2.3.-Passar a l'acció: Quina història vull escriure? Què vull explicar?

Per exemple...que passejava cap el mar i m'agradava tot allò que hi veia al davant meu

2.4.-Cal que tingui en compte els caràcters que ha de tenir el text

280 caràcters que no és el mateix que paraules!, en format missatge tuit o piulada per a la Xarxa Social Twitter.
Heu de pensar que podeu fer ús d'un « Contador de caracteres on line» automàtic!
https://www.contadordecaracteres.com/ una eina molt útil en aquesta activitat per conèixer quants caràcters i paraules té el teu text.
El mateix LibreOffice Writer posa de manifest les paraules i caràcters a mida que anem escrivint, sortint a la part inferior esquerra de la pantalla.

Esta línia discontinua → el formen 5 paraules i 22 caràcters.

2.5.-Escriu la història en castellà

Aquesta vegada ho haurem de fer en llengua castellana...cap problema!...la nostra veu es farà sentir més enllà de la nostra comarca.

2.6.- Emoticones i altres elements

Si els voleu afegir ho podeu fer, però no cal abusar-ne d'ells.

3.- ELS MODELS DE MAPI

Aquí va l'exemple que va escriure Mapi en el seu compte de Twiter:

Esta línia discontinua me marcaba la dirección de mi paseo ain guia de 1 flecha que me marcaba el sentido para ver el mar, entre focos cruzados , opuestos ; entre paralelas tejidas y ante la línia del horizonte atravesada x un arco cual cupido.

Aquí teniu com va quedar:

Ep que també podeu afegir part d'un text escrit per altres

Això també és possible, però heu de citar l'autor i ha d'estar ben integrat a la vostra història inventada.

Imagen 4. Información, página 2

O també fer referència a la història del lloc fotografiat com en aquest altre cas!

De ben segur que ja en teniu ganes!...apa doncs, a triar qualsevol de les fotos anteriors o bé les que teniu aquí sota i que les coneixeu prou bé, oi?

4.-ON PENGEM ELS MICRORELATS?

Al nostre Curs moodle de matemàtiques . Teniu temps fins el 6 d'abril inclòs que serà quan es tanqui la tasca.

5.-I DESPRÉS QUÈ?

Podem compartir i aprendre'n. Dedicarem una sessió a valorar la feina, i rebrem el feedback de la Mapi.
Aquesta tasca forma part de les del 3r Trimestre en la categoria del 60% de la nota, i és obligatòria la seva realització.

Imagen 5. Información, página 3

La presentación de la actividad se realizó en formato virtual, a través de la plataforma moodle y en gran grupo en formato presencial, de tal manera que el material quedó colgado y se ayudó al alumnado a focalizar elementos matemáticos asociados a cada una de las fotografías, especialmente con aquellas referidas a la fachada del instituto y de las cuales no tenían un modelo de microrrelato en el que fijarse.

Una vez comunicados los objetivos, explicado el contenido y marcado el día tope para colgar y compartir sus producciones en el moodle, la actividad finaliza cuando se hayan compartido las fotografías y se haya hecho una evaluación de responsabilidad compartida, es decir partiendo de su propia autoevaluación y de la evaluación entre iguales (Menoyo, 2021, 5 Abril).

Para la base general de la evaluación de la actividad es necesario tener presente, la historia que cuenta y la base fotográfica que presenta.

La historia que cuenta, en cuanto a si:

Identifica o hace referencia a algún elemento matemático.

Señala alguna característica o propiedad de elementos matemáticos correctamente.

El texto no tiene faltas ortográficas, tiene gracia e incluye una argumentación implícita con un juego de palabras, conexión insólita o juega con la percepción visual.

La fotografía realizada o presentada por el alumnado, en cuanto a si:

Está desenfocada o descentrada, con escasa luz y nitidez.

Permite apreciar objetos o aspectos relacionados con conceptos matemáticos.

Está equilibrada: Centrada, enfocada, nítida, buena luz y riqueza cromática y aprovechando el momento oportuno.

Además podemos valorar si el resultado final del microrrelato sobre la base de la fotografía es, pertinente, completo y preciso; si el texto está bien organizado y si su expresión y comprensión es correcta, además de valorar el grado de iniciativa por parte del alumnado para mostrar una fotografía y un microrrelato que describa la realidad captada, utilizando conceptos matemáticos y elementos de atracción, ya sean emoticonos, utilización de una lengua diferente al castellano o al catalán.

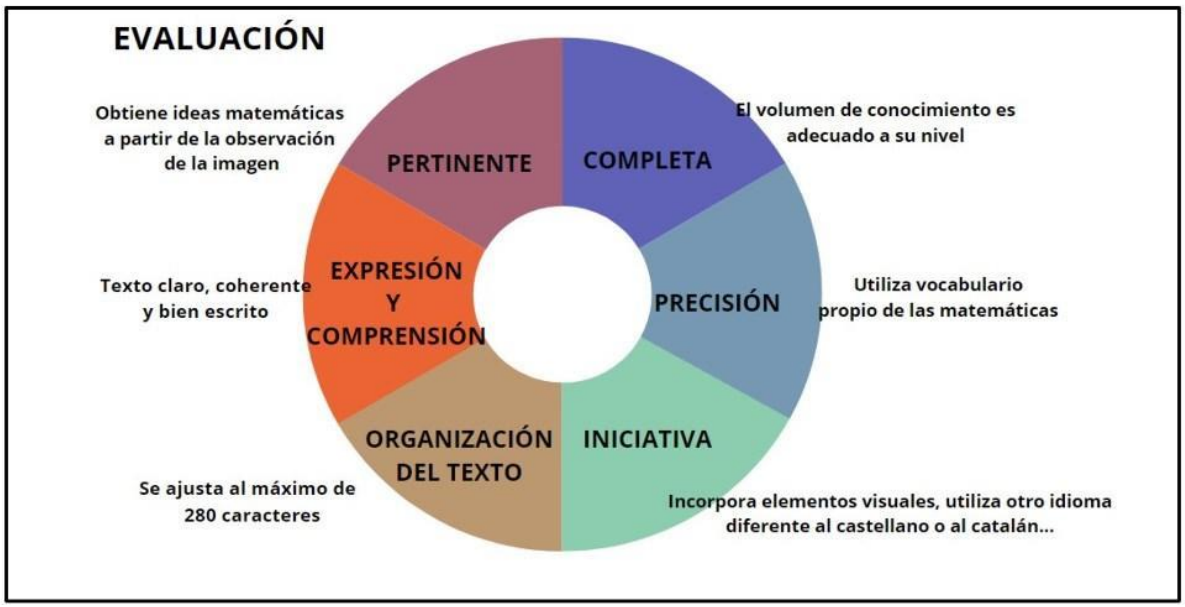
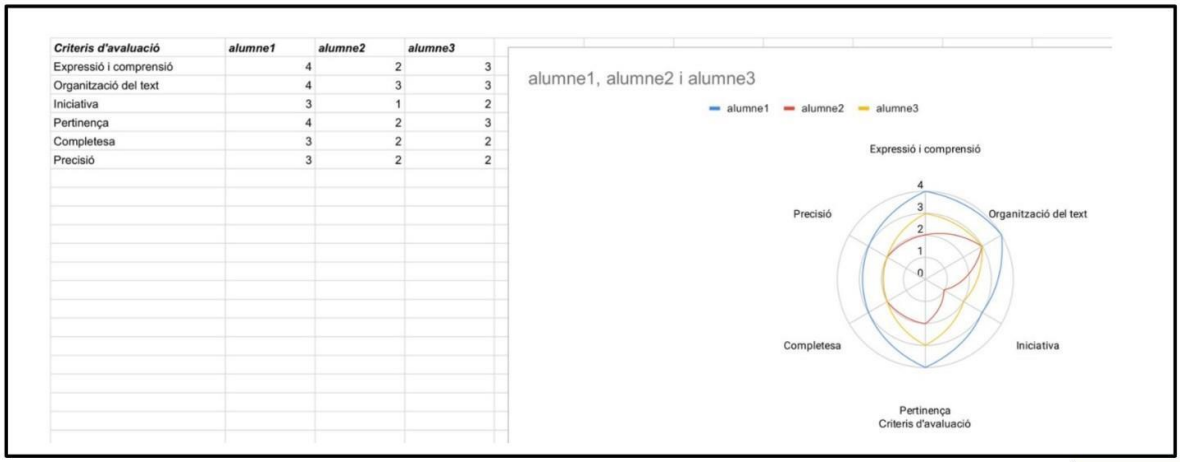


Imagen 6. Guía para la evaluación

El profesorado, puede utilizar una diana de evaluación para hacer la Foto finish de los resultados de la clase, utilizando por ejemplo una hoja de cálculo del google drive.



Criteris d'avaluació	alumne1	alumne2	alumne3
Expressió i comprensió	4	2	3
Organització del text	4	3	3
Iniciativa	3	1	2
Pertinença	4	2	3
Completesa	3	2	2
Precisió	3	2	2

Imagen 7. Diana de evaluación

Y también las puede utilizar para que el alumnado realice una evaluación mútua de y con sus compañeros y compañeras. Otra herramienta didáctica para que el alumnado realice coevaluaciones o evaluaciones mutuas es la llamada TAG, que corresponde a Tell something you lik (di algo que te guste), Ask a question (hacer una pregunta) y Give a suggestion (dar una sugerencia), es decir, se trata de que el

alumnado valore la producción de un compañero o compañera, indicando una alabanza de lo que ha presentado, le haga una pregunta y por último le haga una propuesta de mejora. Para que el alumnado realice este tipo de evaluación necesitará un modelo lingüístico de referencia, así:

Para indicar una alabanza, algo que le guste de la producción de un compañero o compañera, puede utilizar expresiones como:

Me gusta mucho ….porque….

Lo que has hecho muy bien es…..porque….

Lo que considero que tienes muy bien es…..porque….

Pongo en valor de tu trabajo…. Porque….

Para plantearle una pregunta, puede utilizar expresiones como:

Me gustaría que me aclarases….porque…

Qué has tenido en cuenta para…..

No acabo de entender….

Qué dificultad has tenido para….

Para indicarle una propuesta de mejora, puede utilizar expresiones como:

Puede que en vez de…..ya que…..

Creo que mejoraría tu trabajo si…..ya que…

He visto que has indicado…..y una alternativa podría ser…

Valoro mucho lo que has hecho sobre…..y lo podrías aprovechar para….

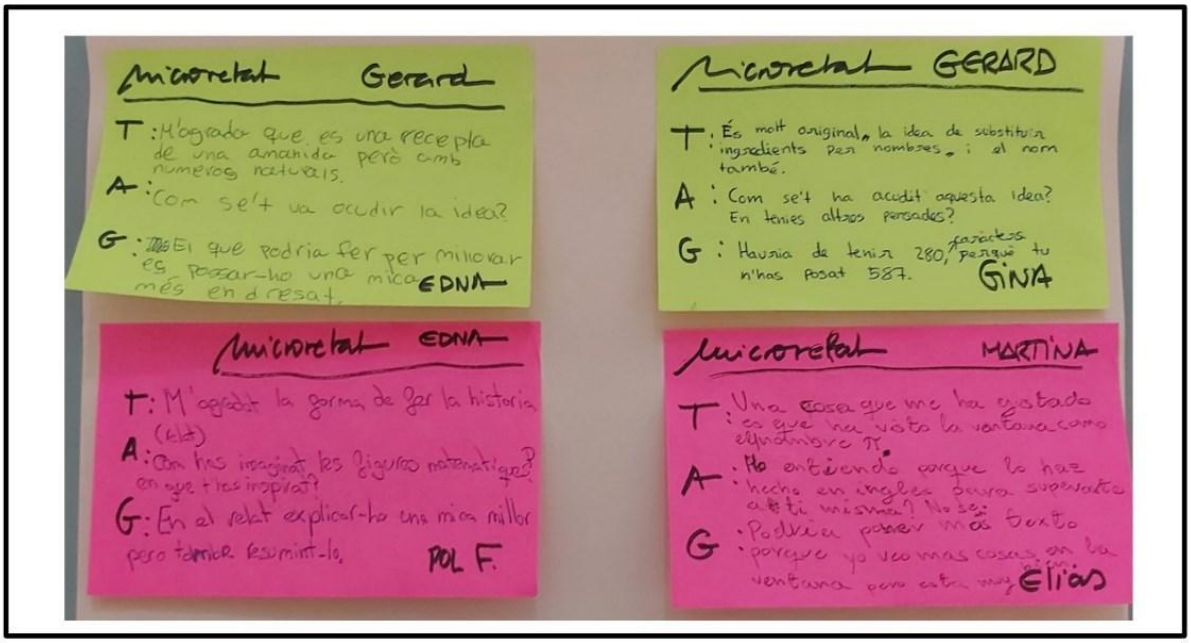


Imagen 7. Ejemplos de TAG realizados por alumnado de 1º de ESO

Por otra parte, este curso, la profesora Carmen González Sánchez del colegio Colegio Corazón de María (Codema) de Gijón, después de ponerse en contacto con nosotras, diseñó una presentación de diapositivas con microrrelatos nuestros, dirigidos a su alumnado de 2º de Bachillerato y planteando la actividad en el marco de la materia de Matemáticas y Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, de tal manera que el alumnado obligatoriamente tenía que presentar dos fotografías por cada evaluación y cuya condición estribaba en que tenían que relacionarse con el contenido de la materia que se trabajaba en una determinada evaluación: Matrices, Análisis..

La utilización de Padlet, que Carmen González nos compartió, ha permitido una interacción entre el alumnado y profesorado y también nos ha permitido poder interactuar con ellos y contribuir a un refuerzo positivo de sus producciones.

Por otra parte, Carmen González Sánchez ha compartido en Twitter, con su cuenta, @carmenglsmate, las producciones de su alumnado y con ello está contribuyendo a que la propuesta se pueda ir extendiendo e impregnando como gota de aceite, siendo modelo para que profesorado y alumnado puedan tener modelos, aspecto básico para poder aprender de los demás.

Imagen 8. Manera de mostrar la actividad de elaboración de un microrrelato matemático relacionado con el programa curricular de Matemáticas por parte del alumnado de 2º de Bachillerato del colegio Codema

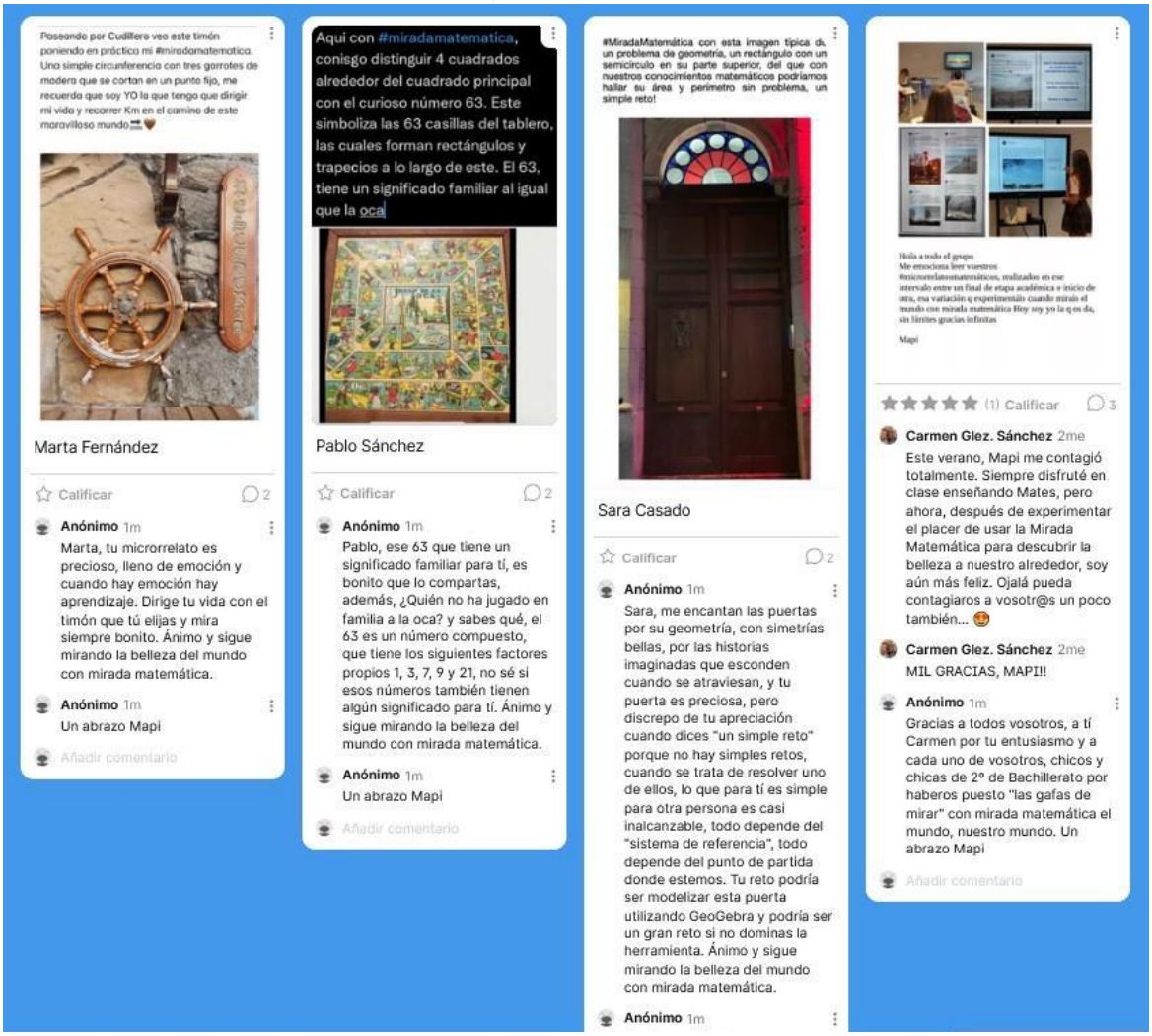


Imagen 9. Padlet compartido con nuestros comentarios

Otro enfoque para presentar al alumnado la realización de microrrelatos matemáticos a partir de una fotografía de la realidad que nos rodea, es la que ha aplicado el profesor Lluis Mora Cañellas con su alumnado de 4º de ESO del instituto Cabrils de la localidad de Cabrils.

Partiendo de una fotografía elaborada por el profesor y a través de un formulario google docs, una serie de preguntas dirigía al alumnado a focalizar la mirada en una serie de elementos base para poder elaborar un microrrelato matemático.

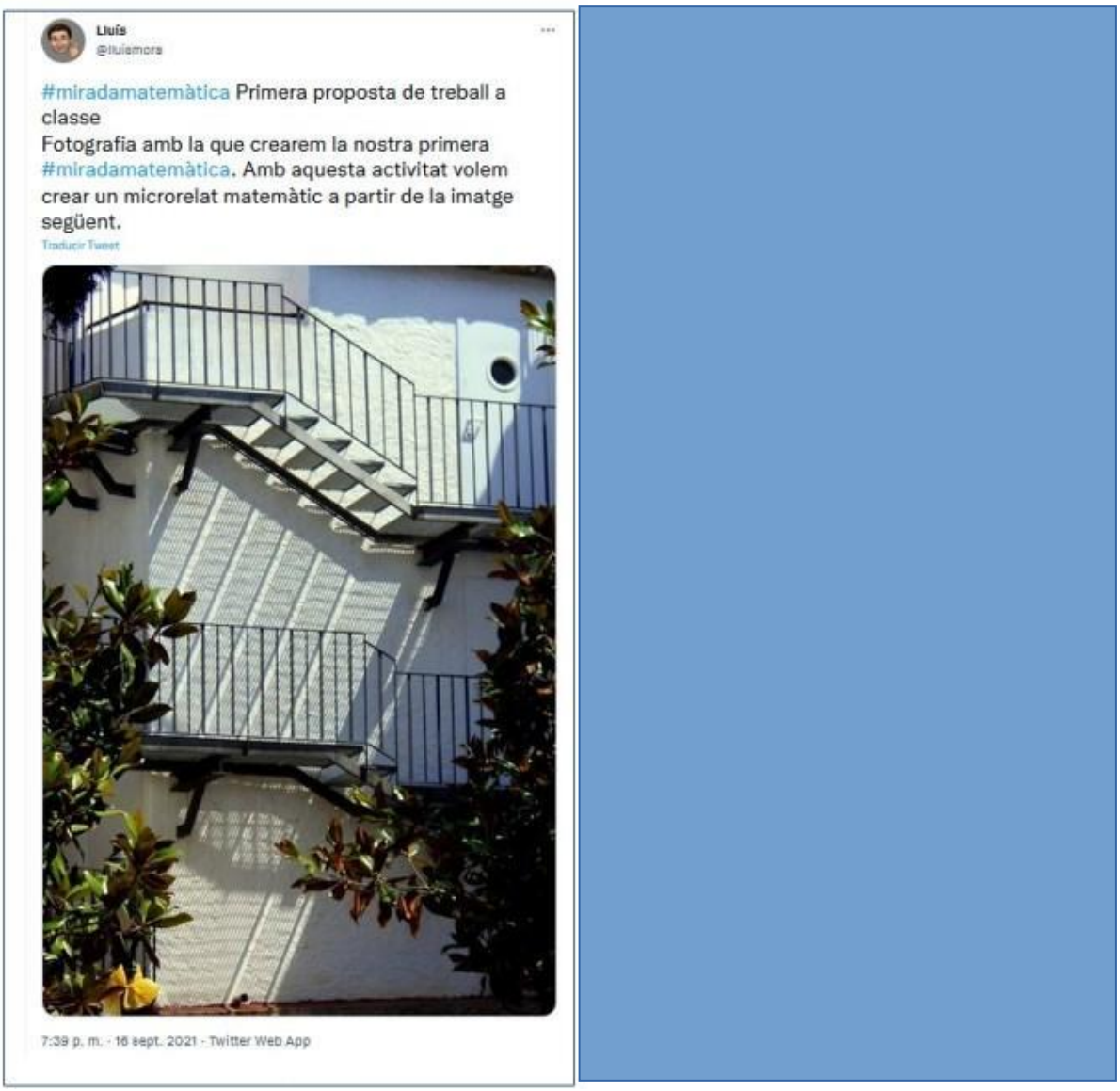


Imagen 10. Manera de mostrar la actividad de elaboración de un microrrelato matemático por parte de alumnado de 4º de ESO

3.3. Propuestas de diseño de una ruta matemática utilizando microrrelatos matemáticos

Para diseñar una ruta, deberemos tener en cuenta: La situación, el contexto, las informaciones que remarcaremos del itinerario, los materiales necesarios para realizarla y por supuesto el tiempo necesario para poderla realizar.

Sobre la situación, deberemos plantearnos, si será una ruta lineal o circular y sobre ella marcar la geolocalización de cada uno de los puntos de interés donde efectuaremos las paradas y por tanto también nos permite realizar el track de la ruta. Si es circular además podemos utilizar GeoGebra y aplicar Voronoi para situar el área de influencia de las paradas de la ruta. A continuación indicamos la ruta que diseñamos junto a Marisa Domínguez Tasias.

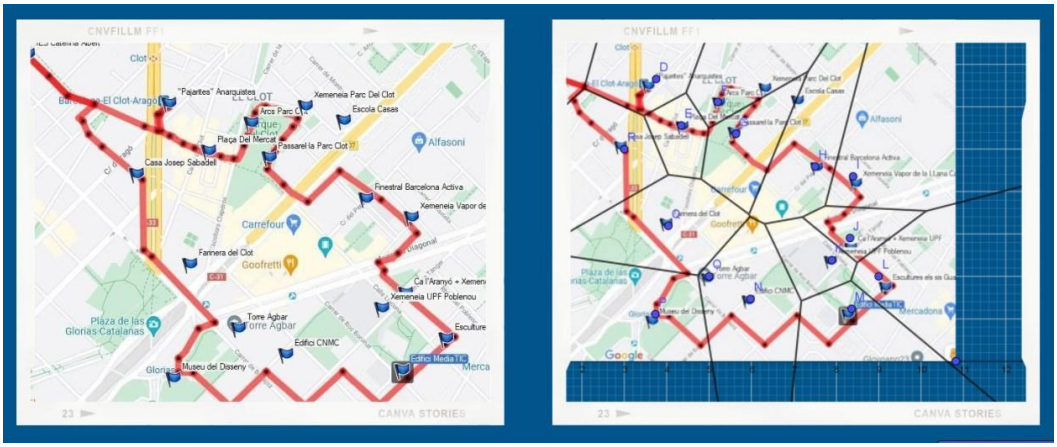


Imagen 11. Ejemplo de diseño de una ruta circular por el distrito de Sant Martí de Barcelona: De la Manchester catalana al 22@

En el caso del contexto es importante conocer el aspecto social o marco en el que se realizará la ruta, su relevancia arquitectónica, artística, histórica, cultural...ya que tiene que ser una actividad con visión interdisciplinar y con sus raíces en la localidad donde se efectúe.

Imagen 12. Ejemplo de contexto

Las informaciones que adjuntamos en el itinerario proporcionarán al alumnado el marco propicio para focalizar su mirada matemática en algún aspecto relevante y/o histórico del sitio de la parada dando opción para elaborar un microrrelato matemático en el que haga referencia a aspectos no matemáticos, pero utilizando palabras que corresponden a conceptos matemáticos.

Imagen 13. Ejemplo de la parada inicio y final de la ruta matemática por el distrito de Sant Martí de Barcelona

A partir de la información y de lo que ve el alumnado serán capaces de redactar un microrrelato matemático como los siguientes de elaboración propia, el primero de ellos elaborado antes de utilizar el *hashtag, #MiradaMatemática y/o #MicrorrelatoMatemático* y destacando únicamente el concepto de simetría, en uno y en otro, se elabora un relato con la historia que esconden este grupo escultórico réplica del realizado por Ramón Acín.

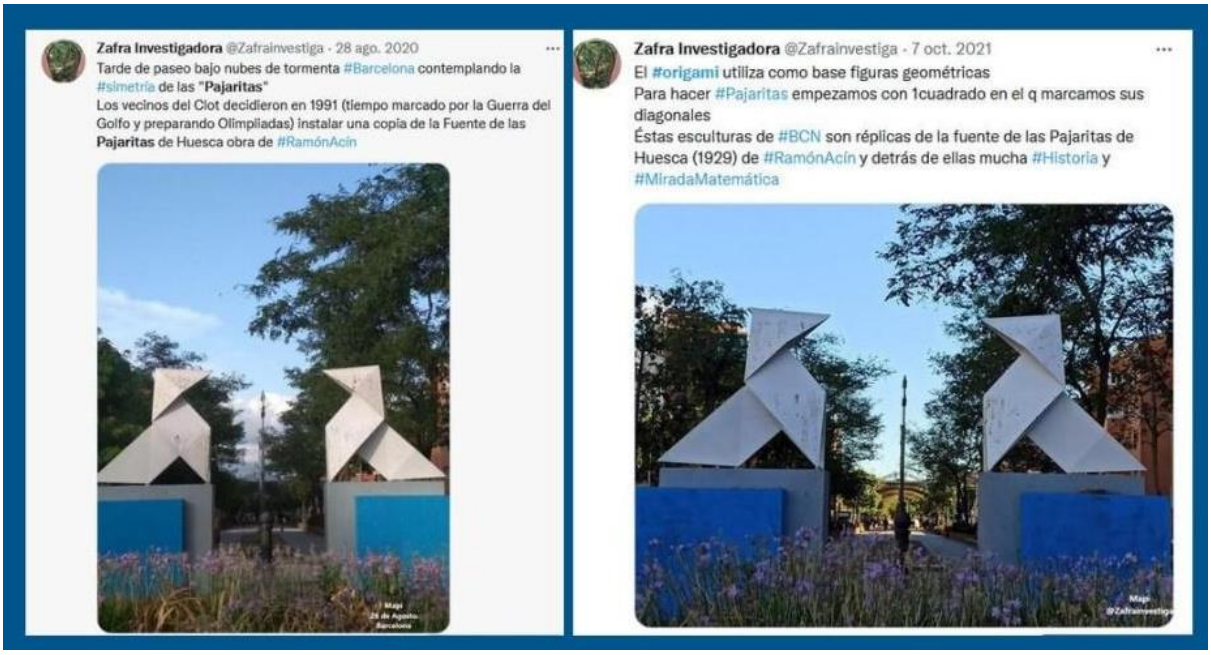


Imagen 14. Ejemplificación de microrrelatos matemáticos para explicar la historia de este grupo escultórico

El alumnado para realizar la ruta deberá utilizar el teléfono móvil para realizar sus fotografías, así como para utilizar los programas que el profesorado considere oportuno para que puedan consultar el track de la ruta.

Los materiales que podemos suministrar al alumnado para realizarla utilizando y elaborando microrrelatos matemáticos, pueden ser como los que figuran a continuación:

Situación de las paradas en el itinerario de la ruta. Compartir su track para que el alumnado pueda, de manera autónoma, dirigirse a cada parada.

En el caso de la utilización de GeoGebra y Voronoi, éste puede suministrarse al alumnado ya elaborado compartiendo su significado o bien, que lo elaboren en clase una vez realizada la ruta o previa a su realización.

Se puede compartir una presentación CANVA a través de grupo de telegram o bien se les puede proporcionar un dosier en papel con las informaciones de cada lugar, así como infografías en las que se indique qué es un microrrelato matemático, qué tienen qué hacer y cómo será la valoración de sus producciones, además de valorar la actividad en sí.

Una posibilidad es proporcionar a cada grupo cooperativo unas infografías en las que a través de microrrelatos ya elaborados puedan reconocer su descripción en cada una de las paradas.

Por último y teniendo como base los microrrelatos suministrados de cada parada, el alumnado, en grupo cooperativo o individualmente realizará su propia fotografía acompañada de su microrrelato, el cual podrá elaborarse el mismo día de la ruta o con posterioridad para poderlo compartir en clase o adjuntarlos a un espacio moodle o Padlet para ser valorado por toda la clase.

Imagen 15. Materiales para el alumnado al iniciar una ruta

Para que el alumnado pueda realizar la ruta, lo ideal es que la realice en grupo cooperativo de tres personas, utilizando una de las dos versiones que habremos diseñado a partir de microrrelatos elaborados por nosotras (pueden consultarse en nuestro blog[38] y en el caso concreto de la ruta que tomamos como ejemplo, aquí[39]),

Imagen 16. Dos modelos con microrrelatos matemáticos para identificar y localizar

El tiempo determinado para la realización de una ruta utilizando y realizando microrrelatos matemáticos, a partir de la realización de fotografías del recorrido, depende de diferentes factores, además del trazado y kilometraje, de la disponibilidad horaria para realizarla y del tiempo necesario en cada una de las paradas. Sirva como ejemplo las rutas de tres horas y media, diseñadas por la

[38] https://recercaasecundaria.wordpress.com/

[39] https://recercaasecundaria.wordpress.com/2021/09/22/mirada-matematica-paseando-por-una-barcelona-en-trasformacion-de-la-manchester-catalana-al-22-microrrelatos-matematicos/

Universitat de València: Torres de Serrans al Jardí Botànic , Mercat de Colom a la Nau y Drassanes del Grau al Mercat del Cabanyal[40].

Sobre posibles rutas matemáticas utilizando y elaborando fotografías matemáticas como base para eleborar un microrrelato matemático por Valencia, puede ser de ayuda los microrelatos que hemos elaborado sobre el Cauce del río Turia[41] y paseos por la playa[42]

4.Consideraciones finales

Educar la mirada matemática del alumnado será posible si el profesorado fomenta y facilita la focalización de las matemáticas en todo aquello que nos rodea para plasmarla en una fotografía, puesto que es el arte de la mirada.

Todo lo que vemos a nuestro alrededor, desde lo más cotidiano hasta lo más transcendente, resulta indescifrable sin las matemáticas, así gracias a los lagos, charcos, espejos, observamos simetrías, el embaldosado de las calles, celosías o el empaquetado de las frutas nos proporciona mosaicos, en elementos arquitectónicos podemos diferenciar parábolas, catenarias, hiperboloides, cicloides, matrices..., en los parques infantiles podemos observar cuerpos geométricos como cubos, icosaedros, prismas.. Y todo lo podemos fotografiar con un encuadre que nos permita escribir un microrrelato matemático utilizando conceptos matemáticos con los que elaborar una historia.

[40] https://www.uv.es/uvweb/unitat-cultura-cientifica-innovacio-catedra-divulgacio-ciencia/ca/activitats/rutes-matematiques-valencia-1285981884280.html

[41] https://recercaasecundaria.wordpress.com/2021/12/21/mirada-matematica-paseando-por-el-antiguo-cauce-del-rio-turia-en-valencia-microrrelatos-matematicos/

[42] https://recercaasecundaria.wordpress.com/2021/08/29/mirada-matematica-paseando-por-la-playa-microrrelatos-matematicos-i/

En dos cursos académicos se ha puesto en práctica en centros diferentes, con alumnos de niveles diferentes y se está extendiendo como mancha de aceite, que es nuestro objetivo, que contribuya a mostrar la matemática bella, elemento motivador para todo tipo de alumnado.

Referencias

González, E (1989). *Fotografía y matemáticas* Revista SUMA nº 2, 44-46

Menoyo-Díaz, M. del P. (2021). *Microrrelatos matemáticos en un tuit: Una propuesta didáctica para educar la mirada matemática* en Revista Formación IB del 5 de abril de 2021 http://formacionib.org/noticias/?Microrrelatos-matematicos-en-un-tuit-Una-propuesta-didactica-para-educar-la [Consultada 28 de Febrero de 2022]

Menoyo Díaz, M. del P. y Domínguez Tasias, M. (2021). *Educar la mirada matemàtica a partir de fotografies per elaborar un microrelat matemàtic: Una experiència amb alumnat de 1r d'ESO de l'Institut Caterina Albert de Barcelona.* Pendiente de publicación en el LLibre d'actes del III Congrés CTEM de la comunitat Valenciana. Cefire http://cefire.edu.gva.es/mod/resource/view.php?id=974346 [Consultada 28 de Febrero de 2022]

Menoyo Díaz, M. del P. (2021). *Importancia de la comunicación en una educación híbrida: Una experiencia en Secundaria en el aula de Matemáticas* Libro de Actas II Congreso Iberoamericano de Docentes Editores: Macías, Ó., Quiñónez, S. y Yucra, J. ISBN: 978-84-948417 2-9 pp 365-379 http://formacionib.org/programa/actasiiconIB.pdf

Grau, R. (2010). *Altres formes de fer Ciència: Alternatives a l'aula de Secundària.* Rosa Sensat. Col.lecció Premis 7

Mulero, J.; Segura, L. y Sepulcre, J.M. (2014). *Las matemáticas de nuestra vida.* Publicacions de la Universitat d'Alacant. ISBN: 978-84-9717-339-1

Tirado-Carvajal, B.; Gualdrón-Pinto, É. y Ávila-Zárate, A. (2019). *Estrategia didáctica para fortalecer la competencia de comunicación matemática por medio de la fotografía* Revista Logos Ciencia & Tecnología ISSN 2145-594X On-line version ISSN 2422-4200 https://doi.org/10.22335/rlct.v11i2.827

CoC003 El secreto mejor guardado. Aprendiz de hacker.

Joan Gómez i Urgellés
Joan.vicenc.gomez@upc.edu
Universitat Politècnica de Catalunya. EPSEVG
Dptm. Matemàtica Aplicada

Núcleo temático: Conexiones. Formación profesorado. (en particular STEAM y modelización)

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Universitat Politècnica de Catalunya.

RESUMEN

Se presenta una experiencia de aprendizaje de aritmética modular contextualizada en el mundo de la seguridad informática. Todo ello bajo el hilo conductor de una hipotética historia, presentada como un juego de ordenador, de unos jóvenes que quieren "averiguar" donde el profesor esconde el examen de matemáticas y evidentemente su contenido. El escenario consiste en ir descubriendo “secretos” y resolviendo "enigmas" hasta llegar al objetivo; por eso necesitan el uso de los algoritmos propios de codificación y elementos de álgebra lineal. Por tanto, el objetivo es el aprendizaje de aritmética modular a partir de los modelos matemáticos involucrados. De hecho, el juego presentado en la comunicación queda plasmado en la web:

https://view.genial.ly/61a0dbbcbc61af0dff73b86b/presentation-presentacion-basica

la cual contiene toda la trama que debe seguirse. Se contextualiza en primer curso de matemáticas del Grado de Informática de la UPC

Palabras clave: Criptografía, Modelización, Aprendizaje, Steam, Ingeniería

Se presenta una experiencia de modelización matemática, como herramienta de enseñanza aprendizaje, plasmada en un proyecto para trabajar en grupo en el grado de informática de gestión de la Universitat Politècnica de Catalunya, la actividad se denomina *Scape Room*, con el objetivo de desplegar la competencia matemática en aspectos epistemológicos propios de la carrera y al mismo tiempo valorar los aspectos cognitivos y heurísticos de los estudiantes.

La experiencia, que a continuación se describe, se contextualiza en la enseñanza/aprendizaje de una parte del área de criptografía, ubicada en la asignatura de *Fonaments Matemàtics*, en concreto de aritmética modular correspondiente a primer curso del grado de informática de la *Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú* (EPSEVG-UPC).

Esta tipología de experiencias forma parte de cómo se implementa el trabajo en proyectos en la Universidad, ratifico: en el grado de informática de l'EPSEVG. Se intenta contextualizar los contenidos a la especialidad para obtener una enseñanza más competencial. Los proyectos realizados conjuntamente con la entrega de ejercicios y otro tipo de actividades tienen una proporción de un 35% en la evaluación de la asignatura. Se incluye un enlace que contiene el temario, objetivos y criterios de evaluación con el fin de que pueda ser de utilidad para los docentes https://www.upc.edu/content/grau/guiadocent/pdf/cat/340366

La actividad, creada íntegramente por los estudiantes, consiste en superar los retos de las situaciones planteadas mediante el uso de modelos matemáticos de aritmética modular y álgebra lineal. El objetivo de la experiencia, temporalizada en un par de horas de clases y con la participación y debate de los alumnos, es que los estudiantes que participan aprendan aritmética modular de manera amena y divertida.

Mostramos una imagen de los autores:

En este caso se ha creado un Juego online llamado *Escape Room* al que se puede acceder en la dirección:

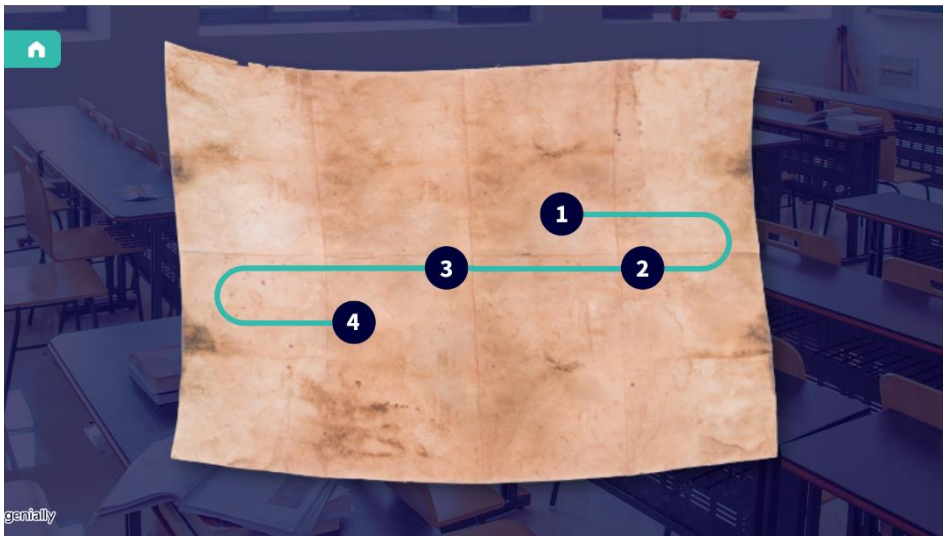
https://view.genial.ly/61a0dbbcbc61af0dff73b86b/presentation-presentacion-basica

A continuación, se describe el contenido de *Escape Room* que presenta en forma de juego interactivo como descubrir un hipotético examen de matemáticas que buscan los estudiantes en su papel de “aprendices de hacker” y sólo aparece un personaje, Pep, quien acompaña al usuario en todas las pruebas hasta poder finalizarlo. El objetivo es que después de superar varios enigmas consigan robar el examen de matemáticas del profesor, para conseguir este objetivo habrá que resolver los desafíos plasmados por modelos matemáticos incluidos en la actividad. A continuación, se explica a grandes rasgos el contenido del juego, a pesar de ello es aconsejable entrar en la web facilitada anteriormente y realizar cada reto.

Al entrar en el enlace, aparece la siguiente pantalla:

En la parte inferior, a la izquierda, observamos dos iconos. Pulsando el primero de ellos nos encontramos con la presentación del personaje y la puesta en escena del *Escape Room*. En todo momento, aparece en la parte superior izquierda el icono de una casa para volver a la pantalla de inicio.

Al terminar la presentación, se regresa a la pantalla de inicio y se pulsa el icono de abajo, el cual nos dirige a la pantalla de los diversos retos:



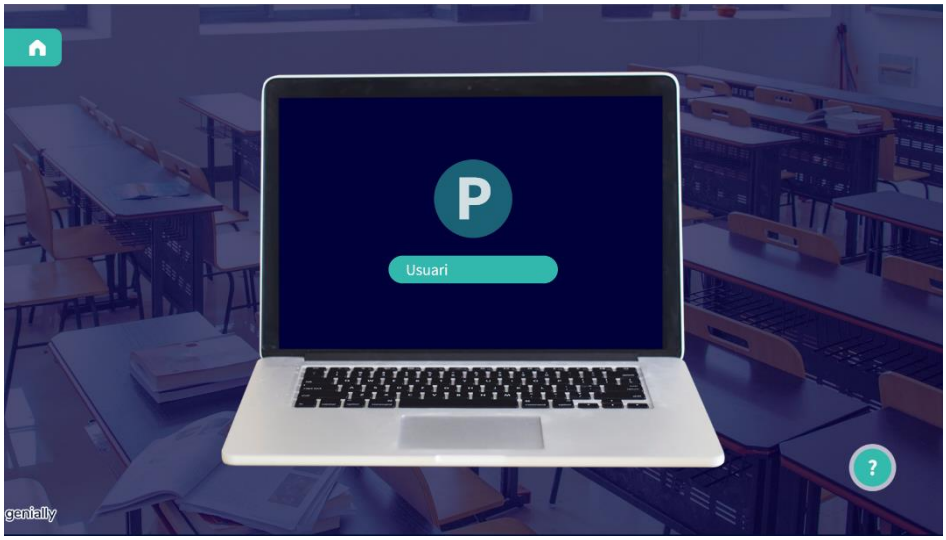
En la imagen anterior se observa un mapa donde aparecen las 4 pruebas a superar para poder finalizar el *Escape Room*. Deberán realizarse con orden, de lo contrario no se permite continuar.

En todo momento, arriba a la derecha, se encuentra el icono de la casa para volver a la pantalla principal.

Prueba 1. Entramos en el ordenador del hipotético profesor

En este caso será necesario descubrir la cifra que falta en el DNI del profesor.

¡ALERTA! Será preciso disponer de papel y lápiz. Hay que apuntar en algún sitio todos los datos del DNI cuando aparezca su imagen, de lo contrario no se podrá volver atrás para verla. A continuación, nos encontramos en la siguiente pantalla:



En la esquina inferior derecha, observamos un icono con un interrogante, si pulsamos sobre él, Pep hará una breve explicación sobre cómo encontrar este número gracias a las matemáticas.

A continuación, se muestra un hipotético ejemplo con un número diferente de DNI para ilustrar esta prueba. En este caso, el estudiante consolida el aprendizaje de aritmética modular elemental ya que es el modelo matemático que está involucrado. Veamos el ejemplo:

Supongamos que tenemos el DNI 464963**X**6-Y de modo que es necesario determinar la cifra denotada por **X** que falta. Según la tabla, se observa que la letra Y corresponde al número 6.

Resta	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Lletra	T	R	W	A	G	M	Y	F	P	D	X	B	N	J	Z	S	Q	V	H	L	C	K	E

Para ello es preciso que 464963**X**6 sea congruente con 6 módulo 23:

Buscamos un valor entre el 1 y el 9 que, sustituyéndolo por la **X** en el número del DNI se cumpla que su residuo sea 6. Un pequeño "ensayo" nos muestra que se cumple la condición cuando **X**=4. Por tanto, el número de DNI será: 46496346-Y

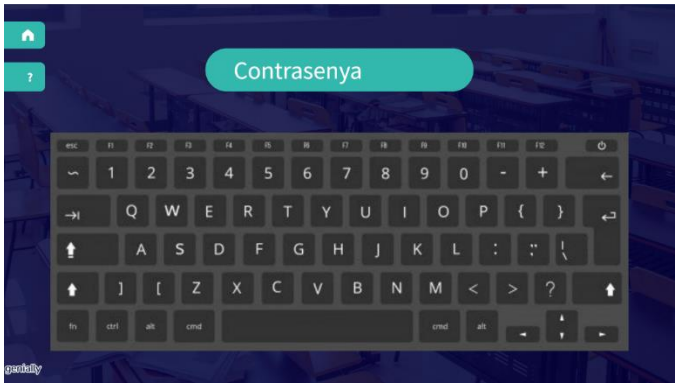
Bien, en el resto de actividades también hay que trabajar con modelos matemáticos.

Prueba 2. Entramos en el correo electrónico del profesor

Una vez dentro del ordenador del profesor, hay que entrar en su correo ya que, como bien dice Pep en el *Escape Room*, el examen está guardado en el Drive del profesor y por tanto necesitamos la contraseña del correo. Nos encontramos entonces con la siguiente pantalla:

Si colocamos el ratón sobre el icono del interrogante que aparece en la esquina inferior derecha, aparecerá un mensaje que dice: "*Hay una carpeta con el nombre contraseña.xlsx. Quizás indica alguna pista*". En el escritorio del ordenador vemos una carpeta con ese nombre y, si intentamos acceder a ella, nos redirige a un fichero Excel donde aparecen un par de matrices denotadas *A* y *B*. Una vez abierto este Excel, volvemos a la pestaña de la *Escape Room* y pulsamos sobre el icono

que aparece en la esquina de arriba a la izquierda donde está dibujado un tic. Pulsando aquí, nos dirigirá a la siguiente pantalla:



A la misma altura que antes estaba el tic, aparece un icono de un interrogante en el que pone Ayuda. Si pulsamos sobre ella, el personaje nos hará una breve explicación de cómo solucionar esta prueba.

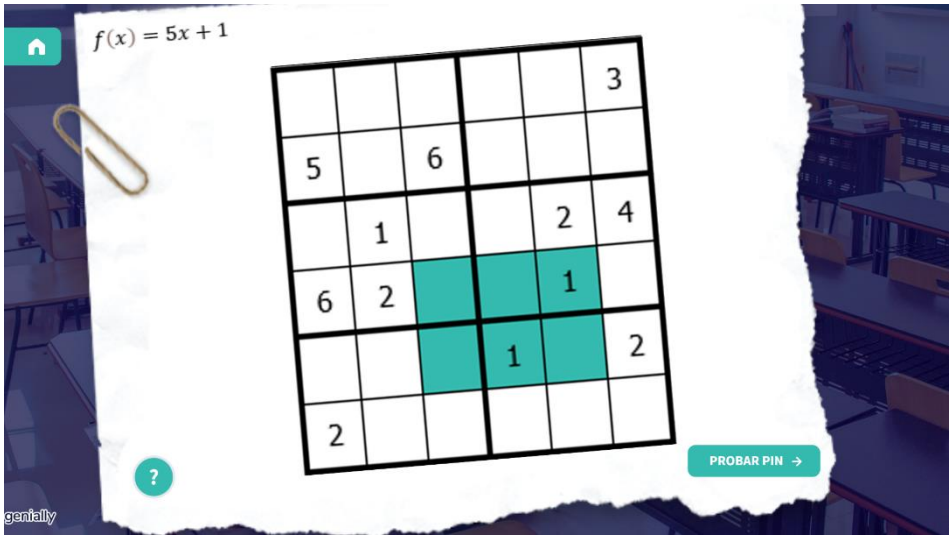
Esta prueba tiene como objetivo descifrar una contraseña que sirve para entrar en el correo electrónico del profesor, por eso hay que involucrar como modelo matemático el producto de matrices y el cálculo de una matriz inversa en aritmética modular -en concreto con el cifrado Hill-. Nos aparece una expresión del tipo $A \cdot C = B$ en la que *A* y *B* son matrices conocidas y *C* es la matriz "desconocida" que oculta la clave para poder continuar.

1								
2								
3		4	3		6	8	4	17
4		1	1		2	2	1	5
5								
6		A				B		
7								
8								
9				A*C=B				
10								
11								

Para obtener la matriz original, el alumnado debe aislar *C* de la anterior ecuación matricial y para ello deberá calcular la inversa de *A.* Este ejercicio utiliza una adaptación de denominado cifrado de Hill, publicado per Lester S. Hill al *The American Mathematical Monthly* en el año 1929. De esta forma el aprendiz de hacker ya sabe la contraseña del correo electrónica del profesor.

Prueba 3. PIN del móvil

Una vez superada la prueba anterior y una vez introducida la contraseña del correo electrónico, nos aparece una alerta en la que nos dice que han enviado un mensaje al móvil del profesor para verificar que es el usuario quien ha entrado en el correo. Para averiguar el número enviado al móvil del profesor se propone resolver un pequeño Sudoku de forma que es necesario resolver una sencilla ecuación de primer grado en módulo 6.



Prueba 4. PIN PDF

Una vez dentro del correo electrónico, abrimos el PDF del examen y, al abrirlo, nos solicita un *pin* para poder acceder. Para descubrir dicho *pin*, nos encontramos con el siguiente mensaje: "*El pin será igual a cuatro veces el número de hojas que sobran en repartir (en un caso hipotético) la cantidad de* 7^{38} *entre 9 alumnos*".

Inventario de conceptos matemáticos

Los estudiantes trabajan de forma lúdica y en grupo la aritmética modular y al mismo tiempo el cálculo matricial para buscar una matriz inversa usando cifrado Hill. Finalmente necesitan el teorema pequeño de Fermat para trabajar potencias en aritmética modular.

Como clausura les invito a que entren en la mencionada web de *Escape Room* e intenten desvelar los enigmas que se encuentran escondidos detrás de cada actividad. A la vez, les propongo que utilicen dicho enlace para practicar con vuestros estudiantes, seguro que les encantará.

Consideraciones finales

La aportación consiste pues en implementar los métodos de lo que se denomina modelización matemática y mostrar que los resultados obtenidos son eficientes en el proceso de aprendizaje.

Algunos de los propósitos cognitivos esperados se pueden sintetizar, entre otros, en diversos aspectos:

Que el estudiante adquiera un grado de motivación por los estudios que cursa.

Que el estudiante descubra, a partir de situaciones reales, la utilidad de las matemáticas.

La inclusión de las técnicas de modelización matemática como forma válida y eficiente de aprendizaje diferente a la tradicional.

Fomentar el carácter formativo de las matemáticas como elemento para ayudar al estudiante a adquirir y comprender técnicas y conceptos matemáticos a partir de sus aplicaciones.

De hecho, se trata de favorecer la creatividad, motivar a los estudiantes de cara a sus necesidades reales en los contenidos curriculares y poner a su disposición un conjunto de recursos para comprender más ampliamente la aplicabilidad de los conceptos que le transmitimos en su formación. En definitiva, enseñarle a usar las técnicas aprendidas en un contexto real.

En síntesis: las experiencia y situación desarrollada plantea una articulación del contenido de las matemáticas que favorece la perspectiva interdisciplinaria y el pensamiento creativo, utilizando y descubriendo conocimientos matemáticos a través del planteamiento de problemas contextualizados. También implica un cambio sustancial en la metodología, que adquiere una vertiente heurística y, a la vez, utiliza técnicas de modelización matemática, nuevos recursos y replantea los procesos de evaluación.

La realización de este tipo de experiencias requiere de un cambio fundamental en la concepción del rol del profesor y de su perfil formativo, y la preparación contextual y emergente del material.

REFERENCIAS

Hill, L. (1929) “Cryptography in an Algebraic Alphabet” The American Mathematical Monthly, Vol. 36, No. 6. (Jun. - Jul., 1929), pp. 306-312

Gómez, J (2019) “El arte de Guardar Secretos” Grandes ideas de las Matemáticas. Emse Edapp, S.L.,

CoC004 ¿Por qué entonan las guitarras sin trastes paralelos?

Miquel Albertí Palmer
Alberti.miquel@gmail.com
Ex profesor de matemáticas

Núcleo temático: conexiones, formación del profesorado.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (matemáticas).

RESUMEN

Las guitarras tradicionales tienen trastes paralelos. Pero desde hace unos años las guitarras con trastes no paralelos se han hecho populares. Sin paralelismo de cuerdas ni paralelismo de trastes, ¿qué justifica su correcta entonación? La respuesta es un teorema geométrico que conserva la proporcionalidad pese a la ausencia de paralelismos. Se analizan además las principales implicaciones educativas de dicho teorema y el modo de convertir la entonación de la guitarra en recurso de aprendizaje. Por una parte, desarrollando una dinamización digital con GeoGebra para determinar la certeza del teorema; y por otra, viendo que la dinamización digital no desvela la causa, usarla de incitación a la búsqueda de la demostración euclidiana.

Palabras clave: Guitarra, Geometría, GeoGebra, Demostración.

Las guitarras tradicionales tienen trastes paralelos, pero cada vez son más comunes las guitarras con trastes no paralelos llamadas también guitarras de tiro múltiple o de trastes en abanico (*fanned fret guitars*). En los instrumentos de cuerda el fenómeno sonoro se produce en el espacio tridimensional, pero su diseño se basa en el plano del papel. Ahí los trastes y las cuerdas componen un sistema reticulado cuyas intersecciones determinan la correcta afinación del instrumento. Esto significa que si la intersección de un traste con una cuerda se produce en una fracción

concreta de esta, el mismo traste debe dividir a las otras cuerdas exactamente en la misma proporción.

Como se verá, el teorema de Tales justifica la correcta afinación de las guitarras a lo largo de su veintena de trastes paralelos. Pero, ¿qué teorema puede justificar la correcta afinación cuando los trastes no son paralelos? Sin paralelismo, el teorema de Tales no parece aplicable. Sin embargo, el hecho de que dichas guitarras afinen correctamente hace pensar en la existencia de un teorema que justifique su buena afinación. Un fenómeno real inspira la búsqueda de un fenómeno matemático.

Antes de abordar la cuestión conviene familiarizarse con algunos términos de las principales partes de la guitarra. La imagen 1 muestra una guitarra con las partes que protagonizarán este artículo.

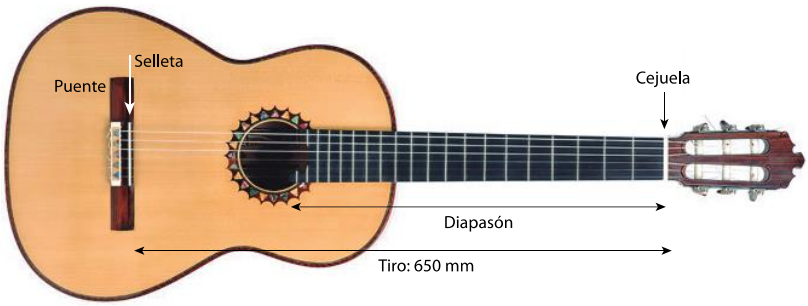


Imagen 1. Partes principales de una guitarra construida por Antonio Manjón Martín (St. Adrià de Besós, Barcelona).

1. Los trastes no son equidistantes

Los orígenes de la escala musical están en la cuerda tensa que Pitágoras estudió y cuyo sonido cambiaba según la longitud de su parte vibrante. Más corta, más agudo; más larga, más grave. El sabio griego observó además que algunas fracciones de la cuerda producían sonidos más afines y placenteros al oído con el de la cuerda entera, sobre todo las correspondientes a la mitad, el cuarto y el tercio (Boyer, 1986).

Así nacieron las consonancias sonoras. Acortando la cuerda a la mitad, suena la octava. Si se acorta en un cuarto, suena la cuarta. Si se acorta en un tercio, suena la quinta. Lo que no determinó Pitágoras son las causas físicas del fenómeno, que se conocerían milenios después con el estudio de las frecuencias sonoras.

El tono de un sonido se cuantifica en ciclos por segundo, lo que en una cuerda vibrante equivale a su frecuencia de vibración. Al reducir la longitud a la mitad, la frecuencia se duplica; al reducirla a 2/3, la frecuencia se multiplica por 3/2 (imagen 2). Al reducirla a la fracción *a/b* de su longitud, la frecuencia se multiplica por *b/a*.

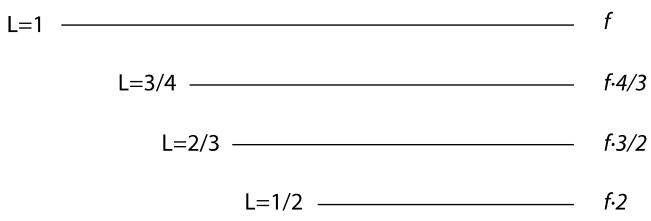


Imagen 2. Longitudes y frecuencias de vibración.

A lo largo de los siglos XVII y XVIII se sentaron las bases de las frecuencias que definirían los tonos musicales occidentales. Fue un proceso lento y complejo en el que intervinieron diversos sabios de la época, entre ellos René Descartes, y que concluyó con la división de la octava en doce intervalos equidistantes en cuanto a sus frecuencias de vibración llamados semitonos. Esto significa que el aumento de una nota a su octava superior debe producirse tras el producto de un factor *r* doce veces consecutivas:

$$r \cdot r \cdot \overset{12\,veces}{\cdots} \cdot r = r^{12} = 2 \Rightarrow r = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}059$$

Este factor es el aumento de frecuencia que experimenta una nota cuando sube un semitono. En consecuencia, la separación entre los trastes de una guitarra funciona de modo inverso. Si *d* es la distancia entre dos trastes consecutivos, la separación del segundo con el tercero será 1/r=0,94387… y los trastes no son equidistantes.

La longitud vibrante de las cuerdas de una guitarra recibe el nombre de «tiro». El más común hoy en día es el de 650 mm. Pero las cuerdas no se disponen paralelas, sino que van abriéndose a medida que se alejan de cejuela (traste 0). Ahí se reparten a partes iguales una anchura de unos 42 mm que se amplía hasta los 56 mm en la selleta del puente (traste ∞). Por la cejuela y por la selleta las cuerdas pasan equidistantes unas de otras. Luego no tienen exactamente las mismas longitudes vibrantes y el tiro de la guitarra es, en realidad, la distancia que hay entre la cejuela y la selleta, que son paralelas. Las longitudes vibrantes de las cuerdas sí

coinciden por parejas. Las longitudes vibrantes son iguales en 1ª y 6ª, 2ª y 5ª, y 3ª y 4ª.

2. Teorema para entonar las guitarras de trastes paralelos

La guitarra española y sus primas acústicas y eléctricas tradicionales se construyen con trastes paralelos y distantes según la pauta mostrada. Todas comparten la equidistancia de cuerdas en la cejuela y en la selleta. Las únicas diferencias son el tiro, que puede ser más largo o más corto, y la distancia entre la 1ª y la 6ª cuerdas, más amplia en las guitarras con cuerdas de nylon (clásica, flamenca) y más estrecha en las guitarras con cuerdas de acero (acústicas, eléctricas). Pero, ¿qué teorema asegura la buena afinación de todas estas guitarras con los trastes paralelos?

Los trastes y cuerdas de una guitarra española, desde la cejuela hasta la selleta componen una retícula de celdas trapezoidales merced a la equidistancia de cuerdas en los extremos (imagen 3).

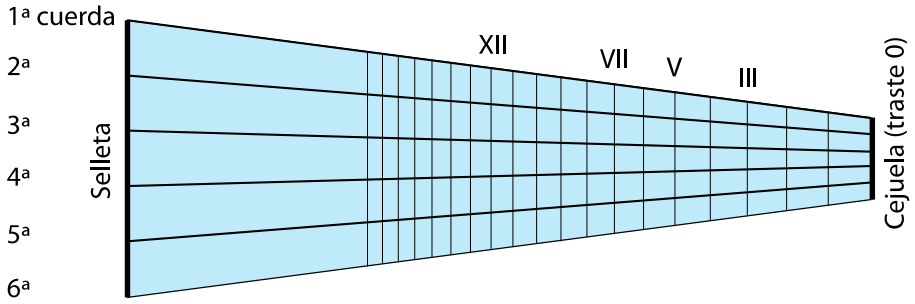


Imagen 3. Retícula sonora de la guitarra.

Para que la guitarra afine bien los sonidos producidos en las intersecciones de las cuerdas con los trastes deben corresponderse con los de la escala cromática. Si una cuerda pisada en al traste VII ve reducida su longitud en un tercio, la longitud de cualquier otra cuerda pisada en el mismo traste también debe ver reducida su longitud en la misma proporción. ¿Cómo se asegura esto?

El teorema que nos interesa es una generalización al trapecio del teorema de Tales, es decir, la proposición 2 del libro VI de los Elementos (Euclides, 1994, pág. 58):

Proposición VI.2 (Elementos). Si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado restante del triángulo.

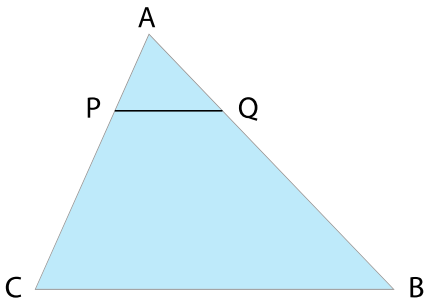


Imagen 4. Proposición VI.2.1: Si PQ//BC, entonces AB/AQ=AC/AP.

Para ver que puede generalizarse al trapecio basta con trazar en él una de sus diagonales (imagen 5) y aplicar el resultado en los dos triángulos en los que dicha diagonal divide el trapecio.

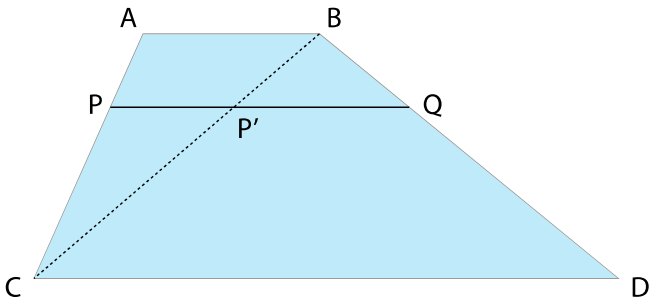


Imagen 5. Generalización de VI.2.1 al trapecio: Si PQ//AB//CD, entonces BD/BQ=AC/AP.

En efecto. Aplicando VI.2.1 al triángulo ABC podemos afirmar que BC/BP'=AC/AP=r. Reiterando lo mismo en el triángulo BCD, tenemos que BD/BQ=BC/BP'=r. Y así tenemos demostrado el teorema con el que se justifica geométricamente la entonación de las guitarras con trastes paralelos:

Teorema 1 (generalización proposición VI.2.1). Si se traza una recta paralela a uno de los lados paralelos de un trapecio, cortará proporcionalmente los lados no paralelos del trapecio.

3. Teorema para entonar las guitarras sin trastes paralelos

En 1988, Ralph Novak patentó en Estados Unidos el diseño de un diapasón para instrumentos de cuerda cuya descripción redactó en los siguientes términos:

A fingerboard or fret board for a stringed instrument utilizing a neck portion including a surface over which a plurality of strings are tensioned between a saddle of a bridge and a nut. Also, included are a series of straight frets which are aligned in a non-parallel pattern relative to one another to provide ach string with a different scale length. (Novak, 1988)

Mucho antes, en 1900, E. A. Edgren había patentado un diapasón «con trastes en ángulo cuyo primer y último traste presentan direcciones opuestas y los otros se inclinan similarmente a estos». Sin embargo, mucho antes que Edgren y Novak, a finales del siglo XVI, la bandora era un instrumento parecido a la guitarra actual con cuerdas de tiros distintos, más largos en los bajos.

Hoy en día se construyen todo tipo de guitarras de tiro múltiple (imagen 6): clásicas, acústicas, eléctricas, bajos… Los motivos principales de su construcción son dos. Por una parte, aumentar el número de cuerdas sin que las más graves sean excesivamente gruesas para mantener la tensión y suenen afines al resto. De ahí que muchas suelen tener 7, 8, 10 o más cuerdas. Y por otra, facilitar una posición más natural de la mano izquierda en los primeros y últimos trastes del diapasón.

Imagen 6. Guitarra de tiro múltiple sin trastes paralelos construida por Daniel Zucali (Haag, Austria).

Como se aprecia en la imagen 6 la retícula de una guitarra de tiro múltiple no es trapezoidal, sino cuadrilátera. También sus celdas son cuadriláteros. Dado que en dicha retícula no hay paralelismos, el teorema 1 no es aplicable. Entonces, ¿cómo se explica su buena entonación?

Puesto que estas guitarras también se hacen con equidistancia de cuerdas en al cejuela y en la selleta, el cuadrilátero sonoro tiene dos lados opuestos divididos en partes iguales (cinco exactamente). Teniendo en cuenta que, como antes, cada uno de los trastes debe interceptar todas las cuerdas en la misma sección de su longitud vibrante, teorema que necesitamos es la generalización definitiva de la proposición VI.2.1 a los cuadriláteros. Lo llamaremos teorema de las divisorias:

Teorema 2 (de las divisorias). Sean P, Q, M y N puntos en cada uno de los lados de un cuadrilátero ABCD (imagen 7) tales que AC/AP=BD/BQ=r y AB/AM=CD/CN=s. Entonces, el punto de intersección O=MN∩PQ verifica que MN/MO=r y PQ/PO=s.

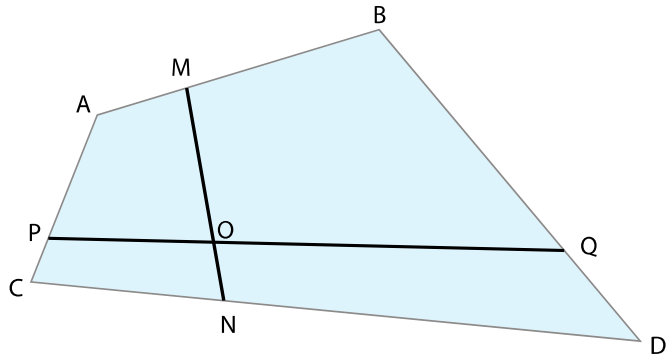


Imagen 7. Teorema de las divisorias.

Se trata de una situación en la que no hay ningún par de segmentos paralelos, por lo que el teorema de Tales no puede aplicarse directamente. Para remediarlo, tracemos paralelas a MN y a PQ por los cuatro vértices del cuadrilátero y extendamos MN y PQ hasta intersecarlas. Al hacerlo (imagen 8), una retícula de paralelogramos aparece superpuesta al cuadrilátero.

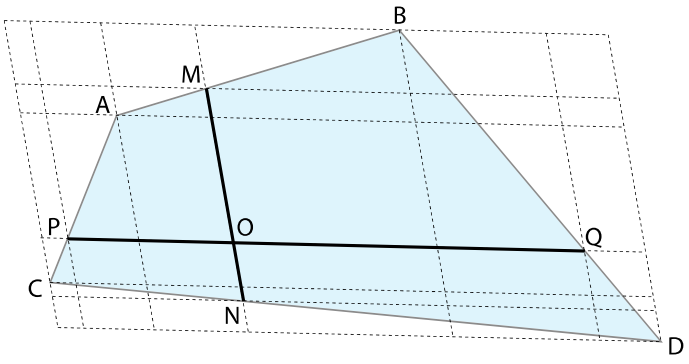


Imagen 8. Retícula de paralelogramos creada por paralelas a las divisorias de un cuadrilátero.

Ahora ya disponemos de un sistema de paralelas sobre el que pueden aplicarse teoremas relativos a la proporcionalidad de segmentos. Para demostrar el teorema de las divisorias aplicaremos el teorema 1 demostrado anteriormente a los trapecios AA'CC' y BB'DD' destacados en la imagen 9.

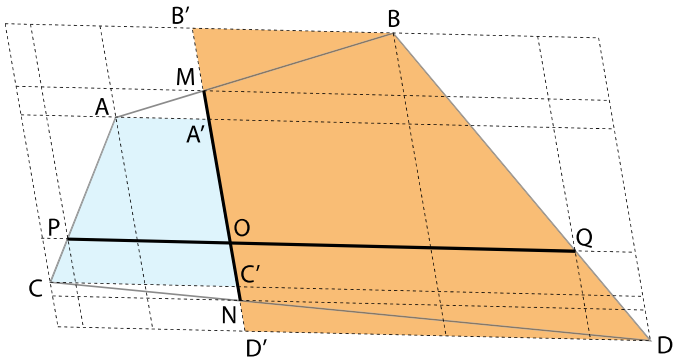


Imagen 9. Los trapecios AA'CC' y BB'DD' en la retícula de paralelogramos.

En dichos trapecios podemos afirmar que A'C'/A'O=AC/AP=r=B'D'/B'O=BD/BQ. Además, aplicando la proposición VI.2.1 en los triángulos AA''B y CC''D destacados en la imagen 10 podemos afirmar también que A'B'/A'M=s=C'D'/C'N.

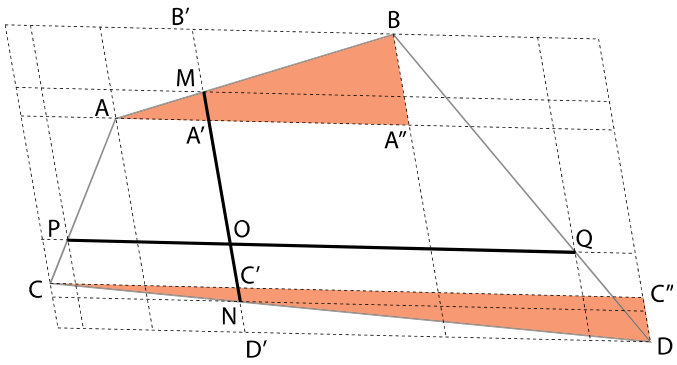


Imagen 10. Los triángulos AA''B y CC''D en la retícula de paralelogramos.

Hemos descompuesto así el segmento B'D' de dos modos distintos:

$$B'D' = r \times B'O = r \times \left(B'A' + A'O\right) = r \times s \times MA' + r \times A'O$$

$$B'D' = B'A' + A'C' + C'N = s \times MA' + r \times A'O + s \times C'N$$

Igualando estas expresiones y teniendo en cuenta que *MA'+C'N=MN–AC'*:

$$r \times MA' = MA' + C'N = MN - AC'$$
$$r \times MA' + AC' = MN$$
$$r \times MA' + r \times A'O = MN$$
$$r \times MO = MN$$

Luego *MN/MO=r*, como se quería demostrar. Aplicando el mismo procedimiento sobre la divisoria *PQ* llegaríamos a la conclusión análoga: *PQ/PO=s*.

La imagen 11 muestra la falsedad del teorema si se pierde la igualdad en las secciones de los extremos de una de las divisorias, lo que equivale a decir que no se respeta la equidistancia de cuerdas en la cejuela o en la selleta. Con esa equidistancia de dividir en cinco partes iguales la separación de cuerdas en la cejuela y la selleta se asegura el lutier la correcta entonación del instrumento.

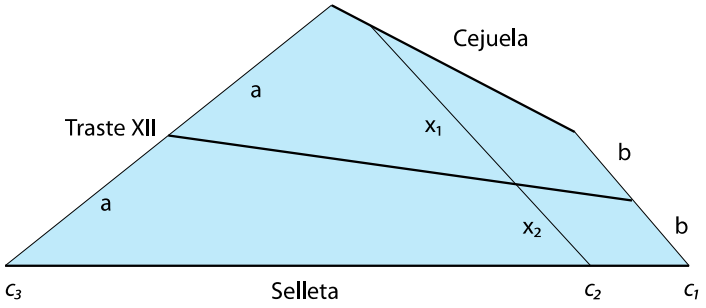


Imagen 11. Sin equidistancia de cuerdas la entonación en guitarras de tiro múltiple no sería correcta: $x_1 \neq x_2$.

4. La entonación de la guitarra como recurso de aprendizaje

4.1 El ámbito laboral inspira matemáticas

La entonación de la guitarra puede tomarse como una aplicación de las matemáticas al entorno argumentando que si una guitarra entona es gracias al teorema que lo justifica geométricamente. Pero las cosas han ido en sentido opuesto. La entonación tangible y real de las guitarras sin trastes paralelos ha incitado la búsqueda de una causa geométrica del fenómeno. Se pone de nuevo de manifiesto que una labor profesional como es la de la lutería ha inspirado el desarrollo de conocimiento matemático y el aprendizaje (Albertí, 2009).

Dado que la lutería es una actividad eminentemente artesanal, el proceso desarrollado obedece a la primera fase de lo que se entiende como una

interpretación matemática situada basada en tres fases de análisis: el de la obra acabada, el de la obra en curso, y el de la obra en proyecto (Albertí, 2007). Analizando la obra acabada, la guitarra construida, se han planteado los modelos matemáticos que han conducido al teorema de las divisorias. Pero no se ha validado dicha interpretación en la obra en curso (observando el proceso de construcción) ni en la obra en proyecto (interpelando a los lutieres) antes de validarse definitivamente.

Con todo se plantea una investigación esencial por lo que se refiere a la equidistancia de cuerdas: ¿la respetan los lutieres en las guitarras sin trastes paralelos para asegurar la buena entonación o lo hacen siguiendo la costumbre arraigada en la construcción de guitarras con trastes paralelos?

Benedetto (1996), lutier de guitarras de jazz con cuerdas de acero, recomienda tomar las equidistancias, no desde el eje central de la cuerda, sino desde sus bordes. Quizá sea porque los calibres de las cuerdas de acero son muy diferentes, pudiendo llegar a 1,2 mm de diferencia entre la 1ª y la 6ª. Los calibres de las cuerdas de nylon propias de las guitarras clásicas y flamencas son mucho más similares. La mayor diferencia no suele superar los 0,4 mm. Dado que Benedetto construye guitarras con trastes paralelos su recomendación probablemente obedezca a cuestiones de ejecución. Aun así, conviene tener presente que en la interpretación geométrica desarrollada las cuerdas se han reducido a segmentos sin grosor alguno.

4.2 La guitarra en el aula

Uno de los objetivos primordiales de la educación matemática es dar sentido y ayudar a comprender la realidad del entorno. Siendo todo tipo de guitarras y otros instrumentos con trastes como los ukeleles tan populares hoy en día merece la pena hacer de ellos recursos de aprendizaje.

La entonación es la cuestión principal. Lo expuesto muestra como las relaciones numéricas entre longitudes se convierten en sonidos y estos en consonancias o disonancias según el grado de entonación del instrumento. Escuchar un intervalo de

quinta en una guitarra (mi-si), ya sea melódicamente o al unísono es escuchar dos fracciones de longitud de cuerda.

El primer papel que puede desempeñar como recurso de aprendizaje en la ESO un instrumento con trastes es el de corroborar la relación entre los sonidos que emite y las longitudes vibrantes de sus cuerdas. Algo que puede llevarse a cabo midiendo un instrumento en el aula con el fin de observar que las principales consonancias (8ª, 5ª y 4ª) se producen en los trastes XII, VII y V correspondientes a las secciones 1/2, 1/3 y 1/4, de la longitud de la cuerda al aire.

En 2.º curso de la ESO puede abordarse la cuestión de la buena entonación de las guitarras de trastes paralelos como aplicación directa del teorema de Tales.

Más adelante, en 3.º o 4.º curso, puede plantearse la cuestión referente a las guitarras sin trastes paralelos, pues no es necesario establecer la generalización al trapecio de la proposición VI.2 como se ha hecho antes. El teorema de las divisorias puede demostrarse mediante tres aplicaciones sucesivas del teorema de Tales descomponiendo cada uno de los trapecios de la imagen 9 en tres triángulos adyacentes (imagen 12).

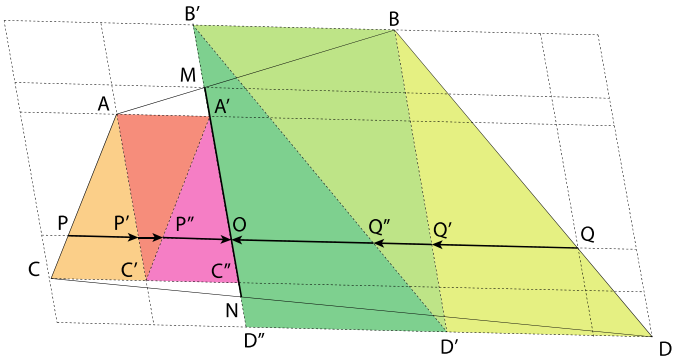


Imagen 12. Dos trapecios descompuestos en tres triángulos adyacentes.

Renombrando algunos vértices de dicha descomposición se aprecia como la sección que determinan P y Q en los lados AC y BD se propaga hasta O a través de P’ y Q’, P’’ y Q’’. Para ello basta aplicar el teorema de Tales (proposición VI.2) a los triángulos ACC’, AC’A’, A’C’C’’ y BDD’, BD’B’, B’D’D’’:

$$\left.\begin{array}{l} r=\dfrac{AC}{AP}=_1\dfrac{AC'}{AP'}=_2\dfrac{A'C'}{A'P''}=_3\dfrac{A'C''}{A'O} \\ r=\dfrac{BD}{BQ}=_1\dfrac{BD'}{BQ'}=_2\dfrac{B'D'}{B'Q''}=_3\dfrac{B'D''}{B'O} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A'C''}{A'O}=r=\frac{B'D''}{B'O}$$

4.3 Y en GeoGebra, ¿cómo suena?

Una vez estaba claro el teorema que justificaba la afinación, había que demostrarlo. Ni el teorema ni su demostración se encontraron en Internet. Solo se halló un caso particular conocido como el «teorema de las bimedianas de un cuadrilátero» y una demostración de este al caso del trapecio en De Villiers (2013).

El conocimiento matemático necesario para demostrar el teorema requiere un desarrollo académico afín con los Elementos de Euclides. Pero la geometría clásica no suele estar muy presente en el aula y el teorema de Tales referente a la proporcionalidad de segmentos suele abordarse con un objetivo demasiado inmediato como son sus aplicaciones, pasando por encima determinados procesos de su demostración. Esto lleva a los estudiantes a no saber con qué herramientas cuenta a la hora de afrontar un problema de geometría sintética que no se ajuste a un diseño geométrico con paralelas. El que quizá sea el instrumento musical más popular del mundo puede servir de motivación para profundizar algunos aspectos de geometría clásica en los currículos de matemáticas.

Mientras tanto, lo que puede hacerse en el aula es llevar la cuestión a GeoGebra desarrollando una dinamización digital que sirva, si no para demostrar rigurosa y euclidianamente el teorema, al menos para dirimir su certeza. A esto parece referirse Carrillo (2012) cuando considera «demostrado» un teorema mediante GeoGebra. La demostración de un teorema planteado euclidianamente como el de las divisorias de un cuadrilátero debe desarrollarse euclidianamente. Aunque no lo haga así, una dinamización digital puede decidir si es verdadero o falso. Y si el diagnóstico obtenido es positivo puede tomarse como una incitación a profundizar más en la cuestión, sobre todo si pese a la certeza no se acaba de comprender el fenómeno, esto es, no se revelan las causas que lo justifican.

En el caso que nos ocupa, los siguientes pasos convierten el teorema de las divisorias en una dinamización de GeoGebra con dos puntos deslizantes. Para ello se toman tres cuerdas (AD, BC y su mediana MN), la cejuela (AB), la selleta (CD) y cualquier traste entre ellas (PQ):

- *Trazar un cuadrilátero irregular de vértices A, B, C, D.*
- *Señalar los puntos medios M y N de los lados opuestos AB y CD, respectivamente.*
- *Trazar el segmento MN (bimediana de AB y CD).*
- *Crear un punto deslizante n con valores entre 1 y 10 a paso de centésima.*
- *Con las longitudes b y d de BC y AD trazar un círculo de centro A y radio d/n y otro de centro B y radio b/n.*
- *Marcar las intersecciones P y Q de esos círculos con los lados BC y AD, respectivamente.*
- *Trazar el segmento PQ.*
- *Señalar y llamar O al punto de intersección de PQ con MN.*
- *Con el nombre f de la longitud de la mediana MN definir un círculo con centro en M y de radio f/n.*
- *Mover cualquier vértice del cuadrilátero y variar el valor de n para ver que la intersección de este círculo con MN siempre coincide con O (imagen 13).*

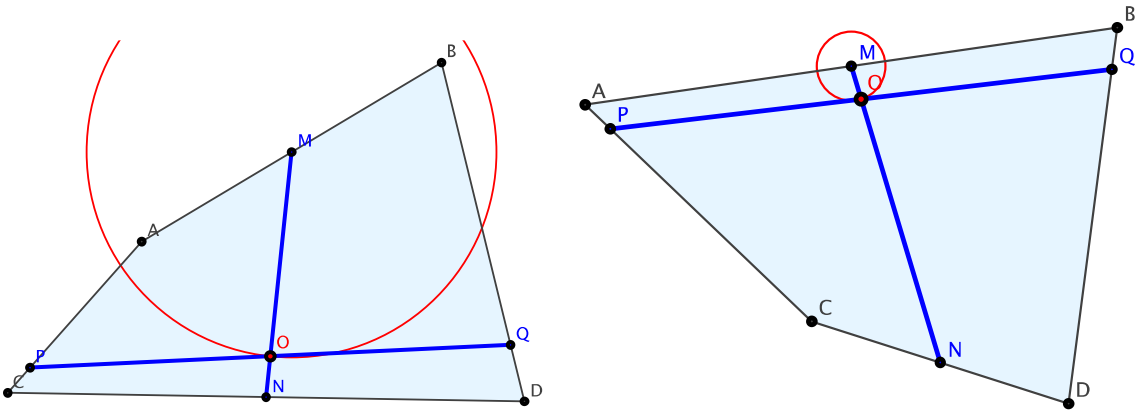


Imagen 13. Dos capturas de la dinamización con GeoGebra del teorema de las divisorias.

Esta dinamización digital certifica la veracidad del teorema, pero no lo explica. Sabemos que es cierto, pero no acabamos de comprender la causa. Entonces, hay que seguir adelante porque sin comprensión no hay verdadero aprendizaje. Quizá hallemos comprensión buscando una demostración del teorema afín al contexto en el que fue enunciado. Hanna y De Villiers (2012) destacan el papel de la demostración matemática en el aprendizaje donde la dinamización digital actúa como asistente experimental. Además, demostrar es tarea del matemático.

La dinamización con GeoGebra aporta certeza, pero no causa. Sí lo hace el desarrollo deductivo basado en una retícula inventada y sobre la descomposición de un trapecio en triángulos donde el teorema de Tales resulta aplicable, tanto en el

caso de trastes paralelos (imagen 5) como en el de trastes no paralelos (imágenes 8, 9 y 12). Es decir, descomponiendo el problema en otros más simples ya comprendidos previamente, la metodología de aprendizaje señalada por Polya (1988).

Ello refuerza la consideración de Orts (2021) de que el concepto de demostración en sí mismo debe desarrollarse sucesivamente a lo largo de diferentes niveles educativos, comenzando con experimentos fáciles y creciendo a través de diferentes tipos de pruebas visuales, dinámicas, formales.

El test definitivo de la buena entonación no es su geometría, sino el oído. La geometría ayuda a obtener buenos resultados, pero al final el lutier debe realizar sutiles ajustes para preservar la buena entonación. Por ejemplo, variar la altura de cuerdas en la cejuela o en el puente, usar cuerdas de unas centésimas de milímetro más gruesa o más finas, todo eso contribuye a precisar el grado de entonación. Así devuelve el lutier al instrumento lo que la realidad le quitó a su perfecta geometría.

Un lutier transforma el bosque en geometría de la que un guitarrista extrae los sonidos con los que hace música. El lutier no necesita el conocimiento matemático desarrollado aquí para hacer bien su trabajo, su objetivo es otro. Pero si sobre el plano la guitarra encuentra las causas de su buena afinación, más fácil es que afine también en el espacio tridimensional. El toque de una guitarra transforma medidas, relaciones, cifras y teoremas que la mayoría de las veces leemos en un papel o una pantalla. En la guitarra no solo se ve la geometría, también se oye. A través de la guitarra, habla la geometría. Vale la pena escucharla.

Referencias

Albertí, M. (2007). *Interpretación matemática situada de una práctica artesanal*. Tesis doctoral dirigida por la Dra. Núria Gorgorió i Solà. UAB.

Albertí, M. (2009). *Activitat matemática en l'àmbit laboral a l'inici del segle XXI. Implicacions per al currículum de l'ESO.* Memoria del proyecto de investigación para licencia retribuida de la modalidad A. Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya.

Benedetto, R. (1996). *Making an Archtop Guitar*. Centerstream Publications.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Alianza Editorial.

Carrillo, A. (2012). «Demostración de teoremas con GeoGebra, ¿es posible?, *Épsilo-Revista de Educación matemática*, vol. 29(3), n.º 82, 79-87.

De Villiers, M. (2013). «A Trapezium Theorem Generalized». *At Right Angles*, Vol. 2, nº. 3, Azim Premji University.

Euclides (1994). *Elementos. Libros V-IX*. Traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños. Editorial Gredos.

Hana, G., De Villiers, M. (eds.) (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education*. *The 19th ICMI Study*. Springer Verlag.

Novak, R. (1988), *Fingerboard for a Stringed Instrument*. Patent 4,852,450. USA.

Orts, A. (2021). «Sobre el origen del concepto de demostración y del método axiomático». *Suma*, n.º 97, 15-24.

Polya, G. (1988). *How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method*. Reedición del original de 1945. Princeton Science Library. University Press. New Jersey.

Agradecimientos

Agradezco a los lutieres Antonio Manjón Martín (Sant Adrià de Besos, Barcelona) y Daniel Zucali (Haag, Austria) la cesión de imágenes de sus guitarras.

CoC006 Secuencia didáctica interdisciplinar: las matemáticas y las ciencias naturales en el huerto escolar con alumnado de 4 años

Salvador-Beltri, Andrea (1)
al395161@uji.es (1)
Departament d'Educació i Didàctiques específiques, Universitat Jaume I.de referencia (1)
Lorenzo-Valentín, Gil (2)
gil.lorenzo@uji.es(2)
Departament d'Educació i Didàctiques específiques, Universitat Jaume I.de referencia (2)
Santágueda-Villanueva, Maria (3)
santague@uji.es(3)
Departament d'Educació i Didàctiques específiques, Universitat Jaume I.de referencia (3)
Monferrer-Sales, Lidón (4)
santague@uji.es(4)
Departament d'Educació i Didàctiques específiques, Universitat Jaume I.de referencia (4)

Núcleo temático:

- Actividades matemáticas fuera del aula que ayuden a la matematización del entorno cercano.
- Propuestas de cambio en la metodología de trabajo del docente y en la forma de motivar al alumnado para la mejora de la enseñanza.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Infantil.

RESUMEN

En los centros educativos deben existir medios naturales para fomentar una vida saludable entre la comunidad educativa. Un ejemplo de este medio natural podría ser el huerto escolar, ya que su uso conlleva diferentes beneficios tanto para el rendimiento académico del alumnado como en el estilo de vida de su entorno.

En este trabajo se propone la elaboración de una secuencia didáctica trabajando de manera interdisciplinar las áreas de matemáticas y ciencias experimentales, así como su aplicación en el huerto escolar del CEIP Ángel Esteban, de Benicarló, con el alumnado de educación infantil, en el nivel de 4 años. Para este suceso, utilizaremos una metodología abierta, ya que realizaremos diferentes acciones de

investigación tales como la entrevista, acciones participativas, la investigación, entre otras.

Ante esta aplicación encontramos una respuesta sorprendente del alumnado, también una gran participación, la reflexión de los docentes y el análisis continuo del comportamiento de los participantes.

Palabras clave: Huerto Escolar, Educación Infantil, Matemáticas, Ciencias Naturales, Interdisciplinariedad.

1. Introducción

Cada vez es más común que el estilo de vida de la población infantil se caracterice por ser sedentario, inactivo y de desconexión con el mundo natural (Louv, 2008). Este suceso provoca un considerable aumento en las tasas de obesidad y sobrepeso entre ellos. En 2016 la Organización Mundial de la Salud (OMS) afirmaba que alrededor de un 6% de las niñas (50 millones) y un 8% de los niños (74 millones) sufrían obesidad.

Para concretar el nivel de desconexión con la naturaleza, Louv (2008) analizó los efectos negativos que estaban padeciendo tanto menores como adultos al estar distanciados de un entorno natural. Además, nombró el concepto “trastorno por déficit de naturaleza”. Así como Sobel (1996) que trató el término de ecofobia, es decir, el miedo al entorno natural.

Por esta razón tiene mucha importancia que en los centros educativos existan medios naturales. La creación de un huerto escolar permite incorporar dicho medio en la educación de los niños y niñas, pues favorece el desarrollo cognitivo del alumnado (Corraliza, Collado y Bethelmy, 2012). Además, ese factor externo favorece la adquisición de información y permite conjugar diferentes motores para construir aprendizajes básicos (Botella, Hurtado y Cantó, 2014) y aporta muchos beneficios al realizar las actividades en el huerto (Miller, 2007).

Tras este análisis, en 2021, nos planteamos analizar si el uso de los huertos escolares, en los centros educativos de la provincia de Castellón, era una realidad efectiva y estructurada. De esta manera quisimos comprobar si existía un trabajo

profundo en los contenidos de las asignaturas y no que estos espacios en los centros educativos fueran fruto de gustos particulares, de algún docente, en cuestiones de cultivo.

Basándonos en la investigación llevada a cabo por Alcántara, Torres-Porras, Mora, Rubio, Arrebola y Rodríguez (2019), elaboramos un cuestionario (anexo I) mediante la aplicación *Google Forms* a todos los centros de Educación Infantil y Primaria de la provincia de Castellón. En este cuestionario realizamos diferentes preguntas, con el objetivo de saber el número de centros que dispone de este recurso, qué asignaturas relacionan sus contenidos con él y las etapas educativas que lo utilizan, entre otras preguntas.

De los 80 centros educativos que recibieron el cuestionario obtuvimos respuesta de 37 y de estos, 34 poseían un huerto escolar. Todos ellos afirmaron que utilizaban recursos para aproximar al alumnado a la naturaleza como es el cuidado de una planta o un animal, la germinación de semillas, salidas a zoológicos y a espacios naturales, entre otros. Estas actividades tenían lugar en el segundo ciclo de la Educación Infantil y en Educación Primaria. Además, mostraban satisfacción en el uso de este espacio, lo que indicaba que era gratificante para toda la comunidad educativa implicada en él.

Por lo tanto, en el actual proyecto planteamos realizar una secuencia didáctica en un huerto escolar trabajando de manera interdisciplinar. El término de interdisciplinariedad hace referencia a la integración de diferentes campos de la ciencia, los cuales unifican el trabajo y los métodos, en este caso el ámbito de las matemáticas y el de las ciencias naturales en el huerto escolar. Van Del Linde (2007) la define como una estrategia pedagógica basada en la interacción, el diálogo y la colaboración de diferentes disciplinas con el objetivo de lograr la meta de un nuevo conocimiento.

En relación a la secuencia didáctica podemos definirla como un conjunto de actividades diseñadas, planificadas y ordenadas, con el fin de alcanzar objetivos relacionados con el aprendizaje. Esta debe responder satisfactoriamente a la práctica social y cultural que dan sentido a la secuencia. Tobón, Pimienta y García

(2010) la definen como conjuntos de actividades de aprendizaje que necesitan la mediación del docente para conseguir el logro de determinadas metas educativas, teniendo en cuenta una serie de recursos.

A pesar de que la mayoría de las actividades del huerto escolar se realizan en los niveles de Educación Primaria, proponemos sesiones para trabajar Educación Infantil contenidos del área de Matemáticas y de Ciencias Naturales en este espacio exterior. De esta manera, el objetivo de este trabajo es elaborar una secuencia didáctica y llevarla a cabo trabajando de manera interdisciplinar en el huerto escolar del CEIP Ángel Esteban de Benicarló con el alumnado de 4 años.

2. Metodología

2.1 Contextualización

Benicarló es una población de la Comunidad Valenciana, España, caracterizada por su entorno rural. No obstante, gran parte de la población tiene la costumbre de comprar todos los alimentos en supermercados. Por lo tanto, la población infantil crece sin conocer el origen de la mayoría de los alimentos que consumen.

Además, cuenta con diferentes recursos educativos, en este caso nos vamos a centrar en el CEIP Ángel Esteban. El Colegio Público Ángel Esteban es un centro donde se imparte el segundo ciclo de educación infantil con dos líneas educativas por nivel. Esta secuencia didáctica irá dirigida al alumnado de 4 años, donde encontramos una ratio aproximada de 25 niños y niñas por aula.

En relación a las infraestructuras necesarias para llevar a cabo todas las actividades de secuencia didáctica se encuentran el aula, el huerto y el *corralet*. Cabe destacar que una empresa externa es la encargada de mantener el huerto en buenas condiciones y de realizar las actividades. Además, el *corralet* es una zona de juego al aire libre con acceso desde el aula y nos permitirá realizar la actividad 7.

2.2 Secuencia didáctica

Basándonos en el análisis de diferentes artículos como el de Dana L. Miller Ph.D (2007) creamos un conjunto de actividades para el huerto escolar del CEIP Ángel

Esteban, que fueron diseñadas, planificadas y ordenadas, con el fin de alcanzar objetivos en las áreas de matemáticas y ciencias naturales en educación Infantil.

En la sesión previa elaboramos una presentación (actividad 1) (anexo I) para la pizarra digital del aula, donde podrán ver las verduras que tienen plantadas en el huerto escolar y cómo se las encuentran diariamente en el supermercado. Entonces serán conscientes del origen de las verduras que consumen.

La sesión de desarrollo constará de 5 actividades. En primer lugar, iremos al huerto escolar del centro para recolectar algunas hortalizas y relacionarlas con su nombre y fotografía (Actividad 2), donde utilizaremos platos de cartón y unas tarjetas con la

Imagen SEQ Ilustración * ARABIC 1. Serigrafías con el nombre de cada verdura. Traducción de izquierda a derecha y de arriba a abajo: rábanos, kale, zanahorias, col, brócoli, escarola, acelga roja y bimi.

imagen y el nombre de cada una de las verduras (imagen 1).

Seguidamente se les pregunta dónde creen que habrá más cantidad de hortalizas para que diferencien la masa y el volumen. Una vez hayan respondido, comprobaremos las respuestas obtenidas contando las piezas de cada plato (actividad 3). Después observaremos y analizaremos, con el color, la textura y el tamaño tanto de las hortalizas recolectadas como de las que permanecen en la planta (actividad 4). De esta manera aprenderán a diferenciar e identificar las verduras maduras y en el momento adecuado para su alimentación.

En la quinta actividad plantaremos diferentes tipos de semillas, concretamente de lechuga, tomate, berenjena y calabacín (imagen 2). Para ello agruparemos al alumnado en pequeños grupos, de alrededor 5 o 6 personas, los cuales contarán con una huevera (imagen 3) por grupo para plantar las semillas. La docente tendrá

en la mano cinco semillas y repartirá una a cada alumno o a cada pareja, mostrándose simultáneamente y observando lo que le queda en la mano, con el objetivo de que puedan relacionar el suceso de “dar algo a alguien” con la sustracción. Además, en el momento de llevar a cabo la plantación trabajaremos las proporciones a través de algún material que nos servirá como medidor, para poner la cantidad necesaria de tierra, sustrato, perlita y vermiculita (imagen 4). Pondremos tres vasitos de tierra, dos de sustrato, uno de perlita y otro de vermiculita. En esta actividad tendrán la oportunidad de manipular y analizar la forma, textura y tamaño de los diferentes tipos de semillas. También las podremos relacionar con algunas formas geométricas conocidas y trabajadas en clase anteriormente.

Imagen 2.Semillas de lechuga, tomate, berenjena y calabacín.

Imagen 3. Huevera para plantar las semillas.

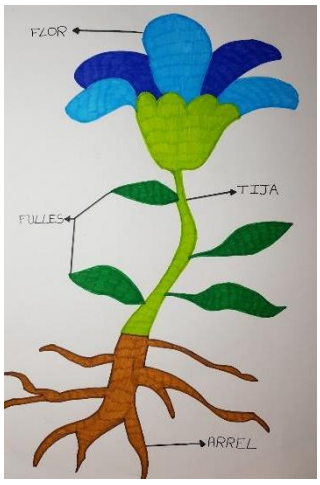
Imagen 4. Tierra, sustrato, perlita y vermiculita con los vasos para realizar las porciones.

Cabe destacar que estos semilleros los tendrán en sus aulas. Por lo tanto para terminar la sesión de desarrollo elaboraremos un mural para cada una de las aulas (imagen 5), en el cual se recogerán diferentes fechas importantes del inicio del ciclo

vital (actividad 6). En esta actividad trabajaremos las funciones vitales de las plantas, el ciclo de la vida y el paso del tiempo.

Imagen 5. Mural para las dos clases de 4 años. Traducción de arriba a abajo y de izquierda a derecha: gráfica de seguimiento, nombre, fecha de siembra, fecha de germinación, fecha de primera hoja, observaciones, lechuga, tomate, berenjena, calabacín.

En la sesión de conclusión llevaremos a cabo la séptima actividad que consistirá en que el alumnado identifique qué parte de cada hortaliza recolectada del huerto escolar es la que consumimos. Para esto, elaboraremos un esquema de una planta donde se puedan distinguir las raíces, el tallo, las hojas y las flores (imagen 6a), así como una flecha (imagen 6b).



Por último, elaboraremos una evaluación para comprobar aquello que han aprendido como para evaluar la acción de la docente. Esta evaluación constará de diferentes técnicas y estrategias, como la observación sistemática, el anecdotario, la formulación de preguntas orales y una pequeña prueba objetiva. En este caso, se hará uso del anecdotario para registrar diariamente toda la información obtenida a través de la observación y de la formación de preguntas orales. Además, la prueba objetiva se realizará a una parte del alumnado de ambas aulas, pues será una ficha donde se les formulará tres preguntas (imagen 7). La tercera pregunta será que les ha gustado más de las sesiones, donde utilizaremos la técnica de la hoja en blanco, ya que los niños y las niñas deberán representar, mediante el dibujo libre, aquello que más les ha llamado la atención o les ha gustado de la sesión. Mientras, el alumnado dibujará, la docente anotará en un folio de observaciones todo aquello que los niños y las niñas irán explicando sobre la sesión y sobre el significado de sus trazos (Edo y Marin, 2017).

Imagen 6a. esquema de una planta donde se distinguen las raíces, el tallo, las hojas y las flores. Traducción de arriba a abajo: flor, tallo, hojas y raíces.

Imagen 6b: flecha para identificar las partes de la planta.

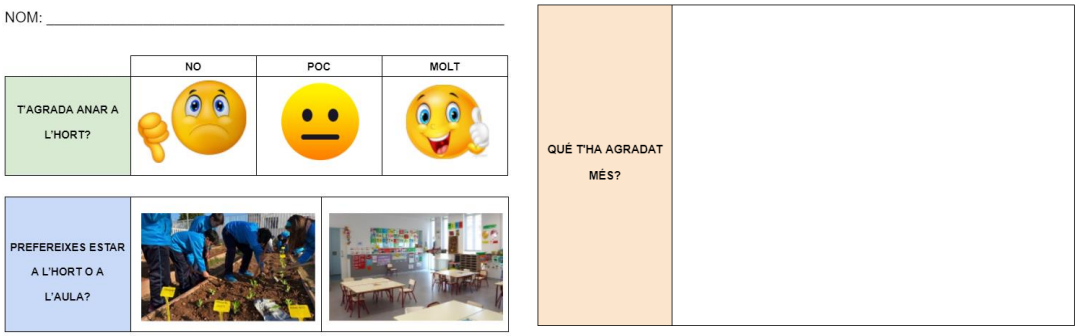


Imagen 7. prueba objetiva que recibirá el alumnado. Traducción de arriba a abajo: Nombre, ¿Te ha gustado ir al huerto escolar? no, poco, mucho, ¿Prefieres estar en el huerto escolar o en la clase? Y ¿Qué te ha gustado más?

2.3 Objetivos de la secuencia didáctica

En relación con los objetivos, analizamos la secuencia didáctica propuesta anteriormente e identificamos en el decreto 38/2008 aquellos que cumplimos en las diferentes actividades, relacionados con las matemáticas y las ciencias naturales. Encontramos los objetivos de ciclo (anexo I) y los objetivos de área, concretamente del área II: El medio físico, natural, social y cultural (anexo I).

2.4 Contenidos de la secuencia didáctica

De la misma manera, identificamos los contenidos relacionados con las asignaturas de matemáticas y ciencias naturales que trabajamos en cada una de las actividades. Para esto analizamos el decreto 38/2008, concretamente en el área II: El medio físico, natural, social y cultural. Bloque 1: Medio físico: elementos, relaciones y medidas.

3. Resultados

Tras cumplir uno de los principales objetivos de este trabajo, elaborar una secuencia didáctica, nos centraremos en los resultados obtenidos al llevarla a cabo. Como hemos justificado anteriormente la secuencia didáctica estaba pensada para realizarla en cuatro sesiones, no obstante, por falta de tiempo se realizó en tres sesiones.

La primera sesión tuvo lugar el martes 8 de febrero del 2022 y se llevaron a cabo la mayoría de las actividades. Empezamos por la actividad 1, donde se unieron ambas clases de 4 años en una misma aula para observar la presentación. En una diapositiva como se las encuentran en el supermercado y en otra diapositiva como nos las encontramos en el huerto escolar. Los alumnos sabían identificar algunas de las verduras como los rábanos, el brócoli, la zanahoria, pero la escarola, la col, el bimi, el kale y la acelga roja lo confundían con la lechuga. No obstante, pudieron relacionar a la perfección cada planta con la verdura correspondiente.

Seguidamente, fuimos al huerto escolar con la mitad del alumnado de un aula y la mitad de la otra. Una vez llegamos al huerto escolar repasamos aquello que habíamos trabajado en la sesión previa y no tuvieron ningún problema al identificar las plantas en el huerto escolar. Mientras, el alumnado iba por el huerto escolar mirando que verdura se podía coger, entonces con mi ayuda las cogíamos y las íbamos poniendo en una caja. Cuando teníamos todas las verduras en la caja, hicimos la actividad 4, puesto que les pregunté qué diferencia veían con las verduras que habíamos cogido con las que se quedaban en el huerto escolar. En esta actividad contestaron que las verduras que se quedaban en el huerto escolar,

como algunos brócolis eran muy pequeños o en el caso de las coles no pudimos coger porque todavía no habían salido o también tenían un tamaño menor.

Para llevar a cabo la actividad 2 nos pusimos en círculo al patio que estaba junto al huerto escolar, pero la caja y los platos para clasificar estaban en el medio. Además, cada plato tenía un cartel con una imagen de la verdura y su nombre escrito con letra mayúscula y letra minúscula. Entonces empezaron a salir los alumnos individualmente para elegir una verdura de la caja y ponerla en el plato adecuado. En esta actividad el alumnado no tuvo mucha dificultad, puesto que se ayudaban entre ellos, pero en algunas ocasiones confundieron el brócoli con el bimi.

Para llevar a cabo la tercera actividad les pregunté en qué plato creían que había más cantidad. Algunos de ellos dijeron que había más escarola que otras verduras, otros que del que más había era rábanos, pero otros acertaron la respuesta y dijeron que había más bimi que otras verduras.

Para terminar esta primera sesión volvimos al aula y el alumando que vino al huerto escolar entró al aula y los que estaban en clase salieron al *corralet* para realizar la séptima actividad. Para esta actividad con el soporte del mural y de la flecha, les enseñaba una verdura que habíamos recolectado del huerto escolar y los preguntaba que qué parte de la planta creían que era, una vez habían respondido uno/a alumno/a, voluntariamente, cogía la flecha e indicaba en el mural qué parte era.

En la segunda sesión en el huerto escolar, que tuvo lugar el jueves 17 de febrero del 2022, necesitamos la ayuda del encargado del huerto escolar, proveniente de una empresa exterior al centro educativo. Para poder realizar la actividad 5 les juntamos en grupos de cinco y cada grupo plantaban un tipo de semillas, uno los tomates, otro las lechugas, otro los calabacines y otro las berenjenas.

Seguidamente en la actividad 6, tuvieron la posibilidad de observar y conocer el ciclo vital de las plantas. A pesar de que algunas semillas no salieron pudieron contemplar la germinación y el crecimiento de las plantas que ellos mismos plantaron.

Por último, tras analizar detenidamente el anecdotario y los resultados de la prueba objetiva todos los infantes mostraron su preferencia en ir al huerto escolar antes que estar en el aula, indicaron que les gustaba hacer actividades en este espacio exterior.

4. Conclusiones

El objetivo de este trabajo era elaborar una secuencia didáctica y llevarla a cabo trabajando de manera interdisciplinar en el huerto escolar del CEIP Ángel Esteban de Benicarló con el alumnado de 4 años. Como se ha demostrado se han cumplido ambos objetivos propuestos.

Respecto a la elaboración de una secuencia didáctica, todas las actividades que creamos, concretamente seis, fueron diseñadas, planificadas y ordenadas con el fin de alcanzar los objetivos tanto de ciclo como de área del decreto 38/2008 (anexo I). Además, para su aplicación, como afirman los autores Tobón, Pimienta y García (2010) el docente tuvo el papel de mediador para ayudar al alumnado a conseguir cada uno de los objetivos a través de los recursos proporcionados en cada una de las actividades.

De la misma manera en todo momento trabajamos en el huerto escolar de manera interdisciplinar, ya que en la elaboración y en la práctica de todas las actividades nos basamos en la unificación del campo de las matemáticas y de las ciencias experimentales. De la misma manera que Van Del Linde (2007) defiende nos basamos en la interacción, el diálogo y la colaboración de ambos campos con el objetivo de que el alumnado aprenda contenidos propios del decreto 38/2008 (anexo I) en este espacio al aire libre.

Tras llevar a cabo la secuencia didáctica, en la sesión de evaluación, sobre todo en la tercera pregunta, nos dimos cuenta realmente de los beneficios que conlleva realizar actividades en los huertos escolares. Por ejemplo, el aumento de interés en la comida saludable, actitudes positivas hacia el entorno medioambiental, el aumento de las habilidades interpersonales y el aumento del aprendizaje sobre el poder de la naturaleza (Miller, 2007) porque los y las alumnas evaluadas eran capaces de cuidar una planta y explicaron que las verduras recolectadas en el

huerto escolar, y que se llevaban a su casa, les gustaba cocinarlas y comerlas. Del mismo modo, tal y como justificó Williams (2018), observamos beneficios en el rendimiento académico.

Mientras se llevaban a cabo las actividades hemos podido observar que han favorecido el desarrollo cognitivo del alumnado (Corraliza, Collado y Bethelmy, 2012), ya que han realizado sin ninguna dificultad las actividades propuestas. Además, como explican Botella, Hurtado y Cantó (2014) salir del aula e ir al huerto escolar ha favorecido la adquisición de información y la construcción de este nuevo aprendizaje. Por lo tanto, como afirman algunos autores como Louv (2008) y Sobel (1996) es de gran importancia trabajar en este medio exterior para fomentar entre la población, sobre todo la infantil, una vida saludable, bajas tasas de obesidad y la relación con la naturaleza.

No obstante, los docentes hemos encontrado algunas dificultades para poder realizar la secuencia didáctica tal y como habíamos planeado en un principio. El mayor de los problemas al que nos tuvimos que enfrentar fue el tiempo, porque inicialmente teníamos programado hacer cuatro sesiones, pero lo tuvimos que resumir en tres, ya que no disponíamos de tanto tiempo. Por lo tanto, para adaptar las actividades a este nuevo formato las cambiamos de orden. A pesar de todo el cambio de orden fue satisfactorio para el alumnado porque, entre otros aspectos, pudieron prestar más atención a las actividades relacionadas con la plantación de semillas.

Agradecimientos

Al CEIP Ángel Esteban, sobre todo al equipo docente de educación infantil y al equipo directivo por ayudarme a llevar a cabo la secuencia didáctica.

Referencias

Alcántara, J., Torres-Porras, J., Mora, M., Rubio, S. J., Arrebola, J. C. y Rodríguez, L. (2019). *¿Son los huertos escolares en educación infantil una realidad o una innovación educativa? Estudio de centros escolares de la ciudad de Córdoba (España) y*

propuestas de cambio desde la Universidad. Didáctica de las ciencias experimentales y sociales, 36, 79-96. DOI: 10.7203/DCES.36.12535.

Botella, A. M., Hurtado, A. y Cantó, J. (2014). *Las competencias básicas a través del huerto escolar: una propuesta de proyecto de innovación*. En J. J. Maquilón Sánchez y N. Orcajada Sánchez (Eds.). Investigación e innovación en formación del profesorado (pp. 173-182). Murcia: Servicio publicaciones Universidad de Murcia (Edit.um).

Corraliza J. A., Collado S. y Bethelmy L. (2012). *Nature as a Moderator of Stress in Urban Children*. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 38, 253-263.

DECRETO 38/2008, de 28 de marzo, del Consell, por el que se establece el currículo del segundo ciclo de la Educación Infantil en la Comunitat Valenciana. [2008/3838]

Edo, M., Marin, A., Sallan, J. G., & Lorenzo, I. V. (2017). La hoja en blanco en la representación matemática en infantil. In *Manual de Educación Infantil. Orientaciones y Recursos (0-6 años)* (pp. 1-17)

La obesidad entre los niños y los adolescentes se ha multiplicado por 10 en los cuatro últimos decenios. (2017, 11 octubre). Organización Mundial de la Salud. https://www.who.int/es/news/item/11-10-2017-tenfold-increase-in-childhood-and-adolescent-obesity-in-four-decades-new-study-by-imperial-college-london-and-who

Louv, R. (2008). *Last child in the woods: Saving our children from nature-deficit disorder*. Chapel Hill, NC:Algonquin Press.

Miller, D. L. (2007). *The Seeds of Learning: Young Children Develop Important Skills Through Their Gardening Activities at a Midwestern Early Education Program.* Applied Environmental Education & Communication, 6(1), 49–66. https://doi.org/10.1080/15330150701318828

Pimienta, J.H.(2011). *Secuencias didácticas: Aprendizaje y evaluación de competencias en educación superior.* Bordón, 63(1), 77-92.

Sobel, D. (1996). *Beyond ecophobia: Reclaiming the heart of nature education.* Great Barrington, MA: The Orion Society.

Van del Linde, G. (2007, Jul-Dic). *¿Por qué es importante la interdisciplinariedad en la educación superior? Cuadernos de Pedagogía Universitaria*, Año 4. No. 8. 11-13. Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, Rep. Domin.

Williams, D. (2018). *Garden-based education*. In Oxford Research Encyclopedia of Education. New York: Oxford University Press.

Anexo I

Cuestionario.
https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLScFE6_ywfB1aws3GAgjw0XKAvyr9Z7CGse1gSK93ZQoIRw4Ew/viewform?usp=pp_url

Presentación.
https://docs.google.com/presentation/u/0/d/13mGHObSfab5z6YYgqlwY4heFwbJ0phNqcoFdR0ohIkE/edit

Objetivos de la secuencia didáctica:

Objetivos de ciclo:

	Matemáticas	Ciencias naturales
Actividad 1	g) Iniciarse en las habilidades lógico-matemáticas, en la lectoescritura y en el movimiento, el gesto y el ritmo	b) Observar y explorar su entorno familiar, natural y social.
Actividad 2		
Actividad 3		
Actividad 4		
Actividad 5		
Actividad 6		
Actividad 7		

Objetivos de área II: El medio físico, natural, social y cultural:

	Matemáticas	Ciencias experimentales
Actividad 1		5. Explorar y observar su entorno familiar, social y natural, para la planificación y la ordenación de su acción en

		función de la información recibida o percibida. 7. Valorar la importancia del medio físico, natural, social y cultural, mediante la manifestación de actitudes de respeto y la intervención en su cuidado según sus posibilidades. 10. Descubrir aquellos elementos físicos, naturales, sociales y culturales que a través de TIC amplían el conocimiento del mundo al que pertenece.
Actividad 2	12. Iniciarse en las habilidades numéricas básicas, la noción de cantidad y la noción de orden de los objetos.	14. Identificar algunas de las propiedades más significativas de los elementos de su entorno inmediato y mediato estableciendo relaciones cualitativas y cuantitativas entre ellas que induzcan a organizar y comprender progresivamente el mundo en que vive.
Actividad 3	12. Iniciarse en las habilidades numéricas básicas, la noción de cantidad y la noción de orden de los objetos.	14. Identificar algunas de las propiedades más significativas de los elementos de su entorno inmediato y mediato

		estableciendo relaciones cualitativas y cuantitativas entre ellas que induzcan a organizar y comprender progresivamente el mundo en que vive.
Actividad 4		5. Explorar y observar su entorno familiar, social y natural, para la planificación y la ordenación de su acción en función de la información recibida o percibida. 7. Valorar la importancia del medio físico, natural, social y cultural, mediante la manifestación de actitudes de respeto y la intervención en su cuidado según sus posibilidades.
Actividad 5	11. Conocer, representar y nombrar a partir de la observación, descripción, manipulación y juego, los objetos de la vida cotidiana con formas geométricas planas: círculo, cuadrado, rectángulo y triángulo y formas geométricas de volumen: esfera y cubo. 12. Iniciarse en las habilidades	7. Valorar la importancia del medio físico, natural, social y cultural, mediante la manifestación de actitudes de respeto y la intervención en su cuidado según sus posibilidades.

	numéricas básicas, la noción de cantidad y la noción de orden de los objetos.	
Actividad 6		9. Mostrar interés y curiosidad por los cambios a los que están sometidos los elementos del entorno, para identificar algunos factores que influyen sobre ellos.
Actividad 7		5. Explorar y observar su entorno familiar, social y natural, para la planificación y la ordenación de su acción en función de la información recibida o percibida.

Contenidos de la secuencia didáctica:

Contenidos del área II: El medio físico, natural, social y cultural. Bloque 1: Medio físico: elementos, relaciones y medidas.

	Matemáticas	Ciencias naturales
Actividad 1	c) El gusto por explorar objetos y por actividades que impliquen poner en práctica conocimientos sobre las relaciones entre objetos.	d) La toma de conciencia de los cambios que se producen en los seres vivos. Aproximación al ciclo vital. g) La experimentación y el descubrimiento de la utilidad y aprovechamiento de animales, plantas y recursos naturales por parte de la sociedad y de los propios niñas y niños.
Actividad 2	b) La agrupación de objetos en colecciones atendiendo a sus propiedades y atributos.	c) La observación y exploración de animales y plantas de su entorno. i) El disfrute al realizar actividades en contacto con la naturaleza.
Actividad 3	d) El número cardinal y ordinal. e) La construcción de la serie numérica mediante la adición de la unidad. f) La representación gráfica de las colecciones de objetos mediante el número cardinal. La utilización de la serie numérica para contar elementos de la realidad	i) El disfrute al realizar actividades en contacto con la naturaleza.

	cotidiana.	
Actividad 4	a) Las propiedades y relaciones de objetos y colecciones: Color; Forma; Tamaño; Grosor; Textura; Semejanzas y diferencias; Pertenencia y no pertenencia. d) El descubrimiento de las nociones básicas de medida: longitud, tamaño, capacidad, peso y tiempo. j) El conocimiento de formas geométricas planas y de cuerpos geométricos. La adquisición de nociones básicas de orientación y situación en el espacio.	c) La observación y exploración de animales y plantas de su entorno. d) La toma de conciencia de los cambios que se producen en los seres vivos. Aproximación al ciclo vital. i) El disfrute al realizar actividades en contacto con la naturaleza.
Actividad 5	a) Las propiedades y relaciones de objetos y colecciones: Color; Forma; Tamaño; Grosor; Textura; Semejanzas y diferencias; Pertenencia y no pertenencia.	a) El conocimiento de las características generales de los seres vivos y materia inerte: semejanzas y diferencias. e) El desarrollo de la curiosidad, cuidado y respeto hacia los animales y plantas como primeras actitudes para la conservación del medio natural. i) El disfrute al realizar actividades en contacto con la naturaleza.

Actividad 6	d) El descubrimiento de las nociones básicas de medida: longitud, tamaño, capacidad, peso y tiempo.	a) El conocimiento de las características generales de los seres vivos y materia inerte: semejanzas y diferencias. d) La toma de conciencia de los cambios que se producen en los seres vivos. Aproximación al ciclo vital.
Actividad 7	a) Las propiedades y relaciones de objetos y colecciones: Color; Forma; Tamaño; Grosor; Textura; Semejanzas y diferencias; Pertenencia y no pertenencia. c) El gusto por explorar objetos y por actividades que impliquen poner en práctica conocimientos sobre las relaciones entre objetos.	c) La observación y exploración de animales y plantas de su entorno g) La experimentación y el descubrimiento de la utilidad y aprovechamiento de animales, plantas y recursos naturales por parte de la sociedad y de los propios niñas y niños.

CoC011 Conexiones entre las Matemáticas y el fútbol del siglo XXI

Diego Alonso Santamaría
elmatematicoquequisoserpivot@gmail.com
IES Arca Real (Valladolid)

Núcleo temático: Conexiones, Recursos para el aula.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

Las nuevas tecnologías han traído consigo una nueva forma de entender el deporte, mucho más ligada ahora a los datos y las estadísticas que a la visión subjetiva de los entrenadores o expertos.

Un gran ejemplo de ello es el fútbol, donde comienzan a utilizarse nuevas métricas para evaluar el desempeño de un jugador en el campo, como los *"xG"* o *goles esperados* que empiezan a aparecer cada vez con más frecuencia en las retransmisiones deportivas y videojuegos, o la tecnología del VAR que permite hallar fueras de juego con una precisión milimétrica.

El deporte es uno de los principales focos de interés del alumnado y, por tanto, puede ser una alternativa diferente para presentar los contenidos de la asignatura además de ser un elemento motivador para su estudio. En esta comunicación, llevaremos algunos de estos conceptos al aula.

Palabras clave: Deporte, Fútbol, Goles Esperados, Punto de Fuga, Fuera de Juego.

1. Introducción

Las nuevas tecnologías han revolucionado el mundo del deporte. Ahora, tanto deportistas como entrenadores cuentan con acceso a una gran cantidad de información para preparar partidos, mejorar como jugadores o evaluar al adversario. De la misma forma, el espectador de una retransmisión deportiva puede percatarse

de la gran cantidad de información que se le brinda, la mayoría de ellas relacionades con las matemáticas y, más en concreto, la estadística (porcentajes, estadísticas, visualizaciones de datos, ...).

Sin embargo, pese al nivel avanzado de estas tecnologías o estadísticas, todas ellas pueden ser comprendidas e interpretadas por el ciudadano de a pie y, llevándolo a nuestro terreno, por cualquier estudiante de la ESO. Lo que resulta extraordinario es que, en muchos casos, los jóvenes son capaces de entender esa información y generar opiniones a partir de ellas sin haberlo estudiado nunca en clase, bien porque se trata de contenidos de un nivel más elevado al de su edad o bien porque se prefiere dedicar tiempo a otro tipo de saberes.

Un claro ejemplo es el *FIFA 22*, el videojuego de fútbol por excelencia, el cual en su edición de este año ha optado por incorporar una gran cantidad de métricas, estadísticas que leen y entienden nuestros alumnos, y utilizan para conocer su desempeño en el juego y tomar decisiones a la hora de definir sus alineaciones o su forma de jugar.

En esta comunicación hablaremos de la conexión directa del fútbol con las matemáticas, de la importancia de la estadística y las nuevas tecnologías en este deporte y cómo entenderlas desde el punto de vista matemático, y lo llevaremos al aula con ejemplos de cómo introducir cualquier bloque del currículo a través de actividades relacionadas con el videojuego FIFA 22.

2. Fútbol, gráficas y funciones: los mapas de calor.

Las televisiones, así como el videojuego *FIFA 22*, han incorporado los mapas de calor a sus retransmisiones deportivas. Este tipo de representaciones nos permiten conocer la ocupación o zona de influencia del jugador o equipo en el campo a lo largo del partido.

Imagen 23:Mapa de calor, FIFA 22

2.1 Conexiones con las matemáticas: Estadística

Este tipo de representaciones no suelen trabajarse en el aula de matemáticas debido a su dificultad a la hora de representarse. Sin embargo, que un videojuego lo emplee nos muestra el dominio que el alumnado tiene de ciertos contenidos y que muchas veces nos pasa desapercibido.

2.2 Conexiones con las matemáticas: Geometría

¿Cómo obtienen los proveedores de datos la información para elaborar los mapas de calor?

Se realiza principalmente de dos formas: incorporando GPS en la indumentaria de los deportistas, o con cámaras que rodean el estadio y captan su posición en el campo. Relacionándolo con el currículo, hablamos de **ejes de coordenadas** y **coordenadas de puntos**.

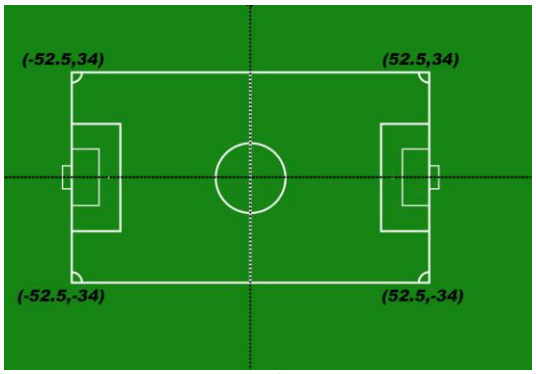
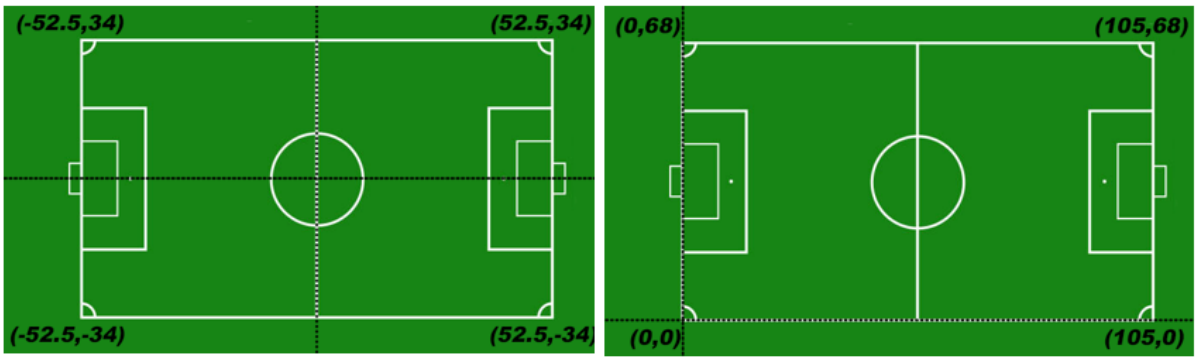


Imagen 24: Campo de fútbol con coordenadas

Tal vez un analista deportivo quiera utilizar la información de varios proveedores para enriquecer su estudio. Sin embargo, no todos los proveedores generan las coordenadas de un jugador de la misma forma. Conectamos con el currículo de matemáticas hablando de **ejes de coordenadas** y **cambios de base**:

Hay proveedores que toman el punto central como el origen de coordenadas, y hay otros que toman un córner, por lo que es necesario realizar una transformación previa a todos los datos:



$$(x, y) \rightarrow (x + 52.5, y + 34)$$

Imagen 25: Cambio de coordenadas

Una vez recopilados todos los datos, podríamos dividir el campo en celdas, y cada vez que un jugador pase por ellas sumar 1. De esta forma podremos representar su **mapa de calor** mediante una **escala de colores**.

Por cierto, ¿Te has fijado que el **FIFA** utiliza **hexágonos regulares** para dividir el todo el campo? Y es que es una de las tres formas que existen de **teselar el plano** mediante polígonos regulares (*no todo van a ser abejas*).

Imagen 26: Mapa de calor de FIFA 22 con una teselación hexagonal

3. Fútbol y probabilidad: los goles esperados

Con la llegada de las nuevas tecnologías, se han generado una gran cantidad de nuevas métricas para describir el juego de un equipo de una forma más objetiva. Entre ellas, podríamos destacar los *xG* o *goles esperados*.

3.1 Origen

Para saber el dominio en un partido de un determinado equipo, antiguamente uno podía observar el porcentaje de posesión o la cantidad de remates a portería. Un número alto significaría un gran dominio en el ataque. Sin embargo, esta estadística no permitía ninguna conclusión objetiva, pues no medía la calidad de las ocasiones. Un tiro desde larga distancia contabilizaba lo mismo que uno a tres metros de la meta. Existía la necesidad de nuevas estadísticas…

Por ese motivo, las casas de apuestas, y los clubes comenzaron a diseñar sus propios modelos matemáticos (así como muchos estadísticos enamorados de este deporte por puro entretenimiento).

3.2 Goles esperados: definición

Los *goles esperados*, *xG*, es una métrica que analiza la calidad de las ocasiones de gol, evaluando la probabilidad de anotar que tiene un futbolista.

Los *xG* de una ocasión pueden tomar valores entre 0 y 1. Cuanto mayor sea la probabilidad de anotar, mayor será el *xG*.

Así, por ejemplo, un tiro con 0,75*xG* significa que el 75% de los tiros que se han realizado en una situación similar han acabado en gol:

Ver ejemplo: https://www.youtube.com/watch?v=_vGhocyvKhA

3.3 Conexiones con las matemáticas: Probabilidad

Esto resulta un ejemplo perfecto de un **axioma de la probabilidad**:

$$0 \leq P(gol) \leq 1$$

donde 0 corresponde a un **suceso imposible** y 1 a un **suceso seguro**.

3.4 Variables de las que depende:

Así pues, un cabezazo escorado desde lejos tendrá un *xG* menor que un tiro a corta distancia desde una posición centrada.

¿Qué variables intervienen en el cálculo de los goles esperados?

- Distancia de la portería.
- El ángulo de tiro.
- ¿El jugador golpeó el balón con el pie o fue un cabezazo?
- ¿En qué situación de juego ocurrió? (Ej.: juego abierto, tiro libre directo, tiro de esquina, contraataque).

Para calcular esa probabilidad, se necesita tener todo un histórico de datos recopilados. Es por ello que los proveedores de datos suelen dar en cada partido valores de *xG* similares pero no iguales. Además, estas empresas intentan mejorar su modelo predictivo añadiendo variables a sus cálculos, por lo que suelen mostrar cifras similares pero no iguales:

- La posición del guardameta.

- La presión sobre el rematador.
- ...

3.5 ¿Para qué sirven los *xG*?

Los *xG* nos permiten inferir si los resultados conseguidos se deben a la suerte o desgracia de un equipo, o bien a la creación de buenas oportunidades.

Para un jugador, nos permite saber su eficacia de cara a puerta, siendo los mejores jugadores aquellos que anotan más goles de lo esperado por sus tiros. Un jugador con más goles que su *xG* podría significar un desempeño sobresaliente por su parte. En cambio, si su *xG* supera a sus goles podría significar una mala definición frente a la portería o una precipitación en la toma de decisiones.

Para un equipo, si sus resultados son malos de cara a puerta pero tienen un gran *xG*, podría asumirse que es fruto de una mala suerte en lugar de echar la culpa a jugadores o el entrenador (situaciones como estas son muy comunes al inicio de temporada).

3.5 Conexiones con el currículo: probabilidad

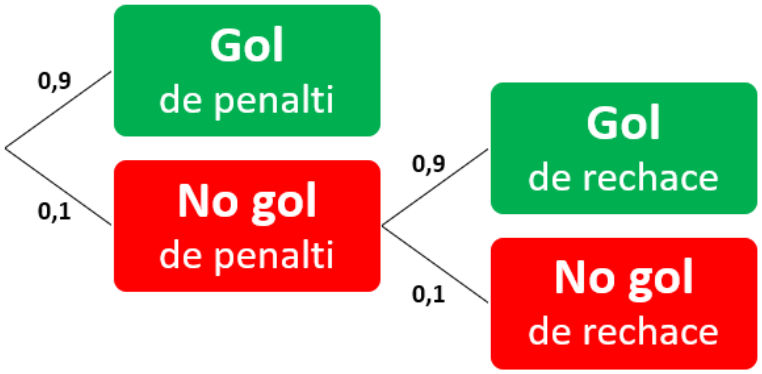
Una vez entendido qué son los *goles esperados*, podemos preguntarnos si el cálculo que realizan todos los proveedores de datos, o incluso los videojuegos, son matemáticamente correctos. Y la respuesta es sorprendente: algunos no. Para ello, vamos a utilizar un concepto básico de la probabilidad: la **probabilidad condicionada**. Veamos un ejemplo:

Ver vídeo https://youtu.be/j7gK1psUIK8

En el vídeo se observa una doble oportunidad de gol: el delantero dispara, el balón da al palo y le vuelve a caer a los pies, y vuelve a chutar para meter gol. Como puede observarse, el juego ha clasificado la acción con un *xG* de 1.8:

¿Pero puede anotarse más de un gol en una jugada de fútbol? La respuesta es claramente no, y el error se encuentra en que no han aplicado la probabilidad condicional. Hagámoslo nosotros matemáticamente bien (para ello,

simplifiquemos la situación pensando que cada tiro tiene una probabilidad de 0,9 y después lo matizaremos):



[43]

Aplicando la probabilidad condicionada, podemos afirmar que la probabilidad de anotar gol es:

$$xG = P(Gol) = P(Gol\ de\ penalti) + P\left({}^{Gol\ de\ rechace}/_{No\ gol\ de\ penalti}\right) = 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}99$$

En cambio, podemos suponer que lo que FIFA 2022 realiza erróneamente es sumar las probabilidades de cada ocasión:

$$xG = P(Gol) = P(Gol\ de\ penalti) + P(Gol\ de\ rechace) = 0{,}9 + 0{,}9 = 1{,}8$$

Un ejemplo perfecto de la conexión del currículo de Matemáticas y su aplicación al deporte y los videojuegos.

Nota: Los cálculos anteriores los simplificamos tomando un xG de 0,9 para cada tiro. Sin embargo, en la realidad se suele tomar un xG cercano a 0,75 porque entre todos los penaltis contabilizados a lo largo de la historia, se han marcado alrededor de un 75%. Este *xG* cercano a 0,75 también lo utiliza FIFA 22 cuando se lanza un penalti. Sin embargo, realizar el cálculo anterior con este *xG* tendría aún menos sentido, porque para llegar a 1,8 significa que a la segunda oportunidad la valora con una probabilidad mayor que 1, lo cual es imposible.

[43] El videojuego da un *xG* de 0,75 al lanzamiento de cada penalti, por lo que observando la variación de *xG* de toda la jugada podemos inferir que la segunda oportunidad también la valora con 0,75.

3.7 Otras métricas derivadas del xG

Como pincelada final de este punto, cabe citar la importancia de la estadística en el deporte, donde podemos encontrar una infinidad de métricas cada vez más difíciles de calcular, algunas de las cuales guardan relación con los *xG*:

- *xG por tiro*: define la eficiencia en la selección de remates.
- *xAS* o *asistencias esperadas*: probabilidad de que el pase final termine en gol.
- *xPts* o *puntos esperados*: puntos que se espera que consiga un equipo en función de los goles esperados.

4. Fútbol y geometría: el punto de fuga

Dejando atrás toda la avanzada tecnología de los proveedores de datos, en fútbol también se realiza el estudio de imágenes. Tal vez el ejemplo más conocido sea el estudio de los fueras de juego que realiza el *VAR* durante los partidos.

Imagen 27: el VAR estudiando un fuera de juego

Pese a la vistosidad de sus imágenes, con rectas que definen la posición de defensores y atacantes, todo ello se basa en un antiguo concepto geométrico: **el punto de fuga**.

4.1 El punto de fuga

El punto de fuga, en un sistema de proyección cónica, es el lugar geométrico en el que las proyecciones de las rectas paralelas a una dirección dada en el espacio, no paralelas al plano de proyección, convergen. Es un punto situado en el infinito.

Imagen 28: Ejemplo del punto de fuga

4.2 Conexiones: geometria, cine y arte

Este concepto matemático ha sido ampliamente utilizado en cine y arte:

Imagen 29: El punto de fuga en películas de Stanley Kubrick

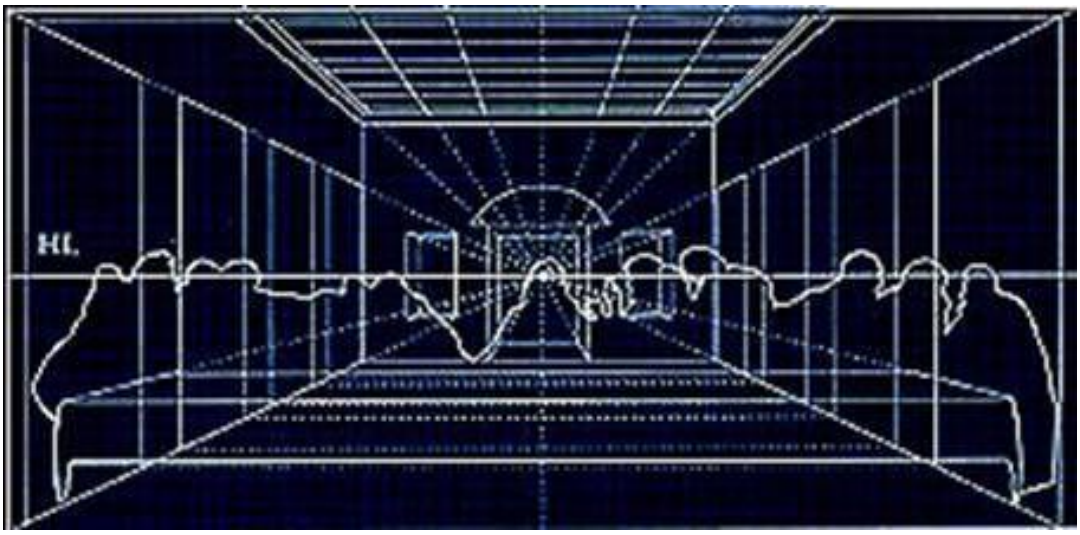


Imagen 30: El punto de fuga en La última cena

4.3 Experiencias en el aula: *Geogebra* y fútbol

Volviendo al fútbol, no es necesario poseer la tecnología del *VAR* para determinar un fuera de juego, sino que puede ser una experiencia muy motivante y

enriquecedora para llevar al aula, con la motivación que conlleva hablar de la jugada dudosa que definió el último partido del equipo de tu ciudad.

4.3.1 Introducción al punto de fuga con *Geogebra*

Para comenzar, podemos introducir el concepto de punto de fuga a los alumnos, pidiendo que busquen imágenes de edificios en ***Geogebra*** y tracen las rectas que en la realidad sean paralelas aunque no se vean así en la foto. De esta forma descubrirán que todas esas líneas se cortan en un único punto: el punto de fuga.

En un segundo paso, podemos pedir a los alumnos que busquen cuadros famosos donde el punto de fuga pueda estar presente, y en tal caso traten de hallarlo.

Imagen 31: Alumnos hallando el punto de fuga en fotografías

4.3.2 El punto de fuga en los campos de fútbol

Aproximémonos al fuera de juego, entendiendo de qué elementos del campo podemos extraer información. Para ello, pediremos que los alumnos busquen imágenes de un campo de fútbol famoso e intenten hallar puntos de fuga.

Imagen 32: Alumnos hallando el punto de fuga en un campo de fútbol

Rápidamente los estudiantes se dan cuenta de que, en el propio césped, hay multitud de **rectas paralelas**: las líneas de cal, el corte del césped, el larguero de las porterías, ... todas ellas son las que nos servirán para calcular el fuera de juego.

4.3.2 Cálculo de los fueras de juego con Geogebra

Por último, animaremos a los alumnos a ejercer de árbitros del *VAR* acompañándolos en los siguientes pasos:

1) Buscar la imagen de un fuera de juego dudoso (estas fotos suelen aparecer en los medios deportivos cada semana).
2) Pegar la imagen en *Geogebra* y trazar todas las rectas paralelas que ofrece el campo para hallar el punto de fuga.
3) Localizar la **proyección** en el suelo de la parte más adelantada del cuerpo del atacante (los brazos no cuentan), y unir con una recta ese punto con el punto de fuga.
4) Repetir este paso con la parte más retrasada del defensor que determine el fuera de juego.

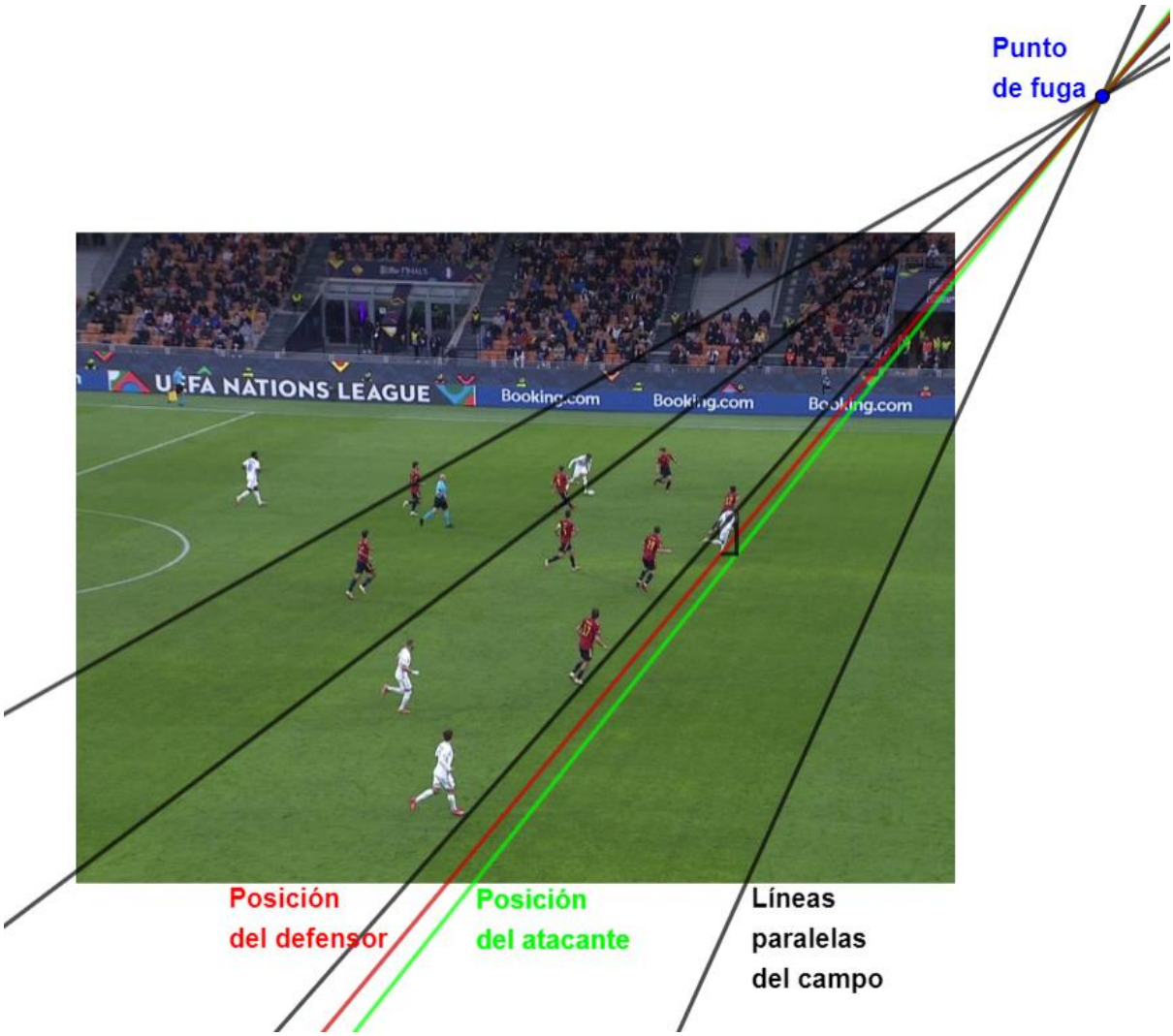


Imagen 33: Cálculo del fuera de juego con Geogebra

De esta manera, nuestros alumnos se habrán convertido en unos profesionales del *VAR*, habrán descubierto la importancia de las matemáticas en el fútbol y en la vida real, y sus conexiones con el arte.

Imagen 34: Alumnos hallando un fuera de juego

5 Conclusiones

El deporte es uno de los principales focos de interés de la sociedad actual, y como tal puede y debe ser aprovechado para despertar la atención del alumnado, resultando un gran elemento motivador capaz de mostrar la importancia y aplicaciones de las matemáticas a la vida real.

Referencias

Explicación de xG. (s. f.). FBref.com. Recuperado 29 de abril de 2022, de https://fbref.com/es/expected-goals-model-explained/

Pérez, D. (2021, 12 marzo). *¿Para qué sirve el indicador xG (Goles esperados) y cómo se calcula?* Objetivo Analista. Recuperado 29 de abril de 2022, de https://objetivoanalista.com/xg-goles-esperados/

Whitmore, J. (2021, 27 julio). *¿Qué son los goles esperados (xG)?* The Analyst. Recuperado 29 de abril de 2022, de https://theanalyst.com/eu/2021/06/que-son-los-goles-esperados-xg/

CoC014 Matemáticas en una lata: “Proyecto STEAM Cansat”

Alicia Prieto Martín
aprimar235@g.educaand.es
I.E.S. San Antonio (Huelva)

Núcleo temático: Conexiones y procesos.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

RESUMEN

Solemos afirmar que las matemáticas están en todas partes y, ya que este hecho se puede demostrar de infinitas formas, ¿por qué no hacerlo desde un satélite construido dentro de una lata?, o lo que es lo mismo, desde un CanSat.

En esta comunicación se muestra el trabajo realizado por alumnos de 4º de ESO, en la asignatura optativa de “Matemáticas por ordenador” del I.E.S. San Antonio, que han participado en el Proyecto STEAM de investigación aeroespacial CanSat. Para ello, hemos diseñado, programado y construido un satélite que se ha lanzado desde un cohete a un kilómetro de altura, midiendo la temperatura, presión y humedad durante todo el descenso. Conocer las matemáticas que sustentan y son la base de todo este trabajo es el objetivo de esta comunicación, ya que este hecho es, si cabe, tan fascinante o más como el propio proyecto CanSat.

Palabras clave: Matemáticas, Geometría, STEAM, CanSat, Programación.

1. Introducción: Matemáticas por ordenador.

Desde hace dos años, el I.E.S San Antonio, centro de Enseñanza Secundaria Obligatoria de Bollullos del Condado (Huelva), participa en los proyectos STEAM: Investigación Aeroespacial Aplicada al Aula y Computación y Robótica de la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

Además, desde el Departamento de Matemáticas, en este centro se oferta para los alumnos de 4º de E.S.O. la asignatura optativa llamada “Matemáticas por ordenador”, cuyo objetivo fundamental es acercar al alumnado una visión no sólo más práctica sino también mucho más tangible en la que la pregunta recurrente que todos los docentes de matemáticas hemos sufrido alguna vez: “¿Y eso para qué sirve?, no tiene ningún tipo de cabida.

Es por ello por lo que en este curso, desde esta asignatura y gracias a dichos proyectos, hemos participado y logrado quedar entre los cinco primeros premios de la comunidad autónoma de Andalucía en el Concurso Internacional CanSat organizado por ESERO (European Space Education Resource Office).

Ahora bien, ¿en qué consiste y cuál es el objetivo de este reto?

El desafío consiste en diseñar, programar y construir un pequeño satélite (de las dimensiones de una lata de refresco) para ser introducido en un cohete que sube a 1.000 metros de altura y desde ahí deja caer el satélite, el cuál, durante todo el lanzamiento y descenso, debe estar midiendo los valores de temperatura y presión. Además, también debe medir algún otro parámetro de interés científico como por ejemplo la humedad, o la radiación ultravioleta de la atmósfera.

Dicho desafío puede verse en detalle en el siguiente enlace:

https://esero.es/cansat/

Estos datos, deben ser recibidos en una estación de Tierra en tiempo real y una vez por segundo, a través del uso de la comunicación por radiofrecuencia.

Después de esto, la pregunta sería ¿y dónde están las matemáticas?

La respuesta es que realmente, las matemáticas están en todas las fases y partes de este proyecto, así que…¡veámoslo!

2. Matemáticas en el interior del CanSat: lógica y pensamiento computacional.

Como hemos mencionado en la introducción, el CanSat debe medir los valores de presión y temperatura. Para lograr este objetivo, usamos la fuente (European Space Agency, 2017). Nosotros además, decidimos medir el porcentaje de humedad, por su gran valor científico, ya que cuando el satélite llegue a la atmósfera de otro planeta, queremos saber si puede ser habitable o no y, para que esto ocurra, es necesario la presencia de vapor de agua, o matemáticamente hablando, el porcentaje de humedad. Para ello es necesario programar los sensores correspondientes correctamente. En este proceso, nos resultó de gran ayuda la siguiente referencia (O´Sullivan, 2019).

Para introducir a los alumnos al uso de la lógica computacional, como lenguaje de programación hemos usado Arduino, usando (Ribas, 2016) y (European Space Agency, 2018), ya que su versión por bloques, Arduino Blocks hace que comenzar a desarrollar este tipo de pensamiento sea mucho más intuitiva aún.

Aquí aparecen por tanto de forma natural y esencial las matemáticas, y no solo porque tal y como puede verse en la imagen de una parte de este código (se expondrá explicará al completo en la comunicación) se necesitan hacer operaciones matemáticas para calcular dichos parámetros, sino porque el hecho en sí de programar es una aplicación directa de la lógica matemática.

defcongps3 Arduino 1.8.19 (Windows Store 1.8.57.0)

Archivo Editar Programa Herramientas Ayuda

defcongps3

```
  Serial.print("Humedad: ");
  Serial.print(h);
  Serial.print(" %\t");
  Serial.print("Temperatura: ");
  Serial.print(t);
  Serial.print(" *C ");
  Serial.print(f);
  Serial.print(" *F\t");
  Serial.print("Índice de calor: ");
  Serial.print(hic);
  Serial.print(" *C ");
  Serial.print(hif);
  Serial.println(" *F");


float pressure = readPressure(A1);
    float millibars = pressure/100;

    Serial.println();
    Serial.print("Presion = ");
    Serial.print(pressure);
    Serial.println(" Pascales");
    Serial.print("Presion = ");
    Serial.print(millibars);
    Serial.println(" Milibares");
    delay(600);
}


float readPressure(int pin){
    int pressureValue = analogRead(pin);
    float pressure=((pressureValue/1024.0)+0.095)/0.000009;
    return pressure;
}
```

Imagen 1. Operaciones para el cálculo de la presión

Además, también se ha trabajado la interpretación de los resultados obtenidos, Por ejemplo, si en nuestra estación de tierra recibimos un valor del porcentaje de humedad del 3%, significa que prácticamente la cantidad de vapor de agua es inexistente y sin agua es imposible el desarrollo de vida.

De esta forma, el alumnado ha podido comprender la necesidad, el significado y la importancia del cálculo matemático en diferentes ámbitos científicos, como son, en este caso, la biología, la física y química y el medio ambiente.

Una vez visto el interior de nuestro proyecto, pasemos a la parte exterior, o, lo que es lo mismo, la estructura geométrica (carcasa) en la que tiene que colocarse el dispositivo.

3. Matemáticas en la carcasa del CanSat: Geometría con Tinkercad e impresión 3D.

Dentro de los criterios de evaluación de la asignatura de matemáticas, tanto en la enseñanza secundaria como en el bachillerato, se encuentra la comprensión de la geometría que podemos ver, es decir en 2 dimensiones y 3 dimensiones.

Sin embargo, en numerosas ocasiones, nos quedamos en el mundo plano de la pizarra al explicar y ver esta rama de las matemáticas en lugar de aprovechar al máximo el hecho de poder imaginar, diseñar, modelar y crear físicamente estos objetos geométricos.

En este proyecto, es esto precisamente esto lo que hemos querido llevar a cabo, ¿Cómo? Diseñando y creando una carcasa para nuestro CanSat usado la aplicación Tinkercad e imprimiendola posteriormente usando el programa Cura y a través de una impresora 3-D.

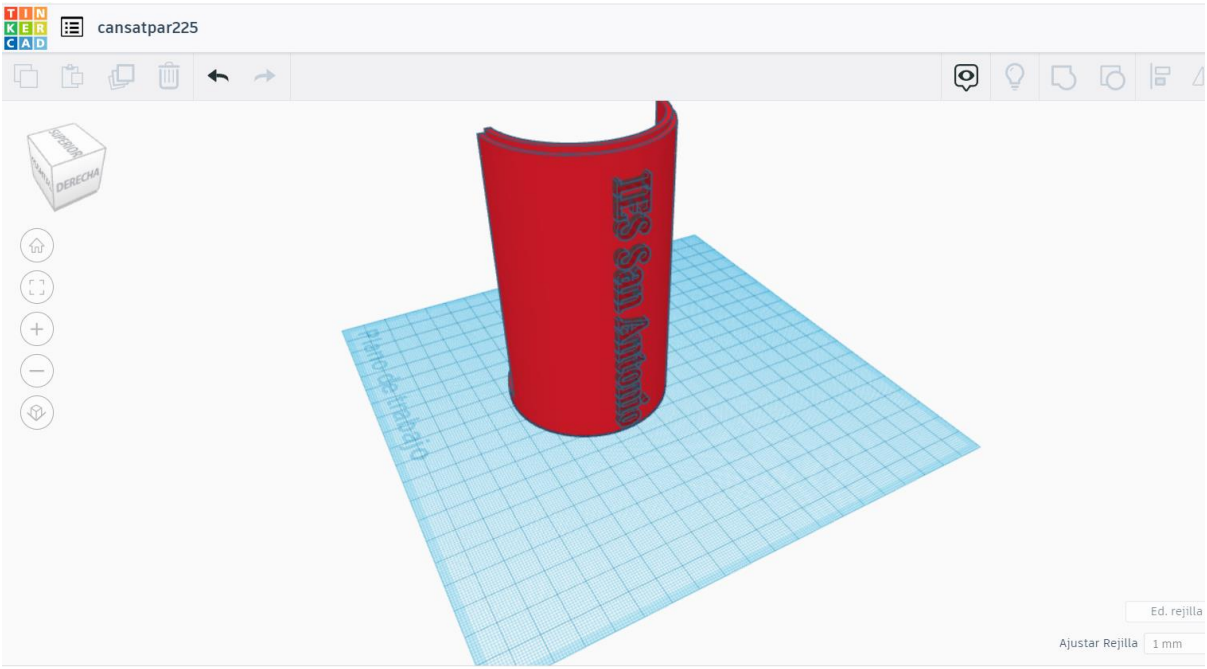


Imagen 2: Diseño de la carcasa en Tinkercad.

Para ello, partimos de la forma geométrica básica de una lata de refrescos, que no es otra que la de un cilindro, cuyas dimensiones máximas permitidas son 66 cm de radio y 115 cm de altura. A partir de ella, la dividimos en dos y la vamos creando los huecos y cavidades necesarias para que ambas partes encajen a la perfección. (Se hará una explicación práctica en la comunicación).

Una vez finalizado este objeto geométrico, para poder hacerlo real, lo exportamos como archivo .stl al programa cura, donde se puede apreciar como se imprimirá este.

Por último, exportamos el archivo de extensión .gcode a la impresora 3D Ender Creality y logramos hacer real nuestra creación, tal y como puede visualizarse en la siguiente imagen.

Imagen 3: Impresión de la carcasa

Por tanto, gracias a este proceso, el alumnado ha desarrollado su visión espacial, así como las distintas perspectivas, ha usado y modificado formas geométricas simples para lograr obtener una más compleja a partir de la unión de estas, logrando hacer real un objeto imaginado por ellos mismos.

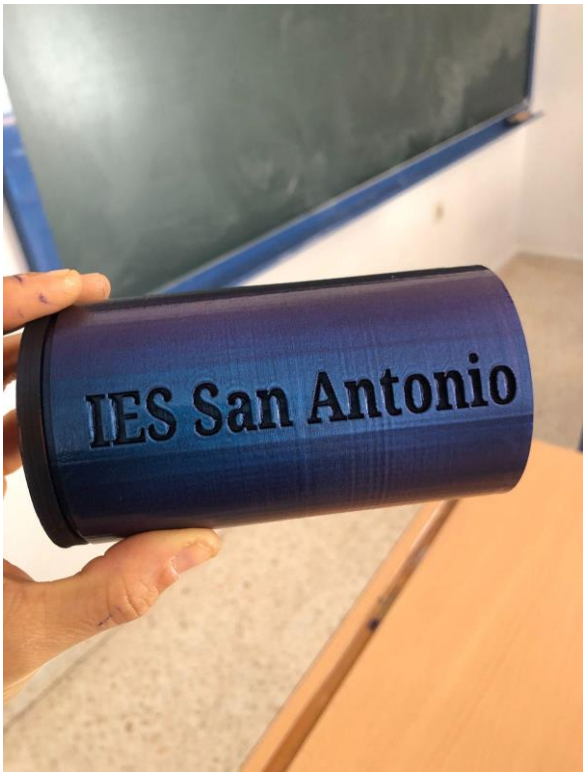


Imagen 4: Carcasa del CanSat

4. Matemáticas en el lanzamiento del CanSat: Cálculo de las dimensiones del paracaídas más apropiado.

Una vez que tuvimos la carcasa lista, el siguiente paso era construir el paracaídas más apropiado para que una vez que el cohete soltara el CanSat, este fuera descendiendo a una velocidad de entre 8 y 11 m/s.

Para ello, primero hay que elegir entre todas las formas geométricas posibles (circular, rectangular, en cruz, hexagonal, etc) la que debe ser más apropiada. Tras un estudio de propiedades geométricas de todas estas figuras y leyendo (European

Space Agency, 2018), decidimos que la más apropiada es el hexágono (este resultado se detallará en la comunicación)

Aquí nos encontramos por tanto con un problema en el que hay que igualar fuerzas. Por un lado, tenemos la fuerza que empuja el Cansat hacía la tierra, haciendo que este caiga en caída libre, es decir, su masa (340 gramos) por la gravedad. Para contrarrestar esta fuerza, tenemos que usar el paracaídas (considerando el coeficiente de rozamiento de éste) y la densidad del aire.

Ahora bien, para la correcta resolución de este problema, hay que resolver un sistema de ecuaciones y usar resultados como el teorema de Pitágoras y las propiedades geométricas del hexágono regular, como por ejemplo, que su lado es igual a su radio. Como además tenemos un límite superior y otro inferior de velocidad permitida, tenemos que resolverlo para cada una de estas, obteniendo así los valores del tamaño máximo y mínimo del lado del paracaídas, como puede verse en la siguiente ilustración donde se muestran en detalle todos los cálculos que realizó uno de nuestros alumnos.

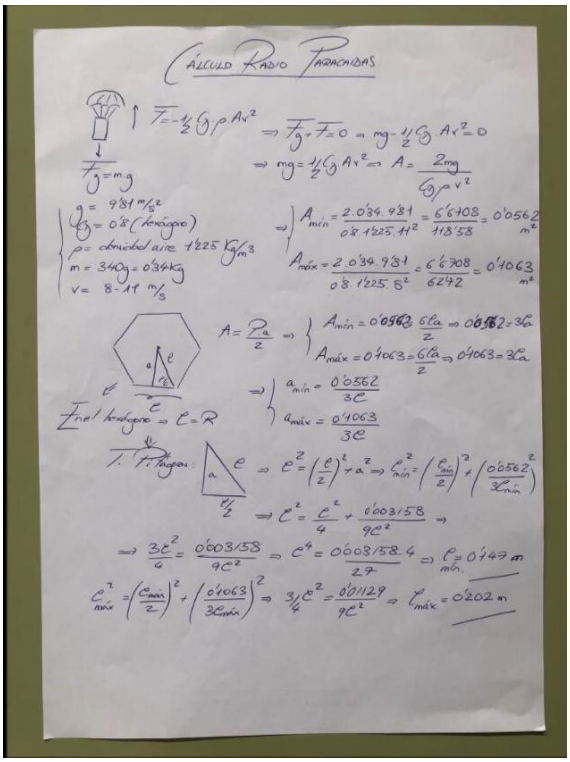


Imagen 5: Cálculos diseño paracaídas

Las siguientes imágenes muestran el CanSat con su paracaídas ya colocado y fijado a él.

Imagen 6: Paracaídas hexagonal

Por tanto, de nuevo nuestros alumnos concluyeron que las matemáticas son la clave del diseño y construcción del paracaídas más apropiado, al menos de forma teórica, pero, ¿qué sucederá en la práctica?

5. Matemáticas y éxito: ¿Una relación directa?

Una vez finalizado este proyecto, nos comunicaron que estábamos entre los diez elegidos para la competición regional de Andalucía, que sería celebrada en Córdoba el 23 de abril.

Por tanto, nuestro CanSat iba a ser finalmente lanzado de verdad desde un cohete a un kilómetro de altura y podríamos comprobar, si habíamos realizado todo nuestro trabajo de forma correcta o no. O lo que es lo mismo, si las matemáticas funcionarían de verdad o por el contrario no.

Imagen 7: CanSat listo para el lanzamiento

¿Qué fue lo que sucedió?

Pues que nuestro Cansat cayó a una velocidad correcta (unos 9 m/s), midió todos los parámetros durante todo el descenso y además aterrizó en el sitio que habíamos previsto de forma exitosa (a unos 300 metros del punto desde el que se lanzó) sin sufrir ningún tipo de daño en ninguna de sus partes.

En los siguientes enlaces pueden visualizarse vídeos con dicho lanzamiento y nuestra recepción de los datos durante éste:

https://www.instagram.com/p/CcsMsu0A6nQ/

https://www.instagram.com/p/CcsKopAgnMR/

Además, gracias al módulo GPS que también le programamos, recibimos las coordenadas geográficas (latitud y longitud) exactas del lugar donde este se encontraba. Por último, mostramos en la siguiente imagen las coordenadas de su lugar de aterrizaje.

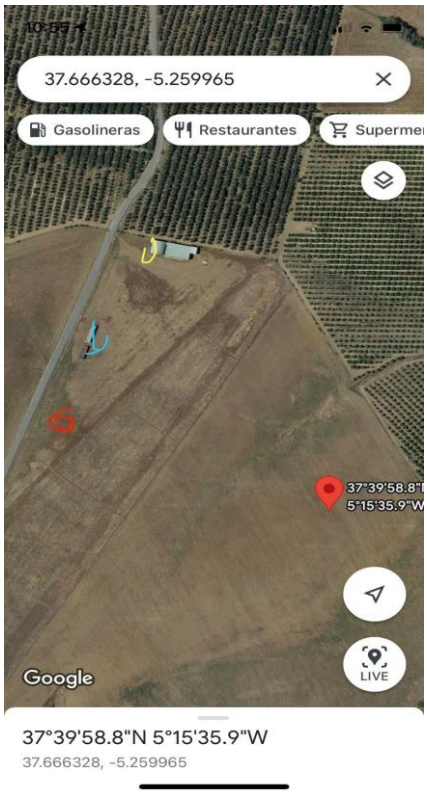


Imagen 8: Coordenadas aterrizaje

Finalmente, resultamos entre los cinco primeros clasificados de la provincia. Pero mucho más allá de la enorme alegría de este hecho, la mayor satisfacción fue ver las caras de nuestro alumnado cuando comprobaron que todo sucedió y funcionó tal y como pronosticaban las matemáticas.

Y es que, usar las matemáticas, en todas sus distintas ramas, para aplicarlas en cualquier otro ámbito científico y en la vida en general, es, sin ninguna duda, además de fascinante, garantía de éxito.

Transmitir este hecho a nuestro alumnado es totalmente esencial en nuestra profesión.

Referencias

European Space Agency (2018) *Meet Arduino!*

https://esero.es/wp-content/uploads/2019/10/T04.1_Meet_Arduino_C.pdf

European Space Agency (2017) *Getting started with CanSat.*

https://esero.es/wp-content/uploads/2019/10/T08_Getting_Started_with_CanSat.pdf

European Space Agency (2018) *Design your parachute.*

https://esero.es/wp-content/uploads/2019/10/T10_Parachute_Design.pdf

O´ Sullivan, R. (2019). CanSat kit - *User´s manual.*

https://esero.ie/wp-content/uploads/2018/12/CanSat-UserManual-2019.pdf

Ribas Lequerica, J. (2016). *Arduino para jóvenes y no tan jóvenes.* Editorial Anaya.

CoC015 Midiendo edificios del Mundo: Google Earth para Enseñar Geometría

Mª Luisa Cuadrado Sáez
luisa.cuadrado7@gmail.com

Naiara Izaskun Arteta De La Hoz
naiara.arteta@mascamarena.com

Núcleo temático: Conexiones, Procesos.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

Es habitual el uso de diferentes medios tecnológicos para la enseñanza de las figuras en el espacio. Pero ¿es capaz el alumnado de reconocer las figuras de su entorno? ¿Sabría estimar medidas de edificios y analizar las figuras que los componen?

En esta comunicación se pretende mostrar los detalles de una experiencia realizada en un aula de secundaria, en la que el uso de la herramienta de Google Earth, junto con una metodología tecnocooperativa, nos ha permitido desarrollar el contenido de geometría tridimensional.

Durante la comunicación se explicará cuál fue la experiencia en el aula y el desarrollo del proyecto, cuyo objetivo final consistía en que el alumnado analizara las características de un edificio singular del mundo, estimando su área y volumen, así como estableciendo si su forma tiene o no relación con el entorno y el impacto medioambiental que ha podido producir su construcción.

Palabras clave: Medida, Modelización, Estimación, ODS, Tecnocooperativo.

1. Motivación

Dentro de los cinco sentidos matemáticos que establece la LOMLOE (2022) encontramos el sentido espacial y el sentido de la medida. Tal y como se define en el documento *Bases para la elaboración currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria* elaborado por Comité Matemático Español (CEMAT, 2022), el sentido espacial se refiere a las capacidades de un individuo para trabajar e interactuar en un entorno amplio, elaborar o descubrir imágenes de formas y figuras, clasificarlas, relacionarlas y razonar con ellas. Por otra parte, si hablamos del sentido de la medida, hemos de referirnos a la capacidad que tiene el individuo que entiende y elige las unidades adecuadas para estimar, medir y comparar atributos y utiliza las herramientas adecuadas para realizar mediciones (CEMAT, 2022).

En esta línea, podemos encontrar muchas propuestas didácticas que permitan al alumnado trabajar ambos sentidos, pero atendiendo a las directrices descritas por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), se debe fomentar que el estudiantado tenga la oportunidad de experimentar las matemáticas en su contexto (NCTM, 2000). Y qué mejor contexto que atender a los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) de la Agenda 20/30, en concreto el ODS 11, Ciudades y Comunidades sostenibles, en el que el alumnado pueda conocer los principios básicos de la planificación y construcción sostenible, y pueda identificar las oportunidades para volver su área más sostenible e inclusiva, además de pronunciarse a favor o en contra de decisiones que se tomen para su comunidad. (Rieckmann, 2017)

Por todo esto, se ha diseñado una propuesta didáctica que trabaja los sentidos previamente mencionados en el contexto del análisis de la sostenibilidad de los edificios del mundo enmarcado. Además, para trabajar el sentido socioafectivo (LOMLOE, 2022), la metodología de trabajo será el de proyecto tecnocooperativo que mezcla el uso de la tecnología con dinámicas cooperativas (Cuadrado, 2017).

2. Desarrollo del proyecto

El proyecto se planteó para el curso de 3º ESO, pudiéndose extrapolar a cursos posteriores. Para el desarrollo de las tareas se utilizaron dispositivos móviles (iPads) en los que, previamente, se había instalado la App Google Earth, aunque también cabe la posibilidad de usar ordenadores tradicionales, pero dadas las dinámicas de trabajo propuestas, se prefirió mantener al grupo-clase en su aula. Los dispositivos sirvieron para poder registrar los procesos de trabajo usando una hoja de documento compartido, creando un *"Informe de trabajo*" que se rellenaba conjuntamente por cada uno de los equipos. Se trabajó durante 8 o 9 sesiones lectivas que constituyeron las diferentes fases del proyecto.

2.1. Fase 0: Actividad Motivación

Antes de comenzar la unidad se realizó una actividad de motivación previa, en forma de preguntas de indagación. Las preguntas planteadas fueron: ¿La forma geométrica de un edificio depende de dónde esté ubicado? ¿Y sus medidas? ¿Se pueden construir edificaciones en cualquier lugar? ¿Por qué?

Una vez realizadas dichas preguntas y debatir en gran grupo sobre ellas, se explicó qué es la agenda 20/30 y, en concreto, el ODS 11, indicando cuáles son las metas que propone la ONU para el 2030. Para completar la actividad se mostraron diferentes noticias sobre casos de edificios construidos de manera ilegal y que supusieron un gran impacto, como el Hotel de la playa de Algarrobico en Almería (Imagen 1).

Imagen 1: Hotel playa Algarrobico extraída de El Diario.es

2.2. Fase 1: Actividades Desarrollo del contenido

Una vez acabada la sesión inicial de motivación, se procedió a explicar el contenido correspondiente a geometría tridimensional, tanto áreas como volúmenes, pasando después a la fase activa del proyecto.

2.2.1. Mediciones y estimaciones con Google Earth

Dentro de estas sesiones de transición más tradicionales, se mostraron diferentes construcciones como Iglús, Tepees (Imagen 2), etc. Se analizó su estructura, identificando de qué figura se trata, además de calcular su área y su volumen.

Imagen 2: Teppe tradicional. First Nation Encapment. Heritage Park (Calgary, Canadá)

En este proceso de cálculo, se explicó el uso de la App Google Earth y su herramienta Medir (Ver imagen 3), lo que permitió que el alumnado reflexionara si es posible hallar el área usando únicamente esta herramienta.

Imagen 3: Proceso de medición con Google Earth.

Como se observa en la Imagen 3, la herramienta permite calcular solo la vista superior, pero no la altura. En ese momento y trabajando en equipos, con la estructura cooperativa cabezas numeradas (Kagan, 1994), se les propuso cómo estimar la altura. Para ello, se les sugirió que usaran algunas de las imágenes que Google Earth ofrece del lugar y que son realizadas por usuarios, en dichas imágenes aparecían objetos, a priori, con medidas conocidas.

Los diferentes equipos realizaron diferentes propuestas, entre ellas, como se puede observar en la Imagen 4, se puede estimar la altura empleando la altura media de una persona y suponiendo que ha de estar agachada para entrar. En ese momento, surgieron reflexiones sobre qué es estimar, la fiabilidad de las mediciones y la validez de las mismas en diferentes contextos.

Imagen 4: Imagen de un usuario proporcionada por Google Earth.

El uso de edificios para realizar ejemplos de cálculo del área y el volumen no solo daba contexto a la tarea, sino que el análisis de sus medidas permitió plantear tareas más enriquecidas. Una de estas tareas fue reflexionar sobre qué mediciones tomar, qué tipo de poliedro era y cuáles serían las mínimas medidas necesarias para hallar el área y volumen.

2.3 Fase 2: Desarrollo informe. Proyecto

Una vez desarrollado el contenido teórico, cada equipo comenzó con la redacción de su informe de trabajo. Dado que la clase se estructura de manera cooperativa, no hubo que realizar ninguna modificación a nivel de aula. Se les compartió por medio de Google Drive un único documento para rellenar a cada equipo. En dicho

documento aparecían tanto las preguntas que debían contestar, los roles asignados, así como la rúbrica de evaluación. Cada Informe fue el producto final evaluado.

2.3.1 Distribución de roles

Dentro de un proyecto tecnocooperativo, es muy importante la asignación de roles para que la carga de trabajo se vea compensada (Cuadrado, 2017). Por esta razón, se añadió al Informe una tabla. En ella se indicaba, en cada uno de los días, quién realizaría cada pregunta, puesto que se alternaban preguntas individuales con preguntas por parejas e incluso consenso de equipos. Para que recayese en todo el equipo la responsabilidad de que el Informe sea correcto, todas las preguntas se revisaban por cada miembro haciendo sugerencias de modificación, trabajando así la interdependencia positiva y responsabilidad individual (Kagan,1997).

NOMBRE	DÍA 1: DISEÑO Y PLAN DE ACCIÓN		DÍA 2 y 3: MEDICIONES Y CÁLCULOS			DÍA 4: REFLEXIONES	
	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 5	Pregunta 6-9	Pregunta 10-13
Alumna/o 1	Añade su imagen y justifica por qué	b) Indica los tipos de poliedros que son	PAREJA A a) Indica las fórmulas para el ÁREA y las medidas que se necesitarán	PAREJA C Hace las mediciones + Escribe CONSENSO	Calcula y escribe el área y volúmen	Responde 6) FIABILIDAD	Responde 10) Estética y matemáticas
Alumna/o 2	Añade su imagen y justifica por qué	c) Realiza un boceto	PAREJA B b) Indica fórmulas para el VOLUMEN las medidas que se necesitarán	PAREJA D Rellena las medidas que le ha dado su pareja	Calcula y escribe el área y volúmen	Responde 7) FORMA	Responde 11) Impacto medioambiental
Alumna/o 3	Añade su imagen y justifica por qué	a) Escribe por qué se ha elegido ese edificio	PAREJA A a) Indica las fórmulas para el ÁREA y las medidas que se necesitarán.	PAREJA D Hace las mediciones	Calcula y escribe el área y volúmen. Escribe CONSENSO	Responde 8) LUGAR	Responde 12) Sostenibilidad
Alumna/o 4	Añade su imagen y justifica por qué	d) Busca información añadida sobre el edificio	PAREJA B b) Indica fórmulas para el VOLUMEN las medidas que se necesitarán.	PAREJA C Rellena las medidas que le ha dado su pareja.	Calcula y escribe el área y volúmen	Responde 9) Estética arquitectónica	Responde 13) Mejoras.

Imagen 5: Tabla distribución roles.

2.2.3 Día 1: Diseño y plan de acción

Esta primera parte de la redacción del Informe tenía como objetivo fundamental la elección del edificio y el análisis de las formas geométricas que lo componían. Para ello, cada persona individualmente presentaba en el documento el edificio elegido y redactaba los argumentos por los cuáles lo elegía, adjuntando imágenes del mismo. Después, el equipo consensuaba cuál de los cuatro edificios se escogía para hacer el Informe.

La gran mayoría de equipos escogió edificios compuestos por pocas figuras y con formas muy reconocibles a primera vista, pirámides, ortoedros, etc. Además, gracias a los “viajes virtuales” con Google Earth había edificios de todas partes del mundo. Algunos se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 1: Tabla distribución roles.

Una vez elegido el edificio, se distribuyeron diferentes tareas para cada persona del equipo. El objetivo era que se conociesen las características principales del edificio, por lo que se pidió lo siguiente:

- Justificar el porqué de la elección del edificio.
- Hacer un boceto a mano alzada.
- Reconocer las figuras que componen el edificio y los nombres de las mismas.
- Ampliación sobre algún dato extra del edificio, como la ubicación, construcción, historia, ...

Cabe destacar que, en esta fase, la parte de la identificación de las figuras era una de las más complicadas. El alumnado tuvo dificultades, sobre todo, en los edificios con figuras compuestas, ya que, en ocasiones, no llegaban a un consenso de cómo partirlo para obtener figuras más sencillas.

Al terminar este primer día, se revisaron todos los informes haciendo anotaciones sobre los mismos con indicaciones sobre alguna mejora en cuanto a cómo dividir el edificio en figuras más sencillas. Evitando con esto que arrastraran el error en los días posteriores.

2.2.4 Día 2 y 3: Mediciones y cálculos

En los días consecutivos, en cada equipo se trabajó por parejas alternas y se finalizó con una parte individual, siempre estableciendo consensos por cada parte.

En la primera parte de la sesión, cada pareja tenía un rol diferente. Una de ellas se encargó de seleccionar las fórmulas correspondientes que se necesitarían para hallar el área. Y, además, indicaron las medidas necesarias que se deberían tomar en el edificio. La otra pareja haría lo mismo, pero haciendo referencia al volumen.

En la segunda parte de la sesión, se cambiaban las parejas. En esta fase se realizaron las mediciones utilizando Google Earth para medir en planta y se usaron diferentes métodos para las estimaciones de la altura.

Sorprendentemente, los grupos escogieron gran variedad de métodos para las estimaciones de las alturas. Normalmente, emplearon los métodos usados en clase como el de estimar la altura contando pisos, con la altura media de una persona (buscando los datos de la altura media del país del edificio), con la altura de un vehículo, etc.

Algunos de los métodos carecían de precisión como, por ejemplo, estimar la altura usando un árbol (ver tabla 2). Recibieron feedback durante la sesión para que evitaran dichos errores.

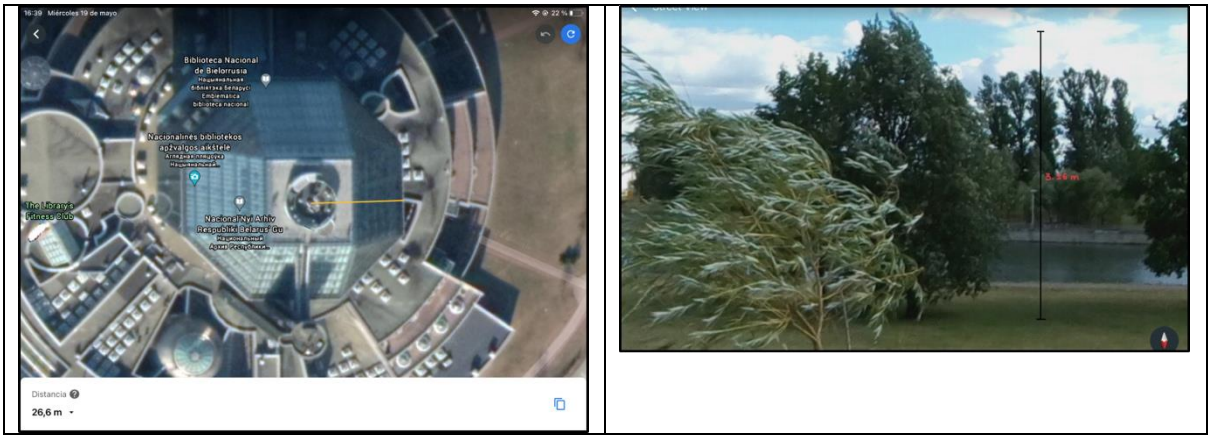


Tabla 2: Estimación por medio de árbol

Como parte final de la actividad, consensuaron las medidas tomadas y calcularon de manera individual el área y el volumen. Estos cálculos y la representación de dicha figura debían quedar reflejados en el Informe. Sorprendentemente, gran parte del alumnado utilizó el software de geometría dinámica Geogebra (Imagen 6) a pesar de no estar especificado en la rúbrica de evaluación.

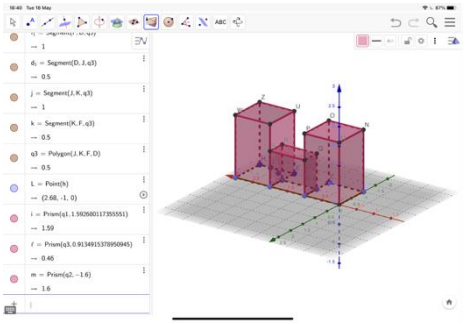


Imagen 6: Representación en Geogebra.

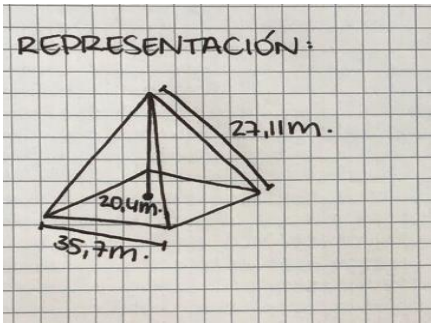


Imagen 7: Representación a bolígrafo.

Analizando los informes, posteriormente, pudimos observar que, en algunos equipos, al responder la pregunta individual del cálculo del área y volumen, simplemente, repitieron los cálculos de uno de los miembros del equipo, en lugar de realizar sus propios cálculos. Este comportamiento se penalizó en la calificación final.

Añadir, además, que los equipos que se escogieron edificios más complejos tuvieron grandes dificultades para averiguar el área y el volumen.

Cabe destacar que, en general, para hallar el área y el volumen del edificio, el alumnado no empleaba únicamente la fórmula. El contexto le obligaba a aplicar, de manera natural, el teorema de Pitágoras y el teorema de Thales, tanto para las medidas indirectas, como para realizar dichos cálculos.

2.2.5 Día 4: Reflexiones

En esta última sesión, cada uno de los miembros del equipo respondió a diferentes preguntas, haciendo referencia a tres grandes bloques: la visión geométrica, la visión estética y la visión de sostenibilidad. En cuanto a la visión geométrica, debían analizar si las medidas tomadas eran fiables, además de si el área y el volumen tenían relación con la forma del edificio. En la parte estética, observaban si el edificio correspondía a alguna corriente arquitectónica y si las matemáticas añadían algo de belleza a su estética. En las preguntas finales, se reflexionaba sobre el impacto medioambiental que había producido la construcción de dicho edificio, si éste cuenta con alguna característica que lo haga más sostenible y, por último, si se podría realizar alguna mejora para aminorar su impacto.

Las contestaciones que reflejaron en los Informes carecían de profundidad y obligaron a completar la actividad con una reflexión en gran grupo. Esto dio pie a que el alumnado compartiese el análisis de sus edificios y enlazáramos con los objetivos de desarrollo sostenible.

3. Conclusiones

La consecución del proyecto no solo ha permitido ampliar los conocimientos en geometría, sino abordar diferentes aspectos como la sostenibilidad y la estética arquitectónica. En su desarrollo, la tecnología ha tenido un papel fundamental, permitiendo abordar el cálculo de área y volúmenes de una manera más contextualizada. Además, ha dado la posibilidad de trabajar las estimaciones y la fiabilidad de dichos cálculos. Esto ha llevado a que el alumnado logre asimilar los contenidos de geometría de una manera más significativa. Por otra parte, trabajar de manera tecnocooperativa, ha fomentado la interacción mejorando el clima en el aula.

Referencias

Comité Español de Matemáticas (CEMat). (2021, mayo). Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria. Recuperado de https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf

Cuadrado, M. L. (2017). VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Aprendiendo Matemáticas de Manera "Tecnocooperativa". (p.461–469). Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/21994/1/Cuadrado2017Aprendiendo.pdf

Kagan, Dr. S & Kagan, M. (1994). Kagan Cooperative Learning. San Clemente, California: Kagan.

N. C. T. M. (2003). Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: SAEM Thales.

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 76*, de 30 de marzo de 2022, 1–198. Recuperado de https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con

Rieckmann, M. (2017). Educación para los Objetivos de Desarrollo Sostenible: objetivos de aprendizaje (p.32–33). UNESCO Publishing. Recuperado de https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000252423.locale=es

CoC018 Una experiencia con BlocksCAD para el desarrollo del pensamiento computacional en alumnado con talento matemático

Juan Miguel Ribera Puchades
juan-miguel.ribera@unirioja.es
Universidad de La Rioja

Lucía Rotger García
lucia.rotger@unirioja.es
Universidad de La Rioja

Núcleo temático: Conexiones, Recursos para el aula.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (Grado en Matemáticas y Máster en Formación al Profesorado).

RESUMEN

La introducción del pensamiento computacional y la facilidad de acceso a los dispositivos móviles hacen patente la necesidad de buscar alternativas para la generación de conexiones entre el área de las matemáticas y la computación para la mejora en las habilidades de visualización en la resolución de problemas de geometría. Por ello, el objetivo de esta comunicación es el de presentar una experiencia del uso de la herramienta BlocksCAD como herramienta para el planteamiento de problemas de geometría tridimensional con alumnado que presenta altas capacidades matemáticas. Las posibilidades que ofrece BlocksCAD para el planteamiento de hipótesis y su evaluación la convierten en una herramienta de utilidad para este tipo de alumnado en el que destaca la creatividad y los razonamientos visuales y algebraicos. Todo ello, con el interés de mejorar las habilidades de visualización en geometría tridimensional desde una perspectiva STEAM.

Palabras clave: BlocksCAD, Geometría Tridimensional, Resolución de Problemas, Alta Capacidad Matemática, Pensamiento Computacional.

1. Introducción

El pensamiento computacional es el proceso que permite formular problemas de forma que el procedimiento de resolución pueda ser representado como una secuencia ordenada de pasos y algoritmos (Aho, 2012). De esta definición se desprende una estrecha relación entre el pensamiento computacional y la resolución de problemas en matemáticas. De hecho, así se menciona en numerosas ocasiones dentro de las novedades introducidas en el Real Decreto 217/2022, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Así, se pueden encontrar los principios del pensamiento computacional en la organización de los datos de un problema, en su descomposición en retos más simples, en el reconocimiento de patrones dentro de un conjunto de datos asociados, en la creación de algoritmos eficientes para la resolución de problemas o en la modelización de situaciones que permitan dar respuesta de forma eficaz a problemas de la vida cotidiana. Es en este último punto donde el pensamiento computacional conecta, en concreto, con las habilidades de visualización, una destreza clave en el alumnado con talento matemático para la resolución de problemas de matemáticas.

Los programas de enriquecimiento curricular en matemáticas, como el programa Estalmat, proporcionan al alumnado con talento matemático la posibilidad de profundizar en contenidos y destrezas matemáticas que pueden ser de su interés. Además, este alumnado presenta habilidades más desarrolladas para la resolución de problemas de matemáticas, el cálculo o la geometría (Gutiérrez y Jaime, 2013). En concreto, para la resolución de problemas geométricos, la visualización espacial es una competencia clave (Ramírez, 2012). Como menciona Duval (1998), la visualización también es uno de los tres tipos de procesos cognitivos que aparecen implicados en la resolución de tareas geométricas, junto con la construcción de herramientas y el razonamiento. Por todo, esto, surge la necesidad de buscar herramientas tecnológicas que nos posibiliten modelizar el mundo tridimensional que nos rodea y que, a su vez, mejoren las destrezas en resolución de problemas de geometría.

En los últimos años el programa de geometría dinámica Geogebra ha dado lugar a recursos educativos que han abarcado todas las áreas de la enseñanza de la matemática en diferentes niveles educativos (MatesGG, 2021). Sin embargo, existe otro tipo de herramientas específicas para el diseño de objetos tridimensionales que presentan características diferentes a Geogebra; como por ejemplo, la posibilidad de realizar operaciones lógicas de objetos geométricos tridimensionales sólidos o el diseño paramétrico que permite generar formas geométricas complejas como fractales y otros objetos que incluyan elementos recursivos. Se entiende por diseño paramétrico al uso de parámetros para definir una forma geométrica a partir de elementos asociados a la computación; por ejemplo, bucles, condiciones y funciones (Monedero, 2000). Además, estas funcionalidades que disponen estas herramientas alternativas permiten relacionar los contenidos de geometría con algunas de sus aplicaciones en el mundo laboral claves en la industria de la fabricación 3D o en el diseño industrial. Aun así, algunas de estas herramientas alternativas son, o bien de pago (AutoCAD, Rhinoceros, Solidworks) o bien necesitan de una formación específica en un lenguaje de programación concreto (OpensCAD, FreeCAD, …). Por todo ello, surge la necesidad de buscar herramientas que, como argumentan Resnick y Silverman (2005), sean de suelo bajo (fáciles de manejar sin necesidad de una amplia formación), de techo alto (que permita que los proyectos puedan avanzar e incluso fomentar el desarrollo personal) y a la vez techo amplio (que permita generar una gran variedad de proyectos de diferente tipo y significativos para el estudiantado).

Teniendo en mente los principios anteriores, en la búsqueda de una herramienta de uso sencillo, aparece la herramienta BlocksCAD como un recurso tecnológico para la enseñanza matemática. Esta herramienta ha sido explorada para la enseñanza de la probabilidad por Beltrán-Pellicer (2017) o como recurso para la generación de figuras geométricas tridimensionales por Beltrán-Pellicer et al. (2020). De forma complementaria, en este caso se pretende mostrar esta herramienta como un recurso para el planteamiento de problemas de geometría tridimensional.

Por todo esto, el objetivo de esta comunicación es presentar las posibilidades que ofrece la herramienta BlocksCAD para el planteamiento de problemas de geometría

tridimensional en alumnado con talento matemático a través de una colección de problemas.

2. La herramienta educativa BlocksCAD

Este software de modelado tridimensional es de fácil acceso a través de dispositivos con pantalla como tabletas, chromebooks y ordenadores gracias a su interfaz web https://www.blockscad3d.com/ , aunque se recomienda acceder con un dispositivo con ratón para la facilidad de manejo de las diferentes visualizaciones de los objetos tridimensionales.

Una vez se ha accedido a la plataforma Blockscad3D, se accede directamente a la página de edición (https://www.blockscad3d.com/editor/) como se puede ver en la Imagen 1, la cual se puede configurar en idioma Español en el menú disponible en la parte superior izquierda.

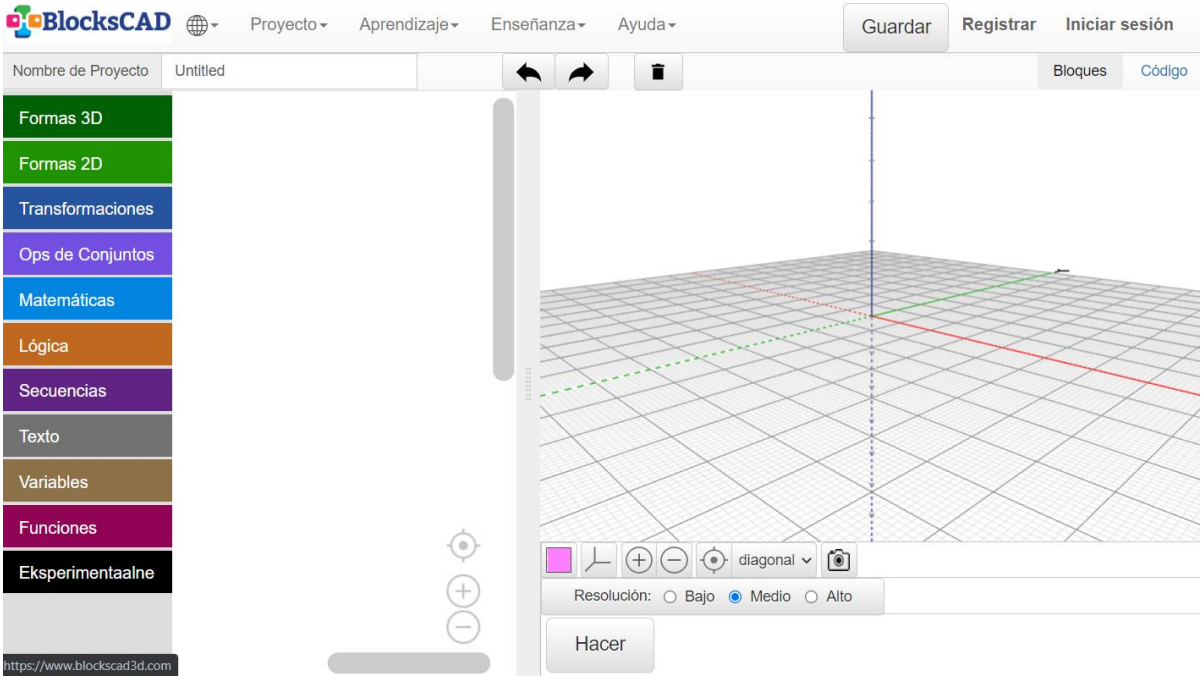


Imagen 1. Plataforma de edición del programa BlocksCAD.

La programación por bloques de esta herramienta se realiza gracias al menú que se puede encontrar en la parte izquierda de la pantalla junto con un espacio para la colocación de los bloques de código. Este menú presenta dos tipos de colecciones, una más simple con una cantidad menor de bloques disponibles y otra más

avanzada. La colección básica dispone de tres formas básicas primitivas (esfera, cubo y cilindro), transformaciones geométricas (traslación, rotación, escalado y número de aristas), operaciones básicas de conjuntos (unión, diferencia e intersección) y posibilidad de definir variables y funciones. Las funcionalidades avanzadas aumentan el número de primitivas (añadiendo el toro y añadiendo alternativas bidimensionales como el círculo y el cuadrado), las transformaciones geométricas (simetrías axiales o especulares, afilados, extrusiones lineales y por rotación), la posibilidad de realizar la envoltura convexa de objetos y de añadir secuencias.

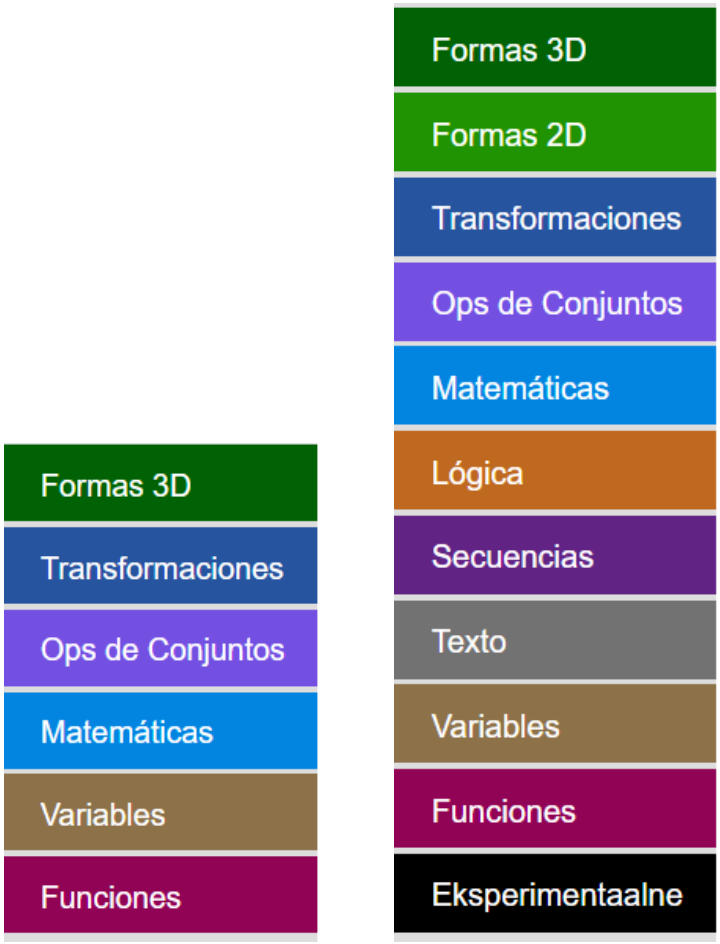


Imagen 2. Colección básica (izquierda) y colección avanzada (derecha) de bloques de código.

Uno de los elementos a destacar de este software de modelado tridimensional es la adaptación que ha realizado al contexto educativo. Esta adaptación se encuentra en el menú desplegable superior derecha donde se encuentra, junto al perfil y a la biblioteca personal de proyectos, la sección denominada “Mis clases”. En ella, se puede encontrar un espacio para la generación de clases en las que interactuar con

el alumnado y también una colección de recursos para la iniciación del uso de esta herramienta para la enseñanza de la geometría https://www.blockscad3d.com/geometry1 .

3. Una experiencia de resolución de problemas con BlocksCAD

Para el seguimiento de las actividades se puede disponer de un dispositivo móvil con pantalla u ordenador, dada la facilidad del manejo de los bloques en la programación a través de esta herramienta. De esta forma, se puede organizar al estudiantado por parejas, aunque el alumnado disponga de un dispositivo individualmente para dar respuesta a los retos planteados en la sesión.

3.1 Fase de presentación de las formas primitivas a través de la herramienta

Dada la similitud que tiene la herramienta propuesta con el programa Scratch, se inicia la sesión recordando las características que definen la programación por bloques. En cualquier caso, se presenta el espacio de trabajo mostrado en la Imagen 1, así como las instrucciones básicas para la generación de objetos tridimensionales; esto es, desde el uso de bloques para la programación hasta las acciones necesarias para la generación del objeto programado y su visualización.

Una vez realizada la introducción y presentada la herramienta, se procede a realizar una secuencia de preguntas dirigidas para mostrar las posibilidades que ofrece esta herramienta.

Se empieza presentando la plataforma con la colección básica de bloques de código, en particular, las tres “Formas 3D”: esfera, cubo y cilindro. Se genera cada una de ellas y se comenta su aspecto al crear la figura en la pantalla de visualización (al presionar el botón “hacer”, “render” en inglés):

- La primera de las formas estudiadas es la esfera. Sobre esta se comenta y analiza que no es una esfera perfecta, es un poliedro con muchas caras, la mayoría cuadriláteros. Esta esfera se define con el parámetro del radio.
- La siguiente primitiva que se analiza es el cubo. Sobre el cubo se comenta que su nombre no es el más adecuado, ya que al poder cambiar la medida de cada una de las tres dimensiones del cubo ya no se obtiene un hexaedro regular sino un paralelepípedo. Se anima al estudiantado a realizar diferentes

paralelepípedos y a utilizar la opción “centrado” o “no centrado” en los ejes cartesianos.

- Por último, se analiza el código que genera el cilindro. Sobre este se comenta que, como en el caso de la esfera, no es un cuerpo redondo, sino que se ha generado un prisma con muchas caras que modeliza de forma simplificada un cilindro. Además, esta forma tiene como parámetros “radio1”, “radio2” y la altura del cilindro. En este momento se anima al estudiantado a que genere diferentes opciones para poder definir la diferencia entre ambos radios. Por defecto, aparece un candado que no permite poner diferentes valores, pero si se abre el candado sí se podrán cambiar. Es entonces cuando el estudiantado concluye que cada radio corresponde a las bases del cilindro y si son diferentes se obtiene un tronco de cono, e incluso un cono cuando uno de los radios es cero. Esta última conclusión la realizan a veces en forma de pregunta, con lo que se anima a que hipoteticen qué y cómo puede ocurrir y que lo comprueben en sus dispositivos.

Con esto, se finaliza la fase de presentación de las formas primitivas en 3D. A partir de estas formas, se procede a realizar la colección de retos

3.2 Fase de resolución de problemas sobre la herramienta

A continuación, se comentan y analizan los bloques del menú “Transformaciones”: trasladar, rotar, escala, color y aristas. Este menú es una fuente de propuesta de problemas sobre los que establecer relaciones entre diferentes figuras geométricas. Inicialmente, se les pide que realicen alguna hipótesis sobre la transformación “aristas” que tiene un solo parámetro. Este bloque actúa directamente sobre una de las formas 3D que son cuerpos redondos (esfera y cilindro) y que ya se había comentado que se mostraban de forma simplificada.

- Al poner un número elevado de aristas se pueden ver las figuras mucho más redondeadas que en su versión por defecto.
- Al poner un número más reducido se obtienen figuras cuya sección transversal central es un polígono de ese número de lados. Por lo tanto, se pueden obtener prismas, pirámides y troncos de pirámide mediante esta técnica.

Esta propiedad permite proponer una colección de problemas al alumnado:

> *¿Cómo se puede crear un octaedro regular disponiendo solo de los bloques comentados? ¿es única la forma de crearlo? ¿se puede generar mediante la primitiva del cubo?*

Durante la sesión con alumnado de talento matemático, obtuvieron dos formas análogas para resolver este problema. La primera sería creando dos pirámides de base cuadrada (usando la forma cilindro) y después colocar una de ellas en la parte inferior (ya sea rotándola o trasladándola); la segunda opción se puede realizar con la forma esfera y la transformación que le asigna 4 aristas. En la Imagen 3 se pueden ver los bloques de código utilizados en cada caso.

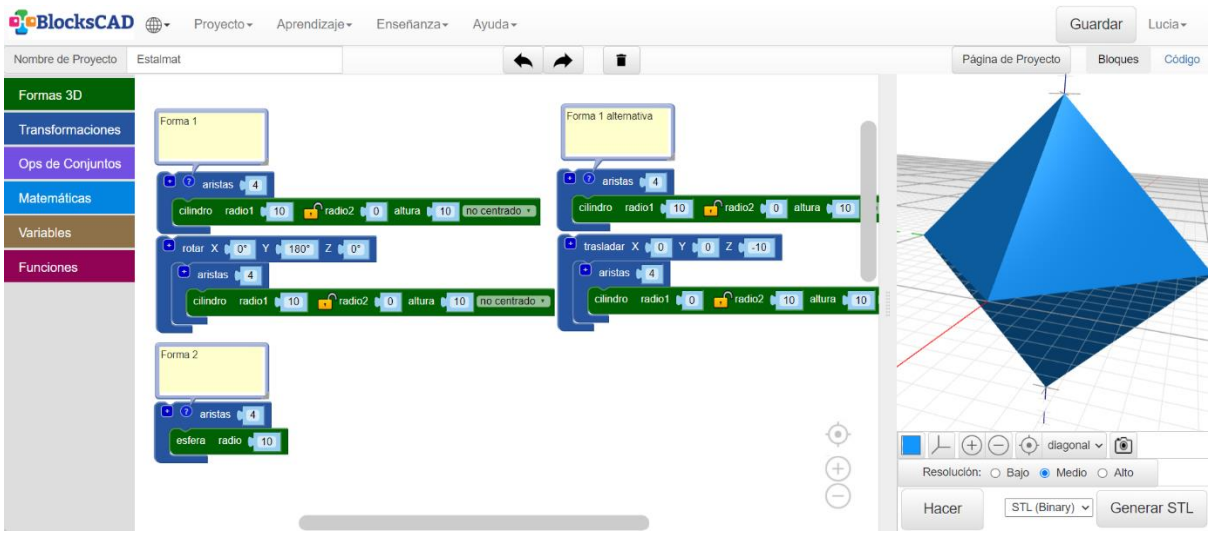


Imagen 3. Diferentes alternativas mostradas en la sesión para crear un octaedro.

En el caso de la creación de dos pirámides es recomendable unirlas en el mismo objeto, de esta manera se podría transformar el resultado como un solo objeto, por lo tanto se aprovecha la situación para introducir los bloques de "Ops de Conjuntos" donde se encuentran los bloques de unión, diferencia e intersección. Para poder entender mejor cada una de estas herramientas se emplaza al alumnado a que creen un cubo centrado, de manera que aun sea posible visualizar el octaedro, y que prueben cuál es el resultado de cada una de estas operaciones lógicas (algunos ejemplos se pueden observar en la Imagen 4). Después se pide a diferentes alumnos que argumenten los resultados obtenidos, de esta manera se trabajan las operaciones lógicas de unión, diferencia e intersección y aparecen propiedades

como conmutatividad, orden de las operaciones, etc. e incluso se puede llegar a obtener un cuboctaedro (y por tanto un sólido Arquimediano), como se aprecia en el último caso de la Imagen 4.

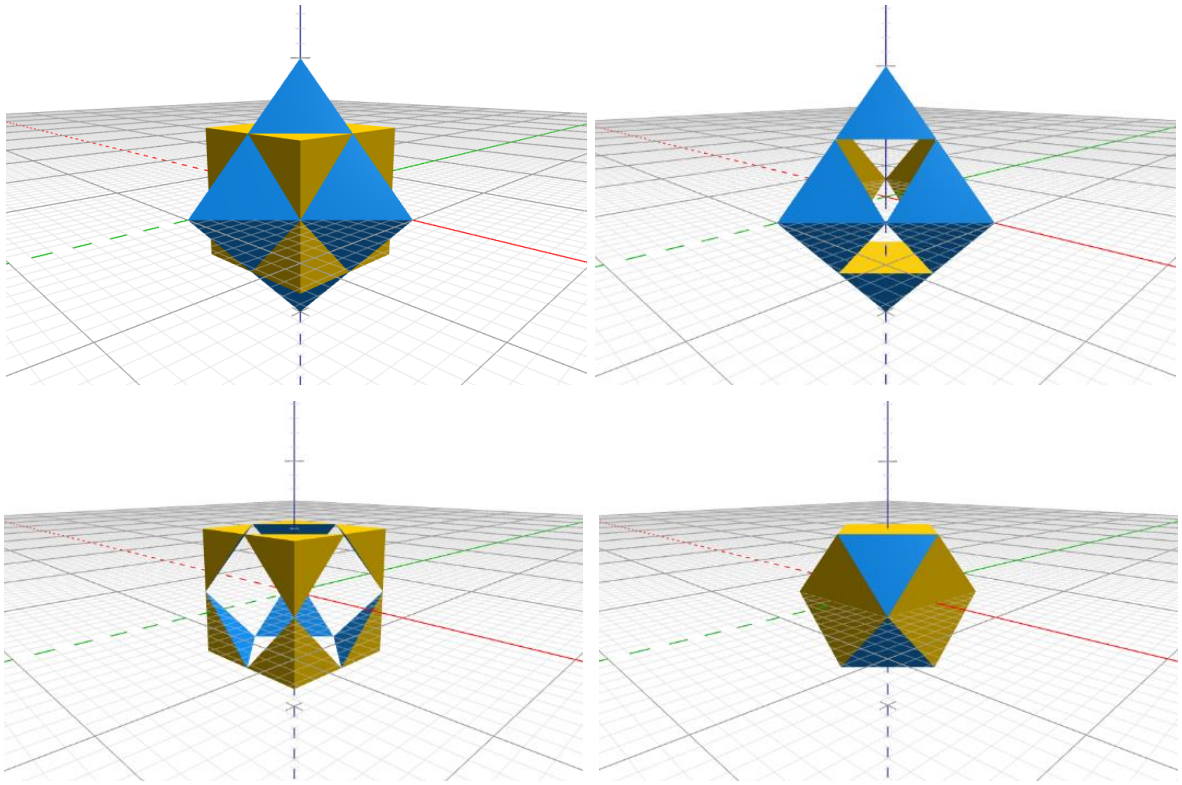


Imagen 4. Ejemplos de aplicar las operaciones lógicas de BlocksCAD a un octaedro (azul) y un cubo (amarillo).

El resto de problemas planteados en la sesión siguen la estructura de razonamiento presentada en la secuencia anterior. En las soluciones propuestas por el alumnado en la sesión se muestran diferencias con el número de primitivas usadas y las operaciones lógicas.

4. Otras funcionalidades para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva STEAM

Además de las opciones presentadas en la anterior experiencia de resolución de problemas, la herramienta BlocksCAD puede ser usada para la mejora de las destrezas en otros contenidos de la materia de matemáticas.

Así, su uso puede ser de interés para mejorar la competencia de conexiones de las matemáticas con otras áreas STEAM. Los ejemplos que presenta la propia herramienta son una muestra de su aplicación para el diseño y la construcción.

Concretamente, en la generación de los objetos tridimensionales mediante la programación por bloques intervienen conceptos propios de la programación informática, la geometría analítica, las medidas de área y volumen, las series numéricas e incluso el reconocimiento de patrones y simetrías. Todo ello permite interconectar las diferentes áreas de las matemáticas en el proceso de elaboración de diseños sobre la herramienta, integrando todos los conocimientos matemáticos.

A su vez, la posibilidad de crear figuras de forma autónoma a partir de la programación por bloques favorece la mejora de las competencias de razonamiento y prueba del alumnado, así como de fomentar la creatividad. La posibilidad de modificar los parámetros de los objetos tridimensionales programados y de incluir operadores lógicos de diferente tipo ofrece al estudiantado la posibilidad de comprobar conjeturas y plantearse retos de forma autónoma. Destaca, por tanto, las posibilidades que ofrece esta herramienta para poder programar y elaborar patrones y regularidades que pueden observar en el mundo real. En concreto, en el alumnado con talento matemático, que presenta elevada destreza tanto en elementos geométricos como analíticos, les permite comprobar sus conjeturas, examinar su validez y realizar generalizaciones.

5. Conclusiones

La experiencia que se presenta se adecuaba al alumnado preuniversitario con talento matemático desde varios puntos de vista. Por un lado, la herramienta tecnológica utilizada permite al estudiantado con talento matemático ver la aplicación de las matemáticas en otros campos como la programación, el diseño en ingeniería o en la ciencia. Además, favorece el desarrollo del pensamiento computacional a través de competencias y habilidades básicas en la informática que son de utilidad para la resolución de problemas matemáticos como los bucles, las variables o los elementos condicionales. Más aún, también favorece el desarrollo de habilidades de visualización entre este alumnado al resolver problemas de geometría tridimensional mediante estas herramientas, sin olvidar las posibilidades de creatividad en los diseños generados.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto “Aproximación multidimensional a la atención a estudiantes con alta capacidad matemática” (PID2020-117395RB-I00) del Ministerio de Ciencia e Innovación (MICIN).

Referencias

Aho, A. V., (2012). Computation and Computational Thinking. T*he Computer Journal, 55*(7), 832-835. https://doi.org/10.1093/comjnl/bxs074

Beltrán-Pellicer, P. (2017). Modelado e impresión 3D como recurso didáctico en el aprendizaje de la probabilidad. *Épsilon: Revista de Educación Matemática, 34*(95), 99-106.

Beltrán-Pellicer, P., Rodríguez-Jaso, C., & Muñoz-Escolano, J. M. (2020). Introduciendo BlocksCAD como recurso didáctico en matemáticas. *Suma, 93*, 39-48

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 319-326). Bilbao: SEIEM.

MatesGG (2021). https://intef.es/recursos-educativos/recursos-para-el-aprendizaje-en-linea/matesgg/

Monedero, J.: Parametric design: a review and some experiences. Automation in Construction 9(4), 369-377 (2000).

Ramírez, R. (2012). Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático. Trabajo de Tesis. Universidad de Granada. Disponible en http://fqm193.ugr.es/produccioncientifica/tesis/verdetalles/7461/descargar

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 76*, de 30 de marzo de 2022, 1–198. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217

Resnick, M. y Silverman, B. (2005). Some reflections on designing construction kits for kids. In: *Proceedings of the 2005 conference on Interaction design and children*. pp. 117-122.

CoC020 Ajedrez educativo

María Alicia Hernández Fernández
mariaalicia.hernandez@murciaeduca.es
CEIP Miguel Delibes en Puerto de Mazarrón (Murcia)

Núcleo temático: conexiones y procesos.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Infantil y Educación Primaria.

RESUMEN

La presente comunicación consiste en un proyecto educativo basado en el ajedrez, que pretende interrelacionar el área de Matemáticas y el área de Lengua Castellana y Literatura. El ajedrez se muestra como el eje vertebrador que consigue dar cohesión al currículo, favoreciendo el aprendizaje significativo del alumnado.

El objetivo final del proyecto es la elaboración de una “ajedrezteca” en el centro como un espacio dedicado al ajedrez donde se muestren todos los productos elaborados por el alumnado. Al mismo tiempo que, se contempla el uso del ajedrez en el aula con la finalidad de conseguir el desarrolla de todas las competencias básicas por parte del alumnado.

Palabras clave: Proyecto, Ajedrez, Matemáticas, Lengua

1. INTRODUCCIÓN

El presente proyecto se proyecta en dos direcciones. La primera es la enseñanza reglada del ajedrez, con la pretensión de que su uso contribuya al desarrollo de las competencias básicas del alumnado. En segundo lugar, se desea llevar a cabo un proyecto donde el ajedrez actúe como eje vertebrador del proceso de enseñanza-aprendizaje y permita la puesta en práctica de los conocimientos en contextos funcionales.

El proyecto es vertical para todo el centro educativo, aunque irá implementándose de manera progresiva, dando lugar a la construcción de una “ajedrezteca” en la

biblioteca del centro, como un espacio dedicado al ajedrez, a la vez que se fomenta el gusto por el ajedrez.

2. JUSTIFICACIÓN

El presente proyecto tiene su justificación en la normativa legal, en las bases de la importancia del ajedrez en las aulas y; por supuesto, en las aportaciones realizadas desde la psicología, la Didáctica general y la específica de las Matemáticas que ofrecen diversos autores en relación a todos los aspectos que se tratan. Dichas aportaciones serán empleadas cuando corresponda, para la aclaración y fundamentación de lo descrito y quedarán plasmadas en la bibliografía.

En cuanto a los aspectos legales, el proyecto se acoge a la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre (LOMLOE) por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006 de 3 de mayo de educación (LOE). Asimismo, se acoge al Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Por otro lado, en cuanto no se establezca otra normativa que la derogue, el proyecto también se acoge al Decreto n.º 198/2014, de 5 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia.
Básicamente, la justificación del proyecto debe responder a dos cuestiones fundamentales: la importancia del ajedrez en las aulas y la idoneidad del uso de la metodología por proyectos.

La importancia del ajedrez en las aulas viene marcada por el Parlamento Europeo, en su Declaración de 15 de marzo de 2012, donde apoyó la introducción del “Ajedrez en la escuela” por su contribución al desarrollo de la creatividad, la intuición y la memoria. El ajedrez escolar ayuda al alumno a desarrollar de una forma natural habilidades cognitivas (como el razonamiento matemático) y también sociales, como la empatía.

¿Por qué el ajedrez en las aulas?

En el año 2012, el **Parlamento Europeo** incluyó el programa de la Unión Europea de Ajedrez – "*Ajedrez en la Escuela*", gracias a la mayoría de la cámara.	En el año **2015**, la Comisión de Educación y Deportes del Congreso de los Diputados, aprobó por unanimidad la proposición de ley nº 161/002598, sobre **la implantación y fomento de la práctica del ajedrez en escuelas y espacios públicos y su promoción como deporte**	En el año 2014**, el Proyecto de Ajedrez en Horario Lectivo**: "Ajedrez en el aula" aprobado por la Consejería de Educación de la Región de Murcia, que introdujo el ajedrez en 25 centros educativos de toda la región en horario lectivo, donde más de 2.000 alumnos se beneficiaron de los recursos del ajedrez a través de este programa.

Justificada la importancia del ajedrez en las aulas es necesario destacar la importancia de la metodología subyacente del trabajo por proyectos.

¿Por qué el aprendizaje por proyectos?

Como indica el Real Decreto 157/2022 en su artículo 6 sobre principios pedagógicos: "Con objeto de fomentar la integración de las competencias, se dedicará un tiempo del horario lectivo a la realización de **proyectos significativos** para el alumnado	Como indican Blanchard y Muzás (2016) los Proyectos de Aprendizaje, son los marcos teóricos, idóneos y más ajustados a una **innovación** real y efectiva

Desde estas afirmaciones los proyectos se presentan como una necesidad educativa para integrar las competencias básicas, interrelacionando los contenidos. Éstos contribuyen a la comprensión de la realidad como un todo y al desarrollo de

aprendizajes significativos por parte del alumnado. En definitiva, suponen una innovación para la mejora educativa.

Después de la justificación, es vital explicar las partes integrantes de este proyecto para su correcto desarrollo, utilizando para ello el siguiente apartado dedicado a la participación.

3. PARTICIPACIÓN

Para un correcto desarrollo del proyecto es necesaria la participación activa de toda la comunidad educativa y, por supuesto, la de otros agentes necesarios que van a contribuir a la mejora del proyecto.

Entre los mencionados participantes, en primer lugar es necesario destacar la figura del coordinador, realizada por María Alicia Hernández Fernández cuya formación para el desarrollo del proyecto es certificada por el CPR con el curso “Competencia matemática: El Ajedrez en el Aula” realizado en 2019.

Asimismo, es importante resaltar la colaboración con la empresa de ajedrez Duochess de Sonia Gil (campeona de España de Ajedrez), pues su compromiso es el asesoramiento y los recursos necesarios para el desempeño del proyecto. Además, de su posible oferta de actividades extraescolares de ajedrez en colaboración con el AMPA del CEIP Miguel Delibes.

Por último, se hace imprescindible comentar la colaboración del Centro de Profesores y Recursos (CPR) al ofrecer formación sobre ajedrez educativo y su servicio de préstamo de material de ajedrez. Así como también, la colaboración ofrecida por el AulaDjaque en Almería que nos será brindada a través de su coordinador Iván Martínez Perán.

Tras la mención a los participantes, se procede a describir al proyecto en sí mismo, presentando todos sus aspectos de forma diferenciada.

4. DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO

A continuación se describen todos los aspectos más importantes sobre el proyecto, para su correcta implantación en el centro educativo, comenzando por los objetivos.

4.1. OBJETIVOS

Los objetivos del proyecto son los fines que pretendemos conseguir con el mismo, los cuales son los que se recogen a continuación:

-Enseñar a jugar al ajedrez para favorecer el desarrollo de las competencias básicas.

-Trabajar los contenidos matemáticos a través del ajedrez de una forma lúdica.

-Utilizar el ajedrez como eje vertebrador de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje, relacionando las áreas.

-Utilizar el trabajo por proyectos como método de innovación para la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

- Fomentar actitudes de cooperación mediante el trabajo en grupo

- Desarrollar la autonomía, la comunicación y la sociabilidad de los alumnos.

- Fomentar el respeto al otro como valor esencial.

-Implicar a la Comunidad Educativa en el proyecto.

Una vez especificados los objetivos, es necesario explicar la contribución del ajedrez al desarrollo de las competencias básicas por parte del alumnado.

4.2. COMPETENCIAS BÁSICAS

Las competencias básicas son las capacidades para aplicar lo aprendido.

El ajedrez como recurso educativo integrador y transversal nos ayuda trabaja las competencias básicas, de esta forma, es posible utilizar el ajedrez dentro de las distintas asignaturas del currículo educativo.

En el ámbito del currículo educativo, trabajamos el ajedrez sobre las siguientes competencias básicas:

Competencia en comunicación lingüística

El ajedrez trabaja la comunicación lingüística a través de la participación en la resolución de problemas de forma individual o grupal, y mediante la generación de actitudes críticas propias, ajenas y comunicativas a través del diálogo.

Un rasgo característico del ajedrez es que posee un lenguaje propio y universal que favorece la comunicación y enriquece la construcción de un conocimiento globalizado. Además, en nuestro lenguaje cotidiano, observamos la analogía y el uso de conceptos ajedrecísticos: *"…quedó en tablas", "…encontrarse en jaque", etc.*

Competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería

Esta competencia está relacionada con el ajedrez por las numerosas cualidades que tienen en común como son el cálculo, la memoria, la capacidad visoespacial, la resolución de problemas, la creatividad, el pensamiento organizado, entre muchas otras.

En particular, el ajedrez presenta conceptos matemáticos fundamentales tales como la geometría del tablero (filas, columnas, y diagonales), el valor relativo de las piezas, las coordenadas, notación algebraica y descriptiva, etc.

Competencia digital

Es la competencia que está relacionada con el uso de las TIC (Tecnología de la Información y la Comunicación) como herramienta de aprendizaje en el aula para comunicar la información de una manera creativa.

El ajedrez es uno de los pocos deportes en los que su práctica está totalmente adaptada al mundo de las nuevas tecnologías, pudiéndose entrenar y practicar individualmente o con personas de todo el mundo.

Competencia personal, social y de aprender a aprender

Aprender jugando es una de las virtudes más importantes que conlleva la práctica del ajedrez. Con el ajedrez el alumno **aprende jugando** y desarrolla sus propias habilidades que le permiten conducir su propio aprendizaje. El profesor facilita herramientas para desarrollar el aprendizaje para que el alumno sea capaz de aprender de manera eficaz y autónoma de acuerdo a sus propios objetivos y necesidades.

Experimentar el placer que produce entender un concepto que con anterioridad no se comprendía genera una gran satisfacción y es fuente de motivación para futuros aprendizajes.

Jugar al ajedrez exige al alumno una autorregulación emocional continua, ya que cada movimiento puede ser un éxito o fracaso por sí mismo, y este debe ser capaz de reconocer sus propios errores y ser autocrítico con ellos.

Conciencia y expresiones culturales

“Gens una sumus” o “Somos una familia” es el lema de la Federación Internacional de Ajedrez, donde a través de su lenguaje universal y facilidad de práctica, promueve importantes valores como son la integración, la no discriminación, y el respeto al contrario sea cual sea su nivel, sexo, etnia, religión o edad.

La historia y la cultura de los distintos pueblos del mundo tienen relación directa con el ajedrez y su desarrollo, pudiendo observarlo a través de su expresión y relación a través de distintas expresiones culturales.

Además, el ajedrez tiene su propia historia, desde su descubrimiento, pasando por su institucionalización y homogeneización, hasta nuestra historia más reciente. Esta historia queda reflejada a través de miles de libros, revistas y películas, etc.

El ajedrez a través de su práctica también desarrolla la expresión cultural y artística, trabajando la imaginación, la creatividad, y el desarrollo de la iniciativa, que favorece la creación de proyectos propios, el reconocimiento y la conservación de la cultura como patrimonio de la humanidad.

Competencia ciudadana.

La práctica del ajedrez ayuda a desarrollar habilidades sociales e interpersonales, ya que el ajedrez es multicultural e inter-generacional por sí mismo, ya que es posible jugar con cualquier persona independientemente de su edad, procedencia, religión, sexo, raza, etc., lo que hace que se considere una gran herramienta integradora.

La autorregulación emocional que conlleva jugar una partida de ajedrez facilita el desarrollo de normas socialmente aceptadas, como el respeto al rival, la puntualidad, reglas propias del juego, aprender a ganar y a perder, etc. Durante el juego es necesario controlar las emociones (alegría, tristeza, ira, miedo o sorpresa) e inhibir su expresión en la medida de lo posible siendo ésta una norma básica de este deporte, el respeto al rival.

El ajedrez no es solamente un deporte individual, el concepto de juego en equipo puede verse reflejado a través de diferentes aspectos de la práctica de ajedrez, ya que también existe modalidad de juego en equipo que permite desarrollar ciertas habilidades sociales específicas de los deportes grupales.

Por otra parte, jugar al ajedrez permite desarrollar conclusiones de forma colectiva, por ejemplo, analizar una partida o una determinada posición. Además, el juego en sí tiene carácter colectivo, ya que las piezas colaboran para conseguir un objetivo común.

Competencia emprendedora.

El ajedrez, a través del propio desarrollo de una partida, genera un clima idóneo para que el alumno aprenda jugando a resolver y afrontar problemas y situaciones cotidianas mejorando así su capacidad de **toma de decisiones**.

Una partida de ajedrez exige al alumno tomar decisiones de forma continuada y en un tiempo limitado para conseguir un objetivo concreto. Esta situación permite desarrollar gran variedad de habilidades, entre ellas:

- **Capacidad de anticipación**. Ser capaz de evaluar los planes del rival y preverlos antes de que ocurra, evitando posibles futuros problemas.
- **Toma y gestión de la iniciativa**. Ser capaz de liderar y afrontar un proyecto o reto propio, aprovechando todas las oportunidades que están al alcance.
- **Defensa ante una ofensiva.** Ser capaz de estar en una situación desfavorable y mantener la situación bajo presión.

- Búsqueda y concreción de **objetivos a corto, medio y largo plazo**, teniendo la capacidad de revisión y modificación de los mismos en cada momento.
- **Ergonomía de recursos**, como utilizar los recursos existentes de la forma más satisfactoria, aprovechando al máximo los "tiempos en ajedrez".
- Capacidad de cálculo de los **riesgos asumidos** en la toma de decisiones.
- **Intuición**. La multitud de respuestas posibles en cada jugada y el tiempo limitado para realizarla obliga al jugador a encontrar y descartar respuestas a través de escenarios en los que no tiene la oportunidad de obtener toda la información posible.

Competencia plurilingüe.

Esta competencia se puede desarrollar igualmente a través del ajedrez, utilizando otras lenguas vehiculares en el transcurso del mismo y adquiriendo vocabulario específico relacionado con el ajedrez.

Después de justificar la contribución del ajedrez al desarrollo de las competencias básicas, se procede a hacer visible la relación del proyecto con las áreas del currículo.

4.3. ÁREAS DEL CURRÍCULO RELACIONADAS CON EL PROYECTO

El proyecto va a ser el eje vertebrador de los contenidos, logrando la tan necesaria interrelación de los mismos entre las áreas, tal como indican Blanchard y Muzás (2016). Por ello, el proyecto va a ser común a dos áreas, el área de Lengua Castellana y Literatura y el de Matemáticas.

4.3.1. MATEMÁTICAS

El área de Matemáticas está relacionada con el ajedrez en una multiplicidad de contenidos. Por un lado, en cuanto al tablero encontramos una relación directa con la geometría plana, las multiplicaciones modelo área, la estadística y los planos y croquis.

Por otro lado, considerando el juego en sí mismo, se contribuye al desarrollo del pensamiento lógico-matemático del alumnado. Además, el proyecto consta de una serie de juegos basados en el ajedrez que relacionan directamente el ajedrez con

los contenidos matemáticos referidos a: la lectura, escritura y ordenación de números; la composición y descomposición numérica; las fracciones y decimales; los cuatro algoritmos básicos; la geometría en el espacio, secuencias numéricas ascendentes y descendentes, etc. El ajedrez nos puede servir como un recurso más para conseguir que el alumnado adquiera los conocimientos del área de una forma lúdica y creativa.

Con esta pretensión, ofrezco a continuación un ejemplo de una serie de juegos de invención propia, que pretenden la adquisición de los contenidos del currículo.

ATRAPA LOS COLORES

El juego consiste en jugar una partida, colocando en el tablero fichas de parchís. Cada color de las fichas se corresponderá con un valor posicional de nuestro sistema de numeración, en analogía al ábaco. El ganador será el jugador que más puntos consiga al sumar los valores de las fichas que ha conseguido.

Imagen: fotografía propia, en el CEIP Miguel Delibes de Puerto de Mazarrón, solo con peones en el tablero.

RECURSOS: juego de ajedrez, fichas de parchís, lápiz y papel.

CONTENIDOS:

- Sistema de numeración decimal
- Composición y descomposición numérica
- Cálculo mental y escrito
- Lectura, escritura y ordenación de números

ADAPTACIÓN:

El juego se puede adaptar al curso educativo. En primero de primaria se empezaría con las fichas azules como unidades y las fichas rojas como decenas. En segundo,

se incluirían las centenas de color verde. En tercero, se añadirían las unidades y decenas de millar. Por último, en cuarto de primaria se introducirían las centenas de millar. Para los cursos sucesivos se trabajaría todo el sistema de numeración posicional. La partida se puede jugar con todas las piezas del ajedrez o solo con las piezas elegidas.

Los distintos juegos matemáticos están relacionados con las unidades didácticas del área, de tal forma que, para cada unidad existe un juego matemático asociado, utilizando para cada juego diferentes recursos. De esta forma, el ajedrez sirve como un recurso matemático más en combinación con otros recursos manipulativos propios del área.

4.3.2. LENGUA CASTELLANA Y LITERATURA

La relación con el área es directa en cuanto a la parte verbal que incluye el ajedrez con su propio vocabulario. Además, mediante la propuesta de actividades relacionadas con el ajedrez como eje vertebrador se trabajan una gran variedad de contenidos del currículo como son: los cuentos, la entrevista, las representaciones teatrales, la poesía, la descripción, el cómic, el cartel, etc.

Además, el área va a guardar una relación directa con el ajedrez a través de sus unidades didácticas, disponiendo de un cuento de ajedrez asignado para cada unidad didáctica. Como ejemplo de los cuentos, se dispone de uno de ellos en el anexo I.

Tras la exposición de las relaciones entre áreas es imprescindible hablar de los recursos necesarios para la implantación del proyecto, los cuales se exponen en el próximo apartado.

4.4. RECURSOS

Los recursos serán materiales para el juego, tecnologías de la información y la comunicación (TIC), vídeos y libros relacionados con el ajedrez.

En primer lugar, los recursos para el aprendizaje del ajedrez son los siguientes: tableros magnéticos, tableros y piezas, ajedrez gigante, juegos de cartas, tableros de 3 y 4 jugadores, etc.

En cuanto a los recursos TIC, se dispondrá de dos páginas web fundamentalmente: “Aprende con rey” y “Lichess”

Por su parte, los libros incluidos en el proyecto también serán una pieza fundamental. Por una parte, el proyecto consta de libros en forma de cuentos sobre el ajedrez y, por la otra, se dispone de libros para trabajar en el aula el aprendizaje del ajedrez. Todos ellos, a su vez, se encuentran adaptados al alumnado cuyas edades se sitúan en la educación infantil y primaria.

Para la enseñanza específica del ajedrez las colecciones a utilizar serían los siguientes:
-Aprendiendo a caminar de la editorial Edapa (2020)
-Juega y aprende de Balagium Editors (2010)

Los libros son un recurso importante en el proyecto, pero también es necesario disponer de recursos manipulativos propios del área de Matemáticas.
Los recursos manipulativos según Albarracín (2018), sirven para que el alumnado disponga de “imágenes mentales” de los conceptos matemáticos, siendo necesaria su variedad para la abstracción.

A causa de ello, se han incorporado diferentes recursos manipulativos matemáticos a los juegos basados en el ajedrez. A continuación, se procede a su descripción minuciosa: figuras planas, figuras 3D, planos y mapas, círculos de fracciones, tabla de multiplicar, tabla del 100, fichas de parchís, monedas y billetes, etc.

Los vídeos van a ser otro recurso deseable para el aprendizaje del ajedrez, los cuales han de ser utilizados durante las sesiones. De entre la gran multiplicidad existente, se han seleccionado los que se muestran a continuación:

VÍDEOS DEL PROYECTO

Imagen 2: corto de Pixar sobre el ajedrez titulado Geri's Game

Imagen 3: colección de vídeos “Aprendamos ajedrez desde 0”

Imagen 4: colección de videos “Aprende con rey”

Como se puede apreciar, los recursos son fundamentales para el desarrollo del proyecto, pero una vez presentados es necesario concretar su uso con la metodología del proyecto.

4.5. METODOLOGÍA

La metodología es la parte más importante del proyecto y tiene varias vertientes.

Por un lado, será necesario establecer la estructura de las sesiones tipo para el aprendizaje del ajedrez. En este sentido, como indican Gil y Sánchez (2022) las sesiones para el aprendizaje del ajedrez tendrán 3 pasos: introducción, desarrollo teórico y práctica de la parte teórica.

Concretamente, se comenzará motivando al alumnado hacia el aprendizaje del ajedrez, utilizando los vídeos y cuentos propuestos como recursos. Después, se explicará el contenido del día utilizando la página web Lichess y, por último, se resolverán problemas a través de fichas escritas y se procederá a la práctica en el tablero. Todo el trabajo realizado por los alumnos/as quedará recogido en un cuaderno de ajedrez que tendrá cada discente.

Asimismo, se utilizarán juegos que se presentan como una forma divertida de aprender aspectos específicos del ajedrez. Los juegos pertenecen a la campeona nacional de ajedrez Sonia Gil. Dichos juegos de ajedrez, han sido la base para la inspiración propia de juegos de ajedrez donde se trabajan los contenidos matemáticos del currículo. Un ejemplo de ellos es el juego de “ratón y gato” explicado en el siguiente cuadro:

RATÓN Y GATO
El ratón necesita llegar a la octava fila, pero se va a encontrar con 4 gatos negros hambrientos, ¿podrás ayudar al ratón a llegar a su destino final?

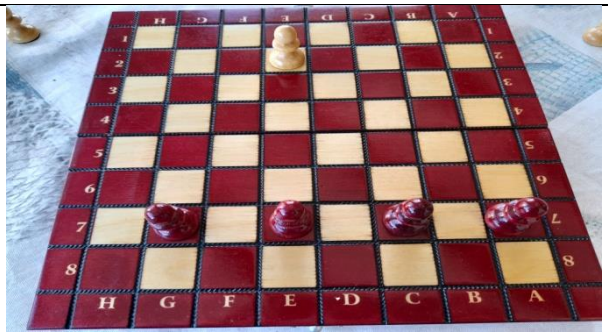


Imagen 5: juego de ratones y gato. Fuente propia

RECURSOS: juego de ajedrez y reloj (opcional)

OBJETIVO EDUCATIVO: Fomentar el aprendizaje del movimiento de las piezas en diagonal.

REGLAS DEL JUEGO

El peón blanco (ratón) solo mueve en diagonal una casilla (tanto hacia adelante como hacia atrás).

Los 4 peones negros (gatos) pueden mover en diagonal tantas casillas como quieran pero no pueden volver atrás.

El objetivo del ratón es volver a la última fila

El objetivo de los gatos es encerrar al ratón y que no pueda mover.

Si el ratón llega a octava gana la partida, pero si es encerrado entonces ganarán los gatos.

En cuanto a la otra vertiente del proyecto, se utilizará la metodología por proyectos donde el ajedrez impregnará toda la práctica educativa dando coherencia a todo el proceso educativo. Los centros de interés de las unidades didácticas de Lengua Castellana y Literatura y Matemáticas se muestran relacionados con el ajedrez. Para cada unidad didáctica del área de Matemáticas se dispone de un juego de ajedrez para trabajar los contenidos de la unidad y lo mismo sucede en el área de Lengua, donde cada unidad dispone de un cuento del ajedrez relacionado con los contenidos a trabajar.

Asimismo, en la realización de los productos que darán forma a la “ajedrezteca” se incluirá el trabajo cooperativo durante la elaboración. El aprendizaje cooperativo

supone una colaboración, donde deben darse los siguientes elementos: interdependencia positiva, interacción y responsabilidad individual. En cuanto a los grupos cooperativos, como indica Díaz-Aguado (2018) debe procurarse que sean grupos heterogéneos y lo deseable es que estén formados por 4 personas. De esta forma, para mantener la coherencia con el proyecto, en el aula los grupos contarán con los siguientes roles cooperativos, cada uno de ellos relacionado con una pieza del ajedrez, en consonancia con el proyecto.

El coordinador/a del grupo se corresponde con la figura de la reina o el rey. El moderador con el peón, el portavoz con el caballo y el observador con la torre.
La metodología se concreta en las actividades que se realizan en el aula, de tal forma que son la práctica de todo lo expuesto y se explican a continuación de forma detallada.

4.6. ACTIVIDADES

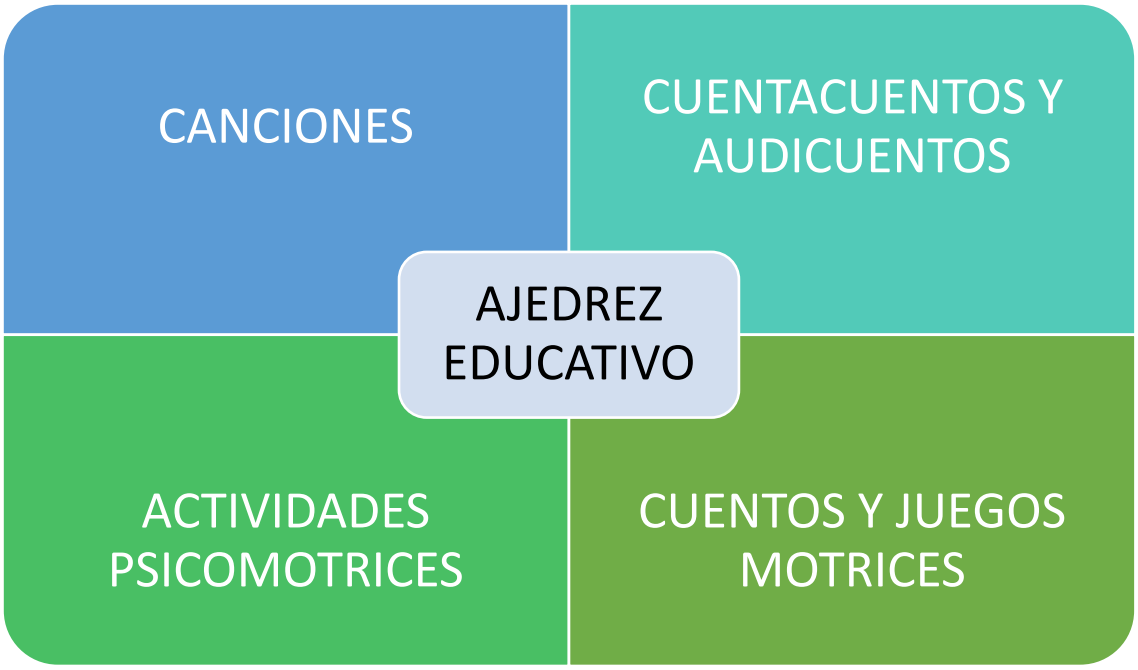
La metodología se concreta en una serie de actividades de diversos tipos. Por un lado, se dispone de actividades específicas para la etapa de Educación Infantil. Por otro lado, se cuenta con actividades tanto conectadas con el área de Matemáticas, como con el área de Lengua Castellana y Literatura. Además, de otra serie de actividades más generales que podrían trabajarse desde otras áreas del currículo.

4.6.1. ACTIVIDADES ESPECÍFICAS PARA LA EDUCACIÓN INFANTIL

Para el área de educación infantil, es necesario mantener la coherencia con el proyecto del centro estableciendo una mascota para el aula relacionada con el ajedrez, a modo de ejemplo podría ser usado “super peón”, cuya imagen se muestra a continuación.

Imagen 6: obtenida de web www.capakhine.es

Las actividades para la Educación Infantil son muy variadas y en consonancia con la práctica diaria en el aula. Dichas actividades quedan resumidas en el siguiente cuadro:



Desde el área de Educación Infantil es necesario trabajar la psicomotricidad y para ello podrían realizarse multitud de actividades para mejorar el trazo utilizando el ajedrez. Pueden utilizarse actividades de unir con puntos, modelación de plastilina, etc.

Como ejemplos de actividades de unir con puntos encontramos una gran colección en el libro “Jaque al aprendizaje” de Moreno y Moreno (2019)

Imagen 7: ajedrez de plastilina realizado en el CEIP San Francisco Javier en Los Barreros (Cartagena). Fuente: elaboración propia.

En cuanto al desarrollo de la motricidad gruesa, otras actividades muy interesantes pueden ser realizadas en el tablero de ajedrez gigante. Se dispone de una gran

cantidad de juegos de este tipo gracias a las propuestas que el autor Martínez (2017) ofrece en su libro sobre ajedrez y motricidad.

Una vez explicado el ajedrez en la Educación Infantil vamos a centrarnos en las actividades del proyecto que podemos realizar desde el área de Lengua Castellana y Literatura.

4.6.2. ACTIVIDADES RELACIONADAS CON EL ÁREA DE LENGUA CASTELLANA Y LITERATURA

Desde el área de Lengua Castellana y Literatura las relaciones con el ajedrez son muy directas, al poder asociar las piezas del ajedrez con personajes de cuentos, cómic, teatros, etc. Además, el ajedrez podrá inspirar el trabajo con otros contenidos como la poesía, la entrevista o la descripción. Concretamente, las actividades propuestas desde el área de Lengua Castellana y Literatura son las siguientes:

De entre todas las actividades, es destacable la actividad del ajedrez viviente donde los alumnos se disfrazan de los personajes del ajedrez y juegan una partida real en el tablero, actuando como piezas del mismo.

La actividad es muy divertida y visualmente atractiva para el alumnado, puede ser realizada tanto con motivo del carnaval como de la Semana Cultural en el centro educativo.

Imagen 8: AulaDjaque CEIP Valdeserra Vera (Almería)

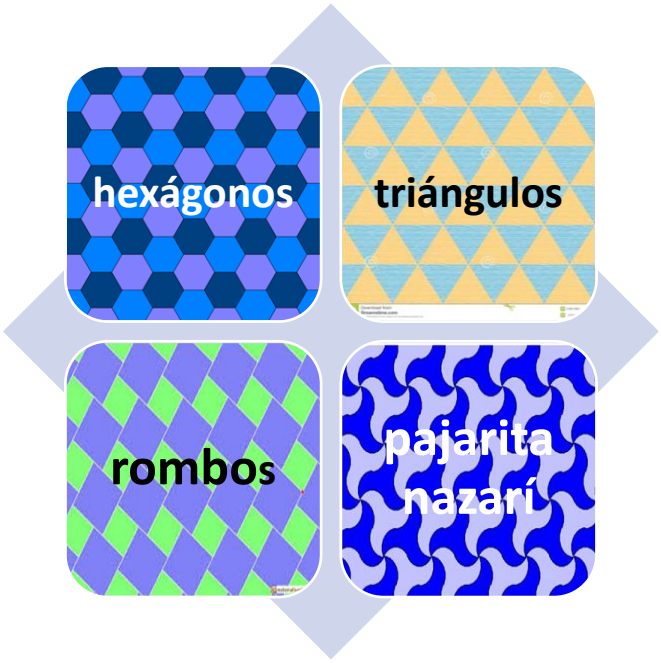
Desde el área de Matemáticas, también se pueden realizar productos para nuestra "ajedrezteca", relacionando los contenidos del área con el ajedrez, como se especifica en el siguiente apartado.

4.6.3. ACTIVIDADES DEL PROYECTO DESDE EL ÁREA DE MATEMÁTICAS

Para el proyecto, el área de Matemáticas puede contribuir a la creación de la "ajedrezteca" mediante la realización de una gran cantidad de actividades, como se puede apreciar en el siguiente cuadro resumen:

Como se puede apreciar, desde el área de Matemáticas se pueden realizar multitud de juegos de mesa que relacionen las matemáticas y el ajedrez. Además, de utilizar actividades propias del área como son los acertijos matemáticos combinándolos con la temática del ajedrez.

De entre todas las propuestas, es conveniente destacar los tableros creativos, por ser una actividad que podrían considerarse un microproyecto en sí mismo, donde se trabaja la geometría y la medida al unísono. En esta actividad, el alumnado en grupos debe realizar un tablero de ajedrez creativo, utilizando otras figuras geométricas diferentes al cuadrado que teselen el plano. A continuación, muestro algunos tipos de posibles tableros creativos:



Una vez comentadas las actividades desde el área de Matemáticas, procedo a manifestar otras posibles actividades que tienen cabida en el proyecto.

4.6.3. OTRAS ACTIVIDADES

Las posibilidades que ofrece el ajedrez para trabajar los contenidos de las diferentes áreas son infinitas. Por ello, aunque en el proyecto únicamente se ha contemplado la relación con el área de Matemáticas y Lengua Castellana y Literatura, es

imprescindible resaltar las posibles relaciones con otras áreas como son la Educación Artística y la Educación Física.

Desde el área de Educación Artística, los contenidos pueden relacionarse con el ajedrez a través de las imágenes y la música. Con este fin, pueden utilizarse las viñetas cómicas de ajedrez de la autora “Wadalupe”, disponibles en su blog y las canciones sobre el ajedrez que nos ofrece el músico Alejandro Oliva en su libro “Tocada, movida” especificado en la bibliografía.

Por su parte, desde el área de Educación Física se puede trabajar la motricidad gruesa relacionándola con el ajedrez a través del juego llamado Xecball. Un juego descrito con todo lujo de detalles en los libros de Martínez y Prió (2017) y Martínez (2017) reseñados en la bibliografía.

Imagen 9: materiales del Xecball obtenida de de la web www.xecball.es

5. DIFUSIÓN Y COMUNICACIÓN DEL PROYECTO.

La divulgación de este Proyecto del Ajedrez Escolar será desde dentro (colegio) hacia el exterior. Los medios a emplear serán los siguientes:

• En el Claustro de Profesores y en el Consejo Escolar, para que toda la Comunidad educativa pueda conocer la experiencia y las actividades del proyecto. Además, a través de las reuniones de Coordinación de la Comisión Pedagógica del centro, en las que se dará cuenta puntual del desarrollo de las actividades y repercusión educativa de las mismas.

• A través de la página web o el facebook del centro, donde se publicarán las actividades sobre el ajedrez y que se actualizarán periódicamente según se realicen.

. • Utilizando la página de la Consejería de Educación, Cultura y Universidades de Murcia.

• Por medio de la “Ajedrezteca” situada en la biblioteca del centro.

Concluida la explicación pertinente sobre la difusión, procede a describir la evaluación del proyecto.

6. EVALUACIÓN DEL PROYECTO.

La evaluación es un proceso fundamental para establecer el grado de consecución de los objetivos marcados. Podemos evaluar los resultados de forma directa mediante la observación o valoración de los resultados, considerando también el grado de motivación de nuestro alumnado.

Al final de cada trimestre, se realizará una evaluación sistemática para la comprobación del grado de consecución de los objetivos propuestos, que permita tomar las medidas oportunas al respecto.

Los aspectos a tener en cuenta para evaluar el proyecto serán los siguientes ítems:

- El nivel de participación y motivación del alumnado.
- El grado de consecución de los objetivos marcados.
- La progresión en los cuadernos de ajedrez del alumnado.
- El nivel de organización y dotación de recursos materiales y humanos implicados.
- El nivel de participación en la creación de la “ajedrezteca”

Además, **a final de curso**, se utilizará como instrumento de evaluación un “Cuestionario del Ajedrez” que recogerá las opiniones y conocimientos sobre el ajedrez como recurso didáctico y que irá dirigido al alumnado, a las familias y al profesorado. Los datos recogidos a través de ellos han de ser posteriormente analizados y sus conclusiones establecidas en la memoria anual del centro.

Para finalizar, la bibliografía de consulta es descrita a continuación.

7. BIBLIOGRAFÍA

Albarracín, L. (coord.) (2018). *Aprender a enseñar matemáticas en la Educación Primaria.* Síntesis

Blanchard, M. y Muzás, MªD. (2016). *Los proyectos de aprendizaje.* Narcea, Madrid

Gili, S. y Sánchez, E. (2022). *Ajedrez en el aula de Primaria.* Servicio de Publicaciones de la Consejería de Educación de la Región de Murcia

Martín, M. (2018). *El trabajo por proyectos.* Santillana Activa

Martínez, G. (2017) *Xecball deportivo. Reglamento* . Balagium Editors

Martínez, G y Prió, J. (2017). *El ajedrez y la motricidad.* Balagium Editors

Moreno, D y Moreno, D. (2019). *Jaque al aprendizaje*. Más que libros

Oliva, A. (2020) *Tocada movida.* Balagium

8. WEBGRAFÍA

www.ajedrezconhumor.blogspot.com/

www.ajedrezenelaula.com/

www.aprendeconrey.com/

www.lichess.org/

www.xecball.es

CoA003 Diseño de un taller matemático con alumnos con TDHA y sin TDHA

Yolanda Colom Torrens
ycolomtorrens@gmail.com
Universitat d'Andorra

Núria Rosich Sala
nuriarosich@ub.edu
Universidad de Barcelona

Núcleo temático: evaluación, inclusión.

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

El trabajo que presentamos se inscribe en los ámbitos de la resolución de problemas matemáticos y de la diversidad en el aula. El principal objetivo es el de mostrar los resultados obtenidos al realizar un taller de resolución de problemas matemáticos con alumnos (con TDHA/ sin TDHA) de (cuarto curso de Secundaria). En nuestro estudio y para la resolución de problemas más complejos de los que estaban acostumbrados a realizar hemos introducido el uso de materiales didácticos para facilitar el diálogo. Previamente hemos realizado actividades con este material para asegúranos de que los alumnos comprendían su uso. Enfatizamos el trabajo por parejas que nos ha mostrado que ambos alumnos de la pareja (con TDAH y sin TDHA) han logrado mejorar su nivel competencial cuando realizan tareas de forma cooperativa.

Palabras clave: TDHA, Problemas Matemáticos, Competencias, Taller Matemático, Secundaria

1. Introducción

El problema de la investigación surge a partir de una realidad social y escolar cada vez más presente en nuestras aulas. El número de alumnos diagnosticados con TDHA en los distintos niveles educativos obligatorios es aproximadamente del 5 % de la población, aunque se piensa que esta cifra pueda rondar el 10 % real, aunque puede haber aún más alumnos no diagnosticados. Es por ello que pensamos que el estudio de cómo este alumnado resuelve los problemas matemáticos contextualizados y el conocimiento de algunas de sus dificultades, puede ser interesante para la comunidad científica.

El taller de matemáticas que proponemos creemos que ha sido propicio para conocer más a fondo los razonamientos que realizan este alumnado junto con sus compañeros sin déficit y las interacciones que se producen en su ejecución en las aulas integradas en la Educación Secundaria en las escuelas andorranas. Otro aspecto es la descripción del uso del material didáctico, en nuestro caso el geoplano, en el aprendizaje y resolución de problemas matemáticos en el ámbito de la didáctica de la matemática junto con compañeros sin déficit.

Los estudios precedentes describen de forma más o menos detallada las dificultades que esta población muestra en la resolución de problemas matemáticos de estructuras matemáticas aditivas y multiplicativas. Pero hasta ahora no se disponen de estudios donde se muestren resultados sobre la resolución de problemas más complejos (tomamos el sentido que se da de complejidad el utilizado en los informes PISA) con alumnado con TDHA en Educación Secundaria Obligatoria. Los resultados del estudio piloto que realizamos en los primeros años de la experimentación nos mostraron las pocas competencias que tenían estos alumnos respecto a sus compañeros sin déficit. El desarrollo del estudio nos ha seguido proporcionando resultados sobre el nivel competencial. Todos estos resultados nos empiezan a dar indicios sobre algunas de las pautas didácticas a considerar en la enseñanza de la resolución de problemas.

2. Referentes teóricos

El término “competencia matemática” hace referencia al carácter funcional del conocimiento matemático y en la posibilidad de aplicarlo de forma variada, reflexiva a una multiplicidad de situaciones de los más diversos tipos. Para que dicho uso sea posible y viable se requiere un considerable volumen de conocimientos y habilidades matemáticas fundamentales. La competencia matemática presupone, sin duda, ese tipo de conocimientos, por lo que tampoco puede reducirse sólo al dominio de la terminología, los datos y los procesos de las matemáticas ni a la habilidad para realizar ciertas operaciones y poner en práctica determinados métodos. La competencia matemática supone una combinación creativa de estos elementos con objeto de responder a las exigencias que plantean las situaciones externas.

Una de las capacidades esenciales que comporta el concepto de competencia matemática es la habilidad de plantear, formular e interpretar problemas mediante las matemáticas en una variedad de situaciones o contextos. La gama de contextos abarca desde los puramente matemáticos hasta aquellos otros que, en principio, no presentan o aparentan poseer una estructura matemática: es tarea de quien plantea o trata de solucionar el problema introducir de forma satisfactoria la estructura matemática. Conviene poner de relieve, asimismo, que la definición no se circunscribe a un conocimiento básico de las matemáticas, sino que incluye el empleo y el uso de las matemáticas en unas situaciones que van desde lo cotidiano a lo excepcional, desde lo sencillo a lo complejo.

La evaluación matemática del programa PISA se fundamenta en un enfoque realista, recogiendo la idea de competencia matemática que subyace en el proyecto KOM (Niss, 2003), según el cual el proceso de formación debe ayudar a los estudiantes a conseguir dos grupos de competencias:

La habilidad de poner y responder cuestiones sobre y con las matemáticas	La habilidad de manejarse con las herramientas y el lenguaje matemático
A1.Pensar matemáticamente. Comprender y utilizar los conceptos dados: abstraer conceptos y generalizar resultados.	B.1.Utilizar diversas representaciones. Ser capaz de pasar de una a la otra.
A2. Formular y resolver problemas matemáticos.	B.2.Utilizar el lenguaje de los símbolos y de sistemas formales matemáticos. Es decir, codificar símbolos y lenguaje formal; traducir de un lenguaje a otro; tratar fórmulas y expresiones simbólicas, etc.
A3. Ser capaz de analizar y construir modelos matemáticos en relación a otras áreas. Llevar a término modelizaciones en contextos dados, matematizar situaciones.	B.3.Ser capaz de comunicarse en, con y sobre las matemáticas, es a decir interpretar textos escritos en los diversos lenguajes; escribir textos con diferentes niveles de precisión, etc.
A.4. Ser capaz de razonar matemáticamente. Seguir y avaluar los razonamientos matemáticos ajenos, comprender el que es y no es una demostración, ser capaz de llevar a término razonamientos informales y formales.	B.4.Manejar las ayudas y herramientas matemáticas, tener conocimiento, saber sus limitaciones y usarlas reflexivamente.

Tabla 4: Tabla de competencias. Fuente: Elaboración propia a partir de las competencias PISA

En nuestro taller se indagan las competencias por el tipo A2, A4 y B2, B3 debido al tipo de problemas planteados.

En el Informe PISA la competencia matemática se estructura en función de tres grandes dimensiones: contenidos matemáticos, procesos implicados y situaciones en las cuales se platean los problemas.

Contenidos	Procesos	Situaciones
Espacio-forma	Reproducción	Contexto personal
Cambio y relaciones	Conexión	Contexto escolar
Cantidad	Reflexión	Contexto comunitario
Incertitud		Contexto científico

Tabla 2: Cuadro de dimensiones estudiadas en el Informe PISA. Fuente: Elaboración propia a partir de las competencias PISA

De acuerdo como se define en el proyecto PISA la evaluación matemática se establece de acuerdo a cuatro subdimensiones, al entender que las capacidades del alumnado en estás son relevantes, para mostrar si estos con capaces de traspasar lo que han aprendido en el ámbito escolar a la vida cotidiana.

El taller se ha planteado utilizando las competencias de la Generalitat de Catalunya (2013) puesto que por proximidad y por cultura compartimos muchos de los aspectos educativos. Siguiendo las directrices de los diferentes informes PISA, la Generalitat de Catalunya (2013), nos dice sobre la resolución de problemas, que los alumnos han de: entender, experimentar, estimar, tantear, conjeturar, planificar estrategias de resolución, aplicar conceptos y herramientas matemáticas, comprobar la corrección y comunicar el resultado y el proceso seguido

3. Desarrollo de la experiencia

Para el diseño del taller se tuvo en cuenta la intervención de material didáctico manipulable por los alumnos, puesto que consideramos que éste podría ayudar a fijar la atención de todos los alumnos, especialmente los alumnos con TDHA. En nuestro taller se eligió el geoplano. Previamente a la realización del taller se diseñaron unas actividades previas con este material, con la finalidad de conocer el punto de partida de todos los alumnos y así poder valorar no sólo por comparación el conocimiento de cada uno.

Las actividades de resolución de problemas se escogieron problemas de tipo realista de los planteados en el estudio PISA y más especialmente los de tipo conexión.

Siguiendo las directrices dadas por la Generalitat de Catalunya (2013), respecto de la resolución de problemas, en que se definen 4 dimensiones con número variable de competencias en cada una.

En la dimensión de **resolución de problemas** encontramos las siguientes competencias:

Competencia 1. Traducir un problema a lenguaje matemático a una representación matemática utilizando variables, símbolos, diagramas y modelos adecuados.

Competencia 2. Emplear conceptos, instrumentos y estrategias matemáticas para resolver problemas.

Competencia 3. Mantener una actitud de investigación frente a un problema ensayando diversas estrategias.

Competencia 4. Generar preguntas de carácter matemático y plantear problemas.

Y respecto a la dimensión de la **conexión** tenemos las siguientes competencias:

Competencia 7. Usar las relaciones que existen entre las diferentes partes de las matemáticas para analiza situaciones y para razonar.

Competencia 8. Identificar las matemáticas implicadas en situaciones próximas y crear situaciones que se puedan relacionar con ideas matemáticas concretas.

3.1 Material para el alumnado

El taller se presenta a los alumnos mediante un PowerPoint. Consta de una introducción donde se muestra el material didáctico que vamos a utilizar el geoplano. Y un dosier individual para el trabajo por parejas.

3.2 Contenidos y objetivos

- **Contenidos**: Tratar contenidos de la geometría plana: Formas poligonales, especialmente perímetros y áreas.
- **Objetivos**: Distinguir y construir modelos de figuras lineales, planas y encontrar relaciones geométricas entre ellas y sus elementos que posibiliten alguna clasificación. Transformar modelos geométricos para obtener otros nuevos, conservando unas características (perímetro, área...) y variando otros.

3.3 Organización de las actividades. Previamente hay una breve explicación por parte del profesor de los conceptos básicos del geoplano. Para dar una base para que los alumnos puedan experimentar de forma individual y grupal de la geometría manipulando y dibujando las figuras.

3.4 Gestión del aula. Las actividades previas serán resueltas de forma individual y los problemas por parejas y las actividades finales también de forma individual para poder evaluar los aprendizajes que han realizado.

3.5 Actitudes a valorar. Además de los contenidos valorar positivamente las actitudes de interrogación e investigación ante cualquier situación, problema o información contrastable. Apreciación en la vida cotidiana, de los aspectos que pueden ser definidos y expresados a través de la matemática. Organización del trabajo: planteamiento, resolución, verificación de los resultados y valoración de su significado. Valoración positiva del propio esfuerzo para llegar a resolver una situación matemática. Adquisición de una progresiva autonomía en la búsqueda de ayudas y de herramientas, y en la valoración del trabajo propio.

3.6 Objetivos del taller

Los objetivos de la realización de taller son:

- Valorar si los materiales didácticos ayudan o no en la resolución de los problemas (en qué medida los utilizan, en qué grado ayudan) a los alumnos con TDHA.
- Analizar como resuelven los problemas a nivel competencial los alumnos con TDHA cuando los realizan en pareja.

- Describir cuáles son las dificultades en las que se encuentran en la resolución (ya sea observados o verbalizados por ellos).
- Examinar que interacciones se dan entre los alumnos con TDHA y sin TDHA cuando resuelven un problema matemático de forma conjunta.
- Potenciar el trabajo cooperativo entre las parejas en la resolución de problemas.
- Comparar los resultados obtenidos por los alumnos con TDHA (antes, durante y al finalizar el taller.

3.7 Temporización del proceso seguido

La duración del taller fue de 9 sesiones de 55 minutos aproximadamente. La planficación de ejecución se muestra a continuación:

Sesiones	Tema	Temporizacion	Material
Nº 1	Introducción del taller	Una hora	PowerPoint/ Dosier
Nº 2	Explicación de los materiales	Una hora	PowerPoint/ Geoplano /Dosier
Nº 3	Realización de las actividades previas con el geoplano	Una hora	PowerPoint/ Geoplano/Dosier
Nº 4	Realización de las actividades previas con el geoplano	Una hora	PowerPoint/ Geoplano/Dosier
Nº 5	Realización de las actividades previas con el geoplano	Una hora	PowerPoint/ Geoplano/Dosier
Nº 6	Realización de resolución de	Una hora y media	PowerPoint/ Geoplano/Dosier

	problemas por parejas. Actividad nº 1		
Nº 7	Realización de las actividades por parejas. Actividad nº 2	Una hora y media	PowerPoint/ Geoplano/Dosier
Nº 8	Actividades Complementarias del dosier.	Una hora	Dosier.
Nº 9	Actividades de evaluación individual	Una hora	Actividad evaluativa
Nº 10	Encuesta de valoración del taller por parte de los alumnos	10 minutos	Dosier.
TOTAL Sesiones	9	9 horas y 10 minutos	

Tabla 3: Tabla de las sesiones de clases realizadas del taller. Fuente: Elaboración propia.

3.6.1 Desarrollo de las sesiones

1) Durante la primera sesión se presentó los objetivos del taller.
2) En la segunda sesión se introdujo el material didáctico que se trabajaría a lo largo de las próximas sesiones.
3) En la tercera sesión se empezaron las actividades individuales utilizando el geoplano como material de soporte.
4) En la cuarta sesión se realizó una discusión entre los miembros del grupo de 4 alumnos sobre los resultados que habían obtenido de forma individual en la sesión anterior. Y continuaron con las actividades propuestas.

5) En la quinta sesión continuamos con las actividades previas siempre con las pautas que se daban en el PowerPoint que permitía al finalizar la resolución de los ejercicios autocorregir las actividades y comentarlos.
6) Durante la sexta sesión se realizó la primera actividad de resolución de problemas de tipo conexión (extraído de los ítems liberados PISA) por parejas.
7) Durante la séptima sesión continuamos con la actividad por parejas. Hemos de decir que cada pareja marcaba su ritmo de resolución, aunque había unas pautas para todos, es decir, todas las parejas habían de realizar los mismos problemas, aunque el ritmo podía ser diferente.
8) Durante la octava sesión la mayoría ya estaba realizando la segunda actividad de resolución de problemas.
9) Durante la novena sesión realizaron la prueba evaluación final individual.
10) En la décima sesión se discutió y comento la resolución de las actividades por parejas y se realizó una pequeña encuesta sobre los contenidos que habían aprendido.

3.8 Población del taller

Todos los alumnos de cuarto curso de Educación Secundaria de la escuela de Ordino formaron parte del Taller de matemáticas un total 48 alumnos. Para el trabajo por parejas se eligió un alumno con TDHA y otro sin TDHA procurando formar parejas que hubiera un buen entendimiento entre ellos, ya que uno de los objetivos era que pudieran llegar a resolver los problemas. Otro de los objetivos del taller era que los alumnos construyan estrategias conjuntas en la resolución de problemas, y consecuentemente negociar significados y mantener relaciones sociales como había dicho (Wertsch, 1991).

Aquí mostraremos la pareja nº4. Las características de cada uno de los miembros de la pareja son las siguientes:

Alumno 1 (con TDHA). Nació en Andorra. Tiene 15 años. Y es el único miembro de la familia que tiene dictaminado TDHA. En casa hablan diferentes idiomas (catalán y castellano). Realiza actividades extraescolares deportivas unas 5 horas semanales. Reconoce que las matemáticas le cuestan. No se siente seguro cuando realiza

matemáticas y cree que necesita ayuda en la resolución de problemas. Le gusta trabajar con el ordenador, pero no le gusta ir a la sala de informática a realizar actividades educativas. Cuando le informaron que tenía que realizar una prueba de matemáticas manifestó sentirse preocupado. Es un alumno que se distrae con facilidad y que se evade de las explicaciones. Pero aun estando atento le cuesta captar las explicaciones. TDHA diagnosticado y medicado. Su rendimiento académico tiene una nota media de 4,5.

Alumno 2 (sin TDHA). Nació en Andorra. Tiene 14 años. Es un alumno que le gustan mucho las matemáticas. Con un buen rendimiento académico y con un nivel de lenguaje alto. Habla con corrección el catalán, castellano, francés e inglés. Sus padres tienen ambos estudios universitarios. Y tiene intención de cursar un bachillerato científico según los cuestionarios de orientación académica. Su rendimiento académico es de una nota media de 8,2.

Además, hemos tenido en cuenta las notas de la prueba diagnóstica inicial y las notas de curso ordinario de clase para que posteriormente podemos realizar la triangulación de la adquisición de conocimientos en los tres ámbitos (notas de clase, nota de prueba diagnóstica y del taller).

Para la corrección de las actividades matemáticas por parejas y la prueba final del taller se han usado las mismas categorías que las usadas en el estudio PISA 2003.

Para el análisis cualitativo de datos de la resolución de problemas individuales se han realizado las transcripciones de las filmaciones de video y audio de las sesiones de clase y las entrevistas y se les ha asignado las categorías (Muria, 2005), análisis competencial de (Burgués y Serramona, 2013) y las interacciones de (Cobo,1998, Chico, 2014).

Para el estudio de las interacciones entre parejas (alumno con TDHA/ sin TDHA) nos encontramos que nos hacían falta introducir nuevas categorías, ya que en la bibliografía revisada no estaban presentes algunas de las mismas que podían caracterizar precisamente a los alumnos con TDHA. Por este motivo creamos un sistema de códigos de las interacciones con algunas categorías nuevas relacionadas con las de Chico (2014) y del trabajo de Cobo (1998). Así en los

códigos de inicio del problema se han contabilizado de forma individual (en la pareja) y se han contemplado además de las mencionadas por (Chico, 2014): aportar, compartir, dudar, iniciar, rechazar y apoyar. Y nosotros hemos añadido las de: desconectar, interrumpir y preguntar, para poder compararlas con los alumnos sin TDHA. También se han analizado al inicio, las categorías y se han codificado las de aclaración, ampliación, cuestionamiento, clarificación, duda, exposición, opinión, perífrasis, refutación y síntesis, dados por (Chico, 2014).

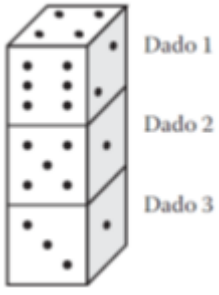
4. Análisis y Resultados

A continuación, mostramos el proceso de resolución del problema de los Dados realizado por la pareja nº 4, que han resuelto con éxito los dos apartados del problema.

Problema nº2. Dados

A la derecha hay un dibujo con dados.
Los dados son cubos con un sistema especial de numeración en los que se aplica la siguiente regla:
El número total de puntos en las dos caras opuestas es siempre siete.

a.- A la derecha se pueden ver tres dados colocados uno encima del otro. El dado 1 tiene cuatro puntos en la cara de arriba.
¿Cuántos puntos hay en total en las cinco caras horizontales que no se pueden ver (cara de abajo del dado 1, cara de arriba y de debajo de los dados 2 y 3)?



La respuesta del problema es :

Dados: pregunta 34

M555Q01		Aciertos	%
Subescala	Espacio y forma	Ítem de prueba piloto. Resultados no publicados.	
Situación	Personal		
Competencia	Conexiones		
Dificultad	-		

Puntuaciones:

Máxima puntuación
Código 1: 17.

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.
Código 9: Sin respuesta.

Imagen 1 : Fotografía puntuación problema. Fuente: OCDE.

Los alumnos de la pareja nº 4 han leído el enunciado conjuntamente y tienen tres dados de diferentes colores que van manipulando para aclararse en la realización de los ejercicios

A continuación, mostramos el dialogo que los alumnos han mantenido durante la realización del problema:

Alumno (sin TDHA). Vale tenemos esto (señalando el enunciado). Una cara más otra cara hace siete.
Alumno (con TDHA). Si
Alumno (sin TDHA). Tenemos cinco. Entonces los alumnos sitúan los dados como esta en el enunciado.

Alumno (con TDHA). Si cinco y uno.
Alumno (sin TDHA). De derecha a izquierda. El dado uno tiene 4 puntos en la cara de arriba. ¿Cuántos puntos tiene en total en las cinco caras ocultas? Que no las podemos ver.

Entonces levantan los dados y realizan las operaciones.

Alumno (sin TDHA). Tres y tres seis y cuatro diez. Y dos doce. Y cinco diecisiete.
Alumno (sin TDHA). Seis, diez, doce, diecisiete.

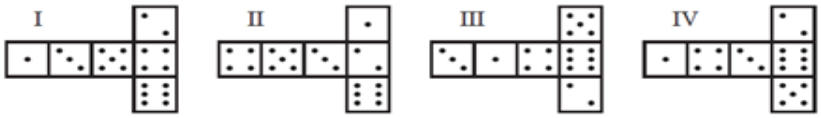
Alumno (con TDHA). Ves casi.

Los alumnos realizan el ejercicio en 1:13 min.

En la segunda parte del problema tenemos:

b.- Puedes construir un dado sencillo cortando, doblando y pegando cartón. Estos dados se pueden hacer de muchas maneras. En el dibujo siguiente puedes ver cuatro recortes que se pueden utilizar para hacer cubos, con puntos en las caras. ¿Cuál de las siguientes figuras se puede doblar para formar un cubo que cumpla la regla de que la suma de caras opuestas sea 7?

Para cada figura, rodea con un círculo Sí o No en la tabla de abajo.



Forma	¿Cumple la regla de que la suma de las caras opuestas es 7?
I	Si/No
II	Si/No
III	Si/No
IV	Si/No

Tabla nº 4: Tabla de puntuacion. Fuente: puntuaciones PISA.

La respuesta del segundo apartado es:

Dados: pregunta 35

M555Q02		Aciertos	%
Subescala	Espacio y forma	*OCDE*	63,0
Situación	Personal	*España*	59,6
Competencia	Conexiones	*Castilla y León*	64,4
Dificultad	503 (nivel 3)	*Cataluña*	62,1
		País Vasco	67,2

Puntuaciones:

Máxima puntuación
Código 1: No, Sí, Sí, No, en ese orden.

Ninguna puntuación
Código 0: Otras respuestas.
Código 9: Sin respuesta.

Imagen 2 : Fotografía puntuación problema. Fuente: OCDE.

Los alumnos de la pareja nº 4 realizan una lectura conjunta del enunciado.
A continuación, mostramos la transcripción de la resolución del problema:

Alumno (sin TDHA). Simplemente hemos de mirar como cuadraría. Vale
Alumno (con TDHA). Muy bien.
Alumno (sin TDHA). Hemos dicho intentar reconstruir un dado.
Alumno (sin TDHA). Este y este.
Alumno (con TDHA). Estos dos los levantamos y damos la vuelta. Es muy fácil.
Alumno (sin TDHA). Este y este serian opuestos. ¿No?
Alumno (Con TDHA). Es decir. Este y este serian estos de aquí.
Alumno (sin TDHA). Son opuestos. Entonces no cuadra porque 6 más 2
Alumno (con TDHA). Siete
Alumno (sin TDHA). Da 8 por lo que no cuadra ya que ha de hacer 7.
Los alumnos resuelven el dado I indicando que no vale 7. Seguidamente resuelven el dado II.
Alumno (sin TDHA). El segundo. Vale que hace 7.
A continuación vemos que el alumno con TDHA ya resuelve el dado III. Y señala en el dibujo el razonamiento realizado.
Alumno (con TDHA). Este de aquí es opuesto a este de aquí.
Alumno (sin TDHA). Este sí que cuadra. =:49
Alumno (sin TDHA). Este cinco, seis, siete, sí que cuadra.
Y finalmente, realizan la resolución del dado IV.
Alumno (con TDHA). Pero este.
Alumno (sin TDHA). Cinco, siete, si que cuadra
Alumno (sin TDHA). Cinco, seis y siete. Seis.
Alumno (sin TDHA). Este no cuadra.
Han realizado el ejercicio en 1:06.

Seguidamente mostraremos los resultados obtenidos por las parejas en la resolución del problema de los “dados”. Este problema ha sido evaluado siguiendo los criterios de los problemas PISA.

EVALUACIÓN ACTIVIDAD			Dados nº 1			Dados nº 2		
			1	0	9	1	0	9
Pareja nº 1	Alumno nº 1	con	X			X		
	Alumno nº 1	sin	X			X		
Pareja nº 2	Alumno nº 2	con		X		X		
	Alumno nº 2	Sin		X		X		
Pareja nº 3	Alumno nº 3	con	X			X		
	Alumno nº3	sin	X			X		
Pareja nº4	Alumno nº 4	con	X			X		
	Alumno nº 4	sin	X			X		
Pareja nº 5	Alumno nº 5	con	X				X	
	Alumno nº 5	sin	X				X	
Pareja nº6	Alumno nº 6	con		X		X		
	Alumno nº 6	sin		X		X		

Tabla 5: Tabla resumen resultados de la actividad Dados por parejas. Fuente: elaboración propia

Observamos que la mayoría de las parejas realizan el problema de forma correcta, obteniendo un buen resultado.

5. Conclusiones

Mostramos las principales conclusiones del taller de matemáticas realizado en las 9 sesiones con las 6 parejas de alumnos.

En el taller hemos visto como la resolución de problemas por parejas ha posibilitado que todos los alumnos participasen en colaboración en su ejecución implicándose en todo el proceso. Sabemos que para que la resolución de un problema llegue a

buen término, intervienen muchos factores (comprensión del enunciado, traducción del problema a un lenguaje matemático, nivel matemático, …), pero para los alumnos con TDHA un condicionante independientemente del nivel cognitivo de cada uno de los alumnos es la capacidad de estar atento durante la resolución del ejercicio. ¿Y esto como se consigue?, la realización de las actividades por parejas constituidas por un alumno con TDHA y uno sin, ha proporcionado una serie de interacciones positivas que han llevado a estos alumnos a la resolución de los problemas. El dialogo creado por la pareja es mucho más rico en cuanto a planteamiento, ejecución y resolución que si lo hubiesen realizado individualmente, esto nos lo muestra el hecho de que estos mismos alumnos en la prueba individual inicial cuando realizan problemas competenciales ellos solos sus resultados son mucho más pobres que al realizarlos en pareja. Sabemos por autores como (Cesar, 1999; Cobos, 1998, Chico, 2014) que el trabajo por parejas produce en general mejores resultados que de forma individual, pero nosotros aportados los resultados positivos de parejas heterogéneas.

Observamos que en los problemas en el que el tipo de enunciado era mucho más acotado, es decir, las preguntas eran más cortas y precisas, los alumnos obtienen mejores resultados. En cambio, en los problemas de pregunta abierta que permitía diversas estrategias de resolución obtienen peores resultados.

Creemos que al enfrentar a los alumnos en general (con TDHA/sin) a problemas de este tipo les ayuda a plantear cuestiones matemáticas que implican un razonamiento matemático de más nivel competencial a la vez que les lleva a razonar que metodología deben de emplear para poder resolver los problemas planteados.

Y la introducción de materiales como ha sido el geoplano (dados) ha aportado un nuevo punto de vista en la resolución de problemas (carpintero y dados)

En el problema de los Dados (los dados físicos han ayudado también a la resolución) y ha establecido en el caso de los alumnos con TDHA una confianza adicional del todo positiva para estos alumnos. Captando la atención de los alumnos, creando situaciones de pregunta y de complicidad necesaria para

conseguir un nivel competencial y un aprendizaje matemático que en definitiva es lo que siempre se intenta conseguir.

El diseño de un Taller matemático utilizando materiales didácticos ofrece la posibilidad de obtener mejores resultados en la resolución de problemas. Los alumnos manifiestan a lo largo de las sesiones que esta forma de trabajar les ha proporcionado una nueva visión de las matemáticas. Hemos observado que el trabajo por parejas (con TDHA/sin) ha hecho que los alumnos se implicasen, cada uno en su medida, en la realización de los problemas. Y ellos han manifestado que la utilización de materiales didácticos les ha permitido visualizar mejor la interpretación de los enunciados y los ha ayudado a hacer un trabajo más participativo. Desde hace tiempo se viene señalando desde el punto de vista didáctico el valor de los materiales didácticos en el aprendizaje didáctico sobre todo en geometría (Alsina, Burgués y Fortuny, 1988), en nuestro estudio hemos visto como los alumnos con TDHA utilizaban el material didáctico para la resolución de los problemas. El trabajo por parejas, especialmente con alumnos con TDHA, genera un punto de participación y de atención por parte de los dos alumnos de la pareja. Hemos visto como la mayoría de los alumnos con TDHA han conseguido finalizar las actividades propuestas con éxito, algunas de las actividades, incluso más sencillas que muchas veces no conseguían terminar. Por lo que se recomienda en la medida de lo posible introducir materiales que puedan ofrecer a los alumnos una nueva perspectiva en la resolución de problemas matemáticos. Ya sea materiales creados o que ellos mismos deban de construir. También el hecho de provocar una discusión, de generar preguntas en que son ellos los protagonistas y deben de contestar y de resolver de forma cooperativa, les responsabiliza a finalizar las actividades.

Referencias

Alsina, C, Burgués, C, Fortuny, J.M., (1988). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid. Sintesis.

César, M (1999); César, M. (1998).”¿ Y si aprendo contigo?. Interacciones entre parejas en el aula de matemáticas”. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas. Nº 16. Pp. 11-24. Chico, J. (2014*).” Impacto de la interaccion en grupo en la construcción de argumentacion colectiva en clase de matematicas”*. Tesis Doctoral.Universitat Autònoma de Barcelona

Cobo, P (1998),” *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos”*. Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Generalitat de Catalunya (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació secundària obligatòria.* Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat.Edició: Servei de Comunicació i Publicacions. Dipòsit legal: B-2885-2013.

Muria, S (2005). Indicadores de diagnóstico para la implementación de una web geométrica con alumnos deficientes auditivos en aulas inclusivas. Tesis Doctoral, Universitat de Barcelona.

Niss, M., (2003) “Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project” En Gagatsis, A. y Papastavridis, S. (eds.): *3 rd Mediterranean Conference on Mathematical Education 3-5 January* 2003. Athens: Hellenic Mathematical Society, pp. 115-124.

Wertsch J. V. (1991). Voices of the mind. Harvard University Press

CoR002 “Cazadores de sombras”

Eugenia Torres Martín
eugetor@gmail.com
Instituto de Secundaria Serra de Miramar de Valls (Tarragona, España)

Núcleos temáticos: 1. Recursos para el aula. 2. Procesos.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria/Bachillerato

RESUMEN

Las sombras que proyectan algunos objetos pueden sugerir preguntas y despertar curiosidades. Con este propósito se ha llevado al aula esta actividad planteada a partir de fotografías en las que las sombras son las protagonistas y premiada en el concurso de fotografía de la ABEAM[44] del año 2021 en la categoría de profesorado. El objetivo primordial es que el alumno[45] consolide y relacione conceptos geométricos a la vez que se le invita a mirar su entorno con ojos matemáticos para “cazar sombras” e inventar sus propios problemas. La experiencia de aula ha mostrado que la actividad se puede ir enriqueciendo con las propuestas del alumnado de manera que puede trabajarse más de una vez. En todo este proceso se persigue asimismo que el alumno tome consciencia tanto de la importancia que tiene saber justificar y expresar con claridad las respuestas que proporciona como también ofrecer un correcto “Feedback” a sus compañeros.

Palabras clave: Comunicación Matemática, Competencia Matemática, Invención de Problemas a partir de Fotografías Matemáticas

1. Introducción

Las fotografías matemáticas pueden ser un excelente recurso en torno al cual crear actividades ricas para trabajar en el aula. Con el propósito de “mirar” la geometría que nace de los objetos y las sombras que proyectan se diseñó la actividad que se

[44] Associació de Barcelona per a l’Estudi i l’Aprenentatge de les Matemàtiques.
[45] El término alumno y/o profesor hacen referencia a la persona con independencia de su género. Si se tratase de un alumno o profesor concretos se especificaría su género.

presenta en esta comunicación. Dicha actividad está compuesta a su vez por 6 actividades que se pueden adaptar a más o menos nivel de profundización. La primera, a modo de introducción, es más “calculística” para ir invitando a la reflexión en las siguientes y finalizar con 2 actividades en las que el alumno tiene que inventar las suyas.

El objetivo respecto al alumno es múltiple: primero, comprobar los conocimientos de geometría que conserva a largo plazo, consolidarlos, relacionarlos y corregir errores; segundo, utilizar una herramienta como el *geogebra* para trabajar la geometría; tercero, explicar correctamente lo que hace (procedimientos, cálculos), con un lenguaje apropiado, sabiendo justificar las estrategias de resolución que adopta; cuarto, que dentro del ámbito que se trabaja (la geometría y las sombras) realice fotografías matemáticas que le sirvan para plantearse y responder preguntas; y por último, que el trabajo y la reflexión a partir de fotografías matemáticas le permita mejorar (a corto plazo) la competencia matemática para resolver problemas.

Asimismo, en la línea del trabajo presentado conjuntamente con Jordi Deulofeu en 2019 en las 19JAEM “Gestiones diferentes en el aula de matemáticas para que los alumnos quieran resolver problemas” (Deulofeu y Torres, 2019), los alumnos han ofrecido a sus compañeros el “Feedback” de las actividades trabajadas (tanto las planteadas por el profesor como por ellos mismos) puesto que esta dinámica provoca en el alumno un aumento de motivación y le hace adquirir más seguridad.

La actividad se ha experimentado con alumnos de 4ESO y 1Bachillerato durante el curso 2021-22. La gestión en la clase ha mostrado, por un lado, que las actividades resultan abiertas y ricas, que pueden adaptarse a diferentes niveles de profundización y que incluso pueden “revisitarse” enriqueciéndolas con las aportaciones de los alumnos y llevándolas al aula más de una vez. Sin embargo, por otro lado, se han puesto en evidencia las carencias de los alumnos respecto a ciertos conceptos geométricos, así como la falta de recursos para explicar con claridad y profundidad lo que hacen. Todo ello invita a la reflexión y a un análisis en profundidad por parte del profesor para revertir estas dificultades y ofrecer al alumnado herramientas que mejoren su competencia matemática.

2. Contexto y metodología

La experiencia se ha llevado a cabo en el Instituto Serra de Miramar de Valls (Tarragona). El alumnado es diverso en cuanto a procedencia, nivel intelectual y social. Dicho centro es una "Comunidad de Aprendizaje" (CA) que trabaja con diferentes metodologías propias de las CA como son los grupos interactivos heterogéneos, con o sin dinamizador, y las tertulias dialógicas (Valls y otros, 2014).

Las actividades se han trabajado en grupo de 3-4 alumnos, dentro de las sesiones de resolución de problemas que se llevan a cabo semanalmente en el aula.

3. Competencias matemáticas

Las actividades presentadas en esta comunicación pretenden profundizar, principalmente, en las competencias básicas del ámbito matemático siguientes (Departament d'Educació, 2017):

- Dentro de la dimensión de resolución de problemas, la competencia de **generar preguntas** de carácter matemático y plantear problemas (n.4).
- Dentro de la dimensión de razonamiento y prueba, la competencia de construir, expresar y contrastar argumentaciones para **justificar** y validar las afirmaciones que se hacen en matemáticas (n.5).
- Dentro de la dimensión de comunicación y representación, las competencias de expresar ideas matemáticas **con claridad y precisión** y comprender las de los demás (n.10), y la de utilizar la **comunicación** y el trabajo colaborativo para construir y compartir conocimiento a partir de ideas matemáticas (n.11).

4. Enunciados de la actividad de aula y observaciones

Se presenta en lo que sigue cada actividad seguida de algunas observaciones y/o reflexiones surgidas a partir del trabajo del alumnado.

Para introducir el conjunto de las actividades, se incluyó el texto siguiente:

Las sombras que proyectan algunos objetos pueden sugerirte preguntas y hacerte descubrir curiosidades. Si das un paseo atento con ojos matemáticos, intentando "cazar sombras", entenderás lo que queremos decir.

Te proponemos algunas actividades a partir de fotografías en las que las sombras esconden ciertas curiosidades matemáticas. ¿Te animas?

4.1. Actividad 1

Observa atentamente las siguientes fotografías. Corresponden al tablero de una cesta de baloncesto como las que habrás visto tantas veces.

Imagen 1. Cesta 1

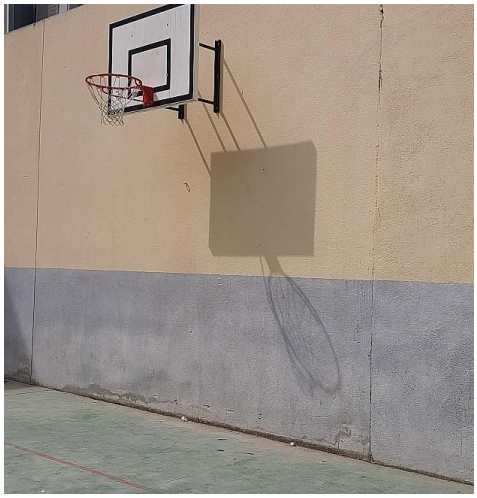


Imagen 2. Cesta 2

a) Fíjate en el tablero y en su sombra, ¿qué diferencias encuentras entre las dos fotografías?
b) En la fotografía cesta 1, ¿el tablero y su sombra tienen la misma área? Para comprobarlo necesitas tomar las medidas de algunas longitudes. Podrías

utilizar el *geogebra*, aunque no es obligatorio (si no lo has utilizado nunca sería una buena forma de introducirte). Inserta la foto, marca los puntos que necesites y mide los segmentos. Obtendrías, con *geogebra*, una imagen como la siguiente:

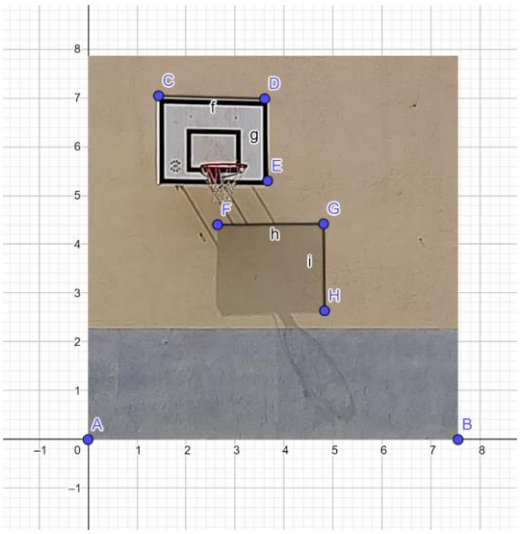


Imagen 3. Geogebra 1

NOTA: también puedes tomar medidas directamente sobre la fotografía.

c) Habrás comprobado que la base de la sombra del rectángulo que forma el tablero conserva la misma longitud que la base del tablero, pero ¿por qué las alturas no se conservan? Vamos a medir ángulos ya ver qué descubrimos. Fíjate en la siguiente imagen. Hemos medido los ángulos CIF=158,25^0 y DEG=158,48^0. Redondeando, ambos miden 158^0. Podemos considerar que son iguales. Mide los ángulos CIJ y DEH. ¿Qué sucede?
d) Coge ahora la segunda fotografía la que hemos llamado cesta 2, que está tomada en el mismo momento del día que la primera. Respecto a la primera, ¿qué observas?
e) ¿El tablero de la cesta 2 y su sombra tienen la misma área?

4.1.1. Observaciones y reflexiones Actividad 1

Se trata de una actividad planteada como introductoria, en la que se trabaja la geometría plana pero también la espacial. Se puede adaptar a diferentes niveles según los conceptos que se quieran trabajar (o más bien “revisitar”) y sus niveles de

profundización: cuadriláteros, paralelismos, ángulos, prismas... Al llevarla al aula se puede observar qué queda en el alumnado, pasado el tiempo, sobre geometría plana y sobre todo, qué ha pasado con algunas “creencias” de los alumnos, por ejemplo, sobre áreas y perímetros que tanto cuestan de eliminar.

Más concretamente, la actividad provocó algunas discusiones sobre medidas y errores de aproximación. Por ejemplo, al medir algunos ángulos, tal como muestran las fotografías siguientes, se justificó si los ángulos eran iguales o no y por qué no todos tenían las mismas medidas:

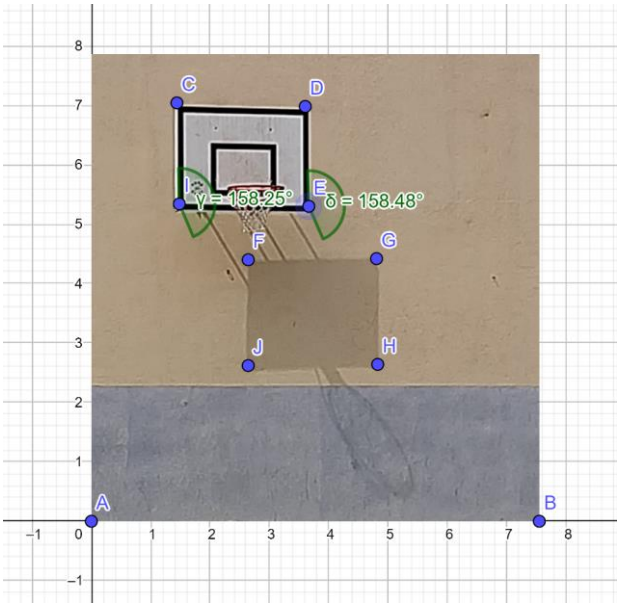


Imagen 4. Geogebra 2

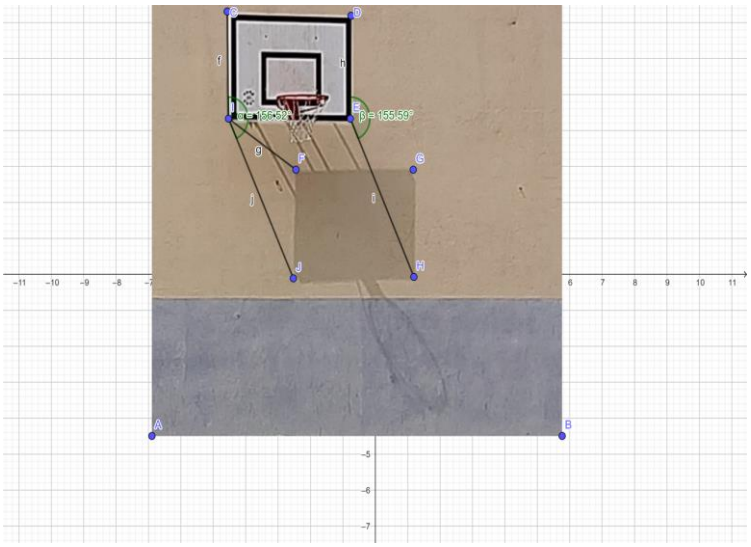


Imagen 5. Geogebra 3

La situación de los vértices con *geogebra* provoca errores de aproximación porque medir siempre comporta un margen de error a considerar. En este punto conviene aprovechar la discusión en grupo clase que se genera para insistir que las preguntas (y las respuestas) no tienen por qué ser cerradas y que lo importante es saber justificar la respuesta que se da.

También surgieron cuestiones interesantes relativas a hacer la fotografía en diferentes momentos de un día y desde la misma posición de manera que el área de la sombra fuera el doble del área del tablero, o una fracción concreta de la misma. En el caso de 1Bachillerato, se apuntó a la existencia de una función continua que pudiese dar todas las proporciones área de la sombra/área del tablero. Asimismo se proporcionaron enunciados equivalentes a algunos de los planteados en los apartados b) y c). Por ejemplo, en el siguiente prisma formado entre el tablero y su sombra, si las aristas correspondientes fuesen paralelas, el prisma sería regular y se conservarían los ángulos.

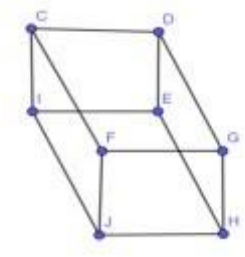


Imagen 6. Prisma 1

La fotografía de la cesta 2 no está hecha frontalmente como la de la cesta 1 y provocó la discusión de si la cesta y su la sombra eran rectángulos o trapecios, porque si bien el ojo humano ve trapecios ¿en la realidad lo son? Es una reflexión interesante y poco frecuente sobre la perspectiva.

4.2. Actividad 2

Si das un paseo por la costa puedes encontrar fachadas de casas de pescadores realmente pintorescas. Observa con detenimiento las siguientes fotografías, una de unas casas de vista más general y la otra con uno de los balcones de las casas de cerca.

Imagen 7. Fachada

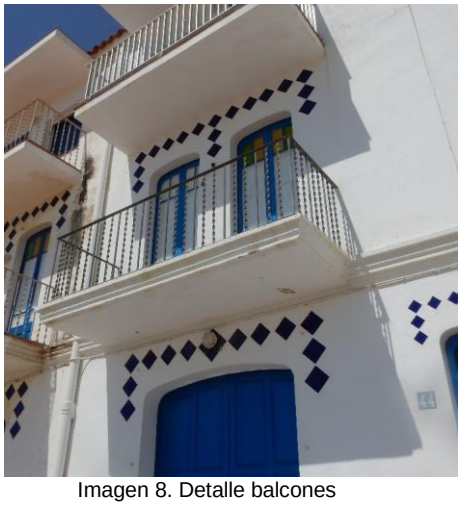


Imagen 8. Detalle balcones

a) Continua “cazando” sombras. Fíjate en la segunda fotografía, en la llamada “detalle balcones”. Concretamente en el suelo del balcón (cualquiera de los dos) y su sombra. ¿Qué debería ocurrir para que tengan la misma área?
b) ¿Habrá algún momento del día en que el suelo del balcón y su sombra coincidirían en superficie? Justifica la respuesta diciendo qué condición debería cumplirse.
c) ¿Habrá algún momento del día en que el suelo del balcón y su sombra coincidan en perímetro? Justifica la respuesta.

d) ¿Habrá algún momento del día en que el suelo del balcón y su sombra coincidan en ambas cosas, área y perímetro? ¿Por qué? Justifica la respuesta.

4.2.1. Observaciones y reflexiones Actividad 2

Se trata de una actividad planteada no tan "calculística" como la actividad 1, sino más reflexiva, con el objetivo de trabajar la expresión matemática y la justificación de lo que se hace.

Cuando se llevó esta actividad al aula se constató lo mucho que queda por hacer para que el alumnado sea preciso al utilizar el lenguaje para justificar sus respuestas, y al mismo tiempo, cómo las expresiones del alumno muestran sus carencias a nivel de conceptos, principalmente en 4ESO. Por ejemplo, a la cuestión de qué debería ocurrir para que el suelo del balcón y su sombra tengan la misma área, algunos alumnos contestaron "tendrán que estar colocadas igual, tanto la sombra como el suelo del balcón (¿?)" o "la sombra tenía que estar a la misma altura y estar recta". Fijémonos cómo después de cursos trabajando la geometría plana, el alumnado no tiene bien comprendidos conceptos como la perpendicularidad.

Asimismo, a la pregunta de si habría algún momento del día en que el suelo del balcón y su sombra tuviesen el mismo perímetro y qué condición se tendría que dar, se dieron respuestas del tipo "no, porque la sombra estará más estirada que la original resultando que nunca tendrá el mismo perímetro". ¿Qué quiere decir que la sombra estará más estirada? ¿Cómo expresarlo en términos de longitudes, segmentos, etc.?

Este tipo de respuestas pone en evidencia las carencias del alumnado en la expresión de sus justificaciones porque posiblemente no se acostumbra a trabajar, por lo que esta actividad se mostró como una oportunidad para empezar a trabajar la conversación matemática, la expresión y la comunicación precisa de lo que se sabe.

A modo de ejemplo, el hecho de trazar algunos segmentos y dibujar sobre la fotografía los polígonos implicados (ver imagen 9), ayudaría a visualizar la situación

con más claridad: “Como suelo y sombra comparten la base, para coincidir en área tendría que pasar que…”.

Imagen 9

4.3. Actividad 3

Cambiamos ahora de entorno y paseamos por el campo. Aquí tienes dos fotografías en las que aparecen una farola y unos palos de madera, todos con sus sombras proyectadas.

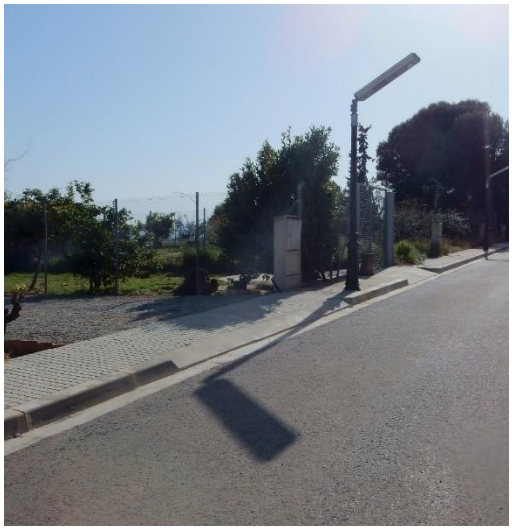


Imagen 10. Farola 1

Imagen 11. Palos de madera

a) Podemos considerar el triángulo formado por cada palo y su sombra, como puedes ver aquí. Los triángulos que recogen las fotografías, ¿son rectángulos?
b) ¿Y los triángulos, en la realidad, son rectángulos?
c) Justifica si se dan diferencias entre la realidad y lo que reflejan las fotografías y por qué.
d) Supongamos ahora que el triángulo ECD, en la fotografía de la farola, es recto (imagen 12). ¿Cómo debería ser el triángulo para que la farola y su sombra midieran lo mismo?

Imagen 12. Farola 2

e) ¿Qué debería pasar con los ángulos de este triángulo para que la farola y su sombra midieran lo mismo?
f) Supongamos ahora que el triángulo en la fotografía de los palos es rectángulo. Mide los demás ángulos y deduce a partir de sus medidas si el triángulo es escaleno o isósceles.
g) Cualquiera de los dos triángulos, ¿podría ser equilátero? ¿Por qué? Justifica la respuesta.

4.3.1. Observaciones y reflexiones Actividad 3

Se trata de una actividad planteada para reflexionar conceptos, en este caso, sobre triángulos. Cuando se llevó esta actividad al aula funcionó mucho mejor que las anteriores, constatando que a nivel de polígonos, el triángulo es posiblemente el más conocido por los alumnos. Ahora bien, aunque ya en la actividad 1 se había reflexionado sobre las proyecciones (lo que el ojo humano ve y la realidad) algunos alumnos afirmaron en las preguntas a) y b) que los triángulos que mostraban las fotografías no eran rectángulos porque no había ángulos de 90^0. Incluso a la pregunta b) de si en la realidad son triángulos rectángulos, algún alumno contestó que en la primera foto no y en la segunda sí (¿?). En las cuestiones d) e) y f) el alumnado demostró solvencia respecto a los conocimientos sobre triángulos rectángulos, obtusángulos, isósceles y equiláteros. No obstante, se vuelve a constatar la falta de precisión en las respuestas de algunos alumnos. Por ejemplo, en el apartado f) donde se preguntaba si alguno de los triángulos podía ser equilátero, un alumno respondió que “no, porque los ángulos del triángulo equilátero son demasiado pequeños para que lo puedan ser”.

Esta actividad puso de manifiesto ciertas dificultades por parte del alumnado para visualizar en su entorno figuras geométricas. Es decir, un triángulo dibujado en el papel es más reconocible como tal que un triángulo formado por una farola y su sombra. De aquí la oportunidad que representa el poder trabajar con fotografías matemáticas, para que el alumno eduque su ojo matemático en el entorno, en los objetos cotidianos, en todo, y le pueda ayudar en su proceso de abstracción.

Cuando se llevó esta actividad al aula se constató lo mucho que queda por hacer para que el alumnado sea preciso al utilizar el lenguaje para justificar sus respuestas y al mismo tiempo cómo las expresiones del alumno muestran sus carencias a nivel de conceptos, principalmente en la ESO.

4.4. Actividad 4

Fíjate en estas escaleras. La sombra se va moviendo según la hora del día.

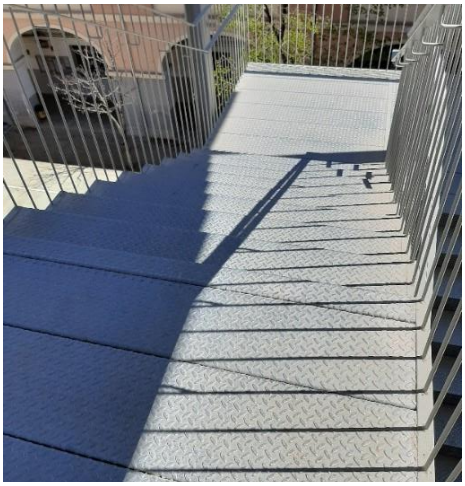


Imagen 13. Escaleras 1

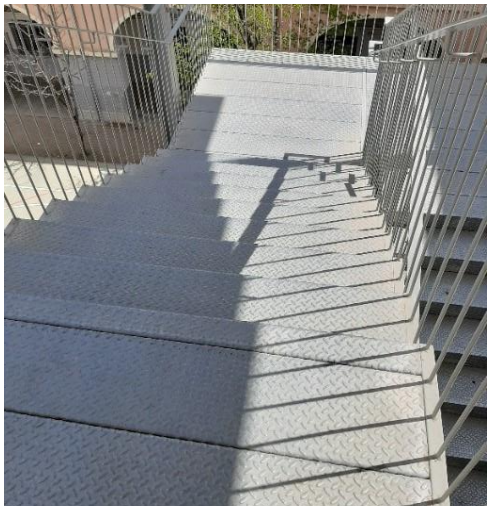


Imagen 14. Escarelas 2

a) *Considera el polígono ACDE construido a partir de la fotografía de la izquierda, la denominada Escaleras 1. ¿De qué polígono se trata?*

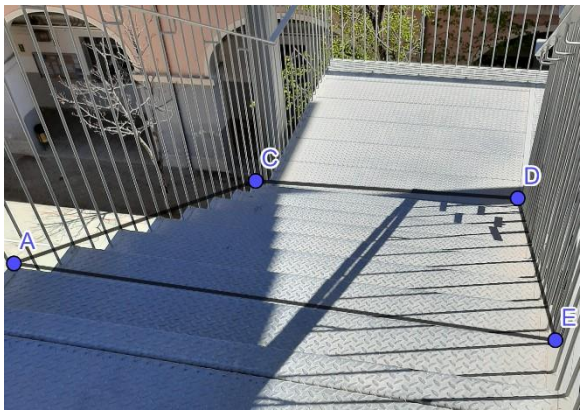


Imagen 15. Escaleras 3

b) Halla su área.
c) Céntrate en este polígono ACDE y considera ahora el área que forma la sombra de la izquierda, la mayor, dentro de este polígono. Calcula su área.
d) ¿Qué porcentaje del polígono ACDE representa el área de la sombra que acabas de calcular?
e) Repite el procedimiento para encontrar qué porcentaje ocupa la mayor área de la sombra en la fotografía llamada Escaleras 2.
f) Sobre el polígono ACDE, dibuja cómo debería ser la sombra para que su área represente la mitad del área del polígono. Justifica la respuesta.

4.4.1. Observaciones y reflexiones Actividad 4

En esta actividad el alumno debía realizar ciertos cálculos para poder responder a las preguntas planteadas. Lo más habitual fue dar respuestas sin justificar o insuficientemente justificadas en algunos de los apartados. Por ejemplo, en las cuestiones c) y d) sobre el área del polígono ACDE y el porcentaje que representa, se dieron respuestas como que “el área es un tercio del polígono 5,43 cm^2” (respuesta sin justificar) o “será un 40% ya que dividiéndolo en 5 partes (imagen 16), la sombra llenaría 2 partes” (respuesta sin justificar suficientemente).

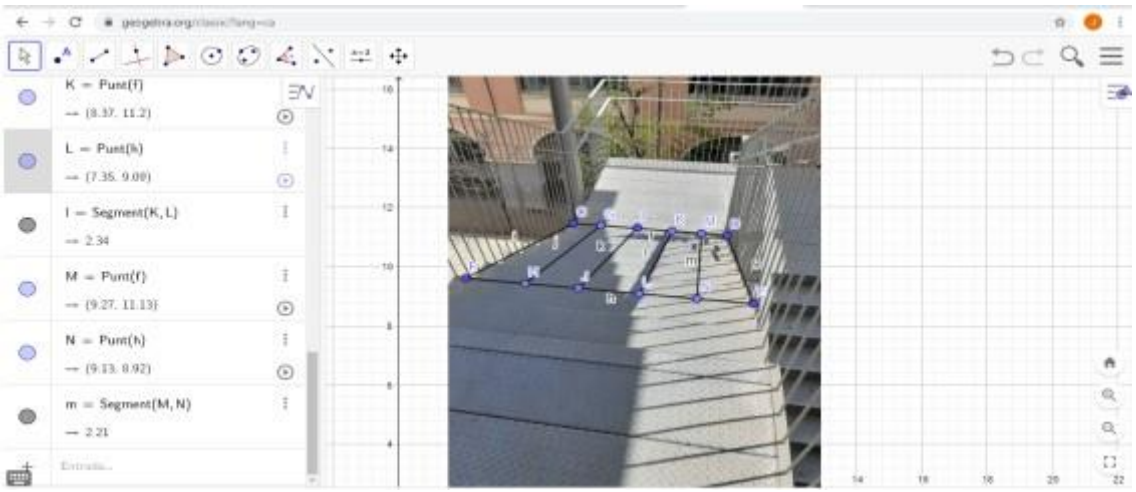
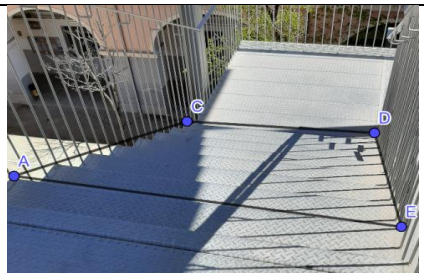


Imagen 16

Sin embargo, este tipo de respuestas sin justificar fueron aprovechadas para volver a llevar la actividad al aula (como se ha explicado en la introducción) con el enunciado siguiente:

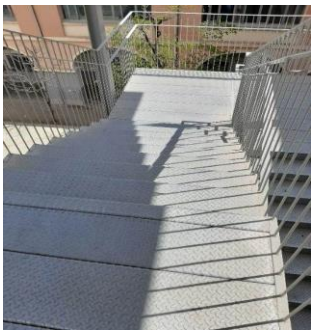


Considera el polígono ACDE construido a partir de la fotografía y el área que forma la sombra de la izquierda, la más grande, dentro de este polígono.

Un grupo de alumnos ha respondido que su área es un tercio del polígono: 5,43 cm^2.

1. Justifica cómo se ha encontrado esta respuesta (procedimiento).

2. Justifica si el cálculo del área es correcto y por qué.



Repitiendo el procedimiento para encontrar qué porcentaje ocupa el área de la sombra más grande en la fotografía de la derecha, un grupo de alumnos ha dicho que un 40%.

3. Justifica cómo se ha encontrado esta respuesta (procedimiento) y si es correcta o no.

Tabla 1

Además de “revisitar” algunas de las actividades en las sesiones de problemas, los alumnos tuvieron que explicar sus respuestas al grupo clase. Que el alumno ofrezca

el “Feedback” a sus compañeros es una dinámica en la gestión del aula que provoca que el alumno se sienta copartícipe y corresponsable en la tarea de resolver problemas, aumentando su motivación y adquiriendo más seguridad (Deulofeu Y Torres, 2019). De esta manera se le forzaba a justificar mucho mejor sus respuestas.

4.5. Actividad 5

A partir de estas fotografías:

Imagen 17. Escaleras de madera

Imagen 18. Escala doble

a) Plantéate una o dos preguntas.
b) Encuentra las respuestas.

4.6. Actividad 6

Espero que hayas descubierto unas cuantas cosas sobre sombras o relacionadas con ellas. Seguro que tienes ojos para encontrar nuevas. ¡Adelante! Te propongo que busques sombras y hagas fotos, en diferentes momentos del día si puede ser. Intenta que aparezcan figuras planas distintas a las trabajadas anteriormente.
Hazte preguntas y, sobre todo, busca las respuestas.

4.6.1. Observaciones y reflexiones Actividades 5 y 6

El objetivo de esta 2 actividades es el de **introducir** al alumno en la invención de problemas de una manera más asequible a priori, a partir de fotografías. La experiencia de aula reveló la complejidad de la misma sobre todo en alumnos que presentan dificultades en la resolución de problemas y/o que tienen algunas carencias en los conocimientos matemáticos que se necesitan. Las investigaciones sobre la invención de problemas en matemáticas muestran que el alumno que es un buen "resolutor" de problemas se maneja bien en la invención de los mismos, y así se reflejó en sus fotos propuestas (Singer y otros, 2015). El alumnado que por lo contrario tenía ciertas dificultades, planteaba cuestiones muy parecidas a las de la actividad aquí presentada, a partir de fotografías parecidas, por mucho que se insistiera en proponer cuestiones distintas a las que habían salido en clase. También hubieron propuestas interesantes que sin embargo fueron mal resueltas por el alumno (se les pedía plantear preguntas y contestarlas). Todo ello invita a una reflexión por parte del profesorado: las dificultades observadas en las propuestas del alumnado pueden deberse a lo poco familiarizado que está con este tipo de actividades (a partir de fotografías); o bien a su inseguridad a proponer otras cuestiones por dominar poco los conceptos trabajados; o simplemente a que prefiera situarse en una zona de confort y no ir más allá.
A modo de ejemplo, se presentan y comentan algunas de las propuestas de los alumnos:

4.6.2. Propuesta 1

Imagen 19

a) ¿Por qué la longitud de la sombra es más grande que la de la farola?

b) Si la sombra está hacia la derecha, ¿en qué lado está el sol?

c) ¿Qué longitud tiene la sombra y la farola?

d) ¿De cuántos grados es el ángulo?

Observación: es una propuesta calcada de la actividad 3, en la que las dos primeras preguntas sorprenden por el poco contenido matemático que contienen en su formulación. Y las dos siguientes porque se reducen a hacer una medición, con *geogebra*, por ejemplo. Además el alumno no resolvió las cuestiones.

Este tipo de propuestas que ofrece el alumno le indican al profesorado, una vez más, todos los aspectos que hay que trabajar (conceptos, profundidad de los mismos, expresión…).

4.6.3. Propuesta 2

Imagen 20

Dibuja cómo tendría que ser la sombra del libro para que tenga la misma área que el libro. Ten en cuenta que la foto del libro está hecha desde otra perspectiva de manera que no es un rectángulo.

Observación: esta propuesta es más interesante que la anterior, si bien el tipo de pregunta no va más allá de las trabajadas en las actividades de clase. Sorprende el comentario sobre la perspectiva desde la que está hecha la foto. No se sabe a priori a qué se refiere el alumno. En esta propuesta, el alumno tampoco resolvió la cuestión planteada.

4.6.4. Propuesta 3

Imagen 21

a) ¿Qué forma tiene la sombra y la pelota?

   Respuesta: La sombra es un óvalo y la pelota una circunferencia.

b) ¿Tiene la misma área?

Respuesta: No tienen la misma área ya que el área de la sombra es de 37,87cm^2 y la de la pelota 28,42cm^2.

Observación: se presenta aquí una propuesta distinta, interesante. Se barajan áreas y volúmenes aunque el alumno parece no distinguir ambos conceptos. Por otro lado, si bien resuelve las preguntas que plantea, pone directamente los resultados sin que se expliciten ni los procedimientos, ni los cálculos, etc. Se menciona que la sombra de la pelota es un óvalo, ¿cómo ha calculado el alumno su área?

Esta actividad fue llevada con posterioridad al aula con el formato siguiente:

A partir de la fotografía (imagen 21), un grupo de alumnos ha planteado las preguntas siguientes que ha respondido como se muestra: **3.1.** ¿Qué forma tienen la sombra y la pelota? Respuesta: la sombra es un óvalo y la pelota una circunferencia. Analiza esta respuesta y **explica** si es correcta o no y por qué. **3.2.** ¿Tiene la misma área? Respuesta: No tienen la misma área ya que el área de la sombra es de 37,87cm^2 y la de la pelota 28,42cm^2. Analiza esta respuesta y **justifica** si es correcta o no y por qué.

Tabla 2

Observación: esta reformulación de la propuesta 3 para trabajarla en el grupo clase generó en el aula actividad y reflexiones más productivas. Respecto al apartado 3.1, salieron los conceptos de elipse, circunferencia, círculo, esfera, perímetro, área y volumen, así como las diferencias entre ellos. Se trata de conceptos que a cierto alumnado todavía le cuesta distinguir en 4ESO (los de área y perímetro continúan siendo un clásico, ya no digamos el volumen). Y respecto al apartado 3.2, se utilizó el *geogebra* para hacer cálculos y justificar suficientemente que las respuestas dadas no eran correctas. Hubo una reflexión interesante respecto a las unidades de medida que utiliza el *geogebra*. Por ejemplo, si se mide la longitud de un segmento

y el software te muestra en pantalla 3,72… ¿Qué son? ¿cm?, ¿dm?, ¿cómo saberlo?

4.6.5. Propuesta 4

Escaleras de madera (ver imagen 17):

¿Qué tipo de triángulo es el que aparece como sombra?

Respuesta: El triángulo que aparece es isósceles

Escalera doble (ver imagen 18):

¿En qué momento del día, más o menos, crees que está hecha esta foto?

Respuesta: creo que está hecha hacia el mediodía ya que las sombras son bastante cortas.

Observación: En la imagen de las escaleras de madera desconocemos a qué triángulo de los que aparecen en la imagen se refiere el alumno con su pregunta. La respuesta es una afirmación sin justificación. Y en la imagen de la escalera doble, que se prestaría incluso para visualizar una pirámide, la propuesta que se hace "¿En qué momento del día…? sorprende por lo que respecta a su formulación y contenido.

5. Conclusiones

La utilización de fotografías matemáticas como base para proponer actividades de matemáticas pero también para generar preguntas se manifiesta como una herramienta rica para trabajar en el aula, tanto si el alumno trabaja en grupo o de forma individual.

En primer lugar, sirve para mostrar los conocimientos de geometría plana que el alumno tiene, revisitarlos y corregir errores. En segundo lugar, es útil para trabajar las competencias matemáticas de justificar las afirmaciones y los cálculos que se hacen (competencia n.5), expresarse oralmente y por escrito con claridad y precisión "matemática" (competencia n.10) y saber comunicar a los compañeros del grupo los cálculos que se hacen (competencia n.11). Y en tercer lugar, para introducir al alumno en la generación de preguntas de carácter matemático a partir

de fotografías (competencia n.4). Asimismo, una fotografía matemática es un contexto excelente para plantear preguntas con diversos niveles de profundización y para crear actividades ricas y abiertas. Mi experiencia, no sólo de este curso 2021-22, es que una fotografía puede dar mucho de sí puesto que se puede “estirar” de múltiples maneras y desde diferentes ámbitos.

Ahora bien, las dificultades que se observan al llevar al aula esta actividad de fotografía muestran que un curso escolar es poco tiempo para obtener avances significativos en todas las competencias matemáticas aludidas más arriba. Si bien el hecho de “revisitar” algunas actividades enriquecidas con las propuestas del alumnado permite constatar algunos progresos, queda mucho trabajo por hacer, sobre todo en lo que respecta a las preguntas que generan los alumnos, para que no se limiten exclusivamente a “replicar” las cuestiones que ya han surgido previamente. Por otro lado, la dinámica de que el alumnado ofrezca a sus compañeros el “Feedback” de las actividades realizadas le permite mejorar en la competencia de saber comunicar lo que ha hecho, mucho más que cuando presenta por escrito al profesor el trabajo realizado.

La experiencia personal en otras gestiones de aula realizadas con anterioridad (Deulofeu y Torres, 2019) indica que la posibilidad de tener los mismos alumnos en dos cursos sucesivos permite obtener, en general, mejores resultados, por lo que los objetivos a largo plazo (un mínimo de 2 o 3 cursos) deberían ser ambiciosos. No obstante, también conviene ser realista y es mejor que durante un curso escolar, el propósito sea el de centrarse únicamente en una o dos competencias de las aludidas (sin descuidar las otras puesto que están relacionadas). Este ha sido el objetivo en el desarrollo de la actividad este curso, poniendo el foco sobre todo en las competencias de que el alumno aprenda a expresar y a justificar con corrección lo que hace.

Es necesario continuar en la línea mostrada en esta comunicación y profundizar en la gestión de aula de que los alumnos planteen problemas a partir de fotografías para que mejoren al mismo tiempo sus competencias en la resolución de problemas de matemáticas. Las investigaciones recientes muestran las transferencias que se dan entre las tareas de inventar y resolver problemas (Singer y otros, 2015). El “método ideal” para que todo el alumnado quiera resolver problemas en el aula de

matemáticas no existe, pero ello no significa que no debamos seguir ensayando y evaluando nuevos instrumentos, como el que nos ofrece la fotografía matemática, para avanzar en los objetivos marcados.

6. Referencias

Departament d'Educació. Generalitat de Catalunya (2017). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*. Recuperado de https://educacio.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/eso/ambit-matematic.pdf

Deulofeu, J. y Torres, E. (2019). *Gestiones diferentes en el aula de matemáticas para que los alumnos quieran resolver problemas*. Actas 19JAEM, La Coruña 2019 (pendientes de publicación).

Singer, F-M.; Ellerton, N. y Cai, J. (eds) (2015). *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice*. Springer. New York.

Valls, R.; Prados, M.; y Aguilera, A. (2014). *El proyecto INCLUD-ED: estrategias para la inclusión y la cohesión social en Europa desde la educación*. Revista Investigación en la Escuela, nº. 82, pp.31-43.

CoR005 Geomaniguras: Un nuevo material didáctico para la enseñanza de la geometría.

José L. González-Fernández (1)
jluis.gonzalez@uclm.es (1)
Facultad de Educación de Ciudad Real, Universidad de Castilla-La Mancha (1)
José A. Núñez-López (2)
joseAntonio.nunez@uclm.es (2)
Facultad de Educación de Ciudad Real, Universidad de Castilla-La Mancha (2)
David Molina-García (3)
david.molina@uclm.es (3)
Facultad de Educación de Ciudad Real, Universidad de Castilla-La Mancha (3)

Núcleo temático: (1) Recursos para el aula. (2) Procesos.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, y Universidad (Grado de Maestro en Educación Primaria).

RESUMEN

El objetivo de esta comunicación es la presentación, en primicia ante la comunidad científica, de un nuevo material didáctico manipulativo diseñado para la enseñanza de la geometría en los últimos cursos de Educación Primaria y en los iniciales de Educación Secundaria.

Este material didáctico ha sido certificado como modelo de utilidad protegido por la Universidad de Castilla-La Mancha, lo que garantiza su originalidad, y además ha sido validado de manera detallada por expertos pertenecientes al ámbito educativo.

PALABRAS CLAVE: Material Didáctico, Geometría, Geomaniguras, Secundaria, Matemáticas.

DESARROLLO

1. INTRODUCCIÓN

El bloque de geometría, en los primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria y posiblemente en últimos cursos de Educación Primaria, ha terminado centrado en la memorización de conceptos y su aplicación (Barrantes, 2002). Este hecho puede ser debido a que las experiencias docentes clásicas recibidas por los maestros se propagan naturalmente a las nuevas generaciones de alumnos (Barrantes y Blanco, 2004).

Últimamente, dadas las dificultades de aprendizaje encontradas en este contexto, se han propuesto alternativas innovadoras que hacen uso de software informático para la enseñanza de la geometría: en los últimos años se han presentado diferentes programas de ordenador que permiten la representación tridimensional de los objetos geométricos para que resulten más cercanos y reales (Rodríguez, Morga y Cangas-Moldes, 2019; Ibili et al., 2020). En este ámbito, el software Geogebra sigue siendo uno de los más empleados para esta práctica (Ruiz López, 2018; Giarrizzo, 2021), aunque también se han presentado otros como Poly Pro, Stella 4D, Áreas, Geometer's Sketchpad, etc. (Giarrizzo, 2021).

Este tipo de representaciones, junto con las clásicas, que presentan la geometría en los libros de texto y pizarras, hacen presente el objeto geométrico desde el punto de vista teórico, pero no lo determinan totalmente ni permiten el descubrimiento de sus propiedades, que terminan por ser enumeradas y/o memorizadas (Flores Martínez y Rico, 2015). Una solución efectiva a este problema es el manejo de representaciones físicas de los cuerpos geométricos, lo que posibilita la manipulación y establecimiento de las propiedades y representación de los objetos mediante su descubrimiento (Flores Martínez y Rico, 2015). El resultado es que los materiales manipulativos clásicos, como los geoplanos, tangram, rompecabezas geométricos, etc. siguen presentando una buena eficacia para la introducción a las propiedades geométricas (Villaroel y Sgreccia, 2011; Ruiz López, 2018). Una vez experimentada de esta forma, la geometría puede ser ya estudiada desde un punto de vista más teórico, con la paulatina desaparición de los modelos físicos.

2. OBJETIVO

Para contribuir en el desarrollo de lo mencionado con anterioridad, se ha diseñado, patentado como modelo de utilidad, fabricado y validado (tanto por expertos como

en una intervención en cuatro grupos de Primer Curso de Educación Secundaria Obligatoria) un material didáctico manipulativo para el estudio de la geometría en últimos cursos de Educación Primaria y primeros de Educación Secundaria, denominado “Geomaniguras”.

3. JUSTIFICACIÓN

Actualmente existe una gran cantidad de materiales manipulativos para trabajar la geometría en la mayoría de sus aspectos, pues son bien conocidos todos los beneficios de su uso en el aprendizaje y comprensión en las distintas ramas de las matemáticas (Moyer, 2001; Carbonneau, Marley y Selig, 2013). Entre ellos, destacan los bloques geométricos, que son un conjunto de figuras planas, habitualmente de plástico o de madera reciclada RE-Wood®, con seis formas diferentes: triángulos equiláteros, cuadrados, hexágonos, rombos (azules y grises) y trapecios, cada uno de un color distinto.

Los bloques geométricos permiten empezar a conocer las figuras planas y sus elementos, descubrir regularidades y patrones, trabajar conceptos como perímetros y áreas, resolver problemas y retos de geometría con propuestas cerradas y abiertas, así como también hacer construcciones libres y desarrollar así la creatividad.

Ahora bien, actualmente no se dispone en el mercado de un material que, además de poseer las características de los bloques geométricos, permita trabajar de manera atractiva los contenidos didácticos del bloque de geometría de todo un curso académico. Por este motivo, se llevó a cabo la elaboración del diseño de un material manipulativo que tratara de satisfacer las necesidades anteriormente descritas.

4. MATERIAL

"Geomaniguras", ha sido diseñado por Núñez López, José Antonio; Molina García, David y González Fernández, José Luis, durante el curso académico 2020-2021. Dicho producto está protegido y posee certificado como modelo de utilidad.

Está formado por un total de 33 piezas de madera de abedul laminado con distintas longitudes y de igual grosor (14 mm). Además, incorpora una cinta métrica que permite realizar mediciones de longitudes, perímetros, etc., de las piezas.

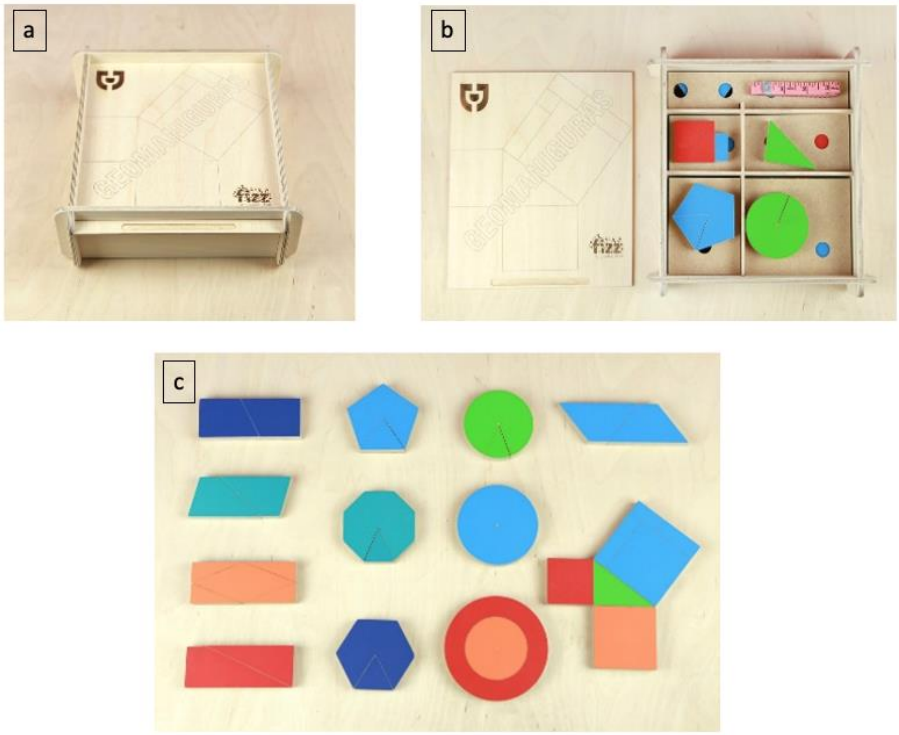


Imagen 1. Fotografías del material "Geomaniguras" fabricado. a) Imagen de la caja contenedora del material. b) Imagen de la caja abierta mostrando las primeras piezas y la cinta métrica. c) Imagen de todas las piezas que conforman el material.

El conjunto considerado responde a la necesidad de facilitar el aprendizaje de conceptos y procedimientos geométricos a través de la manipulación de materiales. Estos materiales poseen características que los hacen diferentes del resto que se encuentran en el ámbito docente. Entre ellas, destacan:

- **Poseen imanes**, situados en el interior de las piezas de madera, a pocos milímetros del borde (entre 2 y 3 milímetros), que permiten el ensamblaje entre piezas. Una vez incrustados en la madera, se empasta el orificio y se

pinta, lo que hace que pasen totalmente desapercibidos. Este detalle tiene una doble intencionalidad: por un lado, provocar mayor atención y expectación en el alumnado al conseguir que los movimientos entre las piezas sean inesperados (pero siguiendo el patrón deseado) y, por otro lado, el hecho de estar así situados permite que la yuxtaposición de las piezas sea precisa al no poseer bordes (lo que ocurriría en caso de ser exteriores).

- La **pintura** que se utiliza es acrílica, certificada según la Ley de Seguridad de los juguetes. Este tipo de pintura permite que puedan realizarse anotaciones con tiza sobre ella, con fácil y rápido borrado, lo cual proporciona agilidad y comodidad en el manejo y explicaciones con ellas.
- En el dorso de cada pieza se muestran señalizados los polos de los imanes y una nomenclatura, lo que permitirá una fácil manipulación de estas con el fin de conseguir una rápida y correcta composición de las piezas.
- Son construidas en madera laminada de abedul, que permitirán su manejo cómodo (siempre respetando las medidas de seguridad, y elaborada por empresa Fizz Ideas - Juguetes educativos de madera). Se presentarán en cajas de madera que permitan su traslado (Imagen 1).

Con estos materiales, se pueden tratar y abordar todos los contenidos geométricos de mayor dificultad de 6º de Educación Primaria y de 1º de Educación Secundaria Obligatoria (pueden utilizarse también para niveles inferiores, e incluso posteriores, dependiendo del contenido a impartir). En concreto, para 1º de ESO se podrán trabajar los siguientes conceptos:

- Clasificación de triángulos (según lados y ángulos).
- Clasificación de cuadriláteros.
- Elementos y clasificación de polígonos.
- Suma de ángulos interiores de polígonos.
- Ángulos centrales de polígonos.
- Perímetros.
- Longitud de circunferencia y arco de circunferencia.

- Área del cuadrado y rectángulo.
- Área del romboide.
- Área del rombo.
- Área del trapecio.
- Área del triángulo.
- Área de polígonos regulares.
- Área del círculo y de figuras circulares.
- Áreas por composición y descomposición.

4.1. Piezas. Manejo y objetivos

El juego completo lo forman un total de 33 piezas. Estas piezas, para una ágil utilización, se agrupan en 6 conjuntos denominados F1, F2, F3, F4, F5 y F6. Además, todas las piezas tendrán en el dorso una nomenclatura que permite su fácil identificación y manejo.

Los imanes ofrecen la posibilidad de construir distintas formas geométricas que permiten comprender diversos conceptos geométricos. Se exponen a continuación los diseños con las ubicaciones de los imanes, mostrando así el manejo que puede hacerse con ellos con el fin de cumplir con el objetivo pretendido.

4.1.1. Grupo F1

Este grupo está compuesto por dos triángulos rectángulos y uno acutángulo.

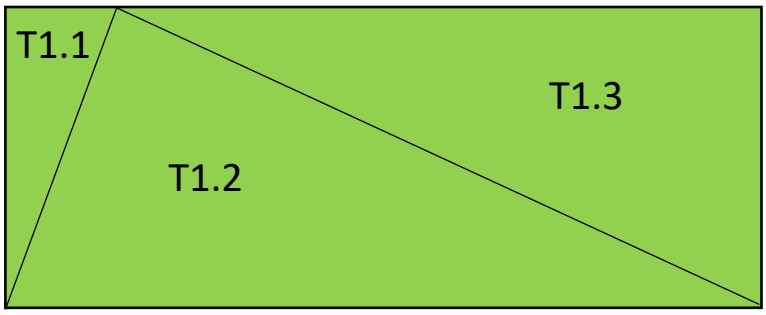


Imagen 2. Grupo de piezas F1

Los imanes están ubicados en los puntos medios de los lados. Las longitudes de los lados se muestran a continuación en la Imagen 3.

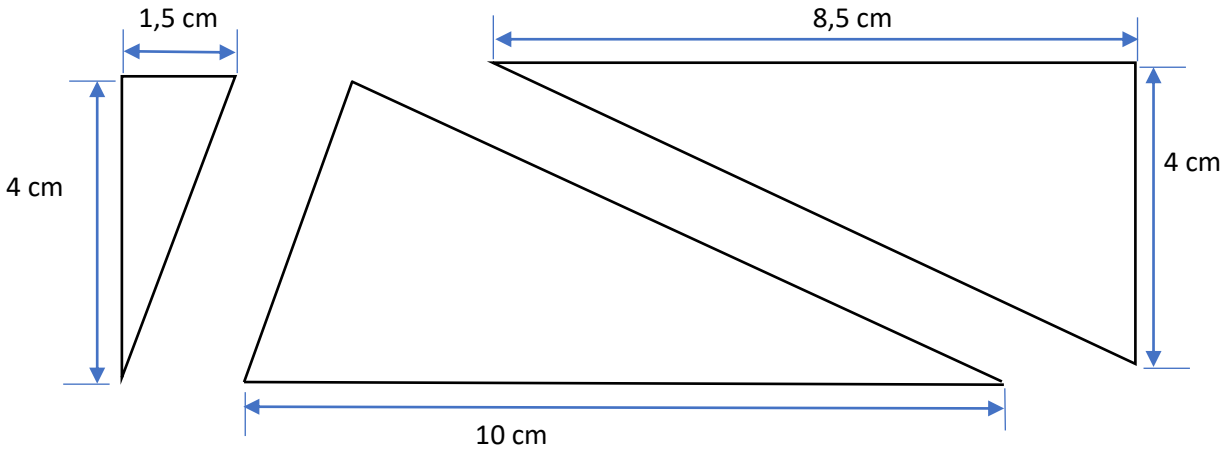


Imagen 3. Grupo de piezas F1 (medidas)

Objetivos:

- **Área de un triángulo cualquiera** a partir del área de un rectángulo.
  Es interesante mostrar que T1.1 y T1.3 forman un triángulo idéntico a T1.2., por lo que de esta manera se puede obtener el área de un triángulo como la mitad del valor del área del rectángulo. El alumnado suele pensar que solo se consigue esto al dividir el rectángulo por su diagonal, por lo que esta construcción permite asimilar el concepto.

- **Área del romboide:**
  Moviendo T1.1 junto a T1.3 se consigue un romboide, por lo que la superficie es la misma que la del rectángulo inicial.

4.1.2. Grupo F2

Formado por cuatro triángulos rectángulos y un rombo.

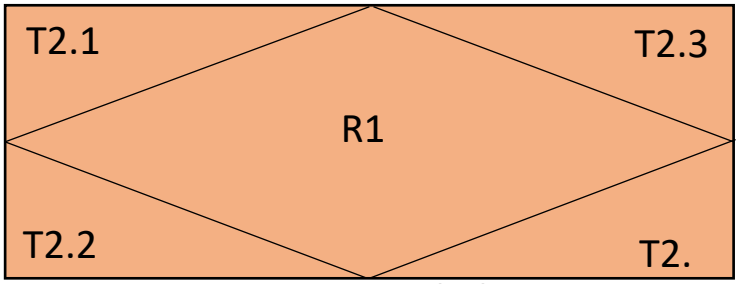


Imagen 4. Grupo de piezas F2

Todos los imanes están situados en los puntos medios de los lados, teniendo como longitudes:

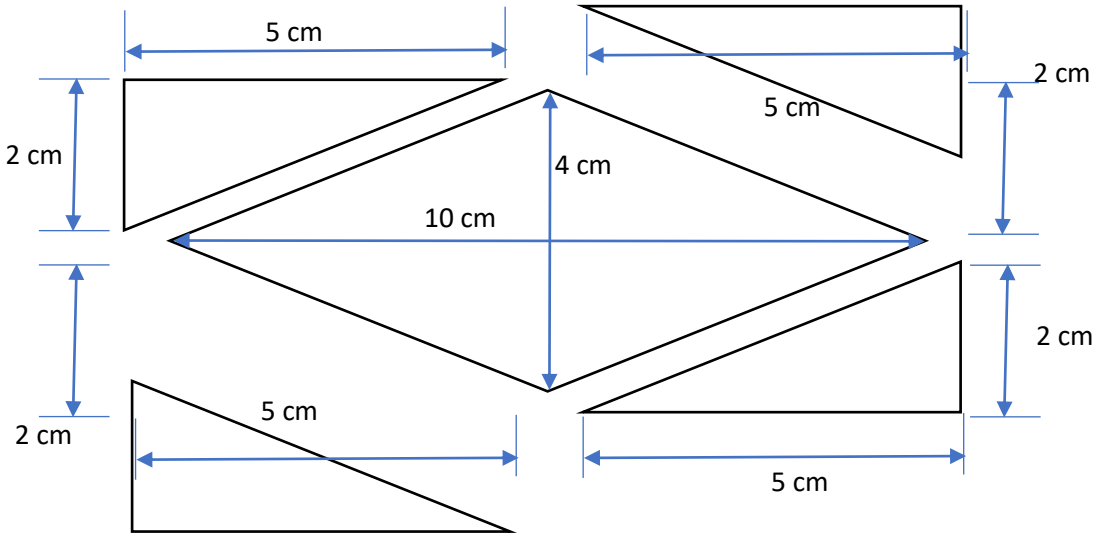


Imagen 5. Grupo de piezas F2 (medidas)

Objetivos:

- **Área del rombo** a partir del área de un rectángulo.
  Es interesante mostrar que T2.1, T2.2, T2.3 y T2.4 forman un rombo idéntico a R1, y que sus diagonales coinciden con la base y altura del rectángulo inicial).

- **Formación de triángulos isósceles y obtusángulos** (para la clasificación de triángulos).

  Uniendo por el cateto mayor T2.1 con T2.2 (así como T2.3 con T2.4), se obtienen triángulos isósceles. Si se hace por los catetos menores, además de isósceles serán obtusángulos.

4.1.3. Grupo F3

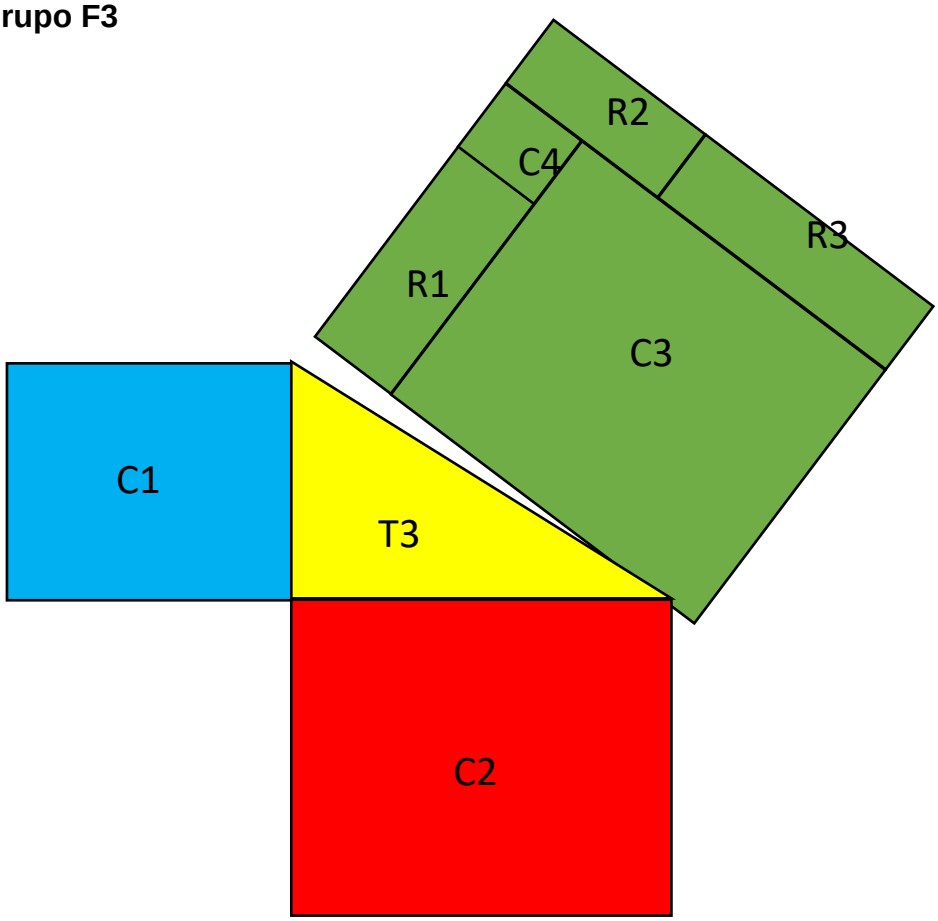


Imagen 5. Grupo de piezas F3

Las características de cada una de las piezas son las siguientes:

- **C1**: Cuadrado de lado 3 cm, y con imán en el punto medio de uno de los lados:

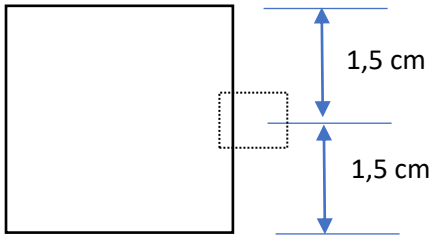


Imagen 6. Cuadrado C1 (medidas)

- **C2 y C3**: **Cuadrados de lados 4 cm** y con imanes según se detalla en las imágenes 7 y 8.

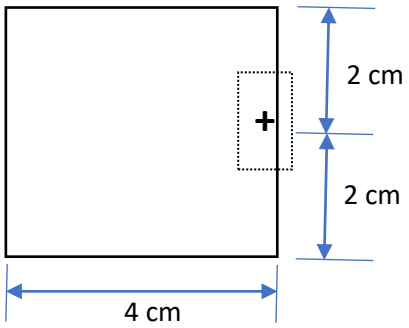


Imagen 7. Cuadrado C2 (medidas)

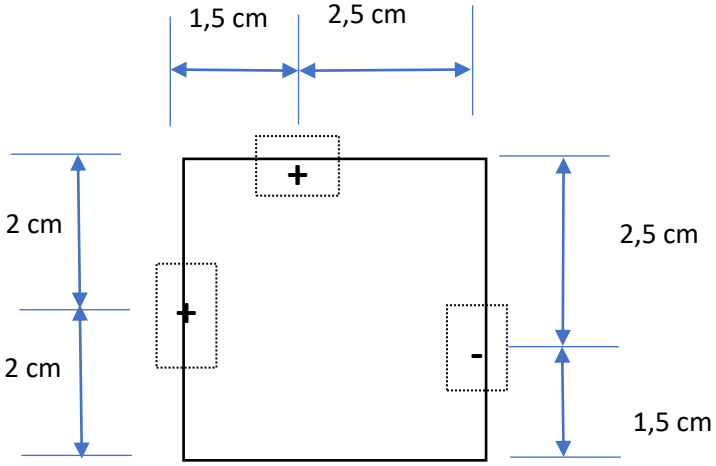


Imagen 8. Cuadrado C3 (medidas)

- **R1, R2, R3 y C4**: todos los imanes en **puntos medios** de los lados. De igual color que C3.

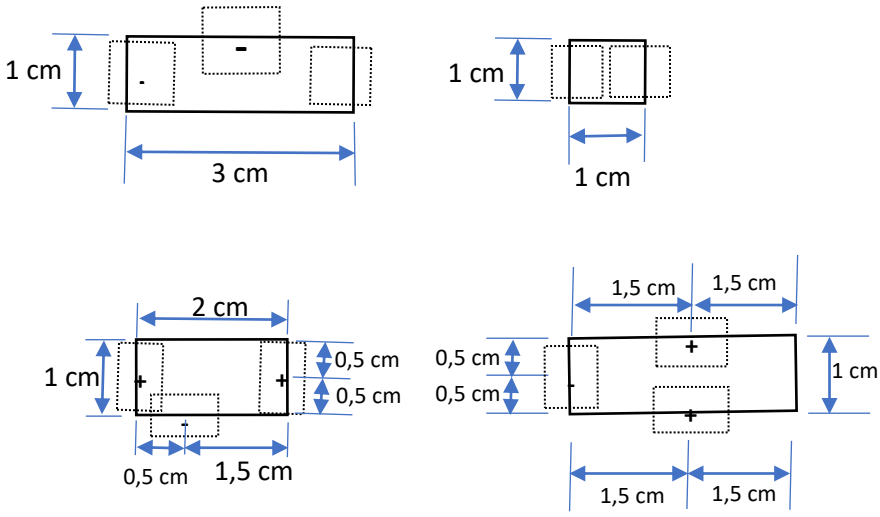


Imagen 8. Piezas R1, R2, R3 y C4 (medidas)

- **T4**: Triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 cm y de color distinto al resto.

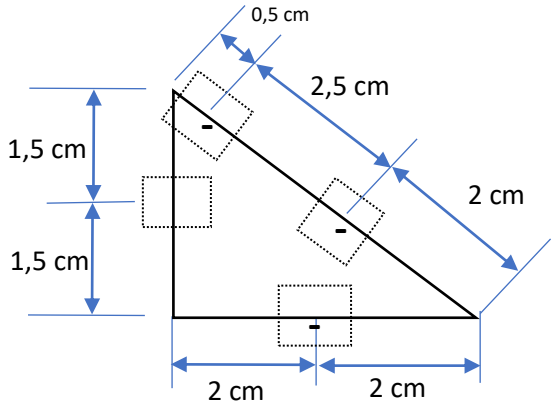


Imagen 10. Pieza T4 (medidas)

Objetivos:

- **Comprobación y deducción del teorema de Pitágoras**.
  La demostración geométrica del teorema de Pitágoras se muestra de manera clara al poderse comprobar que, las áreas de C1 más la de C2 coinciden con la del cuadrado formado por C3, R1, R2, R3 y C4 pues, este último, puede descomponerse y formar dos cuadrados idénticos a C1 y C2. De manera detallada: C3 coincide con C2 y, con las piezas R1, R2, R3 y C4, puede formarse un cuadrado idéntico a C1.

- **Área del cuadrado y deducción del área del rectángulo**.
  Con la figura C4, de lado 1 cm, es posible introducir el concepto de área del cuadrado para, posteriormente y por superposición, deducir las áreas de los rectángulos R2 y R1 (o R3). A partir de aquí, existe la posibilidad de generalizar y establecer de manera formal el área de un rectángulo cualquiera.

4.1.4. Grupo F4

Trapecios: pares de trapecios escalenos, isósceles y rectángulos.

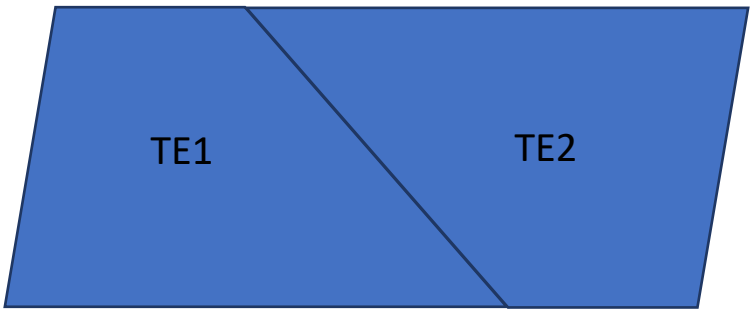


Imagen 11. Grupo de piezas F4 (TE1 y TE2)

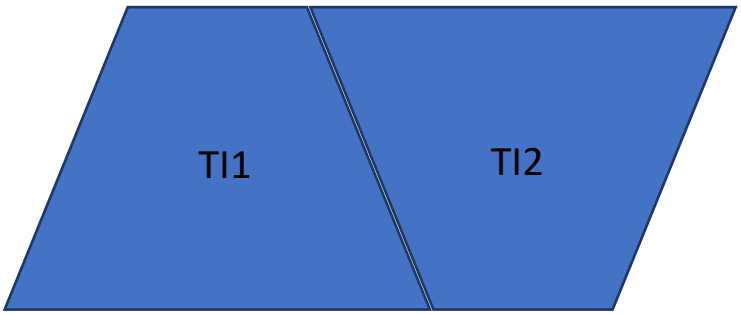


Imagen 12. Grupo de piezas F4 (TI1 y TI2)

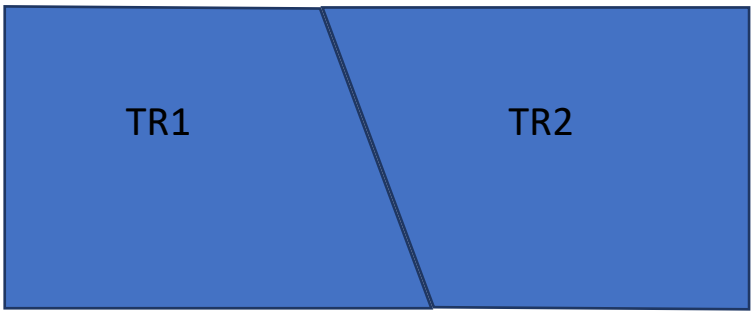


Imagen 13. Grupo de piezas F4 (TR1 y TR2)

- Los imanes se sitúan en los **puntos medios** de los lados. Las piezas son idénticas en tamaño, pero los imanes cambian de polaridad entre las del mismo par.
- Las longitudes de cada par son:

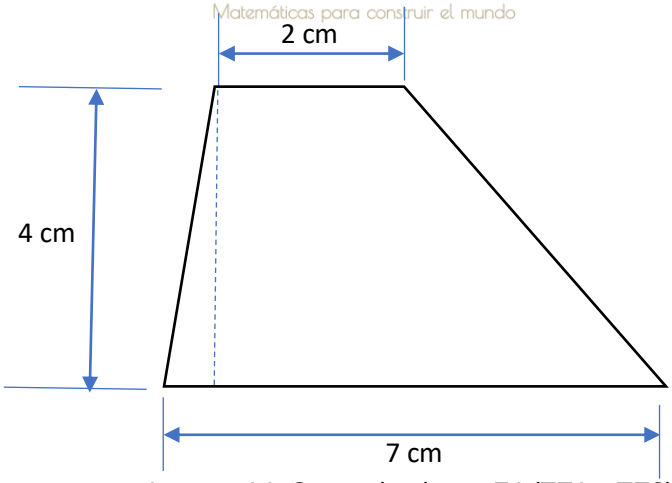


Imagen 14. Grupo de piezas F4 (TE1 y TE2)

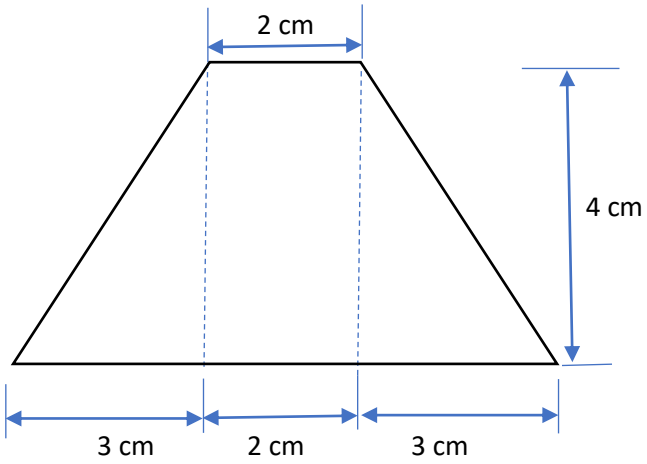


Imagen 15. Grupo de piezas F4 (TI1 y TI2)

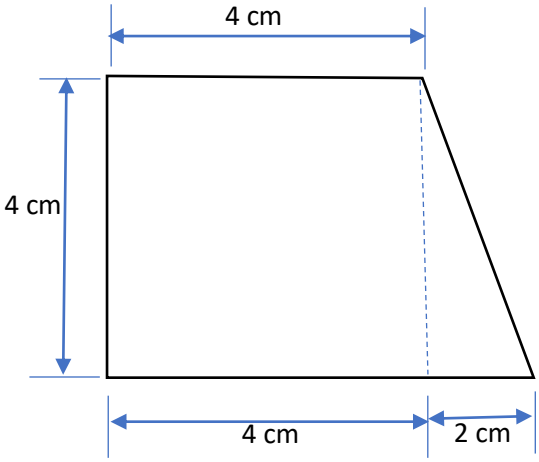


Imagen 16. Grupo de piezas F4 (TR1 y TR2)

Objetivos:

- **Clasificación de trapecios.** Se pueden mostrar los diferentes tipos de trapecios que existen**.**

- **Área del trapecio** a partir de distintos romboides y rectángulo**.**

  De manera intuitiva puede deducirse el área de cualquier trapecio a partir del romboide (o rectángulo) que se forma al considerar un par de trapecios idénticos.

  Resulta interesante mostrar que la fórmula obtenida es válida para cualquier tipo de trapecio, pues el alumnado suele pensar que cada tipo de trapecio tiene una distinta.

4.1.5. Grupo F5

Polígonos regulares con igual radio.

Se trata de un total de 6 piezas que forman tres polígonos regulares (pentágono, hexágono y octógono) de 4 cm. Así, las longitudes de sus lados son:

- Pentágono: 4,70 cm aprox.
- Hexágono: 4 cm.
- Octógono: 3,06 cm aprox.

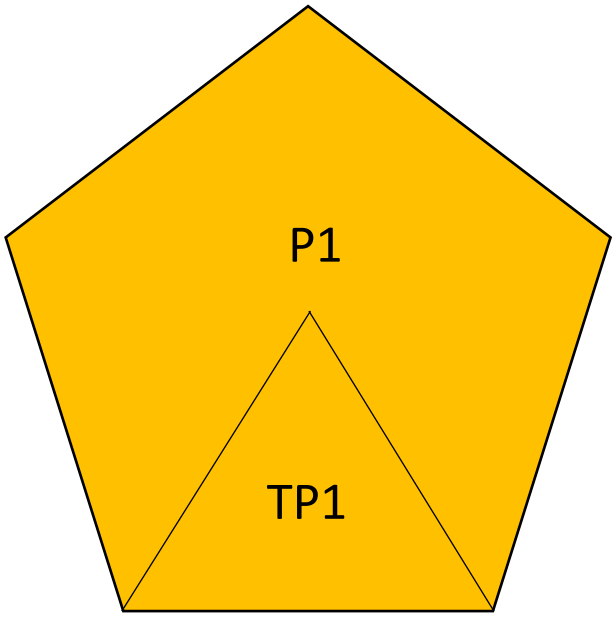


Imagen 17. Grupo de piezas F5 (P1 y TP1)

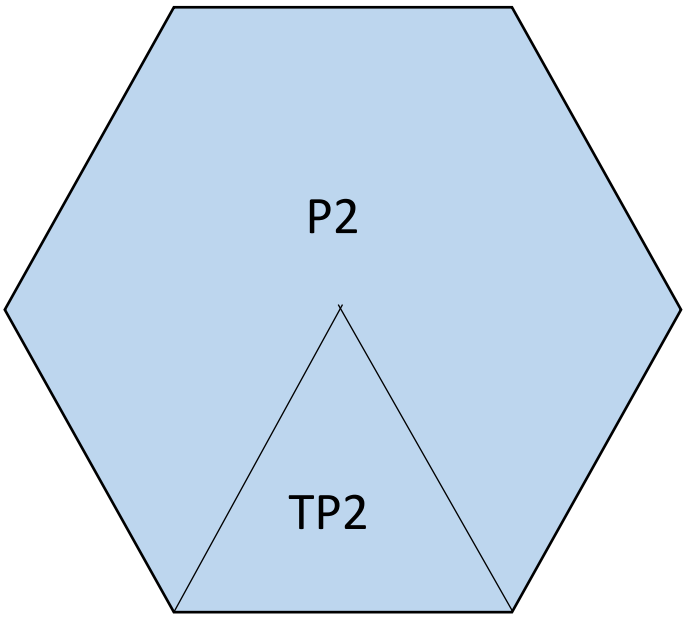


Imagen 18. Grupo de piezas F5 (P2 y TP2)

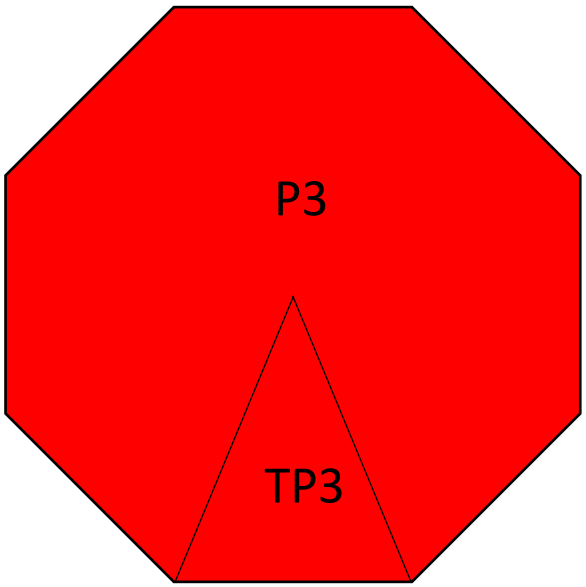


Imagen 19. Grupo de piezas F5 (P3 y TP3)

Objetivos:

- **Concepto, elementos y clasificación de polígonos regulares.**
  Con estos tres ejemplos, se muestra claramente, la clasificación de polígonos, así como los elementos de los que se compone (centro, radio, lado, ángulos interiores y exteriores, diagonales, etc.).
- **Áreas de polígonos.**
  Se consigue deducir la fórmula del área de un polígono regular. Para ello, resulta interesante considerar los triángulos centrales iguales en los que puede dividirse cada polígono pues, a partir del área de cada uno de ellos, puede obtenerse la expresión final.
- **Características del hexágono (triángulo equilátero)**
  Con P2 y TP2 se pone de manifiesto la igualdad entre el lado y el radio del hexágono regular.
- **Formación de un trapezoide (con TP1 y T3)**
  Considerando TP1 y T3 es posible formar un trapezoide, lo cual completa la clasificación de los cuadriláteros.

4.1.6. Grupo F6

Círculos (con diferentes radios)

- **C1**: Círculo de 4 cm de radio, con centro marcado. Es una de las pocas piezas que no lleva imanes.

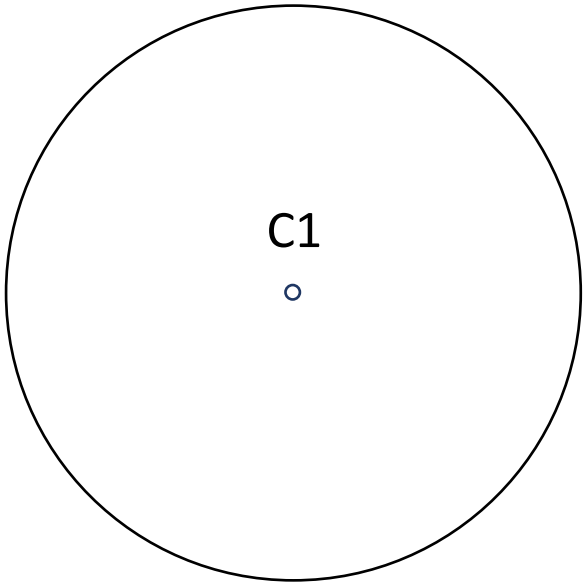


Imagen 20. Grupo de piezas F6 (C1)

- **C2 y SC2:** Con estas dos piezas se forma un círculo de 3,5 cm de radio.

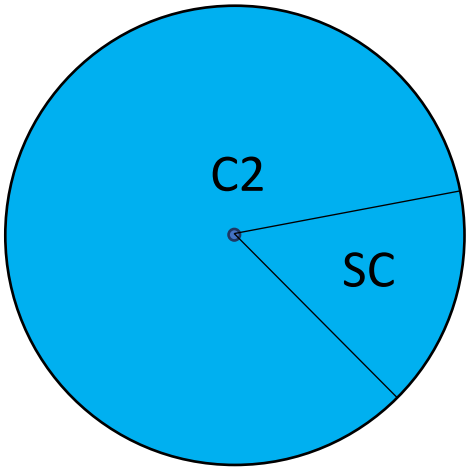


Imagen 21. Grupo de piezas F6 (C2 y SC)

- **CC y C3:** Dos piezas encajables y sin imanes. El radio exterior de la corona circular (CC) es de 5 cm y el del círculo interior (C3) de 3 cm. En C3 está indicado el centro.

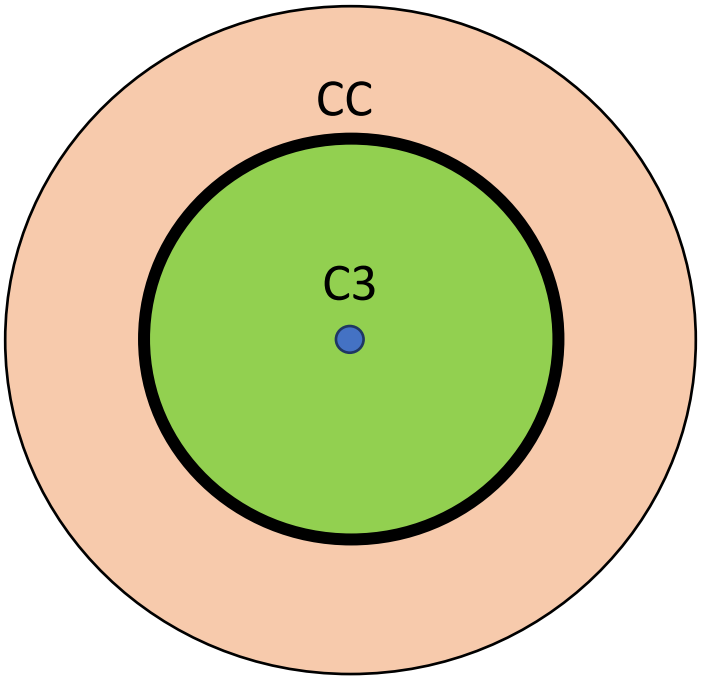


Imagen 22. Grupo de piezas F6 (CC y C3)

Objetivos:

- **Deducción de la fórmula de longitud de la circunferencia.**
  Se tomarán medidas de longitudes y radios de todas las figuras, para dar un valor aproximado del número π tras realizar los respectivos cocientes. Posteriormente se establecerá la fórmula de la longitud de la circunferencia.

- Introducción de figuras: **circunferencia y arco de circunferencia, círculo, sector y corona circular.**

- **Deducción del área del círculo.**
  Considerando C1 y las piezas del grupo F5 puede deducirse el área del círculo, utilizando la fórmula del área de un polígono regular y considerando al círculo como un polígono de infinitos lados (se tomará la longitud de la circunferencia como perímetro del mismo).

- **Área del sector circular y de la corona circular.**
  El área de SC puede obtenerse con la ayuda de una regla de tres simple directa.

- **Área de la corona circular.**
  Realizando la diferencia de áreas, se obtiene el valor de CC.

4.2. Contenidos curriculares

De manera conjunta, y recapitulando lo anterior, con estos 6 conjuntos de piezas se pueden abordar los siguientes contenidos:

- Polígonos: elementos y clasificación. **(Grupo F5)**
- Suma de ángulos interiores de polígonos. **(Grupos F1, F2 y F5)**
- Ángulos centrales de polígonos regulares. **(Grupo F5)**
- Clasificación de triángulos:
  - Según sus lados:
    - Equiláteros. **(Pieza TP2)**
    - Isósceles. **(Piezas T2, TP1 y TP3)**
    - Escalenos. **(Grupo F1 y F2)**
  - Según sus ángulos:
    - Acutángulos. **(Grupo F1)**
    - Rectángulos. **(Grupo F2 y F3)**
    - Obtusángulos. **(PiezaT2)**
- Clasificación de cuadriláteros:
  - Paralelogramos. **(Grupo F1, pieza R1y grupo F3)**
  - Trapecios. **(Grupo F4)**
  - Trapezoides. **(Piezas TP1 y T3)**
- Perímetros de polígonos. **(Todas las piezas)**
- Longitud de circunferencia. **(Grupo F6)**
- Longitud de arco de circunferencia. **(Grupo F6)**
- Área del cuadrado y rectángulo. **(Grupo F3)**
- Área del triángulo. **(Grupo F1)**
- Área del romboide. **(Grupos F1 y F3)**
- Área del rombo. **(Grupo F2)**
- Área del trapecio. **(Grupo F4)**
- Área de polígonos regulares. **(Grupo F5)**
- Área del círculo. **(Grupos F5 y F6)**
- Áreas por composición y descomposición. **(Todas las piezas)**

5. BIBLIOGRAFÍA

Barrantes, M. (2002). *Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje* (Tesis de Doctorado). Departamento de Didáctica de la Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Facultad de Educación. Universidad de Extremadura. España.

Barrantes, M. y Blanco, L. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(2), 240-250.

Carbonneau, K. J., Marley, S. C., y Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105 (2), 380–400.

Giarrizzo, A. M. (2021). La enseñanza de la geometría en la escuela secundaria: materiales didácticos para favorecer el estudio de figuras o cuerpos geométricos. Revista De Educación Matemática, 36(2), 47–66.

Ibili, E., y otros (2020). An assessment of geometry teaching supported with augmented reality teaching materials to enhance students' 3D geometry thinking skills. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(2), 224-246.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47(2), 175–197.

Rodríguez, J. L., Morga, D., y Cangas-Moldes, G. (2019). Geometry teaching experience in virtual reality with NeoTrie VR. *Psychology, Society, & Education*, 11 (3), 355-366.

Ruiz López, N. (2018). Medios y recursos para la enseñanza de la geometría en la educación obligatoria. *Didácticas específicas*, 3, 8-24.

Flores Martínez, P., y Rico, L. (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (Psicología. Sección Pedagogía). Madrid. Pirámide.

Villaroel, S., y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. *Números*, 78, 73-94.

CoR006 Laboratorio de Matemáticas

Enric Castellà(1)
ecaste56@xtec.cat (1)
Sílvia Margelí(2)
smargeli@xtec.cat (2)
Montserrat Torra(3)
mtorra12@xtec.cat (3)
CESIRE/ Dept. d'Educació de Catalunya

Núcleo temático: Recursos para el aula, Formación del profesorado

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

En los *Planes de Formación de Zona* (PFZ) de Cataluña en los últimos años se ha detectado que los docentes de primaria y secundaria piden formación en matemática manipulativa. Para dar respuesta a esta demanda, desde el *Centre de Recursos Específics per a la Innovació i la Recerca Educativa* (CESIRE*) se creó un programa que consiste en la distribución de 75 maletas de material didáctico de matemáticas. Este material se presta a escuelas o institutos durante un curso. Se complementa con un programa de formación para acompañar al centro que incluye vídeos y propuestas de actividades.

Palabras clave: Materiales, Laboratorio, Formación.

1. Intención

Una de las líneas de trabajo del CESIRE, en el ámbito de matemáticas, es la promoción del uso de materiales en el aula. Es también una de las líneas de impulso para la educación matemática del **Congreso de Educación Matemática** C2EM, que, en su línea octava, nos invita a promover **los laboratorios de matemáticas como ámbitos propicios para la experiencia matemática**.

Los docentes de primaria y secundaria ven que el uso de material mejora la comprensión de determinados conceptos, a la vez que permite la experimentación, la participación activa de todo el alumnado de forma inclusiva y favorece la resolución de problemas. En los últimos años ha aumentado la demanda de formación en "Matemáticas manipulativas". No podemos desaprovechar oportunidades como estas, y es importante dedicar esfuerzos a dar una respuesta que promueva un aprendizaje competencial y significativo. Para conseguirlo sabemos que necesitamos acompañarlo de buenas propuestas de trabajo.
En palabras de Anton Aubanell, un material de matemáticas se convierte en un recurso para la enseñanza y el aprendizaje cuando lo enmarcamos en una actividad experimental concreta.

Muchas de las experiencias que pueden proponerse a los alumnos y alumnas están asociadas a materiales específicos pero ni el uso de estos materiales es condición suficiente para asegurar un planteamiento experimental rico ni todo enfoque experimental debe contar necesariamente con materiales sofisticados. Lo que hacemos con un material y el cómo lo hacemos será lo que lo convertirá o no en un recurso didáctico potente, enmarcándolo en una actividad experimental concreta.

Licencia de estudios "Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemática a secundària" de Anton Aubanell, 2005/06
http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200506/memories/1005m.pdf

Definida la orientación de la línea de trabajo, el curso 2018/19 se pudo contar con unas ayudas económicas del Programa educativo de Ocupación, Formación y Educación (POEFE) que nos permitieron comprar 10 lotes de material. Cuál sería la

composición de un kit básico para un centro de primaria o secundaria se consensuó en el grupo abierto de trabajo, “Laboratoris de matemàtiques”, organizado desde el CESIRE. La lista de materiales seleccionados se puede encontrar en el web del CESIRE.

La primera actuación fue un programa piloto en que se dejó este material en préstamo a 10 centros de Cataluña durante el curso 2019/20.

Gracias a las ayudas POEFE el curso 2019/20 se pudo ampliar la compra de material y llegar a disponer de 75 maletas, cediendo una a cada Centro de Recursos Pedagógicos.

2. ¿Por qué se presta el material a un centro durante un curso?

Sabemos que una parte del profesorado sigue programas de formación en matemáticas a través de cursos como AraMat, organizados por el CESIRE, u otros que se están ofreciendo desde los servicios territoriales y centros de recursos. Pero los maestros y profesores nos dicen que les es difícil comunicar y transferir su experiencia al resto del profesorado del centro.

El estudio "Visible learning", del profesor neozelandés John Hattie, estudia 250 influencias que favorecen el aprendizaje de los alumnos. En el bloque que se refiere a los centros y el profesorado pone de relieve la conveniencia de promover sistemas y procesos alineados (lo que llamamos “línea de escuela”) y la discusión y trabajo conjunto del equipo docente.
Pensamos que la maleta del Laboratorio de Matemáticas puede ser una buena herramienta para promover el intercambio de experiencias, la discusión sobre didáctica en el claustro y el trabajo en equipo. Se suma así a las propuestas de los servicios educativos de trabajo con todo el centro.

Los centros que han pilotado la experiencia durante este curso nos hacen llegar comentarios como estos:

"Tenemos el material en la sala de maestros y siempre uno u otro comenta alguna experiencia de las que ha propuesto en su clase y anima a algún compañero a hacerla". *Escola Migdia. Girona.*

“Además de los profesores de matemáticas, en el instituto han utilizado el material los profesores de música para explicar las figuras, los de ciencias usando los volúmenes para llenar, los de tecnología han utilizado cubos encajables para dibujar las diferentes vistas de un objeto... y los alumnos ven que todo está conectado”. *INS El Joncar. Barcelona.*

"Nos va bien tener todo el material a mano porque no se trata de tener un material para realizar una actividad concreta, sino tener el material presente para ir a buscarlo en el momento que nos puede ser de ayuda para ejemplificar, ilustrar algún concepto...". *INS Miquel Tarradell. Barcelona.*

3. La selección de centros

Desde el CESIRE se pidió a los CRP que decidieran a qué centro podían cederle el material el primer año. Entendemos que puede ser fuente de conflicto porque un CRP debe atender a muchos centros. Pero les explicamos que podían entenderlo como una oportunidad. Disponer de 75 maletas a través del Fondo Social Europeo nos permite llegar en un año a 75 centros y en tres años a más de 200. Y podremos ver qué aporta el modelo a las escuelas para tomar otras decisiones más adelante.

Nuestra idea es que el material de matemáticas debe ser del centro y estar a disposición del profesorado y de los alumnos en diferentes momentos. Porque debe servir para modelizar situaciones, hacer conjeturas y representar una situación-problema que queremos resolver en situaciones que no siempre podemos prever.

Algunos centros o profesorado interesado en el uso del material en el aula ya lo ha ido adquiriendo a lo largo de los años: un curso compran los cubos encajables, un curso los volúmenes de plástico, los tangrams… hasta llegar a tener un laboratorio o armario de material. El préstamo de material durante todo un curso pretende ser un estímulo para el centro, para decidir si realiza una inversión económica en este sentido. El precio material de las maletas para un centro está alrededor de 650 euros, y la idea es que en tres o cuatro cursos un centro puede adquirirlo si lo considera interesante.

Por tanto lo que pretende el préstamo a un centro durante un curso es:

- Que la opción de utilizar material no sea de un docente sino de todo el equipo de profesorado porque todos tendrán acceso.

· Que se compartan experiencias entre el profesorado (porque pensamos que tener el material al alcance durante un tiempo…)

· Que lo tengan a disposición para diferentes propuestas que salgan a lo largo del curso.

3.1 Criterios para la selección de centros.

En primer lugar, recordamos a los CRP que las maletas se han adquirido con el dinero procedente del Fondo Social Europeo, dentro del Programa Operativo de Empleo, Formación y Educación (POEFE) y está destinado a favorecer la inserción de las personas más vulnerables. Entendemos que podemos verlo desde dos puntos de vista:

· El material debe favorecer la integración en las propuestas del aula al alumnado que en muchos casos no participa en clase de matemáticas porque no lo motiva o no entiende lo que debe hacer. Queremos que las propuestas que hagamos con material ayuden a integrar a todo el alumnado.

· Preferentemente debemos llegar a centros que necesitan ayuda porque no les sobran recursos para adquirir material didáctico.

Pero también es necesario que el centro esté dispuesto a utilizar el material para favorecer un buen aprendizaje de las matemáticas. Por eso creemos que también podemos tener en cuenta criterios como:

· Que tengan una cierta formación en matemáticas (cursos Aramat, Didáctica de la matemática desde una perspectiva STEAM, u otros cursos de matemáticas que se les hayan ofrecido desde su territorio)

· Que el centro tenga un equipo de maestros o profesores que puedan liderar la propuesta

· Que no sean centros que estén participando en demasiados programas a la vez, por aquello de que “quien mucho abarca poco aprieta”, pero también para dar opción a otros centros a entrar en proyectos que favorezcan la innovación.

En caso de duda, a algunos servicios educativos les ha ido bien consultar a formadores de matemáticas del territorio.

También puede ser una buena idea vincular el préstamo a alguna formación o asesoramiento que arranque desde los CRP.

4. La aportación del CESIRE

La primera intervención que se propuso fué la presentación del material en las sedes de los diferentes servicios territoriales, que se debía llevar a cabo por el equipo del CESIRE y una persona formadora de matemáticas de primaria o secundaria de cada territorio.

Para acompañar a los centros que tienen las maletas y al resto de centros que utilicen material manipulativo de matemáticas en las escuelas e institutos

preparamos una campaña “laboratorio de matemáticas” en la que se pueden encontrar propuestas de uso de los materiales para alumnos de infantil, primaria y secundaria.

También se proyectó la edición de 20 vídeos para ilustrar la actividad en el aula, proponiendo prácticas que el profesorado pueda reproducir o adaptar a su grupo.

Pero llegó el Covid-19 y tuvimos que cambiar el planteamiento inicial: No se pudieron hacer las presentaciones iniciales en cada territorio, ni se pudieron grabar alumnos en las aulas. A cambio se organizó un ciclo de conferencias telemáticas a disposición de todos los centros, y se transformaron los guiones de prácticas de aula previstos, sustituyéndolos por videos en los que dos docentes mostraban propuestas a partir de un diálogo entre ellos.

4.1 Seguimiento de los centros

El primer año se convocó a los 10 centros del pilotaje en Barcelona en 4 tardes del curso, y fue interesante porque les permitió compartir y aprender unos de otros.
A partir del segundo curso se pudo organizar una formación en cada zona: Dos personas formadoras comparten la docencia de un curso telemático de 20 h de duración: 5 sesiones de 2.5 h y unas horas de trabajo en cada centro, llevando al aula actividades centradas en el uso de materiales, para compartirlas y debatirlas con los demás participantes.

En el programa formativo se han ido introduciendo modificaciones a partir de las sugerencias realizadas por los propios docentes participantes, tanto en la planificación de futuras intervenciones como en la creación de material de apoyo y de otras propuestas formativas.

También se está impulsando el contacto entre los centros que tienen el material durante un curso y los que lo tendrán el curso próximo. No se está “obligando” a que

pase, pero si que estamos recogiendo evidencias de que les va bien a unos y a otros, e intentamos que la idea se extienda.

4.2 Qué ha pasado durante estos dos primeros cursos:

Algunos CRP han replicado la maleta por su cuenta, y han conseguido así que puedan participar más centros en la formación.
En zonas en las que hay pocos CRP, algunos centros han pedido participar no con dos o tres docentes sino con un mayor número de docentes: Uno o dos de cada ciclo, por ejemplo. Se ha permitido limitando siempre el número de participantes a 30 personas, para poder ofrecer un acompañamiento de calidad.

4.3. ¿Y tras tres años de implementación del programa?

A los CRP les proponemos este modelo de préstamo durante tres cursos, y les pedimos que alternen el préstamo entre centros de primaria y secundaria.
Le sugerimos que el centro que tenga el material durante el próximo curso pueda realizar un traspaso o incluso un acompañamiento al centro que lo utilizará el curso siguiente. El hecho de que sean de primaria y secundaria puede ser un aspecto enriquecedor.

5. Material complementario

Para llegar más allá de los centros que han tenido acceso a las maletas y facilitar su labor a otros centros y docentes que se han planteado los beneficios del uso de materiales manipulativos, desde la web del CESIRE, dentro de las propuestas matemáticas, se puede acceder en abierto a todo el material creado en relación al laboratorio de matemáticas.

5.1 Conferencias de formación

Las sesiones iniciales de formación, realizadas en junio/julio de 2020 y dirigida a los centros que recibían el material, fueron grabadas y están disponibles en el web del Cesire.

La primera de estas videoconferencias, a cargo de Jordi Font, de l'INS Baix a Mar, de Vilanova i la Geltrú, trata de la creación de un laboratorio de matemáticas en el centro.

La segunda, a cargo del equipo de docentes del CESIRE, muestra posibilidades de uso de los materiales manipulativos.

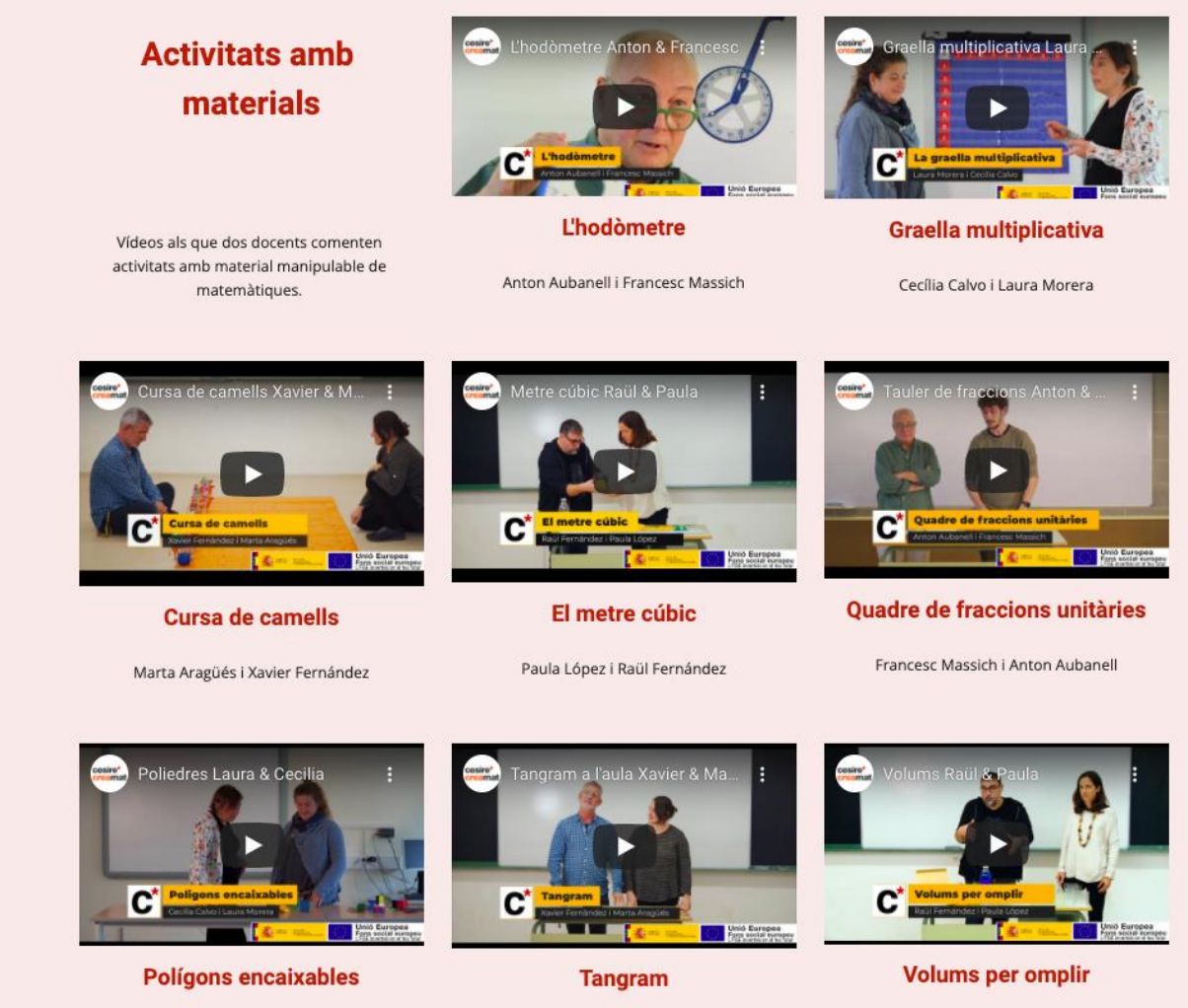
También se encuentran, en la misma página web, otras conferencias posteriores, como una de Dani Ruiz Aguilera, de la Universidad de les Illes Balears, y otra de Simon Gregg, que se define como maestro STEAM y coach para alumnado de 3 a 11 años, y es formador de docentes de matemáticas en Francia y el Reino Unido.

5.2. Vídeos

En el apartado de vídeos disponemos también de propuestas diversas:

Un par de vídeos de aula, en la que se pueden ver diferentes maneras de conducir una sesión a partir del uso de material: Una sobre fracciones con alumnos de quinto de primaria, y otra a partir de la parrilla de números del 1 al 100, con alumnos de secundaria. Nuestra intención era destacar la conveniencia de conducir las actividades a través de preguntas, dejar registro escrito de las propuestas, partir del trabajo por parejas o en pequeños grupos…

Otro conjunto de videos en los que dos docentes, a través del diálogo entre ellos, proponen usos de un material determinado: La “carrera de camellos” para abordar en primaria el tema del azar y la probabilidad, usos del tangram, de los volúmenes para llenar de agua, del odómetro, el metro cúbico… y muchos más.



Un tercer grupo de vídeos propone actividades varias partiendo de material polivalente, como los cubitos multienlace, los poliedros encajables, los dados…

Propostes per les sessions de formació

Propostes d'activitats amb material incloses a les sessions de formació de professorat de l'estiu de 2020.

Daus

CESIRE àmbit de matemàtiques

Tauler de nombres

CESIRE àmbit de matemàtiques

Cubs encaixables

CESIRE àmbit de matemàtiques

Polígons encaixables

CESIRE àmbit de matemàtiques

Pentominós

CESIRE àmbit de matemàtiques

Geoplans

Pattern Blocks

Volums

y por último videos cortos en los que se explican contenidos concretos a partir de actividades puntuales en las que el material nos sirve como modelo.

Estos vídeos se han valorado muy bien por parte de los docentes, que se animan fácilmente a probar las propuestas con sus alumnos.

5.3. Campaña “Laboratori de matemàtiques”

Y por último la campaña, que, en resumen, es un espacio web en el que se encuentran los enlaces a todas las propuestas anteriores, además de diversas páginas en las que se recogen diferentes actividades que proponen la utilización de cada uno de los materiales, con explicaciones y comentarios para ayudar a la implementación en clase.

Quadrats

Si ens iniciem utilitzant el geoplà ortogonal, començarem amb les figures planes més senzilles. Per exemple, preguntant "**Quants quadrats diferents podem fer?**"

Ens trobarem que començaran a crear-los utilitzant els quadrats ortogonals. tal i com es veuen al geoplà taronja. Però mica en mica, hi haurà algú que descobrirà que si els girem també podem obtenir altres quadrats, tal i com veiem en els geoplans lila i blau.

6. Conclusión

Desde el C*entre de recursos pedagògics específics de suport a la innovació i la recerca educativa* (CESIRE*) creemos que para mejorar el aprendizaje de las matemáticas en las aulas desde la administración educativa podemos (y debemos) acompañar los procesos de innovación. Nuestro papel es el de facilitadores del proceso.

La tecnología, internet, twitter, instagram… nos permiten compartir experiencias, prácticas educativas y propuestas didácticas. Y es muy enriquecedor que sea así. Pero el uso de materiales en clase no es garantía de la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje, ni es oro todo lo que reluce.

No nos hemos inventado nada. Pero podemos dedicar tiempo a buscar a formadores expertos y prácticas de éxito y ponerlas a disposición de las escuelas e institutos. Y también a escuchar lo que nos piden, lo que opinan del programa y cómo van cambiando sus necesidades.

Esperamos poder seguir poniendo en marcha otros programas similares, y cubrir las diferentes demandas que van apareciendo, como la formación en programación y uso de tecnología en matemáticas en el aula de primaria y secundaria, la implementación de proyectos en el centro en que el papel de las matemáticas vaya más allá de su utilización para medir, calcular o hacer una estadística sencilla, y otras propuestas que irán apareciendo en los próximos cursos.

Referencias

Aubanell, A. (2006) *Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemática a secundària.* https://ja.cat/llicenciaAubanell

CESIRE Àmbit matemàtic (2020) *Campanya Laboratori de matemàtiques.* ja.cat/labmat

CESIRE Àmbit matemàtic (2020) *Vídeos Laboratori de matemàtiques.* *ja.cat/videoslabmat*

Comissió per a l'impuls de les conclusions del c²em (2018) Les *14 línies d'impuls*. https://c2em.feemcat.org/2258-2/

Hattie, John A. (2011) *Visible Learning for Teachers: Maximizing Impact on Learning*

CoR008 Biografías de grandes matemáticos

Juan Francisco Hernández Rodríguez
juanfisicahzrz@gmail.com
Colegio Hispano Inglés
Rambla de Santa Cruz, 94
38004 Santa Cruz de Tenerife

Núcleo temático: Recursos para el aula, Evaluación.

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato

RESUMEN

Ya lo decía Eric Temple Bell: “Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas”

No existe dentro del extensísimo currículo de matemáticas la opción de tratar el estudio de la Historia de las Matemáticas, ni la biografía de grandes matemáticos, el origen de distintos conceptos, porqué surgieron y a qué intentaban dar respuesta,…

Sin embargo, dentro del enfoque flipped classroom existen múltiples posibilidades de tratar estas y otras cuestiones tan relevantes para nuestro alumnado gracias al aprendizaje semipresencial (Blended Learning). Por ejemplo, utilizando la plataforma Google Classroom que permite la creación de aulas virtuales dentro de una misma institución educativa y facilita el seguimiento del aprendizaje de los alumnos.

Acciones: Llevar la biografía de grandes matemáticos a los alumnos.

Procedimiento: Aprovecho las múltiples posibilidades del enfoque flipped classroom para tratar estas biografías tan relevantes para nuestro alumnado

1. **Recursos utilizados:**

Videos de canales fiables de ciencia de YouTube (Derivando, Date un blog,…)

Plataforma Google Classroom

Cuestionarios de Google

. *Palabras clave: Inconformismo, Excelencia, Divulgación, Currículo, Historia.*

. 2. Objetivos

Conocer la historia de las matemáticas a través de la vida de los matemáticos y su contexto.

Acercar unas biografías muy valiosas a los alumnos a la que, de otra forma, sería muy probable que ellos no accediesen.

Estimular la curiosidad

Complementar la enseñanza con contenidos extracurriculares, pero, probablemente, más importantes y necesarios que los que lo son

3. Resultados obtenidos

• de la práctica educativa: Mis alumnos y también yo nos ponemos al día con los contenidos más importantes y relevantes de la historia de las matemáticas. Adjunto uno de los comentarios anónimos de mis alumnos: “En mi caso, disfruto de esta experiencia de aprendizaje puesto que me permite profundizar en temas que me son de interés y que, de no ser obligatorios dichos vídeos, probablemente nunca habría indagado por mi cuenta ni habría descubierto nuevos aspectos de las matemáticas que me eran desconocidos.”

• de los estudiantes y su aprendizaje: El 95% de los alumnos (57 de 60) realiza semanalmente esta actividad.

4. Objetivos:

- Reconocer la importancia de la historia de las matemáticas, de la vida de los matemáticos y de su contexto.

- Aprender a elaborar cuestionarios autoevaluables de Google y sacarles partido en el ámbito de las matemáticas.

- Buscar que el proceso de aprendizaje es fiable.
- Descubrir la importancia de modificar el cuaderno de evaluación para dar cabida a este tipo de actividades.

Evidencias:

Algunos trabajos de los alumnos sobre EULER:

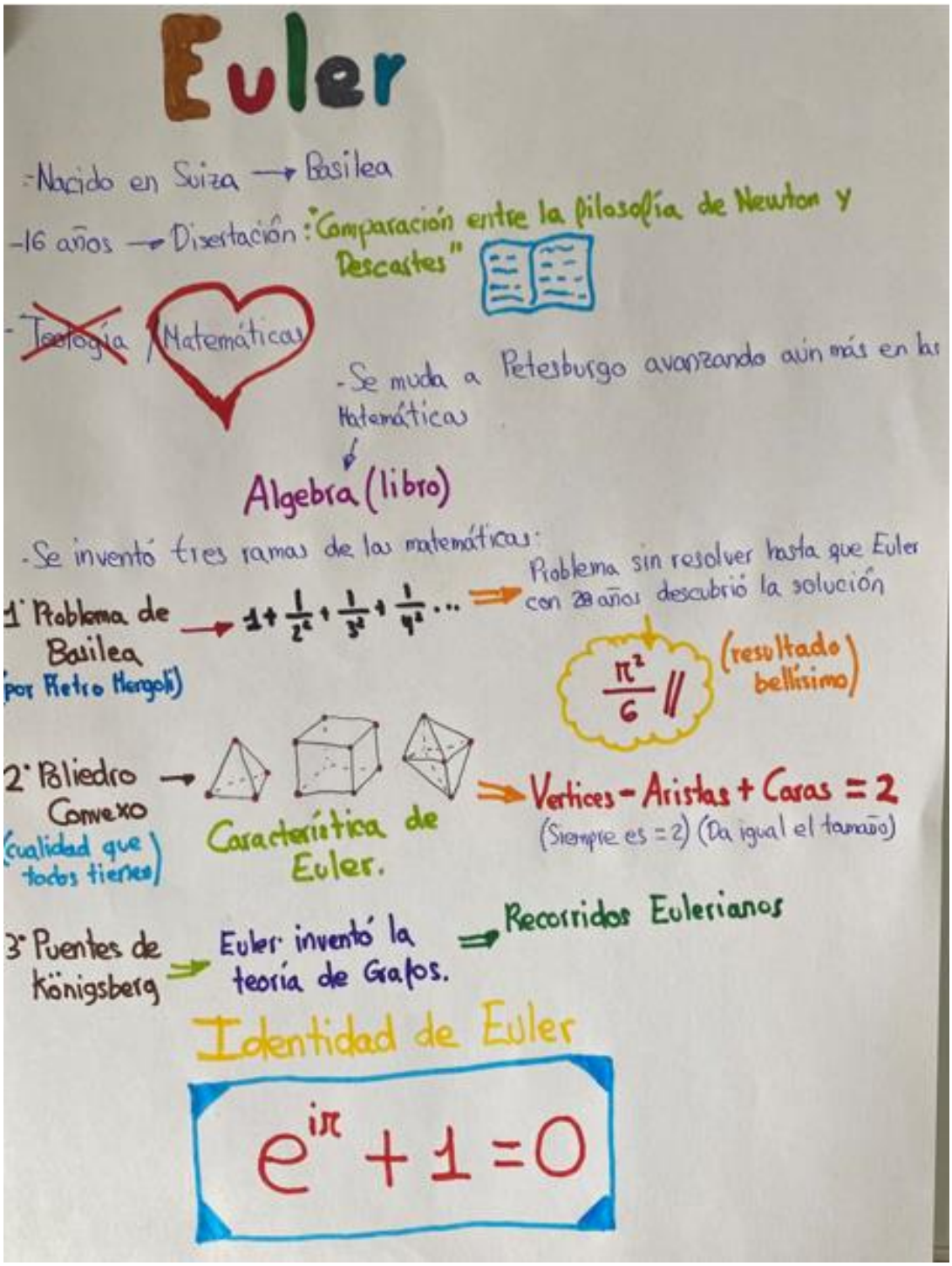


Ilustración 9 Trabajo de Carlos Eduardo

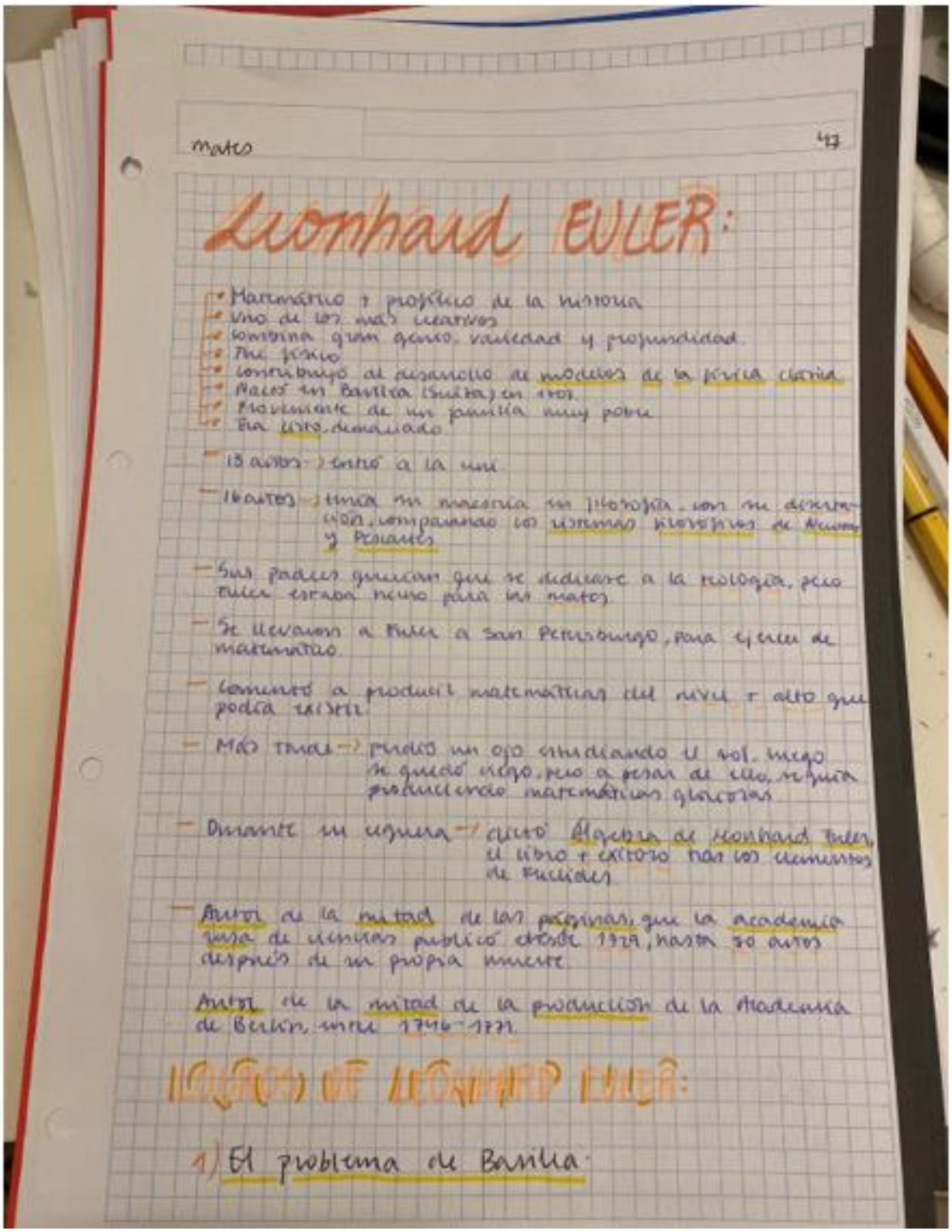


Ilustración 10Trabajo de Sara R (1ª parte)

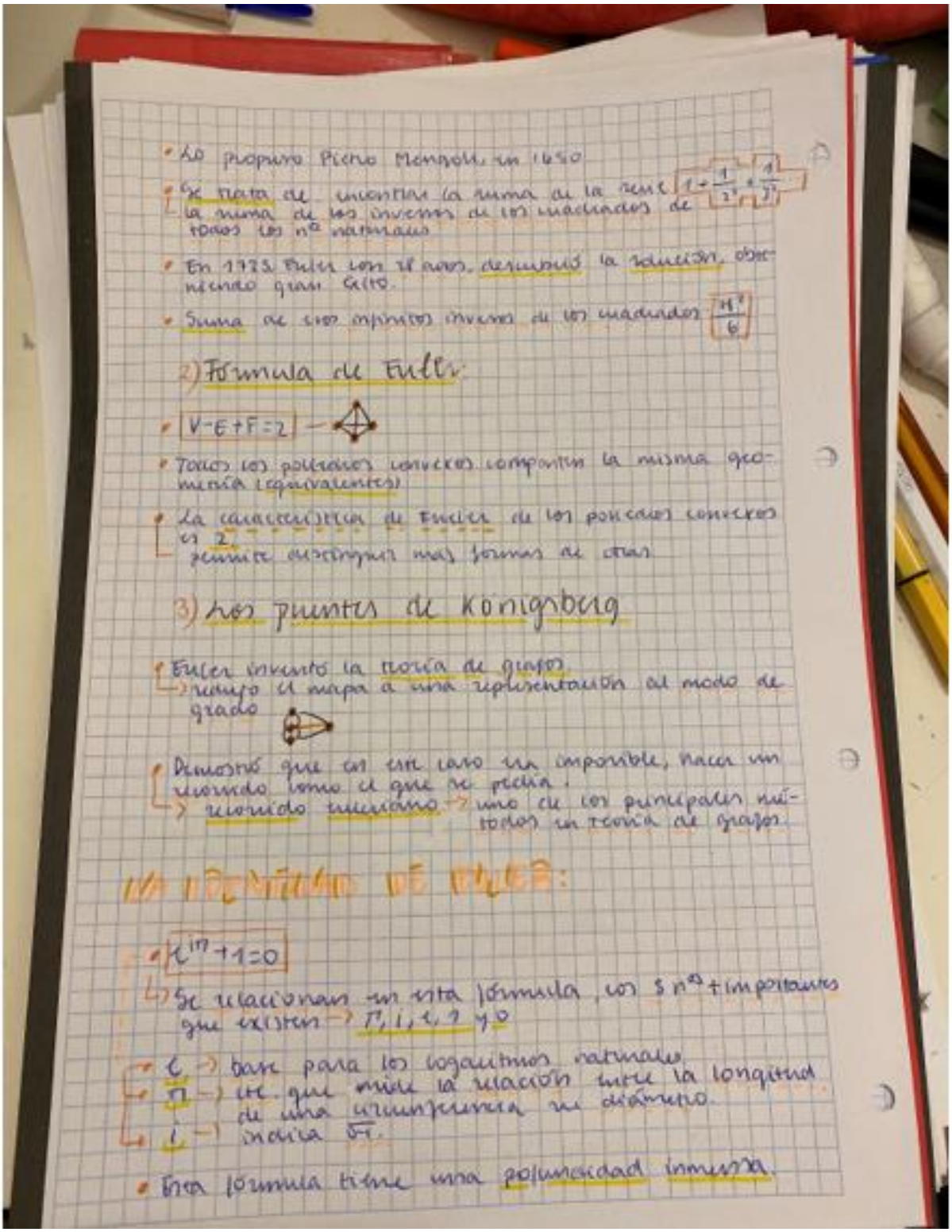


Ilustración 11Trabajo de Sara R (2ª parte)

Ilustración 12Trabajo de Elena L

Algunos trabajos de los alumnos sobre GAUSS:

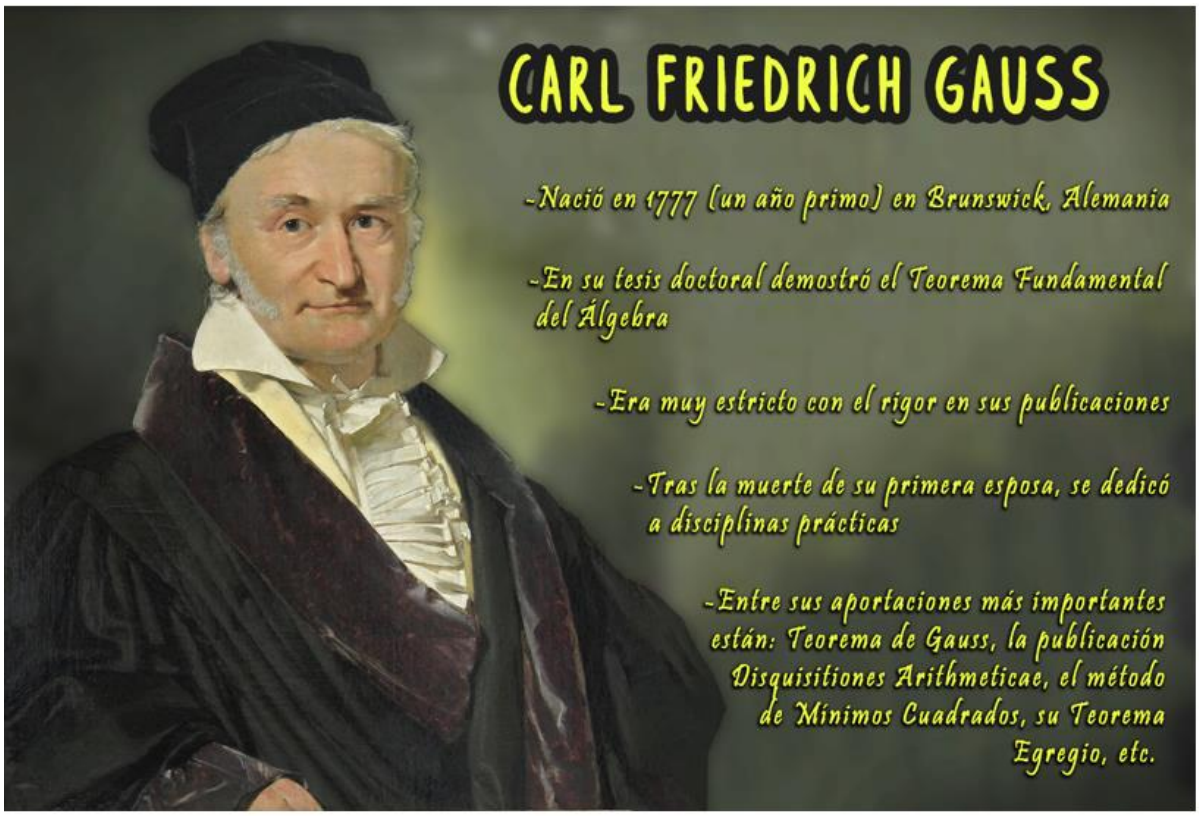
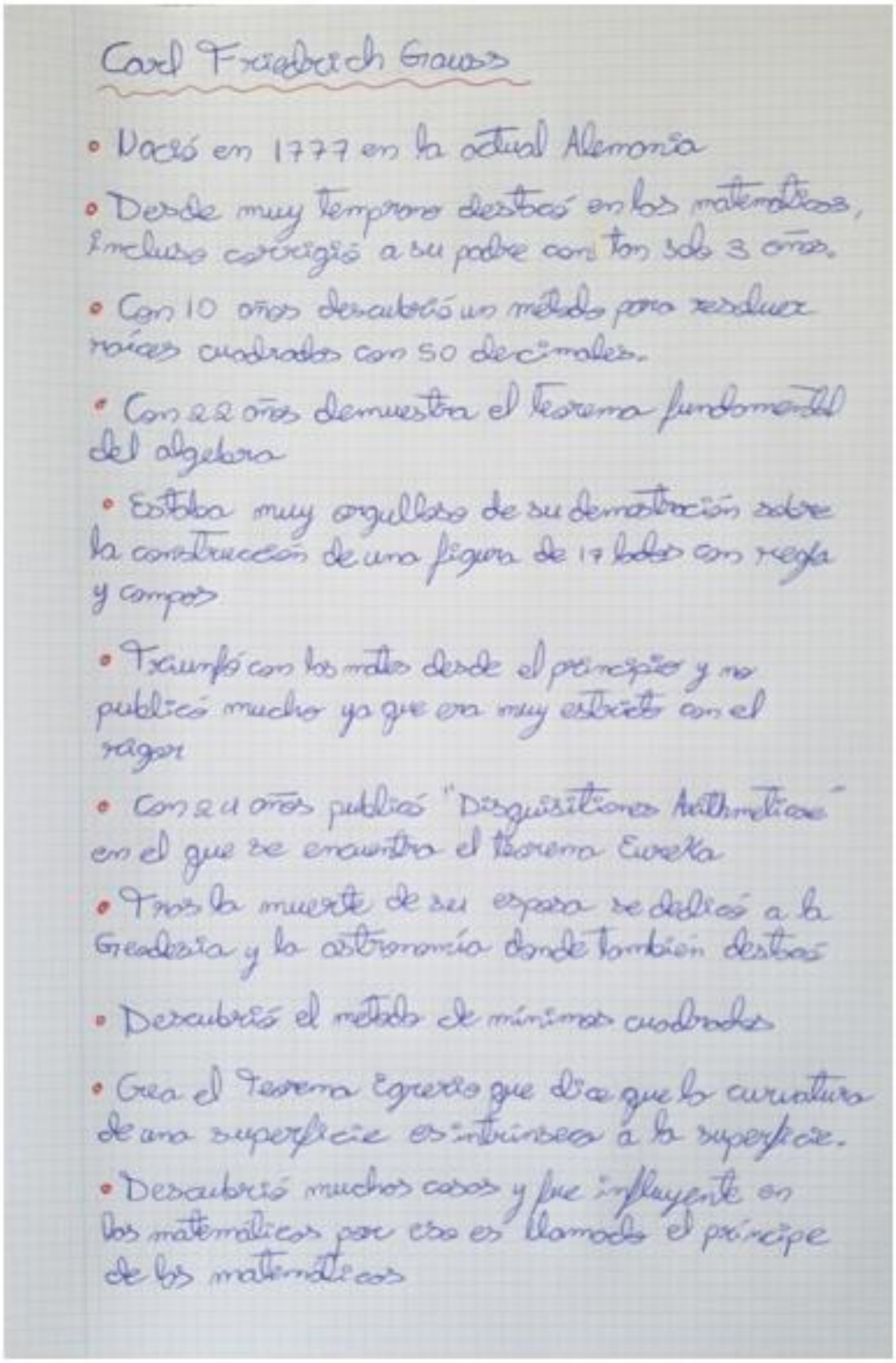


Ilustración 13Trabajo de Iker P.

Ilustración 14Trabajo de Carlota C.



Carl Friedrich Gauss

- Nació en 1777 en la actual Alemania
- Desde muy temprano destacó en las matemáticas, incluso corrigió a su padre con tan sólo 3 años.
- Con 10 años descubrió un método para resolver raíces cuadradas con 50 decimales.
- Con 22 años demuestra el Teorema fundamental del álgebra
- Estaba muy orgulloso de su demostración sobre la construcción de una figura de 17 lados con regla y compás
- Triunfó con los retos desde el principio y no publicó mucho ya que era muy estricto con el rigor
- Con 24 años publicó "Disquisitiones Arithmeticae" en el que se encuentra el Teorema Euclides
- Tras la muerte de su esposa se dedicó a la Geodesia y la astronomía donde también destacó
- Descubrió el método de mínimos cuadrados
- Creó el Teorema Egregio que dice que la curvatura de una superficie es intrínseca a la superficie.
- Descubrió muchas cosas y fue influyente en las matemáticas por eso es llamado el príncipe de las matemáticas

Ilustración 15Trabajo de Daniel G.

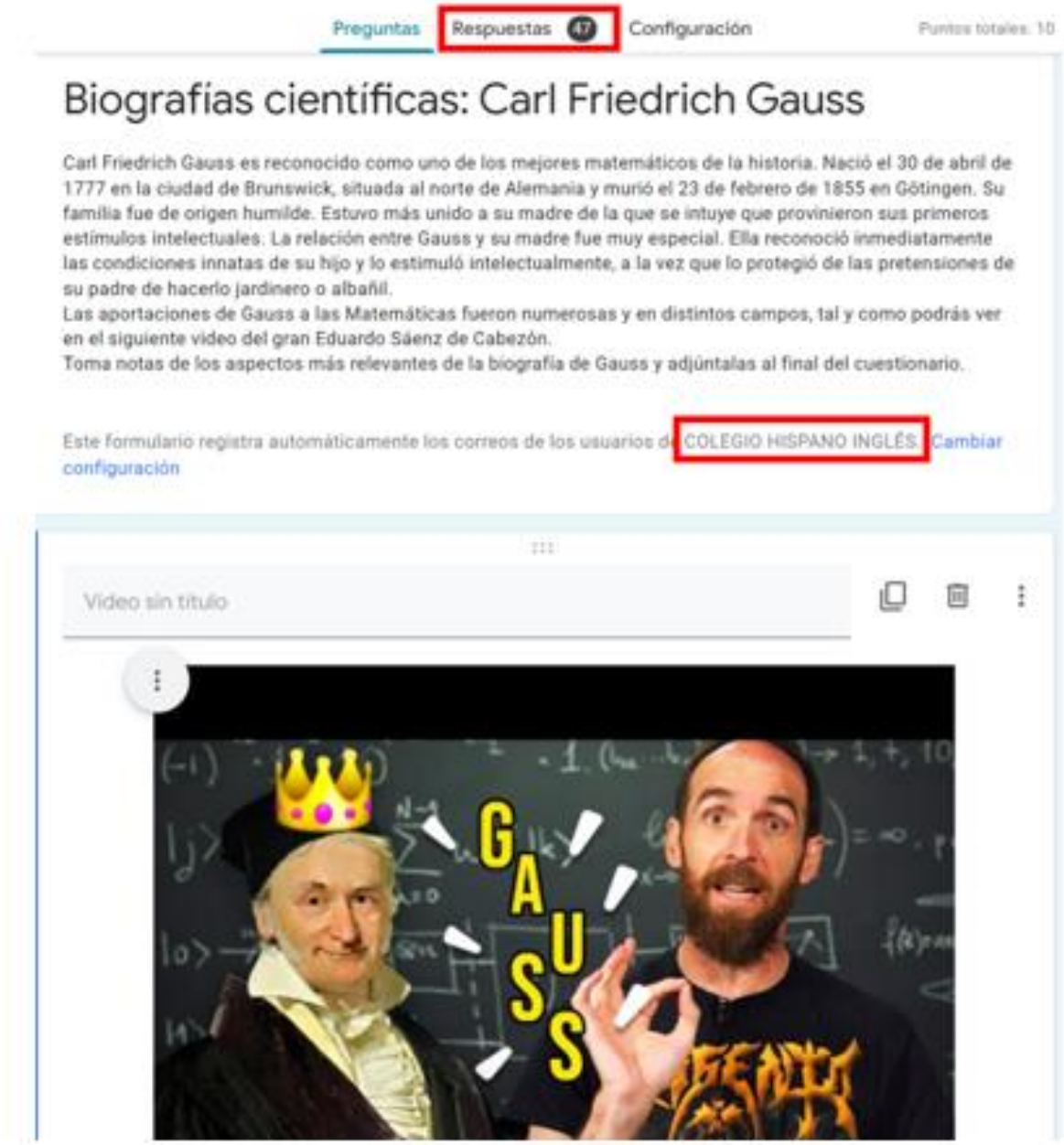


Ilustración 16Cuestionario vinculado al video de Gauss

Algunos trabajos de los alumnos sobre RAMANUJAN:

Ilustración 17Cuestionario vinculado al video de Ramanujan

Ilustración 18Trabajo de Carlota C

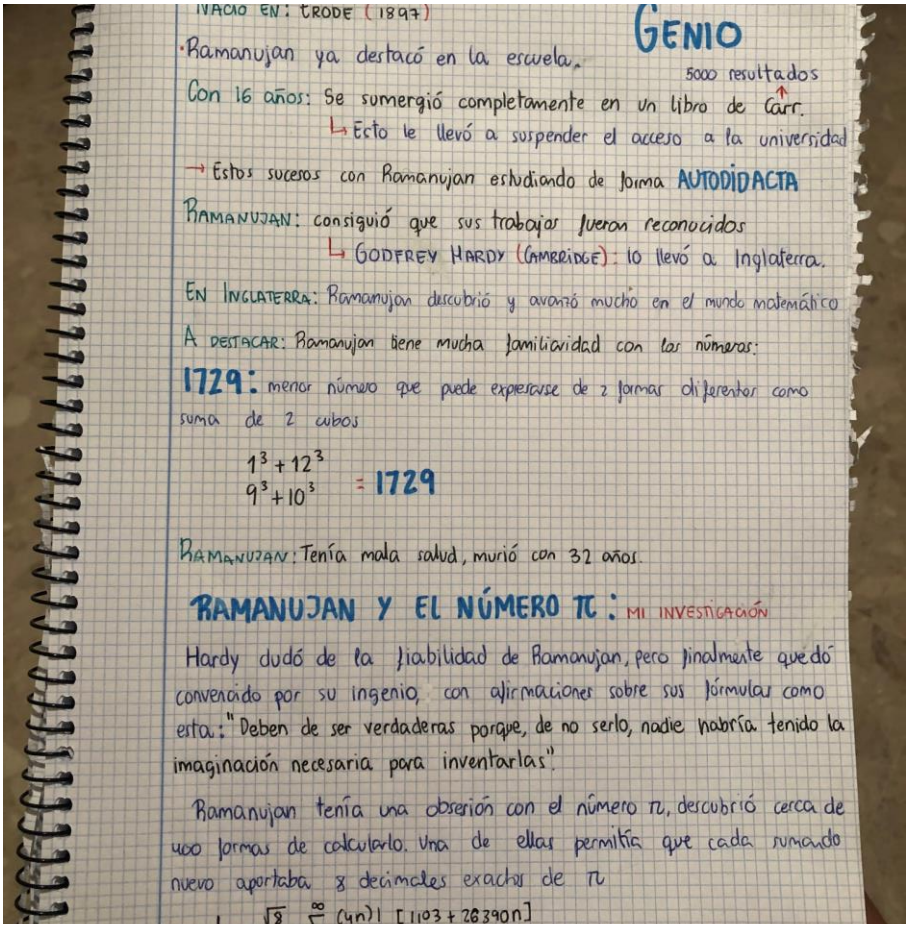


Ilustración 19Trabajo de Elena L

Referencias:

Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2021). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ :

https://www.estonoentraenelexamen.com/2021/04/30/biografias-cientificas-srinivasa-ramanujan/

Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2021). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ :

https://www.estonoentraenelexamen.com/2021/04/19/biografias-cientificas-carl-friedrich-gauss/

Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2021). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ :

https://www.estonoentraenelexamen.com/2021/04/06/biografias-cientificas-leonhard-euler/

Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2021). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ :

https://www.estonoentraenelexamen.com/2021/01/11/biografias-cientificas-isaac-newton/

Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2020). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ :

https://www.estonoentraenelexamen.com/2020/03/06/evaluacion-de-los-alumnos-del-proyecto-no-nos-conformamos-porque-buscamos-la-excelencia/

CoR009 Descubriendo el Teorema de Pick

Mireia Vinyoles Serra
mvinyoles@aula-ee.com
Aula Escola Europea

Núcleo temático: Recursos para el aula, Conexiones.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

El Teorema de Pick es un resultado sencillo que permite trabajar la geometría, la exploración y el gusto por las Matemáticas a primera vista. La actividad pretende hacer descubrir al alumnado que probando, jugando y conjeturando se pueden descubrir propiedades tan interesantes como la fórmula del cálculo del área de polígonos (simples, reticulares) potenciando así el descubrimiento en nuestras clases de Matemáticas.

El Teorema de Pick es un ejemplo perfecto de simplicidad, de acercamiento a unas matemáticas que, no sólo por su sencillez, son hermosas, agradables y de buen trato. La actividad consiste en deducir la fórmula del teorema, buscando primero un patrón a partir de ejemplos y deduciendo después la fórmula conectando con sistemas de ecuaciones. Por último, nos permite reflexionar sobre qué es una demostración.

Palabras clave: Área, Descubrimiento, Sistema de Ecuaciones

1. Introducción

¿Qué significa belleza en Matemáticas? ¿Cuándo podemos afirmar que un resultado es bello? Según Hardy (1940) y (Raman y otros, 2011) el sentido de la belleza viene, al menos en parte, del sentido de la sorpresa. Podemos estar de acuerdo, o no pero la cara de sorpresa y satisfacción de un alumno cuando descubre algo (en Matemáticas, por supuesto), ¡no tiene precio!

Poincaré, por otra parte decía que “El científico no estudia la naturaleza porque es útil hacerlo, lo estudia porque encuentra placer al hacerlo y encuentra placer porque es bello” (Poincaré, 1952).

La belleza no deja de ser subjetiva pero seguramente estaremos todas y todos de acuerdo en que el Teorema de Pick es uno de los resultados más simples, cercanos y bonitos que existen en la literatura matemática, lo que le hace irresistible a la hora de preparar actividades en el aula. Además de permitirnos trabajar el descubrimiento de una manera manipulativa, el teorema nos ofrece la posibilidad de activar el pensamiento matemático buscando soluciones, formulando preguntas y potenciando el ciclo experimentación-conjetura-generalización y al mismo tiempo conectando con diferentes conceptos estudiados en el currículo tanto de la ESO como del Bachillerato.

2 Dónde y cuándo descubrir el teorema

El momento oportuno para realizar una actividad puede ser un elemento clave para aprovechar mejor lo que los alumnos pueden aprender, ya sea a modo de introducción, de refuerzo de algún concepto, de aplicación o a modo de conclusión para cerrar un tema. La decisión es nuestra, como profesorado, de decidir dónde y cuándo mostrar la actividad y usarla como recurso en función de cómo creemos que puede ser más útil a nuestros alumnos. La actividad está pensada para ser realizada a posteriori de haber explicado sistemas de ecuaciones para cerrar el tema y reflexionar sobre lo aprendido abriendo así nuevos caminos, como por ejemplo discernir entre los conceptos de demostración o deducción de un resultado.

En este momento de clausura del tema, el alumnado no conoce el Teorema de Pick y por tanto el descubrimiento está servido. Si formulamos el enunciado como pregunta, empezaremos por ejemplo por:

¿Podemos calcular el área de un polígono simplemente contando puntos?

La actividad, basada en el original de nrich, (nrich, nº1867) no parece a priori tener relación con el tema que hemos estado trabajando en las clases. Esto debería permitir enfrentarnos a la tarea sin miedo y con ganas.

3 La actividad paso a paso

Primero, definiremos el espacio en el que trabajaremos para tener claro qué tipo de polígonos vamos a usar ya que no todos son válidos. Presentamos el material, ya sea de forma virtual con el Geogebra, de forma manual con papel y lápiz, o manipulativamente con un geoplano si es que disponemos de este material en el aula. El profesorado elige cómo realizar la parte de experimentación al inicio de la actividad. Históricamente, nosotros hemos trabajado al principio con papel y lápiz durante la primera sesión y después hemos introducido la tecnología. El hecho de trabajar primero a la antigua, debe ser deformación profesional. Personalmente creo que para abordar un problema, plasmar sobre un papel lo que estamos haciendo, cómo estamos trabajando y dónde queremos llegar, nos ayuda a entender mejor la actividad que hacerlo directamente usando material, ya sea físico o virtual. Ahora es el momento de realizar los grupos de trabajo. El número de alumnos de cada grupo de trabajo dependerá de la densidad de la clase. Y ya podemos empezar.

Dada una malla de puntos, tenemos un polígono reticular simple si podemos situar todos sus vértices en coordenadas enteras (reticular) y sus lados no se intersecan, dividiendo el plano en sólo dos regiones, sin agujeros (simple). Estos polígonos tienen puntos (P) en su borde (puntos perimetrales) y habitualmente tienen también puntos interiores (I). Las figuras pueden describirse dando los puntos (P,I). Por ejemplo, el cuadrado rojo tiene como puntos (P,I)= (4,0), el triángulo gris (3,1), el triángulo verde (5,0) y el hexágono azul (6,4) tal como muestra la Imagen 1.

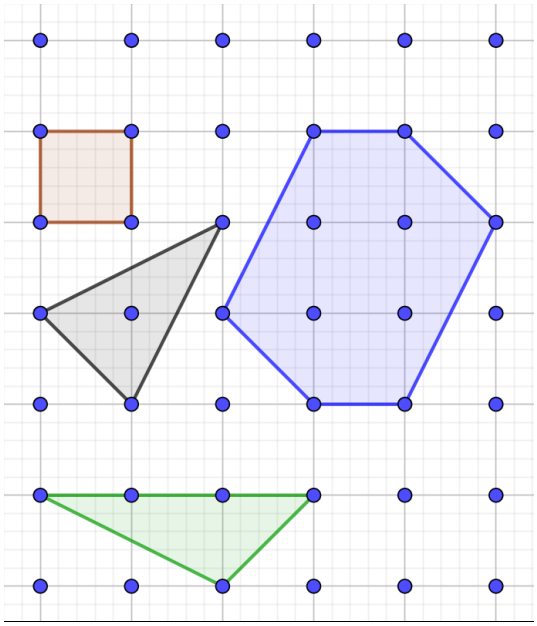


Imagen 1. Polígonos reticulares simples.

Nuestro objetivo será descubrir una fórmula que calcula el área (A) de estos polígonos usando los puntos perimetrales (P) y los puntos interiores (I). Por eso necesitamos primero estudiar un poco el problema e ir reflexionando sobre cómo podemos encontrar su solución. Vamos a deducir la fórmula del Teorema de Pick.

1- Reproduce en un geoplano o en papel y lápiz, los polígonos de la figura y construye nuevos ejemplos.

Como todo problema, primero debe analizarse, jugar y dejar que el alumno se familiarice con lo que queremos estudiar. En grupos, pueden reproducir los polígonos que muestra la Figura 1 y dibujar otros polígonos nuevos.

2-Cada figura encierra un área (A) de la parrilla de puntos. Calcula el área de las cuatro figuras explicando el método que utilizas.

En esta pregunta se pretende que los alumnos jueguen con los conocimientos que ya tienen y calculen las áreas de la forma que crean más conveniente. Aquí todavía no utilizamos el resultado del Teorema de Pick que, a priori, ellos no saben. Es suficiente con saber calcular el área de un rectángulo y el área de un triángulo. No es necesario que hayan realizado áreas de polígonos regulares si estamos en un curso de Secundaria. Para los alumnos de Bachillerato, debería ser coser y cantar.

3- *Dibuja una retícula con más polígonos y apunta en la siguiente tabla de valores sus puntos perimetrales (P), los puntos interiores (I) y sus correspondientes áreas (A).*

Figura	*P*	*I*	*A*

Tabla 1: Tabla de valores de los polígonos usados.

Debemos recordar que los alumnos están trabajando en grupos. Aquí el profesorado puede proponer por ejemplo, que cada grupo se centre en un tipo de polígono. El Grupo 1 trabaja con distintos triángulos, el Grupo 2 trabaja con diferentes cuadriláteros, el Grupo 3 trabaja con distintos pentágonos y así sucesivamente dependiendo de los grupos que tengamos. Esto hará que al principio se concentren sólo en una figura que les motiva y les dará seguridad, para más adelante tener que colaborar entre los distintos grupos y seguir construyendo conocimiento.

4-Reflexionemos ahora qué tipo de polígonos hemos usado y porqué. ¿Lo hemos hecho de forma aleatoria? ¿Has pensado alguna estrategia?

Sugerencias: Si dejamos los puntos reticulares fijos (P) e incrementamos en +1 los puntos interiores (I+1), ¿cómo cambia el área (A)? Si aumentamos los puntos reticulares (P+1) y dejamos fijos los puntos interiores (I), ¿cómo cambia el área (A)? ¿Cuántas figuras distintas tienen la misma área? Haz tus propias preguntas.

Antes de seguir avanzando, es saludable hacer una pausa para reflexionar cómo han construido los polígonos. Si lo han hecho aleatoriamente, que intenten buscar algoritmos para crear nuevos ejemplos ya que, después deberemos elegir entre todos los grupos cuáles son los polígonos más convenientes para sacar conclusiones y seguir investigando. Por lo general, cuesta hacer una reflexión sobre lo que se está haciendo, no están acostumbrados a parar y pensar si lo que están haciendo es adecuado o no. Por eso, esta es una parte de la actividad que les cuesta y no saben mucho cómo abordarla. Aquí vuelve a ser crucial el papel del profesorado para ayudar a aprender a aprender. Además, les cuesta ser autocríticos

con su trabajo, y también les cuesta la puesta en común con el resto de compañeros.

4-Halla la relación que existe entre las tres magnitudes, A, P e I. ¿Cómo crees que debe ser? ¿Crees que el área (A) es una función que depende de los puntos interiores (I) y de los puntos reticulares (P)? Razona tu respuesta.

En esta pregunta ya empezamos a utilizar temas explicados en clase como la idea de función y la idea de magnitudes. ¿Qué esperamos como respuesta a la primera pregunta? Pues que respondan que creen que hay una relación o combinación lineal de las tres magnitudes. Se les debe incentivar a que conjeturen, a que se arriesguen a dar una respuesta sin importarnos si es la correcta o no, que lo intenten con los ejemplos calculados en la tabla a ver si deducen algún patrón o relación entre el área y los distintos puntos. Una vez hecha una conjetura, que la comprueben con los valores de la tabla. A menudo ocurre que en sus conjeturas, hay algún polígono que no las cumple. Aquí es importante recordar que ahora están haciendo de investigadores y que no pasa nada si no ven una relación, que lo realmente relevante es que lo intenten y lo discutan entre ellos. Es indispensable que hagan una puesta en común entre los distintos grupos de investigación para comprobar si para los ejemplos de otro grupo su fórmula es cierta, o no. Recordemos que cada grupo ha elegido polígonos distintos y que si buscamos una fórmula, ésta debe ser cierta para cualquier tipo de polígono siempre y cuando cumpla las condiciones especificadas al principio de la actividad. Normalmente, dependiendo del conocimiento previo del alumnado, su respuesta suele ser del tipo $A=aP+bI$ y se olvidan de poner que puede haber una constante c sumando al final. Aquí es donde el papel del profesorado vuelve a ser crucial. ¿Qué es una relación lineal entre variables? ¿Cuándo una relación no es lineal? ¿Qué papel juega la c?

6-Una vez que hemos encontrado la relación $A=aP+bI+c$, ahora debemos buscar los coeficientes a, b y c. Usando los datos encontrados anteriormente en las tablas hallad estos valores.

a) *¿Qué método estudiado en clase podemos utilizar?*
b) *¿Qué datos obtenidos pueden sernos útiles?*

La actividad está pensada para realizarse cuando se está tratando en clase la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Normalmente, un grupo numeroso de alumnos hace la conexión con sistemas de ecuaciones y, ¡a menudo se emocionan pensando que han encontrado la manera! Otros sencillamente siguen los pasos de los más aventureros y están de acuerdo con ellos. Hay que hacer una puesta en común y de nuevo pensar cuántas ecuaciones necesitamos para encontrar tres parámetros y cómo escoger estas ecuaciones para que podamos encontrar la solución.

Una nueva reflexión que podemos realizar es diferenciar entre los parámetros y las variables. Filosofando un poco, aunque sólo sea a modo introductorio, podemos aprovechar para explicar su diferencia, es decir, los coeficientes a, b y c relacionan la variable dependiente A con las variables independientes P e I.

Parámetros	Variables	
	Dependiente	Independiente
a, b *y* c	A	P, I
Sirven para relacionar las variables.	Su valor depende de P e I.	Pueden tener cualquier valor real.

Tabla 2: parámetros-variables.

Llegados a éste punto, podemos aprovechar para comentar que no siempre todo en la vida ni en las matemáticas tiene solución única, a veces tiene muchas e incluso, a veces no tiene. ¡La vida es así! De este modo ponemos la semilla para que cuando lleguen a bachillerato podamos trabajar la discusión sobre sistemas de ecuaciones. (SCD, SCI y SI)

7-*Escribe el sistema de ecuaciones y resuelve usando el método que creas más conveniente.*

Una vez que cada grupo ha elegido sus ecuaciones (no tienen que ser las mismas para todos los grupos), ya podemos usar lo que hemos aprendido en clase y resolver el sistema encontrando los valores que queríamos para la fórmula. También podemos usar las mismas, pero es más interesante hacer la reflexión que aunque no usemos las mismas ecuaciones, la solución del sistema no cambia. Es importante que cada grupo elija y reflexione sobre cuál de los métodos explicados para resolver sistemas es más útil para su sistema. Normalmente, cuando hemos

usado esta actividad en Secundaria, era con alumnos que sólo habían trabajado sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y por tanto, el primer dilema era, ¿cómo lo resolvemos ahora que tenemos tres? Es habitual que busquen sus propias soluciones si han hecho una buena elección de las ecuaciones del sistema. Esta nueva revelación les motiva a seguir adelante y a finalizar la tarea.

Éste es el momento de hacer que se sientan investigadores y que disfruten de su descubrimiento. Evidentemente, no todos los alumnos reaccionarán igual. A algunos se les ilumina la mirada diciendo “Eureka”, ¡hemos descubierto una fórmula! Otros se quedan pasivos y sólo se lo toman como una actividad más. "Mira qué bien, otra fórmula para aprender". En ambos casos, debería quedar un poquito de satisfacción con el trabajo realizado.

En este punto de la actividad, cuando ya han descubierto la fórmula, podemos ser algo más formales y enunciar el Teorema

8-Ahora ya podemos dar el enunciado del Teorema de Pick.

Teorema (Pick,G.): Sea P un polígono simple con vértices enteros.
- *Si P es el número de puntos enteros en la frontera del polígono,*
- *e I el número de puntos enteros del interior del polígono,*

Entonces,
El área se puede calcular con la fórmula:

$$A=I+12P-1$$

La actividad ya casi ha terminado y llega el momento de la reflexión final. .

9-Reflexión:
a) ¿Cualquier dato ha servido para resolver el problema?
b) ¿Cuál es el mínimo número de ecuaciones que has necesitado?
c) ¿Crees que has hecho una demostración del teorema? Busca el significado de teorema.
d) ¿Crees que este resultado es bonito?

Un teorema es una palabra que en Matemáticas usamos muchas veces pero que nuestros alumnos, a veces, no tienen muy claro qué significa. ¿Qué es un Teorema? ¿Cualquier enunciado matemático puede ser un Teorema? ¿Entonces cómo lo distinguimos? ¿Si no tiene demostración no es un Teorema? ¿Nosotros

hemos hecho una demostración, una comprobación, una deducción? No nos debe intimidar el hecho de introducir la idea de qué es un teorema y así poder enlazar con la necesidad de una demostración que asegure que la propiedad enunciada es cierta para todo polígono reticular simple. Podemos aprovechar para buscar información en Internet sobre qué es un teorema (proposición que debe ser demostrada de forma lógica a partir de un axioma u otros teoremas) y por qué se llama así. El trabajo nos ha dado pie a poder hacer más actividades con este teorema como por ejemplo su demostración usando la suma de ángulos interiores de los polígonos (Conover y otros, 2013).

4. La actividad en el aula de secundaria

Pasar de la teoría a la práctica es siempre refrescante. La actividad está pensada para realizarse en dos sesiones o bien en una sesión de dos horas. La primera parte, más juguetona, donde se organizan en grupos de trabajo, buscan los polígonos que nos servirán de ejemplo, y van tomando los datos que se les piden. Podemos usar la actividad para que escriban sus resultados en un documento compartido y así les explicamos cómo insertar ecuaciones, imágenes y tablas en él. Para la mayoría, es la primera vez que escriben un trabajo de matemáticas con ordenador, lo que les motiva a seguir con la actividad. Históricamente, hemos llegado sólo hasta la pregunta 5, quedando en el aire, entre sesiones, cuál es la fórmula que relaciona el área y los puntos. No obstante, algún grupo ya empieza a hacer sus conjeturas y a buscar entre sus compañeros más datos para poder ver un patrón.

La segunda parte, más de descubrimiento y reflexión, es donde hacemos puesta en común y deducimos la fórmula del Teorema de Pick. Aprovechamos para incidir en las Conexiones que hemos usado entre los distintos contenidos de la asignatura, como la idea de función, ecuación, variables, parámetros y sistemas de ecuaciones. Además, también incidimos en la dimensión de Comunicación y Representación ya que el hecho de tener que escribir la actividad en un documento online lleva implícito intentar comunicar de forma correcta lo que hemos ido descubriendo, ya sean tanto las fórmulas como las explicaciones del razonamiento seguido para llegar al resultado final.

La última pregunta sale casi sin querer: ¿han encontrado bonito este resultado? ¿Las matemáticas pueden ser hermosas? Y ahí el debate ya está servido. La mayoría nunca se habían planteado antes si las matemáticas pueden o no ser hermosas, son y basta. Acabamos, pues, reflexionando sobre la belleza.

5. La actividad en el aula de bachillerato

Por lo general la misma actividad se puede llevar a cabo en el aula de Bachillerato sin tener que cambiar muchas cosas. El tiempo dedicado a la actividad se reduce drásticamente y cambian los objetivos internos. Ahora podemos ir más allá y usarlo como actividad introductoria de Trabajo de investigación para empezar a plantear preguntas del porqué funciona una fórmula o para quién (en este caso para qué polígonos) funciona. La deducción de la fórmula es, por lo general, mucho más rápida y normalmente aprovechan el método de reducción de Gauss para resolver el sistema. Aquí sí que podemos hacer énfasis en el significado de sistema compatible, compatible indeterminado y sistema incompatible a la hora de escoger qué ecuaciones utilizamos. Nosotros queremos que sea compatible determinado por tanto, no queremos dependencias entre las ecuaciones. Además, podemos reflexionar sobre los diferentes sistemas de ecuaciones cuando aparecen en clase y ver que los sistemas son equivalentes aunque no usemos exactamente ecuaciones idénticas. Usando el método de reducción de Gauss, podemos demostrar que diferentes sistemas de ecuaciones son equivalentes, es decir, tienen la misma solución.

Una vez que formalizamos el Teorema, podemos derivar la clase hacia temas de investigación diferentes. Por ejemplo, en la discusión de qué es una demostración, podemos discutir sobre qué tipo de demostraciones existen (por contradicción, directa, inducción, etc.) y con qué conceptos e ideas explicadas en la asignatura, o no explicadas, se puede relacionar. La pregunta es inevitable, ¿puede servir esta actividad para un Trabajo de Investigación? Pues, quizás sí.

Ahora es el momento de potenciar que busquen información sobre el tema tratado y reflexionar sobre qué bibliografía puede ser válida o no para un trabajo de investigación. Aquí entra en juego la Bibliografía adjunta a la actividad. La excusa

puede ser que por ejemplo, busquen distintas demostraciones del teorema. Evidentemente, en ningún sitio encontrarán a alguien resolviendo un sistema de ecuaciones, ya que nosotros no hemos hecho ninguna demostración. Pero por ejemplo, en el artículo (Poincaré, 1952) "Two beautiful proofs of Pick's theorem" encontrarán dos maneras diferentes de lo habitual de demostrar el teorema. La primera, sólo usa los ángulos del polígono, la segunda ya lo relaciona con la Teoría de Grafos.

Esto nos conduce a relacionar un tema que a priori no parece complicado con muchas otras ramas de las matemáticas, dando lugar a nuevas preguntas y a nuevas investigaciones. Por ejemplo, pueden encontrar relaciones con el tema de sucesiones, como las sucesiones de Farey (Amen, 2006), con polígonos de Jordan y la fórmula del topógrafo descubierta por Gauss donde se usan también determinantes para calcular áreas de polígonos (Kowalski, 2017), o el Teorema de Minkowski, para el que sea más teórico (Garbett, 2010).

Imagen 2. Árbol de relaciones de Pick.

Esta podría ser la primera excusa para empezar el proceso de elegir un tema de trabajo de investigación. Es interesante mostrar en forma de conexiones (Imagen 2), las nuevas ramas de las matemáticas que aún tienen por descubrir y que pueden surgir de la idea del Teorema de Pick y así mostrar al alumnado que de una idea particular y conocida, se puede llegar hasta el infinito y más allá. También podemos enseñar un ejemplo de trabajo de final de carrera como el de la referencia (Conover

y otros, 2013). Haciendo uso de una de las frases citadas en (Alsina y otros, 2019), aquí es donde "Un profesor da una mano... abre una mente... y toca un corazón". Quizás aquí, tenemos una probabilidad más alta de poder tocar este corazón y hacer que un alumno descubra la belleza que hay en este resultado matemático y abrirle la puerta a disfrutar de las matemáticas.

6. Un poco de historia

Personalmente, creo que es muy enriquecedor para los alumnos conocer un poco la historia del teorema y de la persona que lo ha descubierto. Una pequeña explicación, que normalmente hacemos de manera oral, sobre la poca importancia que se le dio en sus inicios al Teorema de Pick nos sirve para ver que a veces, investigaciones que más adelante han sido importantes, al principio eran poco valoradas. Esto acostumbra a pasar en el mundo de las matemáticas donde, aportaciones que parecen no llevar en ningún sitio, con los años se convierten en cruciales para muchas ramas, disciplinas y aplicaciones (o no) en la vida cotidiana. A modo de ejemplo, el teorema sirve para calcular de manera rápida el área de una región de bosque quemada a partir de imágenes vía satélite, o comprobar que es imposible construir un triángulo equilátero en un entramado de puntos enteros.

Referente a su vida, según Connor (2005), Georg Alexander Pick nació en una familia judía en 1859 en Viena, Austria. Entró en la universidad con 16 años y se graduó en Estudios de Matemáticas y Física en la Universidad de Viena. Una vez hecho su doctorado, fue a Praga donde ejerció de profesor. Investigó en diferentes áreas de las matemáticas como, Álgebra Lineal, Geometría, Funciones de variable compleja o Geometría diferencial entre otras. Aquí conoció a Albert Einstein hasta que los nazis, cuando ya tenía 82 años lo encarcelaron y destinaron al campo de concentración de Theresienstadt, donde murió.

El "famoso" teorema fue publicado por primera vez en 1899 en un diario checo, dentro del artículo titulado Geometrisches zur Zahlenlehre (Resultados Geométricos sobre la Teoría de Números), (Pick,1899). Sin embargo, nadie hizo caso alguno al resultado y no fue hasta años más tarde que se popularizó cuando el matemático

polaco H. Steinhaus lo mencionó en su libro de 1969 "Mathematical Snapshots" (Steinhaus, 1969).

7. Conclusión y análisis de la actividad

Una vez terminada la actividad, es el momento de hacer una autorreflexión sobre sus cosas buenas y las no tan buenas y pensar en posibles mejoras para una próxima vez. El análisis lo he basado en las preguntas que pueden servir de indicadores del nivel de riqueza competencial de una actividad (Cesire, 2014). El descubrimiento de la fórmula del Teorema de Pick nos permite usar conocimientos ya adquiridos, como la resolución de sistemas de ecuaciones, en un contexto que a priori no parece que tenga ningún tipo de relación. Nos ayuda a relacionar campos diferentes dentro de las matemáticas usando al mismo tiempo los conceptos de función, variable, magnitud en un problema meramente geométrico como son las áreas de los polígonos. La actividad se puede desarrollar de diferentes formas, usando tecnología como GeoGebra o usando material manipulativo como el Geoplano.

Para estimular la curiosidad del alumnado es necesario que el profesorado se implique y los guíe. De lo contrario, se desaniman cuando se sienten perdidos sin saber cómo seguir. El punto clave de la actividad es conseguir que elijan bien los ejemplos y que ellos mismos discutiendo, hagan la conexión con los sistemas de ecuaciones. Entonces es cuando se sienten satisfechos y tienen ganas de llegar hasta el final. El hecho de tener que compartir datos entre los grupos y tener que hacer puesta en común para seguir adelante es algo que también los motiva aunque a algunos, los que se distraen con facilidad, aprovechan para hacer tertulias no matemáticas. Sin embargo, acaban convergiendo hacia el trabajo ya que la actividad es evaluable. Deben entregar un documento online con las respuestas a las preguntas hechas durante la actividad y donde deben aprender a insertar ecuaciones, tablas y figuras (Secundaria). También debe haber alguna pequeña explicación y reflexión de cómo han ido resolviendo las cuestiones propuestas.

En el caso de Bachillerato, deben además aprender a buscar información, a citarla correctamente y analizar cómo escribir de manera adecuada un artículo científico.

La finalidad de la actividad pretende iniciarlos en la investigación de un tema de matemáticas como Trabajo de Investigación. Para mejorar la actividad, quizás sería una buena opción que ellos mismos se autoevaluaran siguiendo una rúbrica fijada por el profesorado. Normalmente, cuando en una actividad ellos mismos (en grupo) deben evaluarse, acostumbran a ser incluso más críticos de lo que podríamos ser nosotros y es entonces cuando se dan cuenta de cómo han hecho las cosas y consolidan los conocimientos o, por el contrario, descubren qué es lo que no acaban de entender. Ambos casos darían lugar a un buen final para la actividad aunque el tiempo muchas veces es oro, y eso implicaría una tercera sesión.

Referencias

Alsina,C, Aubanell,A, Burgués,C. (2019)*Tres professors de Matemàtiques: Com fer estimar i aprendre bé les matemàtiques.* Col·lecció Referents. Editorial Rosa Sensat. ISBN: 9788412009613

Amen, J (2006) *Farey Sequences, Ford Circles and Pick's Theorem*. MAT Exam Expository Papers. 2. University of Nebraska-Lincoln, Lincoln. https://digitalcommons.unl.edu/mathmidexppap/2

Connor, JJ O' e EF, Robertson. (2005) *Georg Alexander Pick*. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pick/

Conover B., Marlow C., Neff J., Spung A. (2013) *The History behind Pick's Theorem.* School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, St Andrews, Scotland. University of Georgia, Georgia. https://sites.math.washington.edu/~julia/teaching/445_Spring2013/Paper_Pick.pdf

Conover, B. and Marlow, C. and Neff, J. and Spung, A. (2013) *Pick's Theorem*, Math 445 Spring. Final Project. University of whashington. Whashington. https://math.washington.edu/

Garbett, J. (2010) *Lattice Point Geometry: Pick's Theorem and Minkowski's Theorem*, Senior Exercise in Mathematics". Kenyon College, Ohio.

Hardy, G.H (1940) *Apología de un matematico*. Cambridge University Press.

Kowalski, J. (2017) *Recurrent Theme of Pick's Theorem*. Research gate.

Nrich, *Pick's theorem*, University of Cambridge, https://nrich.maths.org/1867

Pick, G. A. (1900). *Geometrisches zur Zahlenlehre (Geometric results on number theory)*. Sitzungsber. des Deutschen Naturwissenschaftlich-Medizinischen Vereins für Böhmen "Lotos", Prag 19, pp 311-319.

Poincaré, H. (1952) Science and method, New York, Dover.

Raman, M., Öhman, L. (2011) *Two beautiful proofs of Pick's theorem*. Seventh Congress of European Research in Mathematics Education. University of Rzeszow Publishing House , p. 224-232.

Steinhaus, (1969) H. *Mathematical Snapshots*. Oxford University Press.

Cesire, Departament d'ensenyament, Generalitat de Catalunya, (2014) *Preguntes que poden servir d'indicadors del nivell de riquesa competencial d'una activitat* .http://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0039/25c246d5-835c-427f-9f87-68bdfc9d78a3/indicadors_competencials.pdf

CoR013 Contextos reales para desarrollar la alfabetización estadística de 3 a 12 años

Ángel Alsina
angel.alsina@udg.edu
Universidad de Girona

Núcleo temático: Conexiones, Recursos para el aula.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria.

RESUMEN

En la primera parte, se argumenta la importancia de planificar la enseñanza de la Estadística en Educación Infantil y Primaria a partir de contextos reales y se ofrecen diversas estrategias y recursos didácticos focalizados en el diseño e implementación de actividades a partir del ciclo de investigación estadística: problema, plan, datos, análisis y conclusión (PPDAC); y, en la segunda parte, se muestran diversos ejemplos de actividades implementadas en diversos centros escolares para desarrollar la alfabetización estadística a partir de contextos reales.

Palabras clave: Alfabetización Estadística, Estadística en Contexto, Educación Infantil, Educación Primaria.

1. Introducción

En España, la estadística se introduce en el currículum de Educación Primaria en el marco de la Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE), de 3 de octubre de 1990, con un bloque de contenidos denominado “Organización de la información”; en contraposición, la estadística sigue sin estar presente en la legislación educativa española de Educación Infantil (Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil), a pesar de las recomendaciones de organismos de prestigio internacional como el *National Council of Teachers of Mathematics*. Esta asociación, por ejemplo, señala estándares de contenido de “Análisis de datos y probabilidad” a partir de los 3 años (NCTM, 2003) para iniciar el desarrollo de habilidades que

permitan analizar críticamente los datos y tomar decisiones en situaciones de incertidumbre (Alsina, 2012).

En la literatura acerca de la estadística y su enseñanza coexisten diversos términos: “educación estadística”, “alfabetización estadística”, “cultura estadística”, “pensamiento estadístico”, “razonamiento estadístico” o “sentido estadístico” son algunos de los más habituales (para una revisión de los matices de cada término, se puede consultar Alsina 2021a). Aquí se asume el término “alfabetización estadística” (*statistical literacy*), que fue introducido, entre otros, por Gal (2002) para referirse a la capacidad de las personas para interpretar, evaluar críticamente y, cuando sea pertinente, expresar sus opiniones respecto a la información estadística, los argumentos relacionados con los datos, o fenómenos estocásticos. Se asume este enfoque por tres razones principales, tal como señala Alsina (2021a): 1) primero, porque otorga un carácter funcional al término “competencia”; 2) segundo, porque tiene un carácter aglutinador, al englobar otras expresiones como la educación y el sentido estadístico, dado que la alfabetización requiere una formación adecuada desde los primeros niveles escolares que garantice la comprensión, la competencia y el razonamiento en este ámbito, además de considerar también la disposición; 3) y tercero, porque la alfabetización implica transformación, en el sentido de mejora, tanto por parte de quien enseña como de quien aprende: quien educa para alfabetizar debe hacerlo desde un marco de reflexión continua y de transformación de la propia práctica y, quien aprende para alfabetizarse, debe hacerlo también desde un marco de pensamiento crítico y de reconstrucción del propio conocimiento.

Desde este punto de vista, y tomando en consideración los planteamientos del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM) propuesto por Alsina (2018a, 2019, 2020a), este autor propone itinerarios específicos para la enseñanza de la estadística en infantil y primaria (Alsina, 2020b, 2021b). En estos itinerarios, pone especial atención en el diseño de proyectos de investigación estadística en contextos reales asumiendo, por un lado, que el contexto es una característica de la estadística (Cobb y Moore, 1997) y, por otro lado, que los problemas de estadística deben estar encaminados no al cálculo de parámetros o valores, sino a la argumentación y a la toma de decisiones para que el alumnado

pueda manejarse con soltura respecto a qué información maneja y cómo el estudio de datos muestrales puede contribuir a inferir resultados de realizaciones experimentales futuras y de datos poblacionales (Rodríguez-Muñiz et al., 2020).

Con base en estos fundamentos, esta comunicación se organiza en dos partes: en la primera parte, se argumenta la importancia de planificar la enseñanza de la Estadística a partir de contextos reales y se ofrecen diversas estrategias y recursos; y, en la segunda parte, se muestran diversas actividades para desarrollar la alfabetización estadística a partir de contextos reales.

2. La enseñanza de la estadística a partir de contextos reales

En el marco de la alfabetización estadística, lo situacional, es decir, los contextos reales, los proyectos, etc. tienen un papel muy relevante. En este sentido, por ejemplo, Hahn (2014) considera que el contexto es ineludible, ya que los datos se definen como “números en contexto” (Cobb y Moore, 1997). Wild y Pfannkuch (1999) promueven la enseñanza de la estadística a partir de investigaciones en contextos reales, siguiendo un ciclo de investigación de cinco fases, conocido como PPDAC (Figura 1).

Figura 1. Ciclo de investigación estadística PPDAC. Fuente: Araneda et al. (2013, p. 17)

A partir de este planteamiento, Batanero y Díaz (2004) promueven la implementación de proyectos de investigación estadística, que pueden ser propuestos por el profesorado o escogidos libremente por el alumnado. Estas dos autoras subrayan que el trabajo con proyectos en la clase de estadística permite contextualizar los contenidos en situaciones interesantes para el alumno e integrar

la enseñanza de la estadística dentro del proceso más general de investigación, en lugar de introducir los conceptos y técnicas descontextualizadas, o aplicadas únicamente a problemas tipo, difíciles de encontrar en la vida real, como los ejemplos de la Figura 1. El Proyecto GAISE (Bargagliotti, 2020; GAISE College Report ASA Revision Committee, 2016; Franklin et al., 2007), promueve también la enseñanza de la estadística como un proceso investigativo de resolución de problemas y toma de decisiones. Adicionalmente, aporta algunas recomendaciones como, por ejemplo, centrarse en la comprensión conceptual, integrar datos reales con un contexto y propósito, fomentar el aprendizaje activo o bien usar tecnología para explorar conceptos y analizar datos. Batanero y Díaz (2011) señalan que el trabajo con pequeñas investigaciones o proyectos permiten no tan solo mejorar la comprensión de los contenidos involucrados en el estudio de la estadística a través de un aprendizaje más motivador y dotado de sentido, sino que también permiten favorecer el desarrollo de la alfabetización estadística, al mejorar la percepción hacia la utilidad de la estadística, además de fomentar una actitud positiva hacia su estudio.

La planificación de las prácticas de enseñanza de la estadística desde este enfoque modifica el rol del profesor, convirtiendo a los alumnos en los protagonistas del proceso de enseñanza y aprendizaje: “además de favorecer el aprendizaje significativo, promueven el trabajo en grupo y desarrollan capacidades como la reflexión y la autonomía del alumno” (Anasagasti y Berciano, 2016, p. 33).

3. Ejemplos de actividades para desarrollar la alfabetización estadística de 3 a 12 años a partir de contextos reales

Siguiendo los planteamientos anteriores, se describen dos actividades de estadística en contexto a modo de ejemplo.

4.1. ¿Qué vehículos pasan por la rotonda? (5-6 años)

Esta actividad, implementada por la maestra F. Dalmau y descrita en Alsina (2018b), se ha llevado a cabo con un grupo de alumnos de 5 años de una escuela

ubicada en un barrio de la ciudad de Girona en la que hay muchas rotondas, y sigue las fases de un ciclo de investigación estadística.

Una vez planteado el reto, que consiste en analizar los vehículos que pasan por una rotonda cercana a la escuela durante un tiempo determinado, se fomenta un diálogo con el alumnado para que hagan sus propias predicciones e inferencias. Posteriormente, salen al exterior a contabilizar los vehículos que pasan por la rotonda durante un periodo de tiempo previamente establecido, que ellos mismos controlan con un reloj de arena (Figura 2).

Figura 2. Recogida de datos en contexto. Fuente: Alsina (2018b)

Como se observa en la Figura 2, se distribuye a los alumnos en grupos reducidos (2-3 alumnos) y van contabilizando los diferentes tipos de vehículos que circulan por la rotonda: coches, motos, bicicletas, etc. Cada grupo se responsabiliza de un tipo de transporte y va registrando los datos utilizando marcas de recuento concretas cada vez que pasa un vehículo (Figura 3).

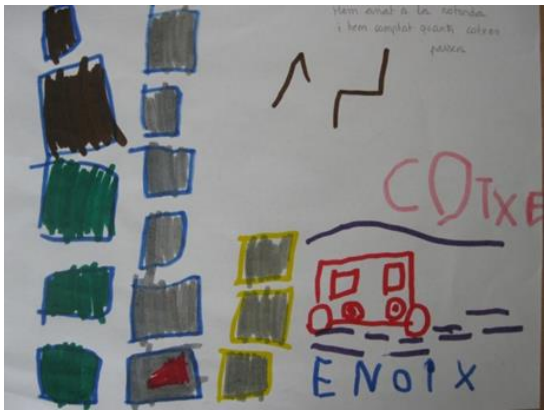


Figura 3. Recuento de datos con marcas concretas (cuadrados). Fuente: Alsina (2018b)

Una vez recogidos los datos deben organizarse. A partir de las preguntas que hace la maestra: *"¿Cuántos camiones han pasado?; ¿han pasado tractores, cuantos?; ¿qué han pasado más, camiones o furgonetas?"*, los niños comunican y comparten conjuntamente aquello que han observado. De este modo, a partir de los resultados parciales que aporta cada grupo se organizan todos los datos para poder identificarlos de una forma más clara y visible. A partir de la transnumeración, pues, los datos se registran en una tabla en la que se anotan las frecuencias de cada categoría (Figura 4):

Figura 4. Organización de los datos recogidos en una tabla de frecuencias. Fuente: Alsina (2018b).

Una vez organizados los datos, la siguiente fase de trabajo corresponde a la representación de los datos. Cada grupo representa los resultados con diferentes materiales y con formatos diversos. Esto permite mostrar visualmente los resultados, hacer nuevas interpretaciones, establecer relaciones cuantitativas, exponer y compartir las representaciones con los compañeros de los otros grupos, sacar conclusiones; y sobre todo, ayudar al alumnado a crear una base sólida para ir elaborando las primeras representaciones mentales de los números naturales.

Para llevar a cabo la representación se facilitan maderas con forma de rectángulo, todas iguales, y cada rectángulo de madera representa una unidad. Algunos grupos representan las cantidades de vehículos horizontalmente, en el suelo, donde cada barra representa un tipo de vehículo: pueden pasar por encima contando cada unidad, y de esta manera comprueban de forma perceptiva que la longitud de cada barra es proporcional a la cantidad. Otro grupo decide representar

las cantidades de vehículos verticalmente, y hacen torres con las maderas en forma de prisma de la misma medida: cada pieza de madera representa una unidad y cada torre o columna un tipo de vehículo.

Además de las maderas con forma de rectángulo, los niños y niñas también pueden acceder a otros materiales para hacer su representación: cuadrados de colores, palos, etc.

Figura 5. Representación de los datos recogidos con objetos. Fuente: Alsina (2018b)

Una vez finalizada la representación se hace una puesta en común, contemplando de esta forma la fase de interpretación de los resultados obtenidos. La maestra formula preguntas del tipo *¿de qué vehículos han pasan más?; ¿de qué vehículos han pasan menos?* y el alumnado interpreta los gráficos y exlican lo que han representado.

4.2. La celebración del Carnaval (3-12 años)

Esta actividad, descrita en Alsina y Annexa (2021), se ha llevado a cabo en todos los niveles de la Escola Annexa de Girona, que se autodefine en su Proyecto Educativo de Centro como una escuela que promueve el conocimiento del entorno más inmediato, fomentando la participación de toda la comunidad en las actividades que se generan y que proyectan sobre dicho entorno.

El día de carnaval los niños y las niñas llegan al colegio disfrazados desde sus casas. En este escenario, la comisión propone una investigación a partir de una variable cualitativa: el disfraz que han elegido. En concreto, plantean analizar qué

tipo de disfraces predominan en cada grupo y también quieren analizar si hay diferencias entre las temáticas de los disfraces en los distintos ciclos.

Una vez definido el problema de investigación, el ciclo de investigación estadística requiere cuatro fases más, como se ha indicado: la recogida, organización, representación e interpretación de los datos (Wild y Pfannkuch, 1999). La recogida y organización de los datos requiere, previamente, decidir las categorías de la variable analizada, en este caso el tipo de disfraz. Rodríguez-Muñiz et al. (2021) proponen dos posibles estrategias para establecer las categorías: a) intentar definir unas categorías o modalidades con anterioridad a la recogida de los datos y discutir los posibles casos ambiguos sobre la escala ya definida (en este caso, estaríamos aplicando de manera subyacente una técnica estadística de clasificación supervisada); b) realizar previamente una observación de los datos recogidos y, sobre ellos, realizar la discusión de las posibles categorías, clasificando al tiempo los valores ambiguos (sería el análogo a una clasificación no supervisada).

La comisión de matemáticas decide usar la primera estrategia, de manera que son los maestros integrantes de la comisión los que determinan previamente las categorías: animales, superhéroes y superheroínas, personajes históricos, personajes de ficción, deportistas, oficios, otros, ausencias/sin disfraz. Se discuten posibles casos ambiguos como, por ejemplo, superhéroes que también son personajes de ficción, pero finalmente deciden mantener las categorías para poder comparar los datos tanto a nivel intraciclo como interciclo. A continuación, se describe el análisis estadístico realizado en cada ciclo.

4.2.1. Educación Infantil (1º y 2º de Educación Infantil)

De acuerdo con la propuesta de distribución de contenidos de estadística y probabilidad para la Educación Infantil de Alsina (2017a, 2018b, en prensa), los niños y las niñas de 3 y 4 años llevan a cabo una identificación y comparación de datos.

A partir de las categorías establecidas por la comisión de matemáticas, observan sus disfraces, se clasifican con base en dichas categorías y realizan un

recuento, que consiste en comprobar el número de disfraces observados en cada una de las categorías de la variable analizada (Rodríguez-Muñiz et al., 2021). De acuerdo con estos autores, esta tarea tiene una naturaleza intrínsecamente ligada al desarrollo del sentido numérico y, concretamente, al conteo, ya que conlleva identificar el número de casos de cada categoría, compararlos usando los comparativos “más…que”, “menos… que”, etc.

Para hacer el recuento de datos en los primeros niveles, se pueden utilizar diversas estrategias. Alsina (2012, 2017a), por ejemplo, propone hacer recuentos donde los materiales manipulativos son utilizados como marcas de cuenta y, en el marco de una propuesta implementada en la misma Escola Annexa, Alsina (2017b) hace grupos con los niños que comparten un valor de la variable, de manera que no son los objetos observados los que se manipulan, sino los individuos que comparten esa característica. Rodríguez-Muñiz et al. (2021) ofrecen una perspectiva más amplia de todas las posibilidades para hacer recuentos en infantil basada en la secuencia CPA (Concreto-Pictórico-Abstracto).

Los niños de los cuatro grupos realizan un recuento concreto, primero con los propios niños y seguidamente con apoyo de unos primeros manipulativos (imágenes que representan a los propios niños) para complementar el recuento (Figura 6).

Figura 6. Recuento de los tipos de disfraces con el alumnado y con imágenes. Fuente: Alsina (2021)

Seguidamente, realizan el proceso de abstracción de transitar de la cantidad discreta al número, es decir, pasan de la tabla de recuento a la tabla de frecuencias,

que consiste en adjudicar a cada elemento representado un valor distinto (y solo uno) de la secuencia numérica siguiendo un orden estable (Figura 7).

Figura 7. Del recuento a la tabla de frecuencias. Fuente: Alsina (2021)

A partir de las frecuencias, se lleva a cabo una primera interpretación para responder a la pregunta planteada que, como se ha indicado, consiste en determinar qué tipo de disfraces predominan en cada grupo.

4.2.2. Ciclo 1 (3º de Educación Infantil y 1º de Educación Primaria)

Siguiendo un planteamiento similar al ciclo anterior, los niños de los distintos grupos de este ciclo observan sus disfraces y, con base en las categorías establecidas previamente por la comisión de matemáticas, se clasifican inicialmente en distintas columnas según el tipo de disfraz (Figura 8).

Figura 8. Recuento de los tipos de disfraces con el propio alumnado. Fuente: Alsina (2021)

El cambio importante se observa en el modo de realizar el recuento: mientras en el ciclo anterior se hacía exclusivamente a partir de los propios niños o niñas o

bien imágenes suyas, el alumnado de 5-6 años (último curso de Educación Infantil y 1º de Educación Primaria) usaban muchos otros materiales para hacer una representación simplificada de la realidad observada: por ejemplo, utilizan triángulos de madera o incluso los nombres de los niños para realizar el recuento (Figura 9).

Figura 9. Recuento usando otros materiales de apoyo. Fuente: Alsina (2021)

Otro dato relevante es que en este ciclo realizan las primeras representaciones gráficas a partir del recuento y el posterior paso a la tabla de frecuencias. Como se observa en la Figura 10, los primeros gráficos estadísticos se elaboran con un intervalo frecuencial de 1 y se usan materiales, como por ejemplo policubos: cada policubo representa un caso de la distribución de datos, a partir de una correspondencia término a término que permite identificar fácilmente la frecuencia absoluta (el número total de casos) de cada categoría de la variable objeto de estudio (Figura 10).

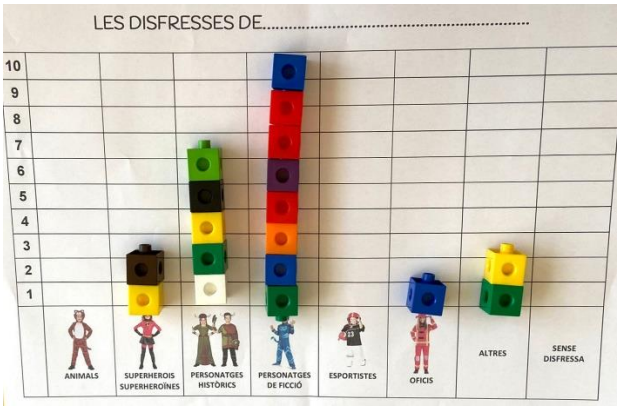


Figura 10. Primeros gráficos estadísticos concretos, con apoyo de material contable. Fuente: Alsina (2021)

Además, se inician también las primeras representaciones gráficas en el papel a partir de un gráfico de barras simple con un intervalo frecuencial de 1, siguiendo el mismo planteamiento que con los policubos (Figura 11).

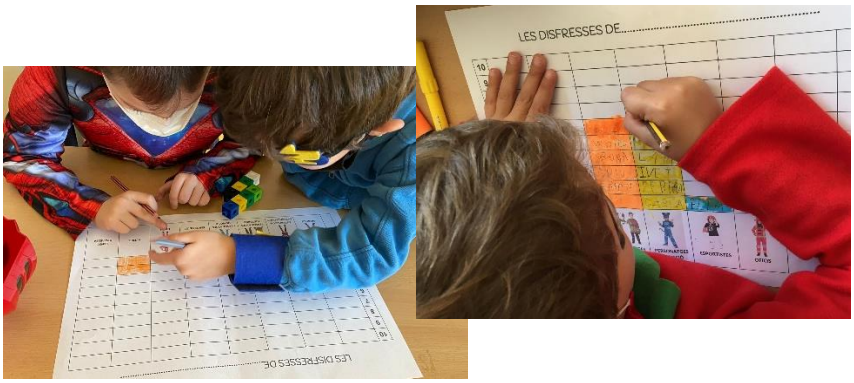


Figura 11. Primeras representaciones en el papel, con un gráfico de barras simple. Fuente: Alsina (2021)

4.2.3. Ciclo 2 (2º y 3º de Educación Primaria)

El alumnado de este ciclo elabora un dossier en el que se incide en las últimas fases del ciclo de investigación estadística planteado por Wild y Pfannkuch (1999): la representación de los datos y su interpretación. Las fases previas de identificación y organización de los datos se realizan a partir de la observación directa de los disfraces y la posterior clasificación con base en las categorías establecidas, pero no elaboran por escrito tablas estadísticas (de recuento y/o de frecuencias), sino que hacen un recuento oral e identifican las frecuencias de cada categoría.

En el dossier representan los datos usando un gráfico de barras simple con un intervalo frecuencial de uno y, seguidamente, llevan a cabo una interpretación por escrito a partir del análisis de los datos. En la Figura 12 se muestran los disfraces y la representación gráfica de uno de los grupos.

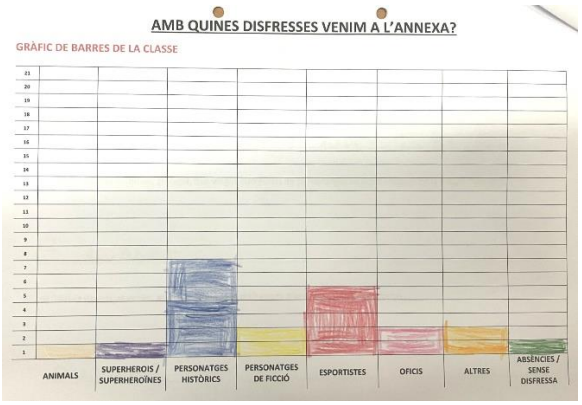


Figura 12. Representación en un gráfico de barras simple, con un intervalo frecuencial 1. Fuente: Alsina (2021)

Para interpretar los datos, se plantean diversas preguntas: ¿cuál es el tipo de disfraz que se repite más en clase?, ¿cuántas personas han venido con este tipo de disfraz?, ¿cuál es el tipo de disfraz que se repite menos en clase?, ¿cuántas personas han venido con este tipo de disfraz?, etc. Tal como se observa, se trata de preguntas orientadas a la obtención de conclusiones y también a la consolidación del sentido numérico, promoviendo que los alumnos de 7-8 años entiendan conceptos como más y menos, mayor y menor…, además de reconocer las relaciones entre elementos y grupos de elementos.

4.2.4. Ciclo 3 (4º y 5º de Educación Primaria)

La investigación estadística que llevan a cabo en este ciclo se documenta también en un dossier en el que, a diferencia del ciclo anterior, incluye también tablas de frecuencias de forma previa a la representación e interpretación de los datos.

A partir de la observación directa de los disfraces y la posterior clasificación según las categorías establecidas y, con base en los conocimientos numéricos que los niños y las niñas movilizan, completan una tabla de frecuencias absolutas de cada categoría de la variable y, después, expresan las frecuencias relativas usando fracciones. A partir de las frecuencias, elaboran un gráfico circular o diagrama de sectores para representar los datos. Para confeccionar el gráfico, consideran la distribución de datos y calculan el ángulo correspondiente a cada dato, que es proporcional a cada frecuencia, es decir, a mayor frecuencia, el sector es más

amplio y a menor frecuencia el sector es más pequeño. En la Figura 13 se muestra un ejemplo con uno de los grupos del tercer ciclo, que está constituido por 19 alumnos: en primer lugar, calculan el ángulo de cada sector dividiendo 360º entre 19, lo cual da un ángulo aproximado de 19º; seguidamente, calculan el porcentaje que representa cada sector a través de la proporcionalidad directa, obteniendo que cada uno corresponde a un 5,3% del total del gráfico; finalmente, pintan los sectores que corresponden a cada categoría de disfraces según la frecuencia absoluta.

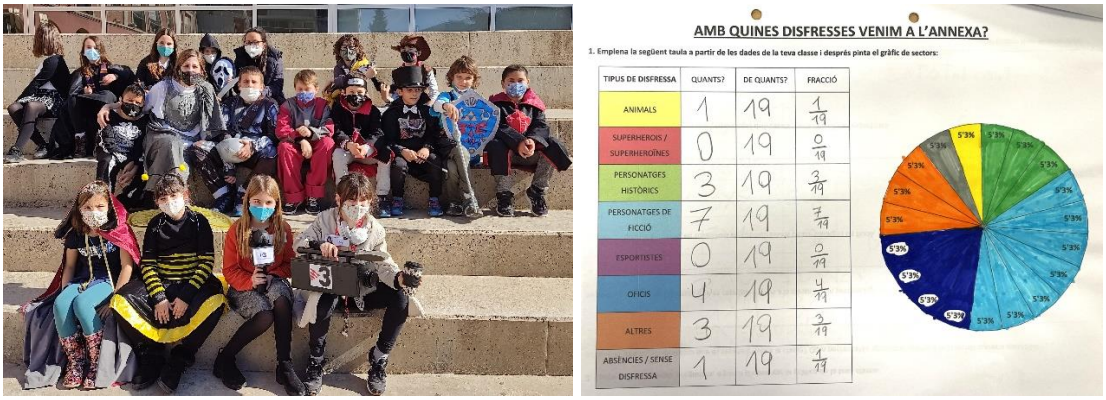


Figura 13. Observación de los disfraces y elaboración de una tabla de frecuencias y un gráfico de sectores. Fuente: Alsina (2021)

Una vez hecha la representación, de nuevo se les formulan diversas preguntas para interpretar los datos y obtener conclusiones, además de ir ampliando el desarrollo de su conocimiento numérico: por ejemplo, ¿cuál es el tipo de disfraz que se repite más en clase?, ¿qué porcentaje aproximado del total representa esta cantidad?, ¿cuál es el tipo de disfraz que se repite menos en clase?, ¿qué porcentaje aproximado del total representa esta cantidad?, etc. Para responder las preguntas, el alumnado consulta el gráfico previamente elaborado y responden usando porcentajes, teniendo presentes los contenidos de numeración que se trabajan en estos niveles.

4.2.5. Sexto de Educación Primaria

Los alumnos del último curso de la etapa de primaria, como en los dos ciclos anteriores, elaboran también un dossier con los datos y, además, son los responsables de responder a la segunda pregunta de investigación planteada a

nivel de todo el colegio: analizar si hay diferencias entre las temáticas de los disfraces en los distintos ciclos.

En el dossier, siguen el mismo procedimiento que en ciclo anterior: elaboran una tabla de frecuencias absolutas y relativas a partir de la observación directa y la clasificación de los disfraces con base en las categorías y, seguidamente, representan los datos en un diagrama circular y los interpretan a partir de preguntas previamente pensadas por la comisión de matemáticas (Figura 14).

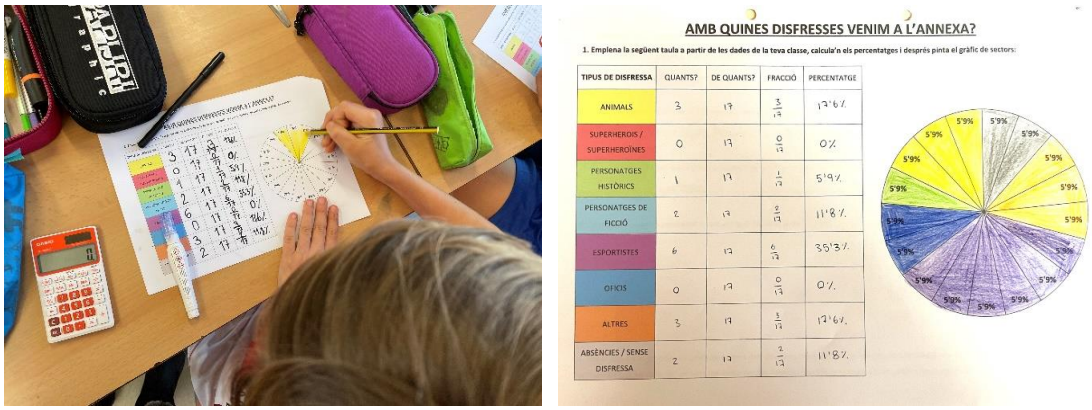


Figura 14. Tabla de frecuencias, representación e interpretación de los datos. Fuente: Alsina (2021)

Las preguntas que se plantean, además, sirven para ir consolidando conocimientos numéricos, por ejemplo: “algún tipo de disfraces iguala o supera una cuarta parte del total? ¿cuál?”; “busca una fracción equivalente a cada una de las fracciones de la tabla”; etc.

Finalmente, por parejas, analizan si hay diferencias entre las temáticas de los disfraces en los distintos ciclos. Para llevar a cabo esta tarea, primero hacen un vaciado de los datos por ciclos: suman las frecuencias de cada categoría de todos los grupos del ciclo, elaboran un único diagrama circular y escriben unas conclusiones. En la Figura 15, por ejemplo, se muestran los resultados parciales del ciclo de Educación Infantil.

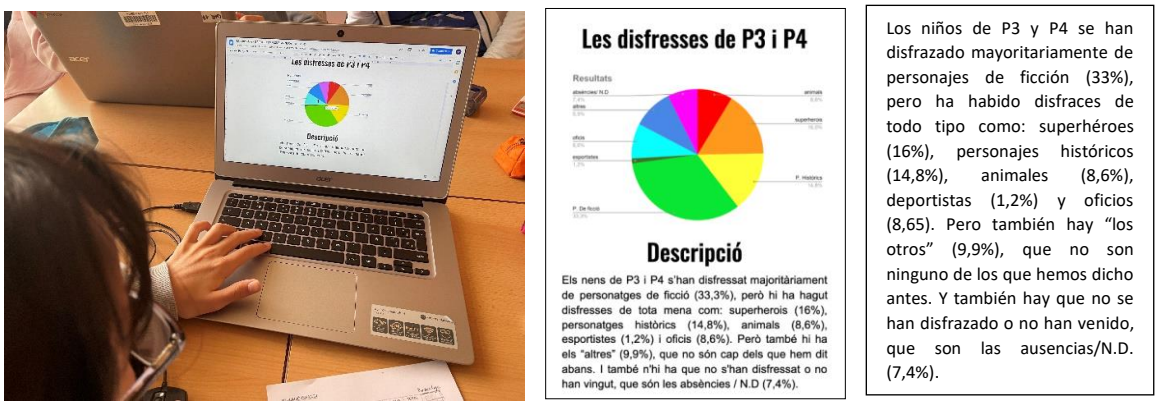


Figura 15. Vaciado de los datos del ciclo de Educación Infantil. Fuente: Alsina (2021)

A partir de los resultados parciales de cada ciclo obtienen conclusiones, observando cierta variabilidad en los tipos de disfraces de cada ciclo: por ejemplo, mientras que en Educación Infantil los disfraces más frecuentes son los de personajes de ficción, en 6º de primaria la categoría más frecuente es "otros". Adicionalmente, usando la tabla de frecuencias con el vaciado de los datos parciales de cada ciclo, obtienen los resultados globales y elaboran un único gráfico con los resultados de toda la escuela (Figura 16).

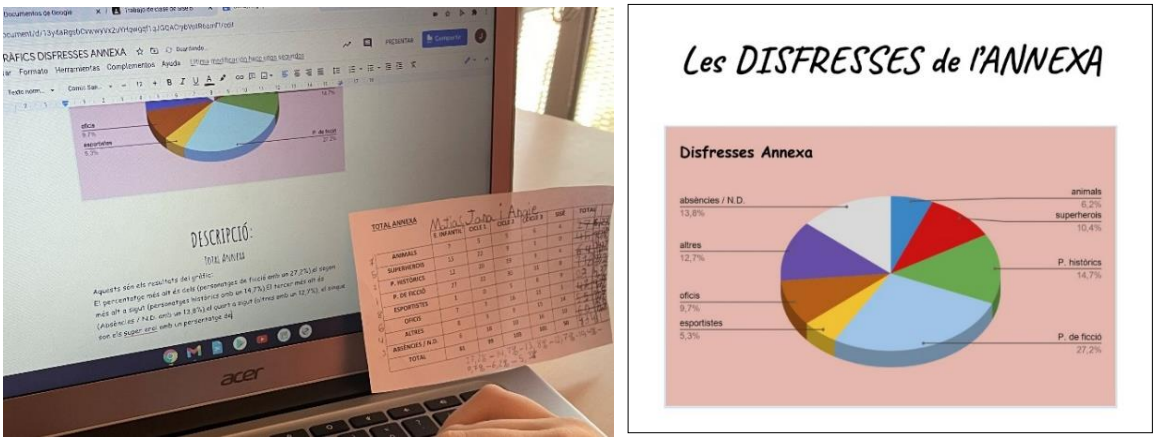


Figura 16. Resultados globales de la escuela. Fuente: Alsina (2021)

Finalmente, tanto los resultados parciales por ciclos como los globales se publican en el *blog* de la escuela (https://agora.xtec.cat/ceip-annexa-jp/general/estadistica-a-lannexa/).

Consideraciones finales

Desde un punto de vista genérico, el uso de contextos reales para enseñar matemáticas ha sido fuertemente impulsado por corrientes de la educación matemática como la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1991) que, entre otras cuestiones, plantea que si la matemática surge como matematización (organización) de la realidad, el aprendizaje matemático debe originarse también en esta realidad, lo cual no sólo significa mantener a esta disciplina conectada al mundo real o existente sino también a lo realizable, imaginable o razonable para los alumnos. Desde este enfoque, Reeuwijk (1997) expone cinco motivos para utilizar contextos del entorno como recurso didáctico en la clase de matemáticas: 1) pueden motivar al alumnado y ayudarles a comprender por qué las matemáticas son útiles y necesarias; 2) pueden favorecer que el propio alumnado aprenda a usar las matemáticas en la sociedad, además de descubrir qué matemáticas son relevantes para su educación y profesión posteriores; 3) pueden incrementar el interés del alumnado por las matemáticas y la ciencia en general; 4) pueden despertar la creatividad del alumnado, impulsarlos a utilizar estrategias informales y de sentido común al afrontar, por ejemplo, la resolución de una situación problemática o de un juego; y 5) pueden actuar como mediadores entre la situación concreta y las matemáticas abstractas.

Desde este punto de vista, en esta comunicación se han aportado fundamentos teóricos y se han descrito diversas prácticas de enseñanza de la estadística en contexto durante las etapas de infantil y primaria, con el propósito de proporcionar herramientas al profesorado de estas etapas. Como se ha indicado, este tipo de prácticas han sido ampliamente recomendadas por diversos organismos y autores que ven en los contextos reales una oportunidad para promover el desarrollo de la alfabetización estadística, a partir de proyectos de investigación en la línea planteada por Wild y Pfannkuch (1999), Batanero y Díaz (2004), el Proyecto GAISE (Bargagliotti, 2020; GAISE College Report ASA Revision Committee, 2016; Franklin et al. 2007) o Alsina y Annexa (2021), entre otros.

Referencias

Alsina, Á. (2012). La estadística y la probabilidad en Educación Infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Revista de Didácticas Específicas,* nº. 7, 4-22.

Alsina, Á. (2017a). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon,* n.º 95, 25-48.

Alsina, Á. (2017b). Investigació Estadística a l'Educació Infantil. https://www.youtube.com/watch?v=t6zaOF9XFGU&t=150s

Alsina, Á. (2018a). Seis lecciones de educación matemática en tiempos de cambio. Itinerarios didácticos para aprender más y mejor. *Padres y Maestros, 376,* 13-20.

Alsina, Á. (2018b). El número natural para organizar, representar e interpretar la información (estadística, azar y probabilidad). En M.C. Múñoz-Catalán y J. Carillo (Eds.), *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Infantil* (pp. 173-211). Editorial Paraninfo.

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años).* Editorial Graó.

Alsina, Á. (2020a). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática,* nº 3(2), 127-159.

Alsina, Á. (2020b). Enseñar estadística en Educación Primaria: primeras recomendaciones desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas. En C. Ribeiro y A. Pavan (Eds.). *Investigações hispanobrasileiras em Educação Estatística* (pp. 107-112). Editora Akademy.

Alsina, Á. (2021a). "Ça commence aujourd'hui": alfabetización estadística y probabilística en la educación matemática infantil. *PNA,* nº 15(4), 243-266.

Alsina, Á. (2021b). ¿Qué puede hacer el profesorado para mejorar la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad? Recomendaciones esenciales desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemática. *NÚMEROS,* nº. 108, 49-74.

Alsina, Á. (en prensa). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años).* Editorial Graó.

Alsina, Á., y Annexa, E. (2021). Estadística en contexto: desarrollando un enfoque escolar común para promover la alfabetización. *Tangram – Revista de Educação Matemática,* nº. 4(1), 71-98.

Anasagasti, J. y Berciano, A. (2016). El aprendizaje de la estadística a través de PBL con futuros profesores de primaria. *Contextos Educativos,* nº. 1 (extraordinario), 31-43.

Araneda, A. M., Chandía, E., y Sorto, M. A. (2013). *Recursos para la formación inicial de profesores de Educación Básica.* Ediciones SM.

Bargagliotti, B. (Ed.) (2020). Pre-K–12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II). Alexandria, VA, US: American Statistical Association. https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEIIPreK-12_Full.pdf.

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (125-164). ICE.

Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.) (2011). *Estadística con proyectos.* Universidad de Granada.

Cobb, G. y Moore, D. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching, *American Mathematical Monthly,* nº. 104, 801–823.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2007). *A Curriculum Framework for K-12 Statistics Education. GAISE Report*. American Statistical Association. http://www.amstat.org/education/gaise/GAISEPreK-12_Full.pdf

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

GAISE College Report ASA Revision Committee (2016). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education College Report 2016.* http://www.amstat.org/education/gaise

Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review,* nº. 70(1), 1-25.

Hahn, C. (2014). Linking academic knowledge and professional experience in using statistics: a design experiment for business school students. *Educational Studies in Mathematics,* nº. 86(2), 239-251.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales.

Reeuvijk, M.V. (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas,* nº. 12, 9-16.

Rodríguez-Muñiz, L.J., Muñiz-Rodríguez, L. Vásquez, C, y Alsina, Á. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y de datos en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Secundaria. *NÚMEROS,* nº. 104, 217-238.

Rodríguez-Muñiz, L.J., Muñiz-Rodríguez, L., y Aguilar, Á. (2021). El recuento y las representaciones manipulativas: los primeros pasos de la alfabetización estadística. *PNA,* nº. 15(4), 311-338.

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review,* nº. 67(3), 223–265.

CoR016 Una actividad rica sobre funciones usando GeoGebra

Laura Morera Úbeda
laura.morera@innovamat.com
Innovamat

Ignasi Segura Renau
ignasi.segura@innovamat.com
Innovamat

Núcleo temático: Recursos de aula, Procesos.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

Trabajar las matemáticas atendiendo a los procesos y no solo a los contenidos, requiere dar mayor presencia en la planificación del curso a ciertas actividades que permiten entablar conversaciones en las cuales los alumnos se sientan invitados a adentrarse (suelo bajo) y a explorar con tanta profundidad o altura como puedan (techo alto).

Durante esta comunicación comentaremos un ejemplo de actividad rica centrándonos en una tarea relacionada con la explicitación por parte del alumnado de similitudes y diferencias entre dos elementos matemáticos (concretamente, dos funciones de segundo grado).

Palabras clave: Procesos Matemáticos, Actividades Ricas, Geogebra.

1. Introducción

El aprendizaje de las matemáticas consiste no solo en el dominio de unos contenidos. Saber matemáticas implica, sobre todo, saber resolver problemas, conectar ideas, comunicar y representar, demostrar. Es importante, por ello, que las actividades llevadas al aula permitan no sólo el aprendizaje de unos contenidos, sino también de procesos (NCTM, 2000). Entendemos por actividad rica la

combinación de una tarea más una gestión de aula que permita trabajar a la vez contenidos y procesos. Como indica Piggott (2011) y desarrollamos en Vilalta et al. (2021), las actividades ricas requieren, por un lado, un contenido basado en problemas atractivos que propicien el desarrollo y uso de estrategias y el pensamiento matemático; y, por otro lado, un enfoque de la enseñanza (esto es, una gestión de aula) que fomente un entorno abierto y flexible en el que se promueva el trabajo cooperativo, la exploración y la comunicación, y donde se aproveche la diferencia como herramienta de aprendizaje.

Por otro lado, Zaslavsky (2008) destaca la importancia de llevar al aula tareas de identificación de similitudes y diferencias entre objetos a lo largo de varias dimensiones como un aspecto fundamental para el aprendizaje matemático.

Además, respecto al uso de tecnologías digitales en el aula, la teoría de la génesis instrumental (Trouche, 2004) aborda el proceso de instrumentalización, entendido como el proceso por el cual un artefacto pasa a ser un instrumento útil para resolver un problema. En este proceso, la acción docente es clave, aspecto que se incluye en la noción de orquestación instrumental (Trouche y Drijvers, 2014).

Durante esta comunicación ilustraremos, mediante un ejemplo práctico, la posibilidad de realizar una actividad rica sobre funciones, usando Geogebra (imagen estática, imagen dinámica, e imagen dinámica con la ventana algebraica), que permitirá a los alumnos, establecer diferentes conexiones trabajando en condiciones distintas según cada fase de la actividad.

2. Secuencia de la actividad

La actividad está basada en una tarea del tipo “¿Iguales o diferentes?”, que consiste en comparar dos imágenes o elementos, relativamente sencillos, sin grandes distractores, que tienen características que las hacen aparentemente muy similares pero que, a la vez, tienen algunos rasgos que las diferencian. En este caso, la gestión de la actividad se desarrolla en tres fases que permiten introducir paulatinamente distintos aspectos sobre dos funciones (en este ejemplo, de segundo grado) y generar de forma gradual conexiones entre diferentes bloques de contenido, sobre todo geometría y álgebra.

2.1 Primera fase: Imagen estática

La primera fase consiste en mostrar una imagen estática con dos funciones (Imagen 1). Se pide a los alumnos que mencionen en voz alta similitudes y diferencias que observan entre ambas.

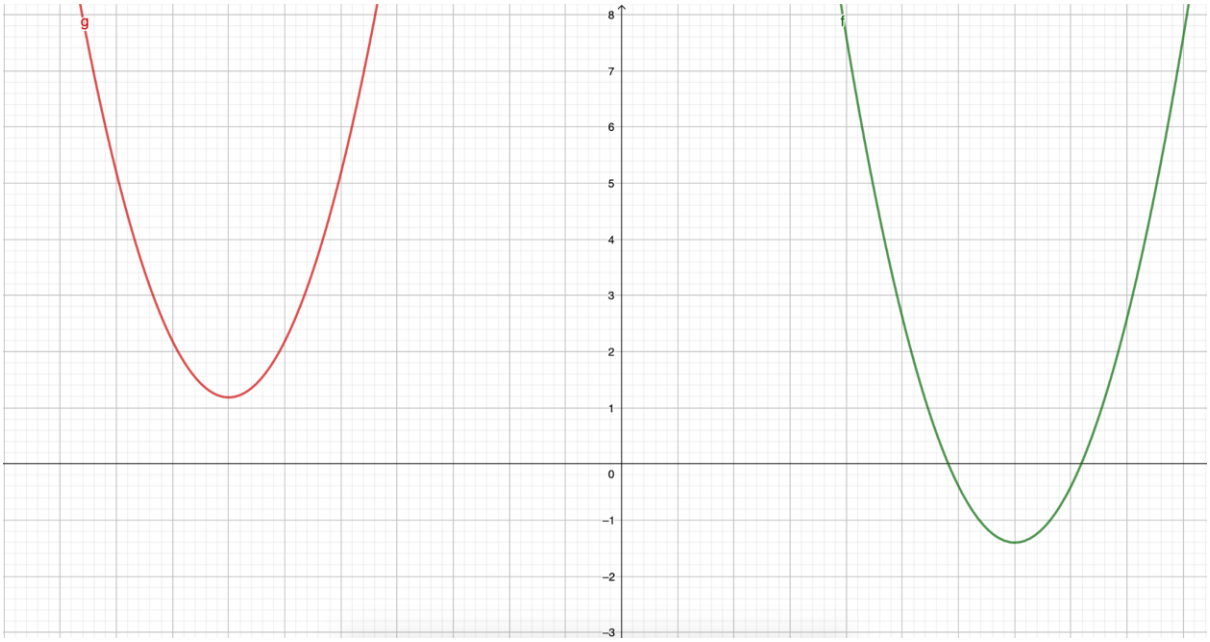


Imagen 1: Ejemplo de tarea del tipo ¿Iguales o diferentes?

2.1.1 Ejemplos de respuestas en la primera fase (imagen estática)

Algunas respuestas pueden estar relacionadas con aspectos superficiales como el color de las curvas (una es roja, la otra verde). Otras posibles respuestas más sofisticadas pueden ser las siguientes:

Diferencias	Similitudes
Situación respecto del eje de ordenadas: el vértice de la verde está a la derecha, el de la roja a la izquierda.	Ambos gráficos tienen la misma forma, son parábolas.
Puntos de corte con el eje de abscisas: la roja no corta con el eje de abscisas, la verde sí.	Ambas parábolas tienen forma de U.
El corte con el eje vertical en un caso se da por encima del origen y en el otro por debajo.	Las expresiones algebraicas de las dos funciones tienen los mismos parámetros a y b si la expresión es ax^2+bx+c.

También nos podemos fijar en el nivel de dominio del contenido de los alumnos observando la comunicación que hacen de las similitudes y diferencias, dependiendo de si son más técnicas o más cualitativas las soluciones.

2.1.2 Discusión en el aula en la primera fase (imagen estática)

Ante las distintas aportaciones, el docente puede preguntar si todos están de acuerdo, y así dar pie a que se confronten distintas visiones que permitan establecer procesos de comunicación y argumentación. Algunas de las soluciones propuestas por los alumnos son triviales y otras nos llevan a fomentar una argumentación en el aula. Pero hay otras situaciones, que pueden llevar a controversia y que también son interesantes. En este ejemplo, un aspecto de debate puede estar relacionado con el punto de corte de cada función con el eje de ordenadas. Algunos alumnos pueden decir que las dos curvas no cortan con el eje Y, mientras que alguien puede afirmar, en contraposición, que sí lo hacen pero no se ve porque cortan con el eje vertical en algún punto por encima del límite de la imagen mostrada. Entonces, otros pueden decir que, si el dominio de las funciones está restringido al intervalo mostrado, entonces las funciones no cortan con el eje vertical. Como vemos, en esta discusión no hay una respuesta correcta o incorrecta: dependiendo del dominio que consideramos de las funciones, podemos decir que ambas cortan el eje de ordenadas o que no.

Así pues, la primera fase de la actividad sirve para que, a partir del enunciado dado (imagen estática), se genere un ambiente rico en torno a unos contenidos y procesos.

2.2 Segunda fase: Imagen dinámica sin mostrar la ventana algebraica

En la segunda fase de la sesión, se abre un enlace a Geogebra en el que se muestra sólo la ventana geométrica (la ventana algebraica queda escondida) y donde se observan las curvas de la fase anterior con la peculiaridad de que aparecen en una imagen dinámica: ambas curvas se desplazan verticalmente alternando el movimiento ascendente y descendiente de forma independiente (ver https://www.geogebra.org/m/bqsr9xbc).

2.2.1 Ejemplos de respuestas en la segunda fase (imagen dinámica)

Al plantear la misma pregunta (¿Iguales o diferentes?) con la imagen dinámica, surgen nuevas aportaciones relacionadas con el movimiento.

Diferencias	Similitudes
El vértice de cada parábola se desplaza verticalmente en distintos intervalos: la roja, en y=[-2, 2]; la verde, en y=[-4, 0].	Ambos gráficos pasan por la recta y=0 en el mismo instante.
Los gráficos no siempre se desplazan a la misma velocidad.	Ambos gráficos se desplazan verticalmente.

Tabla 2: Ejemplos de respuestas de los alumnos en la segunda fase de la sesión.

2.2.2 Discusión en el aula en la segunda fase (imagen dinámica)

En relación al movimiento de las curvas de las funciones, un aspecto que puede dar pie a la contraposición de distintas aportaciones es la velocidad, con lo cual tomará de nuevo relevancia la gestión del aula. En este sentido, en un primer momento alguien puede afirmar que la curva verde se mueve a una velocidad mayor que la roja. Ahora bien, cuando la curva está cerca del eje horizontal, entonces la curva verde se mueve muy lentamente; la curva roja se mueve más rápidamente que la verde en algunos momentos. Eso nos pone de manifiesto que la curva roja tiene velocidad constante, mientras que la velocidad de la curva verde es variable.

Antes de pasar a la tercera fase, otra intervención docente para fomentar la práctica de procesos matemáticos, en particular el establecimiento de conjeturas es preguntar a los alumnos cómo creen que han sido creadas con el GeoGebra las dos parábolas dinámicas. Una respuesta posible puede ser que se ha utilizado un deslizador para generar el movimiento vertical de los gráficos, y ante esta propuesta alguien puede comentar que, en un caso, se ha usado un deslizador con velocidad constante en el intervalo y=[-2, 2], mientras que en el otro se ha usado un deslizador que, por ejemplo, eleva al cuadrado, la posición del primer deslizador, de forma que recorre los puntos del intervalo y=[-4, 0].

En esta segunda fase podemos observar que los contenidos y los procesos trabajados son diferentes de los de la primera fase, podemos decir que son un buen complemento.

2.3 Tercera fase: Imagen dinámica junto con expresiones algebraicas

Cuando se ha obtenido alguna respuesta por parte de los alumnos a la última pregunta planteada, se procede con el inicio de la tercera fase. Se abre un enlace de Geogebra que muestra de nuevo la misma imagen dinámica, pero que además tiene visible la ventana algebraica (ver https://www.geogebra.org/m/hsvfmhky).

Se invita a los alumnos a explicar qué es lo que observan ahora. En este momento, algunas aportaciones pueden estar relacionadas con la constatación de que ambas funciones contienen el mismo parámetro, uno solo (parámetro "a"). Sobre cada una de las funciones, es posible realizar distintas observaciones:

- La función correspondiente a la curva verde es el producto de dos factores que contienen sus dos raíces, aspecto que permite realizar conexiones con identidades notables. Al consistir en el producto de sus factores, la curva verde siempre corta el eje de abscisas, con el límite en el momento en que el parámetro "a" es 0, ya que entonces tiene una raíz doble y es tangente al eje de abscisas.
- Por su lado, la función correspondiente a la curva roja es una parábola desplazada horizontalmente (7 unidades a la izquierda) y verticalmente con "a" unidades arriba o abajo.
- Ahora, viendo la expresión algebraica de cada una de las funciones, podemos concluir que la velocidad de movimiento en el caso de la roja era constante y, en cambio, la verde tenía velocidad cuadrática.

De este modo, a diferencia de las dos fases precedentes, esta tercera parte de la sesión permite establecer conexiones entre la expresión algebraica y la representación geométrica de las funciones.

3. Conclusión

A partir de la actividad descrita, se ha podido observar que, gracias a la instrumentalización de una herramienta digital como Geogebra, es posible plantear actividades ricas en las que la combinación de la tarea y la gestión del aula permite generar un entorno de trabajo participativo en el que se promueve el desarrollo de procesos matemáticos como la comunicación, la argumentación y la conexión entre distintas áreas de las matemáticas (geometría y álgebra). Se ha visto que, dependiendo de cómo se plantea una misma tarea –en este caso, una tarea del tipo "¿Iguales o diferentes?" con un enunciado en tres formatos distintos (una imagen estática, una imagen dinámica y una imagen dinámica acompañada de las expresiones algebraicas)–, se van activando distintos procesos, a la par que se tratan contenidos matemáticos, en función de las condiciones establecidas. También se ha observado la importancia de la gestión del aula en el acompañamiento de un proceso de aprendizaje que se lleva a cabo de forma progresiva: no habría sido posible realizar el mismo recorrido de aprendizaje si se hubiera planteado directamente el enunciado de la última fase.

Referencias

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Piggott, J. (2011). Mathematics enrichment: What is it and who is it for? *NRICH - Millennium Mathematics Project.* Cambridge University. https://nrich.maths.org/5737

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281–307.

Trouche, L., Drijvers, P. (2014). Webbing and orchestration. Two interrelated views on digital tools in mathematics education. *Teaching Mathematics and its Applications*, Oxford University Press (OUP): Policy A - Oxford Open Option A, 33 (3), 193-209.

Vilalta, A., Morera, L., Rojas, F., Solar, H. (2021). *Rich Math Activities for a Primary School Class*. Taller presentado en formato virtual en el 14º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME14), Shanghái, China.

Woods (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education*, 4, 93-114. Sense Publishers.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. En B. Jaworski, & T.

CoR018 Televisión y publicidad. Contextualizando las Matemáticas

Carlos Moreno Borrallo
cmorenopirineu@gmail.com
Ágora International School Andorra

Núcleo temático: 1. Conexiones, 2. Recursos para el aula

Modalidad: Comunicación,

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (Magisterio)

RESUMEN

Uno de los objetivos primordiales en la enseñanza de las matemáticas debe ser la contextualización de los conceptos. Durante estos 25 años como profesor en secundaria y bachillerato y Universidad he descubierto que plantear situaciones en entornos muy reconocibles a mis alumnos fomenta el interés y permite profundizar en los conceptos con una actitud mucho más positiva y predispuesta al aprendizaje. Para ello, utilizo cortes de programas de televisión de actualidad y de informativos, así como publicidad, series y películas.

El objetivo de esta propuesta es captar la atención del alumnado para después poder relacionar ese concepto con los contenidos del aula. He podido evidenciar que esta práctica es útil y efectiva para la enseñanza-aprendizaje y muy motivadora para profesores y alumnos y de un tiempo adecuado para el desarrollo de nuestras clases.

Palabras clave: Contextualización, Televisión, Cine, Publicidad, Motivación.

La matemática es un campo del conocimiento que puede ser fascinante o frustrante para aquellos que se acercan a ella. Los alumnos comienzan su contacto con conceptos matemáticos desde el momento de su nacimiento con la evaluación de

los espacios, desarrollo de la visión tridimensional o juegos con cuerpos geométricos y simetrías. En esta etapa de la vida el aprendizaje se basa en el juego, la experimentación y la manipulación. En su etapa de infantil seguimos haciendo hincapié en la importancia de buscar patrones mediante la manipulación y la creatividad. Sin embargo, en los últimos años de la educación primaria la separación de los conceptos matemáticos con una experiencia vital ha crecido hasta tal punto que muchos alumnos sienten los conceptos muy lejanos a sus inquietudes y al mundo en que viven. En la etapa de secundaria ya muchos alumnos verbalizan su poca conexión con la materia y es donde parece más difícil plantear situaciones de análisis fuera de pizarras, libretas y libros.

La idea de plantear estos recursos como forma de conectar a los alumnos con la materia surgió hace años en unas jornadas JAEM en Girona, donde tuve el placer de asistir a una comunicación de quién hoy me honra ser su amigo, José María Sorando Muzás (2015), y quien he tenido el honor de colaborar en sus últimos libros (2018 y 2020), y que me predispuso a desarrollar mis propias herramientas y archivos recopilados de los entornos más cercanos.

Los conceptos abstractos siempre son más complejos de entender e interiorizar que aquellos que podemos modelar, por eso es importante, sobre todo en los primeros cursos de primaria donde el pensamiento abstracto está en proceso de maduración, poder presentar actividades que ayuden a manipular y contextualizar aquello que queremos presentar como un concepto nuevo. A medida que pasan los años los alumnos son capaces de interrelacionar y entender mejor los conceptos matemáticos, pero se plantean con más asiduidad el porqué de las cosas y su aplicación a su vida cotidiana.

La propuesta de esta comunicación es plantear un recurso de aula basado en imágenes publicitarias y vídeos de programas de televisión, series y películas que ayuden a iniciar conceptos de una manera que captemos la atención del alumnado.

Como ejemplo de propuesta podemos plantear para el cálculo de porcentajes una secuencia del programa Salvados (imagen 1), presentado por Jordi Évole donde en una conversación del periodista con un empleado de una oficina del Instituto Nacional de empleo, se dice que “la inversión en programas de formación ha pasado de 1400 euros a 1000 euros. Un 40% menos”.

Imagen 1. Salvados

Esta secuencia puede usarse como un recurso de aula para analizar la información, y calcular de manera correcta cuál ha sido el porcentaje de disminución de la inversión.

Otro ejemplo que puede mostrase para ver la importancia de manejar los datos con rigor matemático y no caer en errores o manipulaciones puede ser un vídeo de La Sexta Noche donde Jesús Maraña, Director del Periódico digital Infolibre (imagen 2) comete un error de claro anumerismo, concepto desarrollado por el matemático John Allen Paulos, y que tanto el propio Paulos (2005) como el profesor Blasco (2009) en sus respectivos libros tratan de presentar la importancia de un conocimiento básico de las matemáticas para comprender el mundo cotidiano y los titulares de las noticias a los que nos enfrentamos cada día.

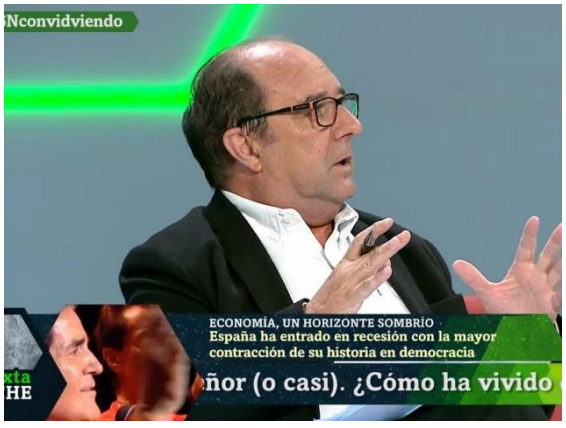


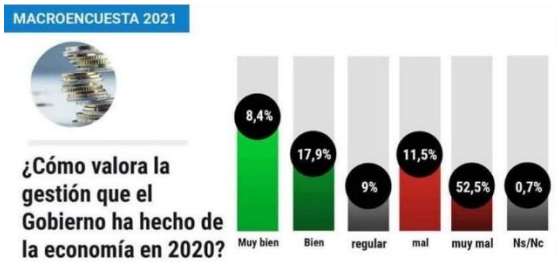
Imagen 2. La sexta noche

Mientras se habla de un posible caso de corrupción, se indica que ha habido un sobrecoste de un 1500% y pone como ejemplo que es como si fuésemos a comprar algo por valor de 1 euro y acabase costando 1500 euros.

Durante años he recopilado escenas de telediarios, y programas para poder usarlos en clase y ahora, poder compartir con mis compañeros. Utilizo errores de programas como el hormiguero, noticies de antena 3, equipo de investigación o incluso los juicios del proceso catalán por el juez Marchena o series como “prisión break” o “gin tonic”.

En el ámbito publicitario hay múltiples ocasiones para presentar conceptos matemáticos donde combinar el humor con el aprendizaje nos ayuda sobremanera y además se contextualiza con la vida cotidiana.

La información usando gráficos es de especial atención a los múltiples errores que pueden transmitir mensajes falaces.



La clase política no queda fuera del anumerismo más sonrojante

Tan solo muestro algunos de los cientos de ejemplos para comenzar las clases de una manera que nos permita presentar conceptos de una forma atractiva pero también rigurosa.

Referencias

Blasco, Fernando (2009). *El periodista matemático.* Editorial Temas de Hoy. Colección Tanto Por Saber. Madrid

Paulos, John Allen (2005). *Un matemático lee el periódico. Editorial Tusquets. Serie Metatemas.* Barcelona

Sorando Muzás, José María (2015). *Aventuras matemáticas en el cine*. Editorial Guadalmazán. España

Sorando Muzás, José María (2018). *Matemáticas en tu mundo.* Editorial Guadalmazán. España

Sorando Muzás, José María (2020). *Matemáticas de cine*. Editorial Guadalmazán. España

CoR023 Provocaciones de suelo bajo y techo alto

Cecilia Calvo Pesce
ccalvo@santgregori.org
Escola Sant Gregori, Innovamat, Universitat de Barcelona

Núcleo temático: Recursos de aula, Procesos.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

Trabajar las matemáticas atendiendo a los procesos, y no solo a los contenidos, requiere dar mayor presencia en la planificación del curso a ciertas actividades que permitan entablar conversaciones en las cuales todos los alumnos se sientan convidados a adentrarse (suelo bajo) y a explorar con tanta profundidad o altura como puedan (techo alto).

Durante esta comunicación comentaremos algunos ejemplos de actividades de este tipo, centrándonos en tareas relacionadas con la explicitación por parte del alumnado de similitudes y diferencias entre objetos matemáticos propios de los contenidos que se trabajan que en las aulas de secundaria.

Palabras clave: Procesos Matemáticos, Actividades Ricas.

1. Introducción

En general, las tareas de suelo bajo y techo alto, tal como las describe el NRICH Team (2013) son tareas delante de las cuales todo el alumnado al que se le plantea puede iniciarse en su ejecución, sin poner límites a aquellos alumnos más avanzados que quieran avanzar y, simultáneamente, ofreciendo retos a todos ellos: provocándolos para ir más allá de lo que ya conocen, invitándolos a aprender.

Por otro lado, Zaslavsky (2008) destaca la importancia de llevar al aula tareas de identificación de similitudes y diferencias entre objetos a lo largo de varias dimensiones como un aspecto fundamental para el aprendizaje matemático.

Durante esta comunicación ilustraremos la posibilidad de encontrar ejemplos de tareas que cumplen con las dos características mencionadas anteriormente.

2. Tareas dirigidas a la explicitación de similitudes y diferencias

Dentro de las diferentes tareas que atienden a similitudes y diferencias, y que además admiten una gestión de suelo bajo y techo alto, podemos destacar tareas de dos tipos: unas donde la acción fundamental es la comparación de dos o más objetos; y otras en las que se da un paso más allá de la comparación para llegar a la clasificación de diversos objetos según alguna de las características que comparten.

2.1 Tareas de comparación

En lo que se refiere al primer grupo de tareas mencionadas en el párrafo anterior, en este apartado distinguiremos dos tipos de tareas en las que se presentan dos o más objetos matemáticos con la consigna de investigar en qué son similares y en qué difieren.

2.1.1 ¿Iguales o diferentes?

En las tareas de este tipo se pide contrastar dos objetos matemáticos indicando características que tienen en común y características en las que difieren. Es importante que el profesor valore la presentación razonada de estas características comparadas, al mismo tiempo que la variedad y la riqueza de tales características.

En la imagen 1 se puede ver un ejemplo de este tipo de tareas en que las características comparadas pueden ir desde el tipo de cuadriláteros que allí aparecen hasta las medidas de sus áreas y perímetros, pasando por la cantidad de ejes de simetría que tienen, la cantidad de puntos del geoplano que quedan en su interior o la pendiente de las rectas que contienen a los lados de ambos cuadriláteros.

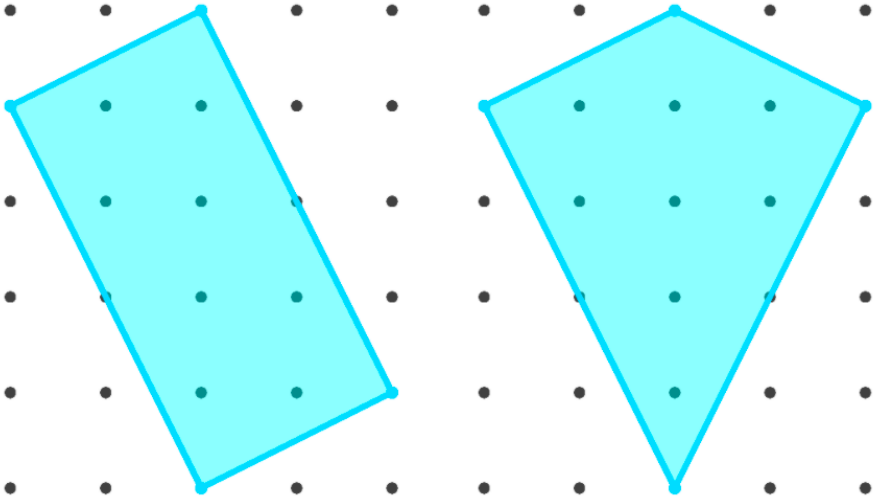


Imagen 1: Ejemplo de tarea del tipo ¿Iguales o diferentes?

2.1.2 ¿Quién es el intruso?

Estas tareas tienen un planteamiento inicial simple: se presentan cuatro elementos y se pide localizar cuál de ellos no comparte con los demás un atributo que sí tienen en común los otros tres. La característica crucial de estas propuestas es que los cuatro elementos o situaciones planteadas pueden ser susceptibles de ser consideradas intrusas dependiendo de ciertos criterios a explicitar.

En Calvo y Obrador (2016) se puede encontrar una descripción detallada de este tipo de tareas, junto con diversos ejemplos que ilustran la manera en que cada uno de ellos invita al alumnado a explicitar propiedades de los objetos involucrados. Un ejemplo que allí no aparece se puede ver en la imagen 2. Se sugiere al alumnado que vaya más allá de mencionar cuestiones superficiales (como la posición y cantidad de paréntesis) y utilice los resultados de las cuatro operaciones como criterio para diferenciarlas.

A. $(4 + 12) : (2 + 2)$	B. $4 + 12 : (2 + 2)$
C. $4 + (12 : 2 + 2)$	D. $(4 + 12) : 2 + 2$

Imagen 2: Ejemplo de tarea del tipo ¿Quién es el intruso?

2.1 Tareas de clasificación

Estas tareas proponen la agrupación de objetos matemáticos bajo diferentes criterios establecidos por el propio alumnado. Los objetos que intervienen sugieren un bloque temático de referencia para la búsqueda de dichos criterios, pero de ninguna manera limitan al alumnado. De hecho, todo lo contrario: invitan a establecer conexiones entre diferentes bloques temáticos o con otros objetos dentro de un mismo bloque.

En la imagen 3 vemos la clasificación que surgió del criterio propuesto por un grupo de futuros profesores de matemáticas (estudiantes de máster) ante la demanda de "clasificar los 12 pentominós". Después de los criterios de clasificación "geométricos" más habituales (perímetro, ejes de simetría, número de ángulos rectos o correspondencia con el desarrollo plano de una caja cúbica sin tapa), el grupo eligió como criterio la posición del centro de gravedad de la pieza.

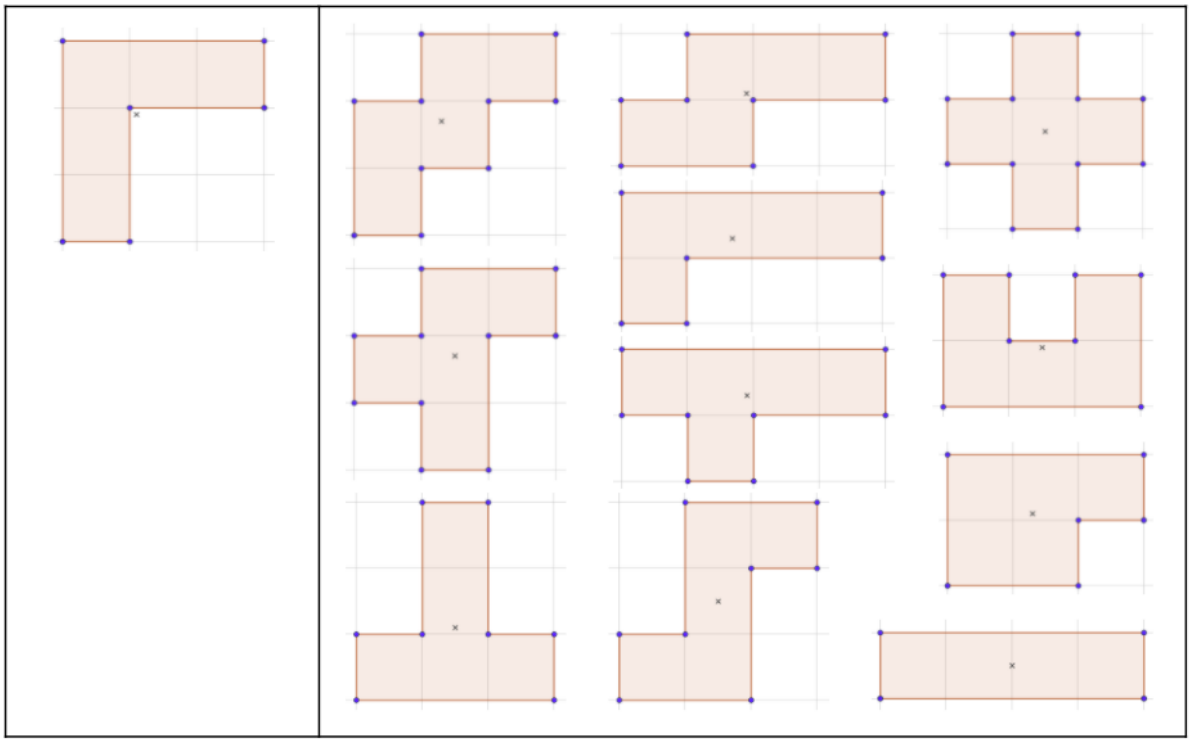


Imagen 3: Ejemplo de clasificación de pentominós en función de la posición de su centro de gravedad.

Otro ejemplo, que ilustra lo sugerentes que son este tipo de tareas en lo que se refiere a las conexiones, lo encontramos en la imagen 4. Allí vemos una serie de funciones de segundo grado que, a primera vista, invitan a ser clasificadas según el

signo de su concavidad o según la posición del punto de corte del gráfico con el eje vertical. Una segunda mirada nos lleva a explorar otros criterios que movilizan conocimientos relacionados con este tipo de funciones. Por ejemplo, la cantidad de puntos de corte con el eje de abscisas o la conexión entre las expresiones algebraicas y otras representaciones (una clasificación según los cuadrantes por los que pasa el gráfico, por ejemplo).

$$f(x) = x^2 + 3x - 10$$

$$g(x) = x^2 - 3x + 10$$

$$h(x) = -x^2 - 10x - 25$$

$$p(x) = 2x^2 - 14x + 24$$

$$q(x) = -x^2 + 16$$

$$r(x) = -0.5x^2 + 3x$$

Imagen 4: Ejemplo de colección de funciones para clasificar.

En la imagen 5 vemos una posible solución de un último ejemplo de tareas de clasificación. En este caso, las 13 tarjetas (todas ellas con números impares de dos cifras) invitan al alumnado a clasificarlas de diferentes maneras, desde las más superficiales y al alcance de todos (mayores o menores que 50; formadas por dos cifras impares o solo una) hasta otras más sofisticadas, que seguramente podremos invitar a estirar. Por ejemplo, si se propone clasificar los 13 números entre primos y compuestos, podemos sugerir que refinen la segunda categoría subdividiéndola según el número de divisores. O si quieren clasificarlos entre múltiplos de 3 y números que no lo son, podemos sugerir que refinen la segunda categoría subdividiéndola según el residuo de la división entre 3.

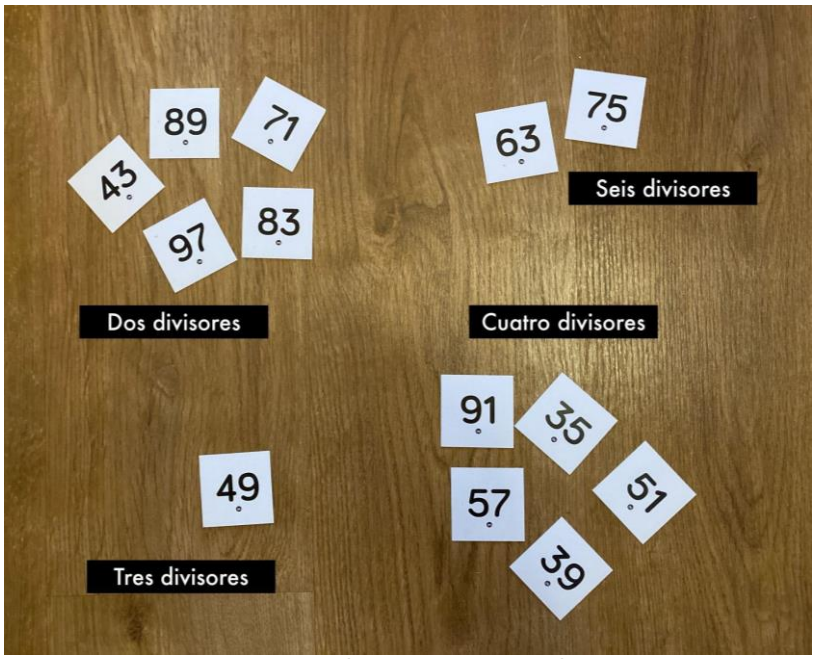


Imagen 5: Ejemplo de tarjetas numéricas clasificadas según la cantidad de divisores

3. Conclusión

Los ejemplos mencionados se pueden considerar tareas abiertas que pretenden provocar al alumnado para intervenir en ellas, sea cual sea su nivel de conocimientos previos, pero también para ir más allá de esos conocimientos explorando nuevos caminos. Permiten movilizar conocimientos sobre algún bloque temático, pero también potencian el uso de procesos matemáticos, principalmente de comunicación y conexión. Con respecto a otros procesos, como el de razonamiento, pueden ser movilizados de manera implícita en el trabajo del alumnado, pero afloran cuando se complementa la presentación de las características que comparten o no los objetos con la demanda de justificación por parte del docente.

Por más original o interesante que sea el enunciado de cada una de estas tareas, sin embargo, para sacar provecho a su potencial tiene suma importancia la gestión que realice el profesor durante su ejecución. Principalmente, en las primeras oportunidades en que se propone este tipo de tareas, el rol del docente es clave a la hora de identificar argumentos superficiales y sofisticados, así como a la hora de valorar positivamente cuando un alumno cambia el foco de su mirada sobre los objetos involucrados y conecta con otros temas aún no explorados.

A medida que se reitera la presentación de este tipo de tareas a lo largo del curso, el alumnado se va haciendo más autónomo y se debilita la dependencia entre las buenas preguntas del docente y el éxito de la tarea. Por último, cabe destacar que si los alumnos han tenido, periódicamente, experiencias previas con este tipo de tareas, estas pueden usarse también como apartados en una prueba de evaluación. La suficiente experiencia previa también es importante cuando se pide a los alumnos que sean ellos los que generen una propuesta propia, ya sea de "¿Iguales o diferentes?", "¿Quién es el intruso?" o "Clasifica según diferentes criterios", si se buscan propuestas realmente ricas.

Referencias

Calvo, C., & Obrador, D. (2016). De WODB fins a QUELI: reflexionar, deduir i defensar arguments a l'aula de matemàtiques. *Actas del 2º Congreso Catalán de Educación Matemática*. Recuperado de https://c2em.feemcat.org/wp-content/uploads/actes/3C221.pdf (1/4/2022).

Koichu, B., Zaslavsky, O., & Dolev, L. (2016). Effects of variations in task design on mathematics teachers' learning experiences: a case of a sorting task. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(4), 349-370.

NCTM Team (2013). *Low Threshold High Ceiling - an Introduction*. Recuperado de https://nrich.maths.org/10345 (1/4/2022).

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. En B. Jaworski, & T. Woods (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education*: Volume 4 (pp. 93-114). Sense Publishers.

CoR026 Espacios y materiales para desarrollar las matemáticas intuitivas e informales en la escuela infantil (0-3 años)

Gloria Olmos Martínez
olmosmg@vic.cat
Escoles Bressol Municipals de Vic
Àngel Alsina
angel.alsina@udg.edu
Universidad de Girona

Núcleo temático: Recursos para el aula / Comunicación – Divulgación.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Infantil.

RESUMEN

Actualmente, son diversos los organismos y autores que subrayan la importancia de favorecer el desarrollo del pensamiento matemático en las primeras edades, de los 0 a 3 años, por ser el eslabón imprescindible y necesario para futuros aprendizajes. La Escuela Infantil, donde el niño y la niña son el centro de acción educativa, se convierte en el contexto perfecto, como una oportunidad única y decisiva, para fomentar, a través de las propuestas de juego, manipulación y exploración, estas primeras matemáticas. Para ello, se requiere contar con profesionales conscientes de la necesidad de ofrecer contextos educativos que fomenten el desarrollo del pensamiento matemático y formados para poder diseñar los ambientes con propuestas diversificadas, de alta calidad y con sentido matemático. Con esta finalidad, se presentan distintos diseños de espacios y materiales que se pueden ofrecer en la Escuela Infantil y algunas de las acciones matemáticas que surgen durante el juego.

Palabras clave: Matemáticas Intuitivas E Informales, Espacios Y Materiales, Escuela Infantil, 0 a 3 Años.

1. Introducción

El trabajo que se presenta a continuación pretende introducir algunos conceptos fundamentales entorno al desarrollo de las matemáticas que aparecen y se pueden desarrollar en las Escuelas Infantiles gracias a las propuestas de juego, exploración y manipulación a partir de los espacios y materiales que se les ofrece a los niños y las niñas de los 0 a los 3 años. Para ello, en primer lugar, se caracterizan estas primeras matemáticas, intuitivas e informales, propias de los primeros años. En segundo lugar, se conceptualiza qué entendemos por espacio educativo y se ofrecen ejemplos concretos a partir de las experiencias de las Escuelas Infantiles Municipales de Vic (Barcelona). Finalmente, se presentan, a partir de la documentación pedagógica, algunas acciones matemáticas que aparecen y se desarrollan durante el juego de los niños y las niñas en estos espacios educativos.

2. Las Matemáticas intuitivas e informales de los 0 a los 3 años.

Alsina (2015) caracteriza las primeras habilidades matemáticas que desarrollan los niños y niñas menores de 3 años como unas matemáticas intuitivas e informales. Se trata de unas matemáticas que se desarrollan gracias a la interacción con el entorno cotidiano y al juego de una manera natural, sin una instrucción formal. Poco a poco, estas matemáticas intuitivas e informales se van construyendo como un conocimiento cada vez más elaborado siendo fundamentales para los posteriores aprendizajes.

Por un lado, el concepto “matemáticas intuitivas” destaca la idea de que las matemáticas nacen de forma emergente e innata, por ejemplo, durante el juego y la exploración. Desde este punto de vista, la matemática intuitiva se refiere a un conocimiento autoevidente, basado en la certeza intrínseca, más global, metafórico, no analítico (Fischbein, 1987)

Por otro lado, el término “matemáticas informales” fue incorporado por Baroody (1987) en el contexto de la educación matemática infantil para referirse a los conocimientos intuitivos que los niños y las niñas recopilan gracias a las experiencias informales, en contextos cotidianos. Los infantes aprenden muchos conocimientos matemáticos a partir de la exploración, la manipulación y el juego que

despiertan su interés, siendo este el punto de partida para el desarrollo del pensamiento matemático. Desde este prisma, Ginsburg y Baroody (2007) distinguen la matemática informal de la formal:

- La matemática informal trata sobre las nociones y procesos aprendidos en la dinámica diaria no escolar, los cuales se desarrollan a partir de las interacciones con el medio físico y social.
- La matemática formal se refiere a las habilidades y conceptos que se aprenden en las escuelas, y suele caracterizarse por una matemática más simbólica y escrita.

El NCTM (2003) subraya que, en ningún otro ciclo educativo, el crecimiento cognitivo es tan notable como lo es en estos tres primeros años de vida y enfatizan la necesidad de que los adultos que acompañan a los niños y las niñas en estas primeras edades sean conscientes de la importancia de estas primeras matemáticas y las favorezcan.

Fernández et al. (2004) explican que, aproximadamente desde los cuatro meses, los niños y las niñas muestran una curiosidad innata concerniente a los eventos cuantitativos y espontáneamente construyen en su ambiente natural y sin instrucción formal las matemáticas informales, aunque dicha forma de pensamiento es imperfecta y totalmente distinta del pensamiento de los adultos.

Geist (2014) señala también que los niños y niñas comienzan a construir una comprensión matemática desde el día en que nacen. Para este autor, esta comprensión ocurre a través de las interacciones con su entorno y a través de su actuación mental y física sobre los objetos, no es algo que se pueda enseñar, expone, sino que emerge y debe ser construida por uno mismo. Clements y Sarama (2015) hablan también de la presencia de habilidades matemáticas al inicio de la vida. Exponen que los niños y las niñas, desde su nacimiento, tienen ciertas competencias asociadas a las matemáticas en cuanto a los números, el sentido espacial y los patrones, por lo que apelan a la responsabilidad de los profesionales de las Escuelas Infantiles como agentes promotores de estas primeras matemáticas gracias a sus propuestas educativas.

Con base en estos fundamentos, Alsina (2015) destaca la importancia del papel del adulto que acompaña a los niños y las niñas como facilitador de contextos educativos que favorezcan el desarrollo de estas primeras matemáticas. De esta manera, es necesario preguntarnos qué propuestas y bajo qué criterio el profesional de la Escuela Infantil diseña los espacios y materiales, como propuestas de juego, exploración y manipulación, que ofrece a los niños y las niñas para fomentar el desarrollo desde estas primeras matemáticas, tan imprescindibles y necesarias.

3. El diseño de los espacios y materiales en la Escuela Infantil.

3.1 ¿A qué referimos cuando hablamos de los espacios y materiales en la Escuela Infantil?

Los términos “espacio” y “ambiente” de la Escuela Infantil se utilizan frecuentemente como sinónimos de un mismo concepto, aunque, según Iglesias (2009), tienen un matiz diferente. El término espacio, por definición, se refiere únicamente a los elementos físicos, mientras que el término “ambiente” engloba el conjunto de elementos físicos y las relaciones que se establecen en él.

Aun así, Iglesias (2009) detalla que el concepto “espacio” tiene muchas acepciones según el ámbito de estudio y, cuando entramos en un espacio de la escuela, las paredes, el mobiliario, la distribución, la decoración, los materiales, etc., hablan también de la vida interior que en ella subyace, de las relaciones que se dan entre los infantes y los adultos que los acompañan, de sus intereses y motivaciones, de su forma de organizarse, etc. En este sentido, Galardini (2010) expone que los espacios hablan, tienen un lenguaje silencioso pero eficaz que comunica las ideas y los valores de los profesionales que los han preparado. Destaca que están al servicio de la infancia, han de tener mucha calidad, están directamente relacionados con el proyecto educativo y marcan el tempo y la calidad del juego y aprendizaje de los niños y las niñas.

Por ello, cuando nos referimos al diseño de los espacios y sus materiales se contempla siempre como ambiente de aprendizaje (Battini, 1982), donde además de las consideraciones físicas, se integran las relacionales y conceptuales.

Battini (1982) e Iglesias (2009), entre otros, han centrado sus investigaciones en el diseño de los espacios educativos y de los ambientes escolares como agentes decisivos en el aprendizaje de los niños y las niñas. Como ellos, numerosos autores exponen que el aprendizaje en las primeras edades surge a través de la observación, la exploración, la manipulación y el juego del niño a través de diferentes materiales (i.e. Abad, 2006; Alsina, 2006; 2015; Ceppi y Zini, 2009; Bassedas et al., 2006, Borghi 2010; Clements y Sarama, 2015; de Castro y Quiles, 2014; Goldschmied y Jackson, 2007; Lee, 2012; Malaguzzi, 2001; Vecchi, 2013). De hecho, a parte de la vida cotidiana que ocupa un porcentaje muy elevado del día a día en la escuela y tiene un gran valor educativo, el resto de las propuestas educativas se fundamentan en los espacios de juego, exploración y manipulación, tanto interiores como exteriores.

Abad (2006) explica que el espacio y el material se consideran como un agente educativo más. En torno a este concepto, se ha desarrollado la idea de que el espacio y el material es visto como un "maestro" aliado con los profesionales donde el diálogo entre la pedagogía y la arquitectura es imprescindible (Cavallini et al., 2017). En palabras de Zabalza (2014, p. 14):

> *Los espacios definen nuestro contexto de vida, nos vinculan a la realidad del aquí y ahora, nos permiten ser más autónomos o nos niegan esa posibilidad, nos acercan o alejan de los demás, nos excitan o nos tranquilizan. Son el fondo sobre el que todo ocurre, pero un fondo que interactúa con el resto de los elementos y los condiciona.*

3.2 ¿A qué tiene que responder el diseño de los espacios y materiales de la Escuela Infantil?

Para diseñar los espacios o ambientes de juego, exploración y manipulación en la Escuela Infantil es necesario partir de algunos conceptos o indicadores que faciliten al profesional poder establecer criterios que le ayuden a seleccionar y disponer los materiales acordes a las necesidades que observe en su alumnado. Por un lado, es imprescindible que el profesional disponga del conocimiento que le permita pensar los espacios y materiales para favorecer y desarrollar las matemáticas intuitivas e

informales de los niños y las niñas. Por otro lado, es imprescindible el conocimiento sobre cómo se planifican y diseñan los espacios y materiales de la Escuela Infantil (Alsina y Delgado, 2021, 2022).

En relación al conocimiento de las matemáticas intuitivas e informales, nos referimos a los bloques definidos por Alsina (2015) en el contexto de los 0 a los 3 años: las cualidades sensoriales, los números y las operaciones, las posiciones y las formas y los atributos mensurables vinculados a las capacidades de: identificar, relacionar y operar como las tres grandes acciones que lleva a cabo el niño y la niña mientras juga, explora y manipula con los materiales.

Respecto al conocimiento sobre el diseño de los espacios y materiales, tomamos como referentes las escuelas de Reggio Emilia, conocidas mundialmente como de las mejores escuelas de Educación Infantil, fundamentadas en la pedagogía de Loris Malaguzzi (Hoyuelos, 2001). En esta línea, el Ministerio de Educación (2011) publica la *Guia para proyectar y construir Escuelas Infantiles* y, posteriormente, la Generalitat de Catalunya (2017) publica el libro *Despertando miradas entorno al espacio escolar;* ambos documentos, fundamentados en la pedagogía de Reggio Emilia como modelo inspirador para el diseño de las Escuelas Infantiles, tanto en sus espacios y materiales interiores como en los exteriores.

Tomando estos referentes, se parte de los conceptos de laboratorio de aprendizaje y plaza definidos por Malaguzzi (2020): Laboratorio de aprendizaje por ser los espacios y materiales los contextos donde los niños y niñas, a través del juego, desarrollan procesos de investigación junto con los adultos que los acompañan; y plaza, por la disposición de diferentes microespacios con sus respectivos materiales dentro de un mismo ambiente, donde los infantes acuden con autonomía a explorar y jugar (Figura 1).

Llegados a este punto, una de las principales cuestiones en las que cabe centrase también és cómo ha de plantearse el diseño de los espacios y materiales y bajo que criterios el profesional ha de guiarse. Y es que, en este sentido, “existe una vinculación clara entre el concepto de infancia que se tenga y la manera de organizar los espacios y materiales” (Martín, 2016 p. 186).

Las aportaciones de los diferentes autores definen diversos requisitos o aspectos clave y fundamentales para el diseño de espacios: polivalencia, accesibilidad, polisensorialidad, seguridad, individualización y colectividad, estimulación, atracción, naturaleza, belleza, ordenación, iluminación, transformación y dimensión.

Figura 1. Aula de 2 a 3 años Escola Bressol Municipal de Vic Caputxins. Fuente: elaboración propia

La selección de los materiales es también importante para garantizar un espacio rico en contenidos, estimulante y armónico, respondiendo a los criterios de diseño de espacios definidos anteriormente (luz, color, naturaleza, polisensorialidad…). De ellos, cabe valorar diferentes aspectos como la confortabilidad, seguridad y multifuncionalidad para que sean de calidad y se ajusten a las necesidades de los más pequeños (Abad, 2006).

Ceppi y Zini (2009) explican que, para cada sentido y sensación, olor, tacto, color, luz, sonido… ha de existir un equilibrio armónico que genere bienestar y no saturación. Por ello, la importancia de seleccionar en función del interés del contenido, los materiales justos y adecuados.

Los materiales tienen que ser materiales manejables, plurales, que se presten a lo que llaman tactilidad y que faciliten sensaciones diferente, lo más naturales posibles, a partir sobre todo de materiales reales, naturales: maderas, gomas, fibras, papales, metales, resinas… preparados para favorecer las exploraciones

sensoriales. Materiales armónicos, de manera que se presenten con un criterio no solamente estético, pero también que cuide su presencia para que no se genere el caos. En este sentido, consideran que un aula / escuela debe contener diferentes ambientes que entre todos ellos den respuesta a esta polisensorialidad.

En esta línea, de Castro et al. (2009) exponen como en los diseños de los espacios y materiales se pueden favorecer contenidos matemáticos, pero destacan que siempre, la interacción del niño es libre y la actividad infantil no está dirigida. Por ello la importancia de favorecer escenarios de aprendizaje múltiples que den respuesta a las diferentes necesidades de juego y exploración.

Queremos matizar que como expone Lee (2012) el juego del niño y la niña es totalmente libre y el profesional es quien dispone los materiales y acompaña al niño y a la niña a con sus observaciones y formulando buenas preguntas que le ayudan a desarrollar el pensamiento matemático que está construyendo, idea que aporta también Malaguzzi (2020) cuando habla del profesional como investigador al lado de los niños y las niñas.

3.3 ¿Qué diseños de espacios y materiales podemos ofrecer en la Escuela Infantil?

Las posibilidades de juego, exploración y manipulación que se pueden ofrecer en la Escuela Infantil son infinitas. De acuerdo con la literatura, se considera imprescindible que las aulas de las Escuelas Infantiles contemplen simultáneamente diferentes propuestas para que los niños y las niñas puedan acceder a ellas libremente acorde con sus necesidades e intereses. La Figura 2 muestra el aula del grupo de lactantes (0-1) con los espacios preparados esperando la llegada de los niños y las niñas. En ella se puede ver: una hamaca, un espacio de exploración con la pequeña mesa de luz, otro espacio de exploración con el cesto de los tesoros y otros materiales sensoriales y diferentes elementos de movimiento.

La Figura 3 muestra el aula del grupo de maternales (1-2 años) también con los espacios preparados para la llegada de los infantes. En ella se puede ver un espacio de juego de construcciones, un parking de coches, un sofá y cuentos, un pequeño espacio de juego heurístico y dos estructuras de movimiento.

Figura 2. Aula de 0 a 1 años Escola Bressol Municipal de Vic Horta Vermella. Fuente: elaboración propia

Las Figuras 2 y 3 muestran como simultáneamente el espacio responde a las diferentes necesitades de juego, exploración, manipulación, descanso, intimidad, relación, individualidad, comunicación, expresión y movimiento. A partir de las propuestas que se presentan, los niños y las niñas se desplazan y acuden a los espacios que mejor responden a sus intereses y necesidades. Harmónicamente van regulándose, como si se tratase de un baile, repartiéndose y compensándose entre los diferentes espacios y, como explica Goldschmied (1986), el adulto que acompaña pasa a dirigir desde detrás, como si fuese un tramoyista, en vez de desde delante, siendo el espacio y material un educador más. Cabe destacar nuevamente, la importancia del papel del adulto como agente que observa, acompaña, documenta y hace buenas preguntas para potenciar los aprendizajes que están llevando a cabo los niños y las niñas (Alsina, 2015; Hoyuelos, 2007, 2011).

Figura 3. Aula de 1 a 2 años Escola Bressol Municipal de Vic Serra Sanferm. Fuente: elaboración propia

A continuación, a modo de ejemplo, se presentan algunas de las diferentes propuestas que integran el aula de caminantes (2 a 3 años) de las Escuelas Infantiles Municipales de Vic, para poder profundizar ampliamente en el diseño de estos espacios y de algunas de las acciones matemáticas que surgen y se desarrollan durante el juego de los niños y las niñas.

3.3.1. Los espacios con mesas de experimentación

A partir del material inespecífico que se dispone dentro de una bandeja, mesa o cesto lo suficientemente amplia para que contenga además los diferentes contenedores y los diferentes utensilios, se pretende favorecer la experimentación con la finalidad de promover que los infantes hagan hipótesis y las comprueben.

3.3.2. Los espacios de juego simbólico

Mediante el juego libre, el movimiento, la expresión y la comunicación, los niños y las niñas reproducen simbólicamente acciones cotidianas que observan de sus contextos reales y viven en primera persona y por ello, su juego se convierte en cocinar, dar de comer, bañar, vestir los muñecos o a sí mismos y a sus compañeros de juego. Estos espacios pueden presentarse mediante diferentes escenarios: la

cocinita, la zona de baño para las muñecas y cambiador de ropa, una tienda de alimentos o un taller mecánico, entre otros y requieren de muchos complementos para favorecer una propuesta rica, amplia y completa.

3.3.3. Los espacios de taller

Una mesa, un soporte gigante en vertical o horizontal o unos caballitos de pintura de madera o de metacrilato (para ver la translucidez de los materiales) sirven para presentar diferentes propuestas que den lugar a trazar líneas o dibujos en gran formato y en diferentes posiciones. Se incluyen también utensilios y materiales muy diversos, como pinturas de diferentes composiciones y diferentes colores para pintar con los dedos o con pincel, barro (blanco, negro y marrón), papeles de diferentes tamaños, colores y texturas, cartones, cartulinas, ceras duras, ceras blandas, tizas, rotuladores y pinceles de diferentes grosores, elementos para incrustar, moldear, recortar, sesgar, etc. En estos espacios, los niños y las niñas pueden experimentar con muchos elementos que les permite expresar, imaginar, crear, formular hipótesis y comprobar al tiempo que despiertan sus sentidos observando cómo se transforman las materias y sus creaciones.

3.3.4. Los espacios de construcciones

Los juegos de construcción en la Escuela Infantil se inician con la formación de pilas en vertical u horizontal, la creación de puentes, cerramientos y, por último, estructuras simétricas. Para ello, este espacio requiere de una gran cantidad de piezas de madera lisas y de formas geométricas regulares, clasificadas según un criterio específico como puede ser la forma o con alguna composición elaborada por el adulto o de un juego iniciado. Una de las características fundamentales es que, normalmente, aunque se presentan variaciones según los intereses del profesional que diseña el espacio, todas las piezas del material (menos la más pequeña) pueden componerse utilizando otras piezas más pequeñas del propio material. También existe la posibilidad de presentar piezas grandes para fomentar las construcciones colaborativas o piezas pequeñas que fomentan más el juego individual.

3.3.5 Los espacios con propuestas de motricidad fina

Se trata de espacios que ofrecen mediante una mesa y sus respectivas 4 sillas, propuestas de concentración donde, los niños y las niñas, resuelven alguna situación inicial planteada como un reto. Las propuestas se presentan individualmente, a partir de bandejas, y cuando el niño o la niña terminan, el adulto que acompaña, vuelve a dejarla en su situación inicial para que sea otro que pueda resolver la tarea. Se inspiran en las tradicionales bandejas Montessori (1982) y normalmente son creadas por los mismos profesionales. También se incorporan en este espacio algunos juegos comercializados con este fin como puzles y encajes.

4. Acciones vinculadas a las matemáticas intuitivas e informales de los niños y las niñas de 0 a 3 años

A continuación, se presentan algunas de las acciones que se han identificado en los espacios y con los materiales descritos. Con este fin, se muestra para cada uno de los espacios descritos una documentación que han elaborado las educadoras de la escuela al observar a los niños y las niñas desarrollar su juego.

4.1. Los espacios con mesas de experimentación

Pol experimenta con el polvo de piel de naranja que han preparado las educadoras del aula. De esta propuesta destacan las sensaciones organolepticas que se despiertan a través del tacto, la vista y el olfato. Como muetra la figura 4, Pol está muy concentrado formulando sus propias hipótesis y comprovándolas al llenar el bol con los diferentes utensilios que han dispuesto en la mesa.

Una de las propuestas que ofrecemos en la mesa de experimentación es el polvo de piel de naranja seca, agradable al tacto y que hace muy buen olor. El juego de traspasar de un recipiente al otro aporta serenidad, precisión, esfuerzo, coordinación… aspectos muy importantes en el crecimiento de los infantes. Además, van adquiriendo diferentes habilidades como la precisión del gesto, la coordinación de movimientos, la autonomía y la construcción del pensamiento lógico, entre otros. Pol llena el bol de diferentes maneras: con una cuchara grandes, haciendo pasar por el embudo, primero con una flanera y después con la ayuda del cucharón.

Figura 4. Aula de 2 a 3 años Escola Bressol Municipal de Vic Serra Sanferm. Fuente: elaboración propia

4.2. Los espacios de juego simbólico

Helena ha estado jugando mucho rato en el espacio de la cocina. Como muestra la figura 5, ha puesto la mesa haciendo las correspondencias de cantidad pertinentes (para cada sitio: un plato, una cuchara, un vaso, un muñeco, etc.). Además, ha clasificado los materiales en el estante del mueble poniendo, por un lado, todos los cuencos que cerámica y, por otro lado, todos los moldes de madalenas.

Dentro de los momentos de juego libre ofrecemos a los infantes materiales y propuestas pensadas para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático. Ya en las primeras edades de vida, de manera innata, los infantes van creando estructuras de pensamiento, al tiempo que elaboran sus aprendizajes. En esta ocasión, Helena agrupa los cuencos pequeños y grandes e inicia el conteo diciendo: “uno, dos y tres” señalando con la mano. Después, pone la mesa colocando los cubiertos al lado de cada plato.

Figura 5. Aula de 2 a 3 años Escola Bressol Municipal de Vic Caputxins. Fuente: elaboración propia

4.3. Los espacios de taller

Abril, por primera vez, descubre como se utilizan las acuarelas. Sin mediación por parte de las educadoras, mediante el ensayo y el error, acaba deduciendo que para pintar con las acuarelas tiene que utilizar los diferentes elementos que ha encontrado en la mesa. Primero prueba sin éxito pintar directamente sin mojar el

pincel. Cuando por fin lo descubre, disfruta enormemente, como muestra la figura 6, con la explosión de colores sobre el papel. Este proceso de creación, vinculado al placer, proviene, como destacan en la documentación las educadoras, de los diferentes sentidos que captan la realidad que va transformándose. De este modo, Abril aprende a observar los cambios en las cualidades sensoriales.

Descubrimos con aquello que experimentamos y gozamos con todo lo que nos genera placer y este placer nos puede llegar por los sentidos: el tacto, el olfato, el gusto o la oída. Este descubrimiento del color que se repartía por la hoja generó en Abril un placer y creó en ella un interés por la funcionalidad del pincel y de las acuarelas que se mezclaban y ampliaban la totalidad del papel.

Figura 6. Aula de 2 a 3 años Escola Bressol Municipal de Vic Horta Vermella. Fuente: elaboración propia

4.4. Los espacios de construcciones

Alejandro construye una torre tan alta que para hacerlo ha de buscar, ingeniosamente, como alcanzar la parte de arriba. Para ello busca a su alrededor y encuentra una silla que utiliza para subirse y alcanzar la cima. Como muestra la figura 7, para construir la torre Alejandro ha necesitado varios intentos donde la coordinación y la precisión han sido imprescindibles para juzgar las diferentes alturas.

En el espacio de construcciones los infantes manipulan diferentes tipos de materiales naturales (maderas, corchos, pechinas, piedras, troncos…) creando estructuras. Para hacerlo hace falta precisión, coordinación, fuerza… A veces las piezas no se aguantan, pero para verlo hace falta experimentar, frustrar-se, volverlo a probar. En esta ocasión Alejandro construye una torre muy alta y se ayuda de la silla para poder subirse aun más arriba.

Figura 7. Aula de 2 a 3 años Escola Bressol Municipal de Vic Caputxins. Fuente: elaboración propia

4.5. Los espacios con propuestas de motricidad fina

Aina, desde su máxima precisión y concentración busca la correspondencia por forma y por cantidad al encajar las piezas en el tablero. Como muestra la figura 8, ella es capaz de estar mucho tiempo identificando y relacionando las formas de las piezas.

Precisión, concentración, dedicación y mucho cuidado en los movimientos para encajar las piezas en la madera. A Aina le gustan mucho los retos matemáticos y hoy a llegado al aula y se ha encontrado todas las piezas del encaje dentro de un cesto. Con la paciencia que la caracteriza, se ha sentado en la silla para conseguir poner cada pieza en el lugar que le corresponde.

Figura 8. Aula de 2 a 3 años Escola Bressol Municipal de Vic Horta Vermella. Fuente: elaboración propia

Finalmente, queremos destacar que para garantizar la calidad de estas primeras matemáticas se requieren profesionales altamente cualificados que planifiquen entornos ricos en estímulos con materiales atractivos y sepan interpretar adecuadamente las acciones que realizan los niños y las niñas, para poder ofrecerles los apoyos necesarios que les ayuden a ampliar y desarrollar sus capacidades.

Referencias

Abad, J. (2006). La escuela como ámbito estético según la pedagogía reggiana. *Revista Aula de Infantil*, nº1, 10-16.

Alsina, Á. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años.* Editorial Octaedro-Eumo.

Alsina, Á. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años: Elementos para empezar bien*. Narcea Ediciones.

Alsina, Á. y Delgado, R. (2021). Identificando los conocimientos para enseñar matemáticas en educación infantil: un primer paso para el desarrollo profesional. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, nº 6(2), 1-23. https://doi.org/10.34179/revisem.v6i2.16003

Alsina, Á., y Delgado, R. (2022). ¿Qué conocimientos necesita el profesorado de Educación Infantil para enseñar matemáticas?. *Matemáticas, Educación y Sociedad (MES),* 2022, vol. 5, núm. 1, p. 18-37. http://hdl.handle.net/10256/20829

Baroody, A. (1987). *Children's Mathematical Thinking. A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers.* Teachers College Press.

Battini, E. (1982): Modificaciones, eliminazione, cambiamento riguardante gli spazi attuali, gli arredi attuali in funzione delle attivita e della natura della vita scolastiea, en VV. AA., *L'organizzazione materiale dello spazio scolastico.* Comune di Modena: documento mimeografiado, pp. 23-30.

Borghi, B. Q. (2010). *Educar en el 0-3: La práctica reflexiva en los nidi d'infanzia* (Vol. 27). Grao Editorial.

Bassedas, E., Huguet, T. y Solé, I. (2006). *Aprendre i ensenyar a l'educació infantil*. Graó Editorial.

de Basterrechea I y Salvador C. (2011). *Guía para proyectar y construir escuelas infantiles.* Federación Española de Municipios y Províncias. Ministerio de Educación. Gobierno de España. Guía para proyectar y construir escuelas infantiles.pdf (femp.es)

de Castro, C., González, A., y Escorial, B. (2009). El aprendizaje de las matemáticas a los tres años: Narración reflexiva sobre la construcción de un mercado

medieval. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº 70, 53-65. http://hdl.handle.net/10486/667872

de Castro, C., y Quiles, Ó. (2014). Construcciones simétricas con 2 y 3 años: La actividad matemática emergente del juego infantil. *Aula de Infantil.* Nº 77, 32-36. Construcciones simétricas con 2 y 3 años: La actividad matemática emergente del juego infantil | Carlos De Castro Hernández - Academia.edu

Clements, H.D., y Sarama J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. El enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje.* Learning Tools LLC.

Ceppi, G., y Zini, M. (Eds.). (2009). *Niños, espacios, relaciones: metaproyecto de ambientes para la infancia*. Red Solare.

Cavallini, I., Quinti, B., Rabotti, A., y Tedeschi, M. (2017). Las arquitecturas de la educación: El espacio de lo posible. La cultura del habitar en la experiencia de las escuelas municipales de educación infantil de Reggio *Emilia*. Revista Internacional de Educación para la Justicia Social (RIEJS). 181-197. LAS_ARQUITECTURAS (uam.es)

Direcció General d'Educació Infantil i Primària. (2017). *Despertem mirades a l'entorn de l'espai escolar.* Barcelona: Servei de Comunicació i Publicacions. Generalitat de Catalunya. http://hdl.handle.net/20.500.12694/592

Fernández, K., Gutiérrez, I., Gómez, M., Jaramillo, L., y Orozco, M. (2004). El pensamiento matemático informal de niños en edad preescolar*. Zona Próxima*, Nº 5, 42-73. http://hdl.handle.net/10584/4572

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.* Holland Reidel Pub.

Geist, E. (2014). *Children are born mathematicians: supporting mathematical development, birth to age 8.* Pearson.

Ginsburg, H. y Baroody, A. (2007). *Test de Competencia Numérica Básica.* Madrid: TEA Ediciones.

Goldschmied, E. (1986). El joc heurístic*. Infancia*, Nº 33:11-15.

Goldschmied, E., y Jackson, S. (2007). La educación infantil de 0 a 3 años. Editorial Morata.

Hoyuelos, A. (2001). Loris Malaguzzi. *Cuadernos de pedagogía*, Nº 307, 52-57.

Hoyuelos, A. (2007). Documentación como narración y argumentación. *Aula de infantil*, *39*, 5-9. http://untitled (aeiotu.org)

Iglesias, L. (2009). La organización de los espacios en la escuela infantil. En Zabalza, M. *Calidad en la educación infantil*. 235-285. Narcea Ediciones.

Lee, S. (2012). La historia de Emma: Estudio de caso sobre el desarrollo de la resolución de problemas desde los 8 meses a los 2 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia,* Nº 1(2), 64-71. http://hdl.handle.net/11162/111599

Malaguzzi, M. (2020*). La educación infantil en Reggio Emilia.* Barcelona: Rosa-Sensat-Octaedro.

Martín, L. (2011). Mirando dentro de la escuela: la organización del espacio y los materiales. En Antón, M (coord.): Planificar la etapa 0-6. Compromiso de sus agentes y práctica cotidiana (pp. 185-210). Barcelona: Graó.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* National Council of Teachers of Mathematics (traducción de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES).

Zabalza, M. (2014). Tiempos y espacios en la educación infantil. *RELAdEI. Revista Latinoamericana de Educación Infantil*, *3*(2), 13-15. Tiempos y espacios en la educación infantil | RELAdEI. Revista Latinoamericana de Educación Infantil (usc.es)

Vecchi, V. (2013). *Arte y creatividad en Reggio Emilia. El papel de los talleres y sus posibilidades en educación infantil.* Madrid: Ediciones Morata.

CoR027 Las Matemáticas en el aula de 0-1 año

Iolanda Torralba Palmero
adnaloi71@yahoo.es
Institut Municipal d'Educació de Barcelona
Mercè Saavedra Gandia
mercesaavedrag@gmail.com
Institut Municipal d'Educació de Barcelona

Núcleo temático: Recursos para el aula. Procesos.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Infantil de Primer Ciclo (0-3 años).

RESUMEN

El ser humano muestra ya en sus etapas iniciales del desarrollo una gran curiosidad por sí mismo, por los otros y por su entorno. En el caso de los niños más pequeños se puede constatar esta curiosidad por la observación de todo lo que le rodea y por la voluntad de tocar y manipular los objetos que tienen a su disposición.

Palabras clave: Aula de 0-1 año, Cesta de los Tesoros, Exploración, los Sentidos.

DESARROLLO DEL TRABAJO

1. La matemática está presente en todo lo que nos rodea, y los niños tienen la capacidad de percibirla a través de los sentidos y aprender de forma espontánea.

En la escuela los profesionales del 0-3 hemos aprendido a observar el interés de los niños por conocer el mundo que les rodea y a tener una mirada más consciente para poder acompañar a las niñas y los niños en sus procesos. Hacer que el juego sea un contexto que ayude a desarrollar el pensamiento matemático, a la vez que potenciar al máximo oportunidades y vivencias que le acerquen al conocimiento de las primeras nociones lógico-matemáticas. Por eso, ofrecemos y creamos un entorno rico en oportunidades donde los más pequeños puedan experimentar con diferentes conceptos matemáticos.

En la Escola Bressol son muchos los momentos cotidianos en que de manera espontánea y a través del juego los niños realizan actividades que requieren competencias matemáticas de diferentes tipos y el lenguaje matemático está presente en el día a día de las aulas.

El ser humano muestra, ya en sus etapas iniciales del desarrollo, una gran curiosidad por sí mismo, por los otros y por su entorno. En el caso de los niños más pequeños se puede constatar esta curiosidad por la observación de todo lo que le rodea y por la voluntad de tocar y manipular los objetos que tienen a su disposición. Porque la curiosidad es el motor que les permite conocer la realidad de manera global. Y sin duda, la curiosidad y el deseo de descubrir están vinculados a la motivación y al placer de aprender.

Está demostrado que se aprende mejor a partir de la interacción sobre los objetos, ya que la acción directa es una vía privilegiada de aprendizajes significativos y perdurables en el tiempo y de especial protagonismo en el Primer Ciclo de Educación Infantil.

En la etapa de 0-3 años partimos de la idea de que un niño es un ser competente, que aprende, que crece, que se relaciona, que conoce. Él es el constructor de su propio aprendizaje y el protagonista de su propia acción. Y desde esta perspectiva organizamos los ambientes y los espacios con un sentido pedagógico y los diseñamos para el juego.

Seleccionamos materiales de calidad, variados, con una riqueza sensorial y estética para crear ambientes ricos en propuestas y retos, motivadores y atractivos. Preparamos y ofrecemos aulas acogedoras, con estímulos y provocaciones y por supuesto, dando prioridad a los intereses y las necesidades de los niños y las niñas. Ambientes tranquilos y seguros para investigar, aprender y disfrutar jugando en compañía de un grupo de iguales y de un adulto cercano, que acoge, que proporciona afecto, que pone palabras a sus descubrimientos y que acompaña en todo momento.

Ahora lo que nos ocupa son los conceptos matemáticos en las primeras edades. Por eso ofrecemos propuestas para que en el aula de 0-1 año se puedan dar estas situaciones.

2. Propuestas sensoriales relacionadas con las *cualidades*.

2.1 La Cesta de los Tesoros.

La Cesta de los Tesoros es una propuesta de juego pensada por la pedagoga inglesa Elinor Goldschmied (1) y que va dirigida a los niños de entre 6 y 12 meses, cuando ya se mantienen sentados durante un rato y todavía no andan.

Consiste en ofrecer una cesta baja, redonda y de mimbre, con un diámetro aproximado de 50 cm, sin asas y lo suficientemente estable para que no se vuelque si un niño se apoya. De una medida considerable para contener alrededor de 70 objetos diversos, la gran mayoría de uso cotidiano y escogidos con la finalidad de proporcionar estímulos y experiencias a los sentidos de los niños, incluido el del movimiento del cuerpo.

Imagen 1. La Cesta de los Tesoros

Es una actividad de exploración y descubrimiento de los objetos, que permite desarrollar la capacidad de coordinar el ojo, la mano y la boca.

Esta propuesta está pensada para que los niños puedan escoger, manipular, chupar y observar de forma espontánea y libre a través de los sentidos y puedan identificar las características de cada uno de ellos mientras los manipulan.

Con la cesta de los tesoros, el niño aprende solo y por sí mismo. El adulto, con su presencia y atención, le da seguridad y confianza.

Los objetos se escogen según su cualidad: madera, mimbre, metal, tela, ... con una cantidad abundante de cada uno.

Se presenta de manera atractiva, manteniéndola siempre en buen estado e ir renovando y creando nuevos materiales.

Es necesario observar las preferencias, procesos, actividades y actitudes de los niños con cada objeto para saber con qué criterio haremos la renovación del material. Periódicamente, renovaremos unos cuantos objetos, dejando los otros como referencia. Los nuevos objetos serán un estímulo que hará que los niños se mantengan activos, creativos y motivados.

Estos objetos les proporcionan información de superficie, peso, temperatura, forma, color, olor, sonido, consistencia, textura. Algunos se pueden repetir, de manera que el niño pueda reconocer objetos con propiedades parecidas o idénticas y establecer correspondencias.

Imagenes 2 y 3. Explorando los objetos de la cesta.

2.1.1. El juego con los materiales de la cesta de los tesoros favorece

Individualmente:

- La capacidad de concentración.
- La utilización de las manos y la implicación de todo el cuerpo.
- La capacidad de escoger entre los objetos.
- La capacidad de exploración de una gama variada y descubrir las cualidades.

- El hecho de aprender solo y sin depender del adulto.
- La estructuración del pensamiento.
- El hecho de actuar a su propio ritmo.
- El placer de la sorpresa.

A todo el grupo de niños:

- Un ambiente de calma que favorece la concentración y la acción.
- El desarrollo de las primeras comunicaciones con los otros iguales: miradas, sonidos preverbales, compartir, intercambiar, …
- El hecho de facilitar el interés de los niños de unos por otros.
- La disponibilidad del adulto para todos los niños.

Al adulto:

- La observación tranquila de las acciones de los niños sin intervenir.
- El mejor conocimiento de cada niño y de su ritmo.
- El enriquecimiento de la imaginación y la creatividad durante la recogida de materiales.
- El aprendizaje al lado de los niños y observar sus capacidades creativas.
- La reflexión sobre la formación propia.

2.2 Cestas y contenedores temáticos.

Es una propuesta de juego que se ofrece y se presenta en cestas y contenedores con una selección de objetos de madera, de metal, de tela, de goma, teniendo en cuenta que sean de distinta forma, tamaño, peso y medida. Los niños pueden experimentar y explorar libremente sin la intervención directa del adulto.

Imagen 4. Contenedor de metal.

Imagen 5. Contenedor de madera.

A diferencia de la cesta de los tesoros, los objetos se escogen de un mismo tipo de material, en diferentes formas y tamaños.

3. Propuestas sensoriales en que el niño experimenta con las *cantidades*.

3.1 El Juego Heurístico.

El Juego Heurístico es una actividad de manipulación, en la cual un grupo de niños y niñas, de entre 12 y 30 meses, combinan libremente objetos, exploran las posibilidades y al acabar los recogen clasificándolos. Es una propuesta de juego de Elinor Goldschmied (1) como continuación al Cesto de los Tesoros

Es una actividad de exploración sensorial, motriz y cognitiva que fomenta la curiosidad libre de los niños, donde ellos son los verdaderos protagonistas de su propia actividad, a la vez que ofrece múltiples oportunidades de descubrir las combinaciones entre los diferentes objetos y materiales, además de sus propiedades físicas. Se trata de un juego autónomo y creativo en el que los niños acceden libremente sin que el adulto interfiera ni anticipe.

Se trata de colecciones de diferentes objetos (mínimo, unos 20 de cada) y sus respectivas bolsas de tela para guardarlos.

Utilizamos objetos de distintos materiales que aportan información sensorial variada como: la textura de una tela, el frío del metal, la calidez de la madera, la dureza de una concha. Es importante buscar objetos que se combinen entre sí. También se pueden usar elementos de reciclaje como: tubos de papel de wc, cilindros de hilos y material hecho expresamente para el juego como bolsitas de tela.

El material se acompaña de contenedores de diferentes tamaños.

Imagen 6. Preparando la sessió de juego heurístico.

3.1.1 El juego consta de 2 etapas.

- La exploración libre del material, dejando que los niños descubran todas las posibilidades de exploración, comparación y combinación: meter, sacar, tapar, destapar, apretar, agrupar, separar, empujar, modificar la apariencia, verter, trasvasar, deslizar, compartir, apilar, tocar, golpear, lanzar, combinar, sacar de los botes, guardarlos, transportar de un lado al otro, mezclar. Todo es aprendizaje.
-

Imagenes 7 y 8. Sesión de juego heurístico.

- Cuando el interés por el juego decae, nos indica que es el momento de volver a guardar los elementos en las bolsas. Se retiran los contenedores y con las bolsas abiertas, el adulto va recogiendo los elementos y anima a los niños a que colaboren. Los niños van cogiendo del suelo y lo van poniendo dentro de la bolsa correspondiente, clasificando los objetos. El adulto dirige las acciones de los niños a través del lenguaje, verbalizando el nombre del material que se guarda en cada bolsa.

Imagen 9 y 10. La recogida y clasificación.

La duración de la actividad puede ser de 30 a 40 minutos aproximadamente, incluyendo el juego y la recogida. Siempre dependiendo de la demanda de los ninos, la disposición y la forma en la que se desarrolla la sesión.

3.1.2 El juego heurístico aportara a los niños

Individualment:

- La estructuración del pensamiento.
- La estructuración del lenguaje.
- La capacidad de concentración, de la atención.
- El conocimiento de las propiedades de los objetos.
- El conocimiento de las leyes de la naturaleza.
- La libertad y autonomia en la acción.
- El sentimiento de éxito en la pròpia actividad.
- El valor de la conservación del material.
- La posibilidad de actuar a su propio ritmo.
- La posibilidad de colaborar con la educadora.

A todo el grupo de niños:

- El hecho de conseguir una situación de silencio y calma ambiental.
- Favorecer la concentración en la acción.
- Facilitar el aprendizaje de la convivència con los demás.

4. Propuestas sensoriales en que el niño experimenta con el espacio: geometría.

Durante el primer año de vida se realizan una serie de adquisiciones muy importantes que serán definitivas para el desarrollo posterior. Se pasa de unos movimientos involuntarios a una maduración del tono muscular, a un control del movimiento. El niño cambia la posición del cuerpo y empieza a desplazarse, dándole así una perspectiva diferente del mundo, tanto del espacio, como de los objetos.

Imagen 11. Primeros desplazamientos.

El niño, de manera natural, toma conciencia del espacio a través del movimiento y de la posición de su propio cuerpo, siendo este el primer objeto de descubrimiento. Es por eso que la percepción que tiene el niño del espacio evoluciona al mismo tiempo que su desarrollo motor.

Sin duda, el momento más crucial es cuando empieza a caminar, ya que progresivamente reconoce y sitúa los objetos de su entorno más inmediato y su propia acción le permite adquirir una orientación espacial. A medida que va creciendo va mejorando la capacidad de situar los objetos que no están presentes y empieza a construir mentalmente el espacio, es decir, lo organiza. Esta experiencia será la base del posterior conocimiento de la geometría. Además, también aprende espontáneamente a reconocer e identificar diferentes formas a partir de las percepciones, sobre todo visuales y táctiles.

Imagenes 12 y 13. Descubriendo el espacio.

En la Escola Bressol tenemos en cuenta la organización de los espacios, de las aulas y de toda la escuela en sí, ya que todos tienen un carácter educativo y al mismo tiempo pensamos en los materiales más apropiados que faciliten este conocimiento.

La organización por espacios, por rincones de juego posibilita el trabajo autónomo, potencia la acción del niño que le impulsará a buscar, observar, experimentar, investigar y a llegar cada vez más lejos con el material que tiene a su disposición.

Dar protagonismo a los niños y las niñas y observarlos mientras exploran también nos ayuda a investigar como docentes y nos permite adecuar y ajustar nuestras intervenciones y a utilizar el lenguaje apropiado en cada situación.

Referencias:

(1) Goldschmied, Elinory Jackson, Sonia (1994) *People Under Three.*

CoR028 El lenguaje Matemático en el primer ciclo de educación infantil (0-3 años)

Mercè Saavedra Gandia
mercesaavedrag@gmail.com
Institut Municipal d'Educació de Barcelona
Goretti Torrent Tort
gttgoretti59@gmail.com
Institut Municipal d'Educació de Barcelona

Núcleo temático: Recursos para el aula. Conexiones.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Infantil de Primer Ciclo (0-3 años).

RESUMEN

El material inespecífico está formado por objetos de la vida cotidiana, elementos naturales y de reciclaje. Es un material abierto y que permite al niño crear pequeños proyectos, hipótesis aprendiendo de su propio interés.

Palabras clave: Educación Infantil, 0-3 Años, Lenguaje Matemático, Material Inespecífico.

DESARROLLO DEL TRABAJO

1. INTRODUCCIÓN

El niño, desde muy pequeño, a través del juego y la exploración, la manipulación de los objetos y la relación con su entorno va adquiriendo vivencias que lo acercan a diferentes conocimientos. Son muchos los momentos donde se dan de forma espontánea conceptos matemáticos (cantidades, cualidades, orden, propiedades, medida, ...), como en las rutinas cotidianas, las acciones que hacen mientras juegan, las interacciones y relaciones que establecen entre los objetos que lo rodean.

La misma distribución espacial y la organización de la escuela infantil tiene un componente matemático y científico que ayuda al niño a empezar a organizar su

pensamiento: un espacio ordenado, donde se dan correspondencias (un colgador por niño) donde se organiza el material por colores, tamaños, cualidades, donde se propone de manera indirecta relaciones, donde se ofrecen patrones que se van repitiendo.

En el proyecto educativo de la Escola Bressol, el lenguaje matemático es uno de los aspectos relevantes y es uno de los criterios esenciales a la hora de planificar las propuestas de juego, los materiales que seleccionamos, cómo los presentamos y los apoyos que ofrecemos a los niños para manipular, explorar y descubrir.

2. EL MATERIAL INESPECÍFICO, FUENTE INAGOTABLE DE PROPUESTAS MATEMÁTICAS.

2.1 Historia.

Hace años los profesionales de las Escoles Bressol de Barcelona que acompañamos a los niños más pequeños (de 0 a 3 años) descubrimos las posibilidades de juego y descubrimiento que provocaban propuestas como, la cesta de los tesoros y el juego heurístico *Elinor Goldschmied* (1). Estas propuestas ya no tenían interés a partir de los 2 años, pero la atracción por el tipo de material continuaba, enriqueciendo las relaciones entre ellos. De esta manera se crean las cestas o las cajas con gran número de material inespecífico, pensado en provocar relaciones matemáticas. Los profesionales buscamos material que pueda ofrecer diferentes posibilidades de exploración, agrupación, clasificación. Que colocado en diferentes soportes provoque una ordenación y una composición geométrica.

Imagen 1. Cesta de los tesoros.

El material inespecífico está formado por objetos de la vida cotidiana, elementos naturales y de reciclaje. Es utilizado por los niños de múltiples maneras, encontrando ellos mismos todas las posibilidades de combinación y llegando a hacer las primeras estructuras de lógica matemática.

Imagen 2. Combinación de material inespecífico.

Imagen 3. Escurreplatos y gomas elásticas.

2.2 Objetivos.

- Desarrollar el interés por el descubrimiento.
- Manipular los distintos materiales y explorarlos con los sentidos.
- Acercarse al conocimiento de nociones, hechos y conceptos que ayudan a interpretar el entorno.
- Reconocer cualidades, cantidades, medidas y relaciones en el espacio.
- Observar y comunicar los hechos que se derivan del juego.
- Compartir descubrimientos entre iguales.

2.3 Aspectos didácticos y metodológicos.

El material inespecífico se presenta de manera atractiva para que los niños exploren y experimenten y de esta manera favorecer experiencias relacionadas con los conceptos de cualidad (distinguir colores, formas, olores, texturas, sonoridad, hacer apareamiento y clasificaciones), cantidad (comparar muchos y pocos, muchos y uno, noción de menos y más, agrupar elementos), tamaños y medidas (grande, pequeño, mediano, largo, corto) y el trabajo espacial (formas y posición en el espacio: fuera, dentro, delante, detrás, encima).

Imagen 4. Cintas de distintos colores i tamaños.

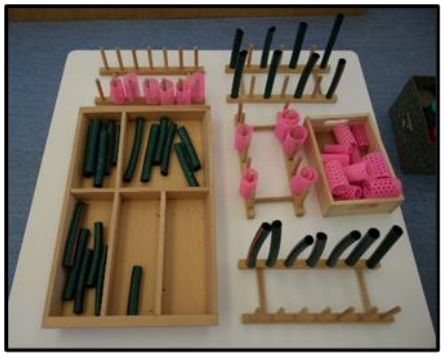


Imagen 5. Propuesta de rulos i mangueras.

El adulto delante de esta propuesta de juego mantiene una actitud de observación. Es el profesional que acompaña el juego, que pone palabras en el momento adecuado, que ofrece posibilidades, material, retos. Está presente y atento a las acciones. El protagonista es el niño/a que desarrolla pequeños proyectos e hipótesis, que aprende de su propio interés.

2.4 Recursos utilizados.

Conchas, esponjas naturales, botes, botellas de cristal gordo, cilindros y conos de cartón, de plástico, de metacrilato, tapas de botes de conserva, imanes, embudos, cadenas, losetas de piscina, trozos de tela, cintas, betas y cordones, tapones de corcho, llaves de cerradura, anillas de servilleta, anillas de cortina de madera y metal, gomas de cafetera, pinzas de tender, rulos de peluquería, bolillos, trozos de cadena de diferentes grosores, trozos de manguera de diferentes tamaños, contenedores (cajas sin tapa, soporte de papel de cocina de madera y de metal, botes de metal, …).

La posibilidad de materiales variados es innumerable. La imaginación de los adultos que preparan las propuestas es de vital importancia.

Imagen 6. Gomas de cafetera.

Imagen 7. Telas.

3. EN LA ESCUELA TENEMOS COMO OBJETIVO ENRIQUECER DIFERENTES SITUACIONES BAJO UNA MIRADA MATEMÁTICA.

3.1 En los momentos cotidianos.

Algunos de ellos, como repartir los baberos, repartir las cucharas, colgar la chaqueta y recoger los materiales, adquieren gran importancia en la evolución del pensamiento del niño si se aprovechan. La frecuencia en que se dan estas situaciones favorece el aprendizaje a través de la repetición y del interés del niño/a. El adulto ofrece todas las oportunidades para que sean posibles y está abierto a descubrir nuevas.

Imagen 8. Colgando la toalla.

Imagen 9. Repartiendo las cucharas.

3.2 En las propuestas de espacios de juego.

El espacio está organizado en rincones simbólicos, de imitación, de construcciones, de descanso, de lectura, donde el niño desarrolla un juego concreto, pero a la vez abierto a sus intereses. La maestra organiza el material para desarrollar acciones matemáticas. Por ejemplo, en el rincón de las muñecas, ponemos biberones de diferentes tamaños, colores, que agrupados en un mismo cesto.

Imagen 10. Maderas.

Imagen 11. Rincón de peluqueria.

En la cesta de los peines puede haber de madera, de plástico, de diferentes tamaños y formas. En el espacio de las construcciones también de diferentes materiales para poder diferenciar las cualidades de cada uno.

3.3 En las propuestas concretes.

Este tipo de propuestas por sus cualidades, cantidades y organización permite al niño hacer un juego matemático en el que puede explorar, llenar y vaciar, apilar, comparar, agrupar por cualidades, hacer construcciones en el espacio, explorar desde diferentes puntos de vista, cuantificar, medir, ordenar, secuenciar. Se sugieren mediante la cesta de los tesoros, el juego heurístico, las paneras de madera, de metal, de texturas, el rincón del material inespecífico, las bandejas de experimentación. Estos son algunos ejemplos de propuestas que ofrecemos y que se adaptan a las necesidades y momento evolutivo de los niños.

Imagen 12. Tapones y moldes.

Imagen 13. Fichas y diferentes contenedores.

Imagen 12. Pinzas de tender.

Imagen 13. Cilindros de cartón.

Imagen 14. Cilindros de plástico.

3.4 El papel del adulto.

En este proceso, es de vital importancia, el profesional como acompañante de las acciones y experiencias. Pone retos en función del momento evolutivo de cada niño y de sus posibilidades. Pone palabras adecuadas a aquellos descubrimientos y aprendizajes que hacen en su día a día. Hace preguntas que ayudan al niño a cuestionar y a investigar. Busca la manera de que el niño sea el protagonista de su aprendizaje, se sienta competente, aprenda del contexto que le rodea y de alas a su curiosidad. En definitiva, da herramientas a los niños para adquirir diferentes conocimientos matemáticos.

Imagenes 15 y 16. El adulto observa y acompaña.

Con las propuestas matemáticas que se realizan mediante el material inespecífico no se pretende avanzar ninguna etapa, sino que el niño tenga experiencias positivas mediante las cuales pueda hacer conexiones neuronales más ricas.

Imagen 17. Embudos, conos de cartón y pelotas.

Referencias:

(1) Goldschmied, Elinor y Jackson, Sonia (1994) *People Under Three.*

CoR033 Geometría esférica en un aula de ESO

Alba Blasco Estrada
alba.blasco@gmail.com
Institut Jaume Callís, Vic

Josep Costa Riu
josepcostar@gmail.com
Institut Llobregat, Sallent

Núcleo temático: Procesos, Recursos para el aula

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato

RESUMEN

Vivimos en un planeta esférico, situado dentro de un sistema solar compuesto por astros esféricos. Sin embargo, en nuestras aulas solo hablamos de geometría y trigonometría plana. Cierto es que los conocimientos necesarios para comprender en profundidad la geometría esférica son complejos, pero esto no impide que nuestro alumnado pueda comprender gran parte de ellos.

En este contexto nos planteamos hacer llegar la geometría esférica a nuestras aulas de educación secundaria. Las actividades que presentaremos fueron creadas, en primera instancia, para ser llevada al aula dentro del proyecto 7demates. Así pues, són actividades pensadas para alumnado de 2º a 4º de la ESO, aunque podría aplicarse a 1º o ampliarlo para bachillerato.

Se observará que damos mucha importancia a la manipulación, pues la consideramos un elemento fundamental para la comprensión y la investigación.

Palabras clave: Geometría, Recursos Didácticos, Transversal e Investigación.

DESARROLLO DEL TRABAJO

Alba Blasco es profesora de matemáticas, miembro de la asociación catalana de Geogebra y trabaja en el Instituto Jaume Callís. Josep Costa es profesor de matemáticas en el Instituto Llobregat de Sallent. Ambos forman parte del grupo de trabajo 7demates.

En esta comunicación se presentará un trabajo didáctico para acercar la geometría esférica a nuestras aulas de educación secundaria. La propuesta está pensada para realizarse en varias sesiones. No se marcará el inicio y el final de cada sesión para permitir que las mismas se adapten al alumnado.

Constará principalmente de dos bloques. En el primero se introducirán conceptos básicos de geometría esférica que el alumnado asimilará por medio de la manipulación. En el segundo bloque se relacionará la geometría esférica con nuestro planeta Tierra.

Expondremos a continuación los principales puntos de la presentación.

Geometría esférica

Inmersión esférica

En primer lugar, se abrirá un espacio de debate en el que los alumnos recordaran conceptos de geometría plana. Este recordatorio tiene como objetivo que el alumnado sea más consciente de la diferencia entre el plano y la esfera.

Posteriormente se definirán algunos conceptos claves que se utilizarán a lo largo de las sesiones, para así familiarizarse con el vocabulario y dar fluidez a las mismas. Se acompañarán las definiciones de la representación de los conceptos en nuestra esfera de Porex pan.

Seguidamente se debatirá sobre el cálculo de los lados (arcos) y ángulos de un triángulo esférico. Para ambos casos se usarán métodos manuales y por consiguiente menos precisos, frente a métodos exactos.

Todo este bloque irá acompañado de la creación de triángulos por parte del alumnado.

Propiedades y clasificación

Se presentarán algunas propiedades de los triángulos esféricos, las cuales serán debatidas con el alumnado y comprobadas en los triángulos creados.

Cualquier lado de un triángulo esférico es menor que una semicircunferencia <180º.

Cada lado del triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos y mayor que el módulo de su diferencia.

$|a - c| < c < a + b$.

La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que cuatro rectos.

$a + b + c < 360º$.

En un triángulo esférico, a mayor lado se opone mayor ángulo. Y recíprocamente.

$a > b \Longleftrightarrow A > B$.

En un triángulo esférico, a lados iguales se oponen ángulos iguales. Y recíprocamente.

$a = b \Longleftrightarrow A = B$.

La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos y menor que seis rectos.

$180º < A+B+C < 540º$.

Del mismo modo será presentada la clasificación de los triángulos esféricos, invitando al alumnado a crear algunos de ellos.

Un triángulo esférico se llama **isósceles** si tiene dos lados iguales.

Un triángulo esférico se llama **equilátero** si tiene los tres lados iguales.

Un triángulo esférico se llama **rectángulo** si tiene un ángulo recto.

Un triángulo esférico se llama **rectilátero** si tiene un lado recto.

Un triángulo esférico se llama **birrectángulo** si tiene dos ángulos rectos.

Un triángulo esférico se llama **birrectilátero** si tiene dos lados rectos.

Cálculo de áreas

En esta parte se busca demostrar que ciertas propiedades conocidas en la geometría plana no son ciertas en la geometría esférica. Concretamente se verá que dados dos triángulos con base común y misma altura no mantienen la misma área.

De la teoría al mundo real

Como todo buen proyecto debemos mostrar al alumnado que todo lo visto hasta el momento tiene una utilidad en el mundo real. Puestos a trabajar con esferas, qué mejor esfera que nuestro planeta, la Tierra.

Cierto es, que nuestro planeta no es una esfera perfecta, pese a ello podemos trabajar como si así lo fuese sin que suponga inconveniente alguno para las tareas propuestas.

Se empezará este bloque con una puesta en común de los conceptos que van a necesitar. Con la ayuda de un globo terráqueo (imágenes o un globo terráqueo) y una serie de preguntas simples se irán descubriendo los conocimientos previos que tienen y reforzar o introducir los que falten.

Meridianos,

Meridiano de Greenwich

Polo norte, polo sur

Paralelo

Ecuador, trópico de capricornio, trópico de cáncer

Este, oeste (que países están al este y cuales en el oeste).

Latitud, longitud.

Se dividirá esta parte de la sesión en dos subpartes. La primera trata de calcular la distancia entre dos ciudades que estén en el mismo meridiano y la segunda de calcular la distancia entre dos ciudades cualesquiera.

En el primer caso, se pondrán ejemplos reales de ciudades que se encuentran en el mismo meridiano, por ejemplo, París - Burges.

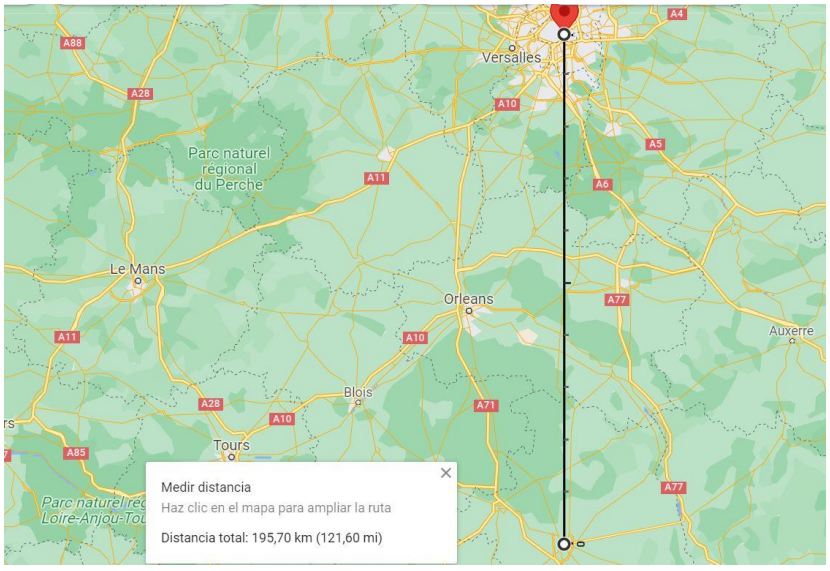


Imagen 1. Ejemplificación recorrido París-Burges

En el segundo caso presentamos el caso de dos ciudades que se encuentran en la misma latitud, por ejemplo, Manresa-Roma.

Imagen 2. Ejemplificación recorrido Manresa-Roma

Con estos dos ejemplos se presentará el método para calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera del planeta.

Referencias

Barrero, M. Casado, M.L, Castejón, M.A. y Sebastián, L. (2008). *Trigonometría esférica. Fundamentos*. Universidad Politécnica de Madrid.

CoR036 “Lo que el viento nos dejó”. Experiencia de clases no presenciales en la etapa de secundaria. Recursos digitales utilizados y su continuidad hoy

Juan Francisco González Carreras
juarge17@gmail.com
Colegio Concertado Cristo Crucificado (Mula – Murcia)

Antonio Sánchez Carmona
ascarmona@colegioeltaller.com
Colegio Concertado El Taller (Molina de Segura – Murcia)

Núcleo temático: recursos para el aula, procesos.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

“En los momentos de crisis, solo la imaginación es más importante que el conocimiento” (Albert Einstein). COVID19 nos ofreció un nuevo reto a todos los docentes. Sin aviso, nos tocó ingeniárnosla para atender la formación a nuestro alumnado. Más que recursos conocidos, tuvimos que imaginar qué usos darle a los ya conocidos.

En el siguiente documento describimos qué herramientas hemos implementado, tanto en el confinamiento como en la semipresencialidad que nos ha tocado vivir. Algunas de ellas ya las utilizábamos y otras las hemos tenido que buscar o reinventar.

El resultado de esta experiencia es que, si bien ha sido complicada y dura, obligándonos a vivir un nivel de estrés alto, al mismo tiempo, se han incrementado nuestros conocimientos sobre las herramientas digitales y ha desarrollado nuestra imaginación en su uso.

Palabras clave: Experiencia, Digital, Confinamiento, Normalidad, Ejemplos

1. Introducción

El 15 de marzo de 2020 marcó un antes y un después en la forma de impartir las clases, los profesores tuvimos que adaptarnos y buscar nuevas formas de transmitir nuestros conocimientos desde casa y sin previo aviso.

Fruto de ese esfuerzo se consiguió mejorar nuestra idea de cómo utilizar las nuevas tecnologías, las cuales seguimos usándolas hoy en día (en mayor o menor medida).

Desde compartir pantalla en un simple Meet, a emitir en directo por Youtube, pasando de cómo controlar y evaluar a los alumnos que tenemos en casa. Cada uno de nosotros hemos ido explorando la red buscando aplicaciones que nos sirvieran para tal efecto.

Esta comunicación trata de exponer los distintos métodos de trabajo que hemos utilizado en dos centros docentes de la Región de Murcia y con cuáles nos hemos quedado después de que haya pasado el confinamiento y la semipresencialidad en nuestra etapa educativa.

Lo peor ya ha pasado, pero hemos tenido la suerte de encontrar herramientas digitales que nos seguirán acompañando en nuestro futuro como docentes.

2. Tablet PC. La mejor arma para las clases diarias de matemáticas.

Antes de empezar, hay que tener en cuenta lo difícil que resulta exponer en nuestra materia sin tener la pizarra de clase (de tiza, blanca o digital), y solo con presentaciones vía online delante de los alumnos. Solo pensar en corregir, por ejemplo, ejercicios de ecuaciones, nos podemos volver locos intentando escribir de forma rápida un lenguaje algebraico.

A la guerra hay que ir con las mejores armas disponibles, y para nosotros, todo pasa por utilizar un Tablet PC para el desempeño de nuestras clases diarias. Sin este tipo de ordenador, es bastante más complicado dar una clase a los alumnos desde el salón de nuestra casa (cosa que tuvimos que hacer durante un trimestre entero).

Un Tablet PC es un ordenador portátil con la posibilidad de insertar letra manuscrita. Este dispositivo ya lo conocíamos y utilizábamos antes del confinamiento, pero tuvimos que invertir en un dispositivo con mayor velocidad de procesamiento para que rindiera en el campo que se le iba a pedir.

El salto fue pasar de un Tablet Convertible HP EliteBook 2760P a un Microsoft Surface Pro, empezando con una versión Pro 3 con un procesador i7 de 4º generación a una versión más actual (Surface Pro 7). La diferencia la marca la estabilidad de la tarjeta gráfica a la hora de emitir en directo por Youtube, actividad que realizamos diariamente durante el confinamiento.

El tener antes del confinamiento este tipo de ordenadores nos quitó la idea de presentarnos delante de los alumnos simplemente con una videollamada por Meet o Zoom, enfocando la cámara del móvil o del portátil a una pizarra colocada en la casa.

Está claro que este tipo de ordenadores realiza una función similar a la de a una pizarra digital, pero, estando en casa confinados y sin la posibilidad de ir al centro escolar, era imposible pensar en esta solución.

La posibilidad de insertar letra manuscrita directamente en la pantalla de un ordenador facilita el trabajo a la hora de impartir clase, ya que:

- **Comparado con una pizarra tradicional de tiza o pizarra blanca**
    - La exposición queda mejor ordenada y clara.
    - Además de utilizar colores y subrayadores, podemos añadir indicaciones y flechas para ayudar a la explicación de un concepto y posteriormente borrarlas para que los alumnos copien el ejemplo.
    - Podemos volver a un concepto escrito con anterioridad para recordarlo o copiarlo y pegarlo en la pantalla actual.
    - Podemos enviar a los alumnos los contenidos expuestos en formato PDF (como por ejemplo teoría o exámenes corregidos).

- **Comparado con una pizarra digital interactiva (PDI):**
    - Tiene una menor infraestructura, ya que podemos utilizar la inserción de letra sin necesidad de conectar la PDI al ordenador y este a un proyector. Con un tablet Pc escribimos directamente en la pantalla del portátil, pudiendo preparar los contenidos sin necesidad de conectar el ordenador a nada.
    - Mejor reconocimiento de la letra manuscrita con un trazo más definido y aprovechando mejor la pantalla, ya que escribimos como si fuera una hoja o libreta apoyada sobre la mesa y no de pie delante de la pizarra.
    - Coste elevado, pero menor que una PDI.
- **A la hora de preparar las clases online y aplicable a las clases presenciales.**
    - Reduce el tiempo de preparación, ya que no es necesario el uso de editores de ecuaciones o de texto científico (como latex). Directamente vamos desarrollando el contenido que queramos (teoría o ejercicios), en una aplicación que soporte la entrada de letra manuscrita, como Microsoft OneNote, Google Jumpboard o aplicaciones gratuitas que tiene una soltura a la hora de insertar letra como es PDF Reader by Xodo o Drawboard PDF (que tiene algunas funciones gratuitas).
    - Permite escribir con letra manuscrita sobre textos en WORD para convertirlos en PDF, presentaciones en Powerpoint, o documentos en PDF (con XODO o Drawboard PDF) y posteriormente enviarlo a los alumnos.
    - Mayor control del aula presencial al impartir la clase sentado y no tener que girarse para escribir en la pizarra.

3. Aplicaciones apropiadas para impartir clase con un Tablet Pc

A continuación detallaremos un grupo de aplicaciones apropiadas para impartir clase con un tablet pc.

3.1 Microsoft OneNote + Herramienta de Corte de Pantalla

Microsoft OneNote es una aplicación que viene instalada en el S.O. Windows 10 y es gratuita. Además, se puede instalar una versión para teléfonos o tablet en Android o IOS, teniendo los documentos en la nube y pudiendo utilizarlos en los distintos dispositivos. Incluso se puede compartir un documento en particular para que los alumnos, desde sus dispositivos puedan interactuar en dicho documento a tiempo real.

Esta aplicación es ideal para compartir pantalla y utilizarla de pizarra para realizar ejercicios o escribir la teoría que queremos que los alumnos tengan. La versión que hemos utilizado es la de Microsoft OneNote 2007, que está integrada en el paquete de Microsoft Office 2007. Aunque es una versión antigua y no gratuita de este programa, es más intuitiva para organizar los documentos, ya que permite organizar por cursos, temas y páginas dentro de un tema (incluso subpáginas). Además, los archivos ocupan muy poco espacio por lo que se pueden compartir en la nube para ser modificados por varios usuarios a la vez.

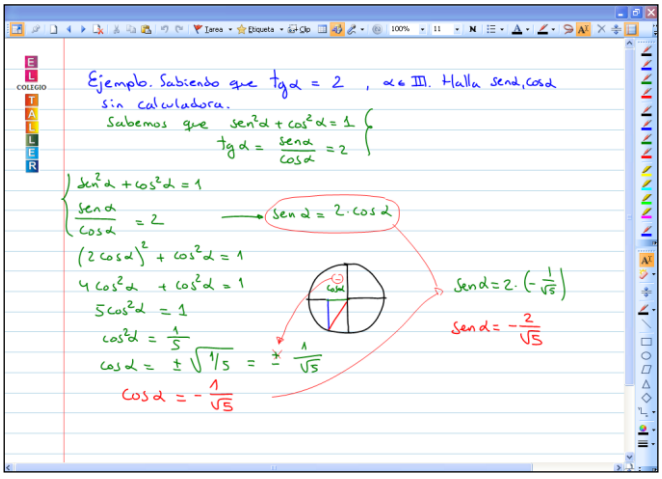


Imagen 1. Recorte de pantalla de Microsoft OneNote

También es muy interesante utilizar la herramienta de corte de pantalla (integrada en OneNote), que sirve para recortar y pegar cualquier recorte de pantalla del resto

de ventanas abiertas. De esta forma podemos recortar del libro digital los ejercicios planteados y resolverlos desde el ordenador de una forma sencilla.

3.2 PDF Reader by Xodo

Lector y editor de PDF totalmente gratuito que se instala en Windows 10 e incluso se puede utilizar vía Web. Dentro de sus herramientas, aparece una inserción de letra manuscrita de gran definición del trazo.

Como inconvenientes, hay que tener en cuenta que la herramienta de borrado no permite borrar por trazos, por lo que es más complicado eliminar ciertas partes de un ejercicio ya escrito (como flechas e indicaciones que ayuden a los alumnos a entender el ejercicio)

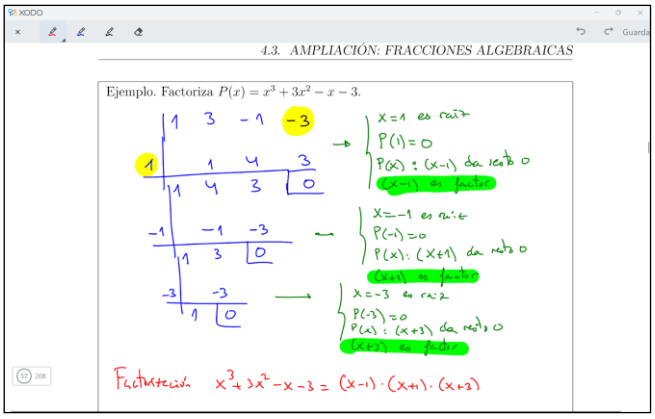


Imagen 2. Captura de pantalla de PDF Reader by Xodo

3.3 Drawboard PDF

Se puede considerar como el mejor editor de PDF para insertar letra manuscrita por su definición del trazo y velocidad de inserción, la cual es comparable a la escritura natural, además permite un abanico muy amplio de colores y grosores de lápices y subrayadores, que se pueden configurar para ajustarse a las necesidades del usuario.

Otra función a destacar es que permite ampliar o reducir la pantalla con los dedos, mientras que con el Pen insertamos la letra manuscrita.

También podemos insertar hojas en blanco a documentos PDF ya creados. Incluso podemos trabajar con documentos online en la propia nube del programa y compartirlos con los alumnos.

En definitiva una aplicación excelente para trabajar con documentos en PDF.

El único inconveniente es que la versión gratuita está algo limitada, pero suficientemente funcional para el desempeño de dar clase con los alumnos.

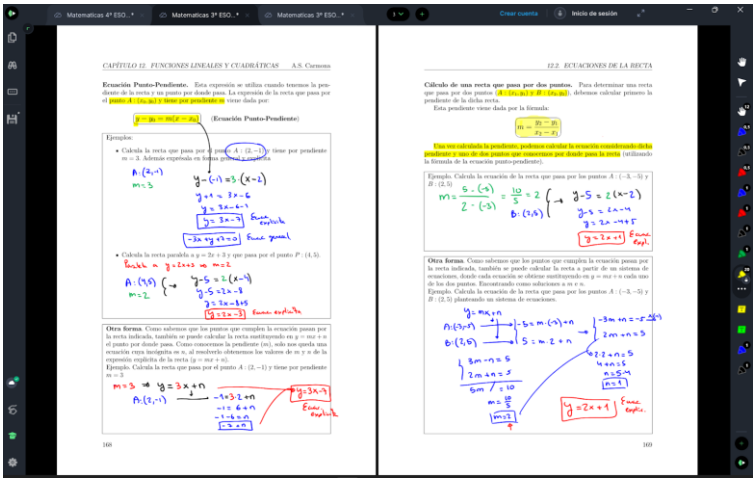


Imagen 3. Captura de pantalla de Drawboard PDF

4. Aplicaciones para impartir Clases Online o semipresenciales.

4.1 Emisión en directo - OBS Studio + Youtube Studio

Solución para unificar clases en una sola sesión, ya que soporta un mayor número de alumnos, pudiendo unir varios grupos para dar clase a la vez.

- Pros:
    - Flexibilidad por parte del alumnado a volver atrás en la explicación.
    - Mejor calidad y apariencia de la pantalla.
    - Compartir varias ventanas a la vez.
    - Evita interrupciones por parte del alumnado.

- Fácil acceso para los estudiantes, ya que todos tienen y conocen Youtube.

- Contras:

  - Latencia de unos pocos segundos.

  - Menor capacidad de interacción con los alumnos. Por lo que es necesario un paquete de aplicaciones que ayude a mantener esa comunicación bilateral

  - Necesidad de un ordenador con recursos suficientes

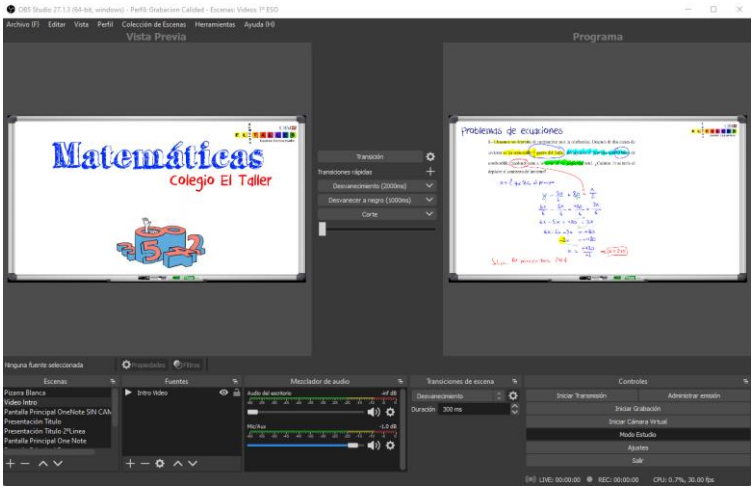


Imagen 4. Captura de pantalla de OBS Studio

4.2 Discord - Videollamada con pantalla compartida

- Ventajas:

  - La plataforma Discord es altamente configurable.

  - Se organiza en servidores, y cada servidor en canales, existiendo varios tipos de canales (canales texto, salas de estudio). Se pueden dotar de distintas propiedades tanto a los servidores como a los canales. Entre algunas propiedades interesantes, salas de sólo audio, salas en el que se permiten video, etc…, esto permite el trato individualizado del alumnado, respetando la privacidad.

- Permite el trabajo en grupos y cooperativo, asignando distintas clases a cada grupo. En dicha realización, con un simple clic pasaba de clase a clase para poder ayudar a los alumnos en la realización de distintas tareas.

- Así mismo permite el poder apartar a un alumno para explicarle individualmente mientras que los demás realizan su tarea.

- Permite también la emisión utilizando el programa OBS.

- Utilizado antes de la pandemia por gamers, muy popular entre los alumnos.

- DESVENTAJAS

  - Su alta configurabilidad la plantea como herramienta de cierta dificultad.

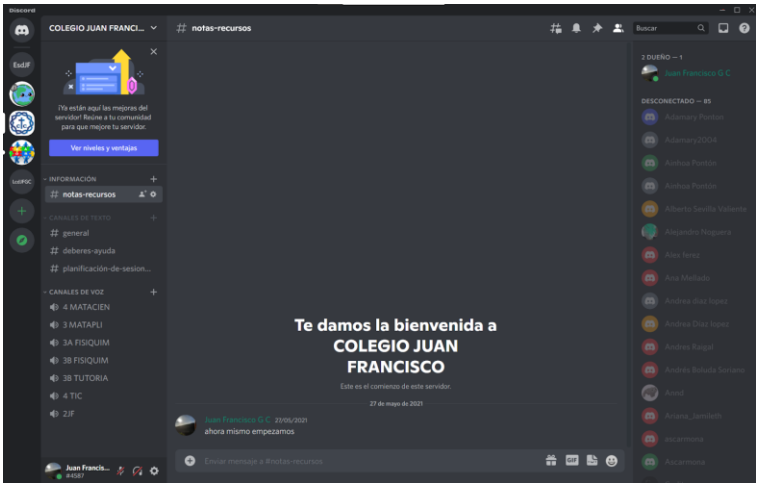


Imagen 5. Captura de pantalla de Discord

4.3 Meet - Videollamada con pantalla compartida

Posiblemente el más utilizado por ser una aplicación de Google

- Ventajas: Su integración dentro de las distintas herramientas de Google y la posibilidad de programar citas a través del calendario. Lo usamos normalmente para reuniones de padres.

4.4 Nearpod- presentación compartida

Esta aplicación permite compartir una presentación con varios dispositivos, se puede hacer con la herramienta presentación de Google y utilizar Nearpod como complemento. Algunas características a destacar de esta aplicación son:

- Permite integrar cuestionarios de varios tipos en tiempo real.
- Controlar la conexión del alumnado a dicha presentación.
- Permite también introducir ciertas diapositivas para trabajo colaborativo, donde se pueden realizar distintas actividades, lluvias de ideas, folio giratorio, etc.
- Tras la sesión se puede recibir los resultados de los alumnos en sus actividades.

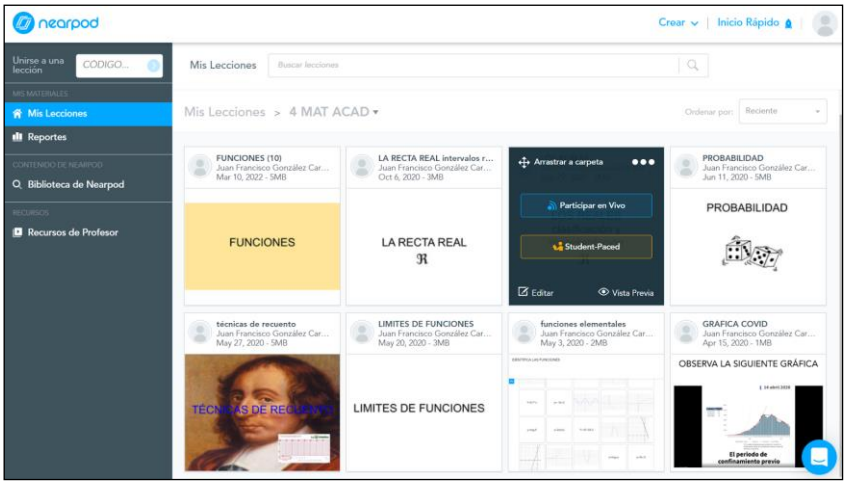


Imagen 6. Captura de pantalla de Nearpod

5. Control del aula en clases semipresenciales u online

A continuación detallaremos un grupo de aplicaciones apropiadas para comprobar el seguimiento del alumno durante una clase online.

5.1 Padlet

Para controlar que los alumnos realizan las tareas que se les pide durante la clase, se puede utilizar la aplicación Padlet.

Por ejemplo, creamos un muro de publicaciones con formato “columna” en Padlet, que compartimos mediante un enlace con los alumnos permitiendo que estos puedan publicar. Añadimos una columna por cada alumno que tengamos, ordenado por apellidos y nombre.

Los alumnos instalan en su teléfono móvil la aplicación, para que, en un momento dado de la clase online, el profesor pueda pedirles que suban una foto de su libreta con la teoría copiada o el ejercicio solicitado.

Comprobar las fotos de los alumnos es muy rápido y se pueden borrar todas las publicaciones de los alumnos de golpe, quedando solamente la cabecera de cada columna con el nombre ordenado de los alumnos.

Se puede configurar que las fotos que suban los alumnos al muro no sean visibles al resto de compañeros, evitando que se copien los ejercicios. O permitir que estos documentos sean públicos para establecer un dialogo en el grupo y que permita la corrección de los ejercicios de manera colaborativa dentro del grupo.

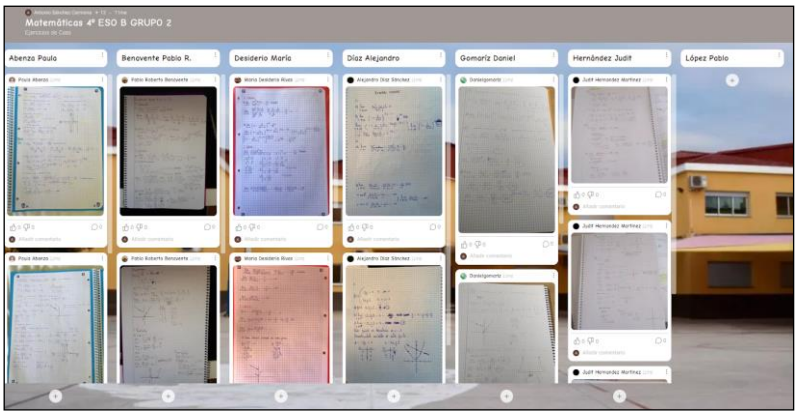


Imagen 7. Captura de pantalla de Padlet – control de ejercicios diarios

5.2 Documentos de Google

Una de las preocupaciones en los primeros cursos de secundaria a la hora de dar clases online o semipresenciales es conocer si los alumnos mantienen un orden a la hora de realizar los ejercicios en casa. Para ello, compartimos en Drive una carpeta individual con cada alumno y añadimos un documento de texto para inserten fotos de cada una de las hojas de sus libretas, comprobando el orden y la limpieza a la hora de trabajar por parte del alumnado.

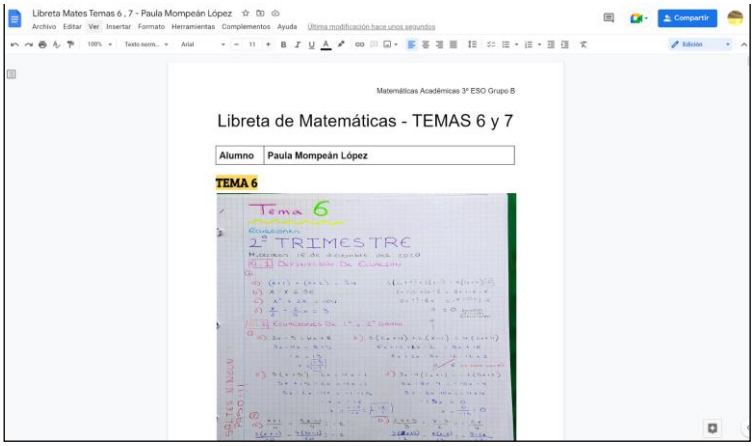


Imagen 8. Captura de pantalla de Documentos de Google

6. Evaluación de contenidos

6.1 Nearpod

La posibilidad de introducir cuestionarios en la presentación hace que podamos tener una evaluación continua del alumno, así como obligarlo a mantener la atención en todo momento.

La recepción de los informes sobre las actividades nos permite una evaluación continua.

Estas actividades intercaladas en la presentación pueden ser de varios tipos:

- El ya citado cuestionario.
- Preguntas de respuesta abierta, donde el alumno puede escribir a mano alzada y realizar explicaciones mediante audio.

A continuación detallamos algunos ejemplos:

- Actividad donde los alumnos seleccionan la respuesta correcta y se autocorrige (imagen 9)

Imagen 9. Actividad autoevaluable de seleccionar la respuesta correcta

- Actividad donde los alumnos deben indicar el recorrido de la función y verbalizar la explicación de por qué. Esto permite al alumnado asimilar mejor los conceptos al convertirlo en palabras (imagen 10)

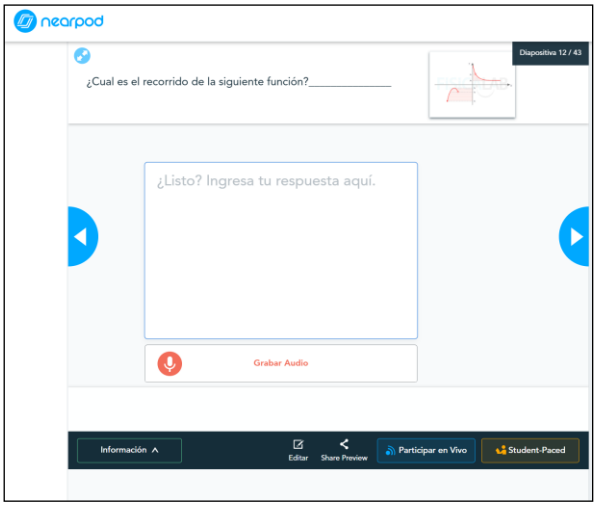


Imagen 10. Actividad grabando un audio

- Preguntas realizadas para dibujar a mano alzada, como por ejemplo una actividad donde el alumno debe colorear sobre los ejes los intervalos de Dominio y recorrido.

Imagen 11. Actividad cuya solución es la escritura a mano alzada del alumno

6.2 Edpuzzle

Edpuzzle es una herramienta que permite compartir videos, e introducir en él cuestionarios, observaciones mediante notas escritas o audios. Nos permite controlar el tiempo que le ha dedicado el alumnado a realizar los cuestionarios, así como las veces que dedica a los distintos tramos. Estos cuestionarios nos permiten saber si el alumno ha comprendido lo explicado a lo largo del video, o si es capaz de repetir las rutinas explicadas por el ejemplo.

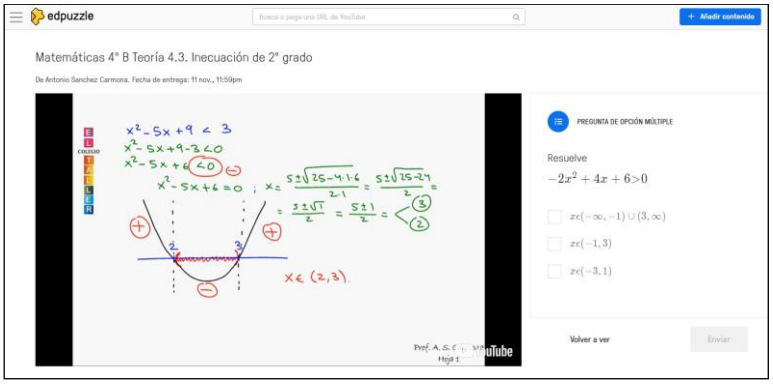


Imagen 12. Captura de pantalla de un video con cuestionario de Edpuzzle

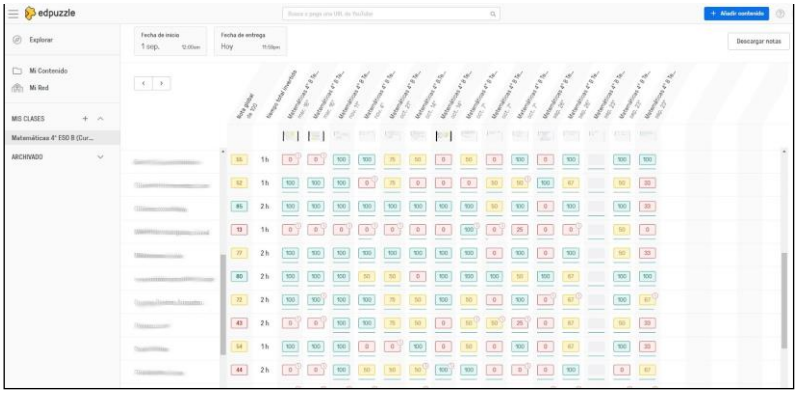


Imagen 13. Libro de calificaciones de Edpuzzle

6.3 Edmodo

Edmodo es una plataforma educativa cuya misión es, en algunos aspectos, parecida a la de Google, sin embargo es mucho más. Puede formar subgrupos dentro de la clase, asociación de materiales particulares, y otros, además permite realizar pruebas, pasar encuestas de estado a los alumnos.

Estas tres propiedades nos fueron particularmente útiles durante este periodo pandémico.

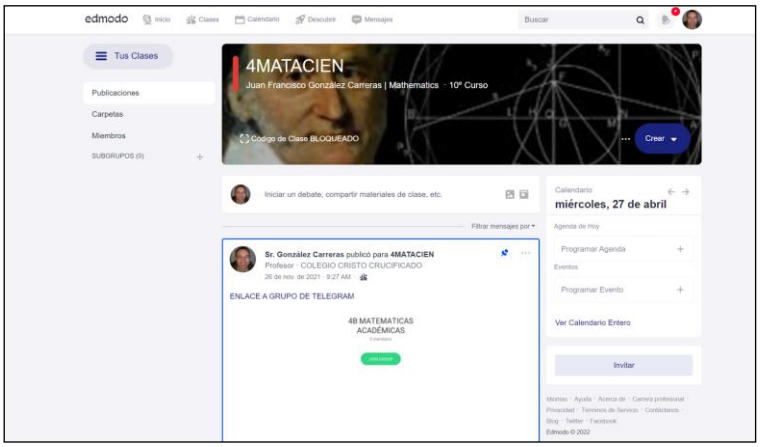


Imagen 14. Captura de pantalla de Edmodo

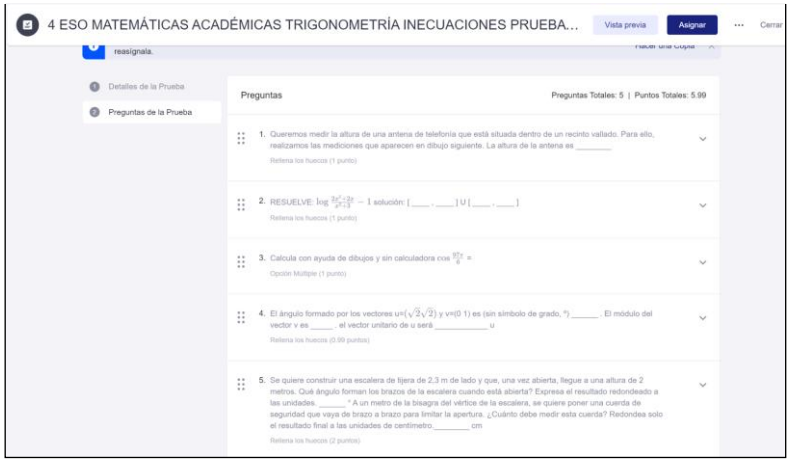


Imagen 15. Cuestionario para alumnos en Edmodo

Además permite comunicación entre diversos profesores de todo el mundo para compartir experiencias o preguntar sobre ellas.

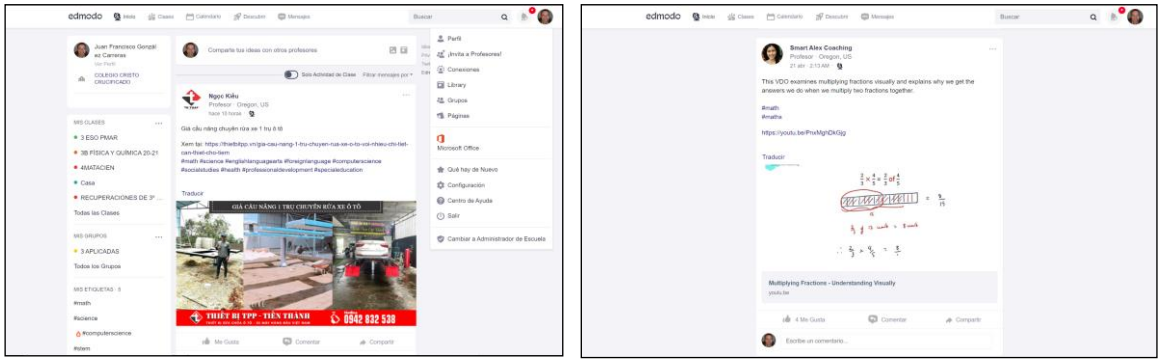


Imagen 16. Publicaciones con profesores del extranjero

7. Recursos que seguimos utilizando actualmente en clases presenciales

Poco a poco las restricciones van desapareciendo, volviendo a una normalidad en lo referente a las clases. Se eliminaron las clases semipresenciales, pero hemos seguido aprovechando los recursos que utilizamos durante este periodo.

Por supuesto, el uso del Tablet Pc conectado al proyector del aula a la hora de impartir las clases se ha hecho imprescindible por todas las ventajas que hemos enumerado al comienzo de la comunicación.

A continuación citamos el resto de recursos que seguimos utilizando y la finalidad que tienen actualmente.

7.1 Edmodo

Aunque es una plataforma similar a Classroom nos hemos decantado por ella por obtener ciertas ventajas sobre Classroom, como por ejemplo:

- Posibilidad de Subgrupos
- Mejores cuestionarios que la opción de formularios de Google.
- Control sobre los tiempos, tanto sobre las cuestiones como sobre el cuestionario.
- Inserción de Latex [math], [\math]

7.2 Grabación de vídeos y publicación en Youtube

El manejo de OBS Studio nos ha servido para seguir capturando la pantalla del Tablet Pc, pero, en vez de realizar emisiones en directo, lo hemos utilizado para mejorar la grabación de vídeos explicativos.

La creación de listas con Youtube Studio y posterior publicación para que los alumnos puedan acceder a estos contenidos.

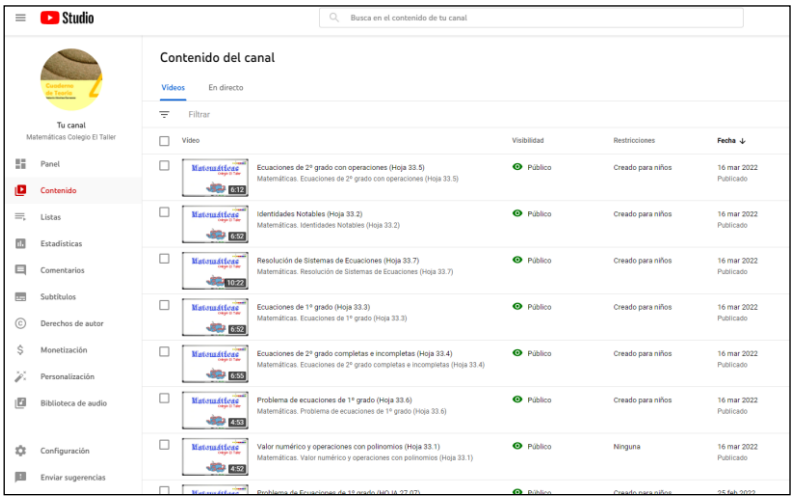


Imagen 17. Colección de vídeos explicativos grabados y subidos a Youtube

7.3 Padlet

Padlet lo seguimos utilizando para publicar de forma ordenada fichas de ejercicios (con sus respectivos PDF con los ejercicios resueltos) y vídeos explicativos de cada una de las fichas.

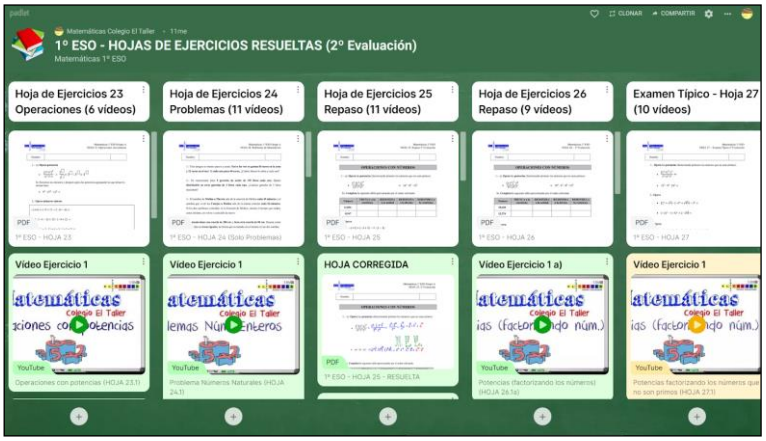


Imagen 18. Fichas de ejercicios y vídeos explicativos en Padlet

7.4 Nearpod

La actividad con Nearpod actualmente sigue siendo de la misma índole, La clase dispone actualmente de Chromebook, aunque también lo hemos utilizado en grupos a través de tablet y smartphones.

Impartimos la unidad garantizando la atención del alumnado por la respuesta a las cuestiones. También tiene una señal para comprobar si los alumnos se mantienen conectados o no, a través de un botón rojo o verde.

7.5 Edpuzzle

Esta aplicación es ideal para realizar clase invertida. La seguimos utilizando para ello, sobre todo en contenidos que se han trabajado en cursos anteriores con el grupo y que son más de recordatorio para seguir avanzando.

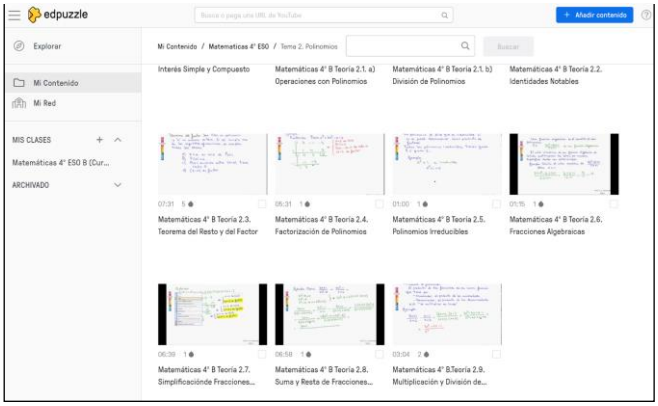


Imagen 19. Colección de vídeos con cuestionario en Edpuzzle

Edpuzzle también lo utilizamos para el aprendizaje de procesos repetitivos, el alumno lo visiona en casa, anotando en la libreta el ejemplo explicado en el video, a continuación realiza los ejercicios propuestos revisionando el video y siguiendo los pasos indicados. En clase nos dedicamos a realizar problemas donde sean utilizados estos procesos. Se trata de dedicarle más tiempo en clase al razonamiento.

Otro uso de esta aplicación es para la atención a la diversidad. Existen alumnos que no poseen la suficiente autonomía (alumnos del Programa de Mejora del Aprendizaje y el Rendimiento). Estos alumnos no suelen trabajar demasiado en casa y su desfase de aprendizaje y motivación es muy variado, de hecho es muy difícil impartir una clase de forma genérica. Edpuzzle nos permite que cada alumno vaya siguiendo una serie de vídeos con cuestionarios recomendados de forma ordenada en clase, se permite distintas velocidades dentro de clase, reforzando o ampliando de forma individual a cada alumno. Por último se complementa esto con fichas de ejercicios o proyectos.

CoR037 Fotografía geométrica en la vida cotidiana. Tarea con GeoGebra en 3º de ESO

Antonio Sánchez Carmona
ascarmona@colegioeltaller.com
Colegio Concertado El Taller (Molina de Segura – Murcia)

Núcleo temático: Recursos para el aula (actividad con Geogebra) - Procesos

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

La mejor forma de descubrir los conceptos matemáticos es a través de la vida cotidiana. Esta comunicación muestra cómo llevar a cabo diferentes tareas en Geogebra, con el alumnado de 3º de ESO, dentro del Bloque de Geometría.

Los alumnos buscan y fotografían semejanzas, triángulos, movimientos y simetrías en la vida cotidiana y, con ayuda de Geogebra, demuestran dicha semejanza, calculan los puntos notables de un triángulo, encuentran el centro y ángulo de un giro, el centro o eje de simetría (dependiendo si la simetría es central o axial), además de buscar un problema real donde aplicar el Teorema de Pitágoras o Teorema de Tales.

Palabras clave: Geogebra, Tarea, Secundaria, Fotografía, Geometría

1. Introducción

Dentro del contenido de matemáticas de 3º de ESO encontramos el concepto de semejanza, Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales, puntos notables de un triángulo, traslaciones, giros y simetrías.

La siguiente comunicación expone cómo se puede trabajar dichos conceptos con los alumnos por medio de Geogebra y la tarea final que les propongo para poder evaluarlos.

Dicha tarea consta de 10 ejercicios que los alumnos realizan en casa durante dos semanas, cada ejercicio hace referencia a un concepto geométrico explicado en clase y que deben buscar en la vida cotidiana, fotografiarlo y modificarlo con Geogebra para calcular puntos notables de un triángulo (circuncentro, incentro, baricentro o ortocentro), o resaltar la semejanza, traslación, giro o simetría central y axial de dos objetos.

Con la tarea conseguimos afianzar estos conceptos, además de iniciar al alumno en Geogebra.

Dada la facilidad de los ejercicios y el manejo intuitivo de Geogebra, esta tarea también se podía haber planteado para alumnos de 1º y 2º de secundaria.

2. Conceptos trabajados en la Tarea

Los conceptos a evaluar se explican en clase, si es posible, en el aula de Informática para que los alumnos practiquen con Geogebra durante la explicación de cada uno de ellos.

A continuación enumeramos los conceptos a trabajar en clase para preparar la tarea que se les pedirá a los alumnos al final del tema.

2.1 Semejanza de figuras

Para que el alumno entienda la relación de semejanza entre dos figuras, se aprovecha el sentido de reducción y ampliación que tienen los alumnos. Para demostrar que las figuras son semejantes, los alumnos insertan una imagen en Geogebra, añaden puntos en vértices que consideren importantes y realizan las mediciones pertinentes para comprobar la relación de proporcionalidad que tienen los lados correspondientes de ambas figuras.

Para practicar en el aula de informática o en casa sobre este concepto, les envió una imagen con una figura como ejemplo. Este concepto corresponde al primer ejercicio que posteriormente deben realizar en la tarea final, la cual consiste en buscar en su entorno habitual dos figuras reales semejantes y demostrar mediante Geogebra que lo son.

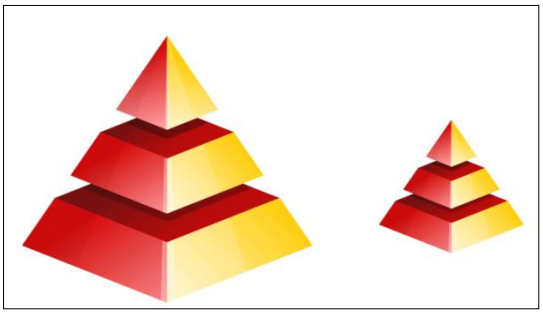


Imagen 1. Ejemplo enviado a los alumnos de figuras semejantes para practicar

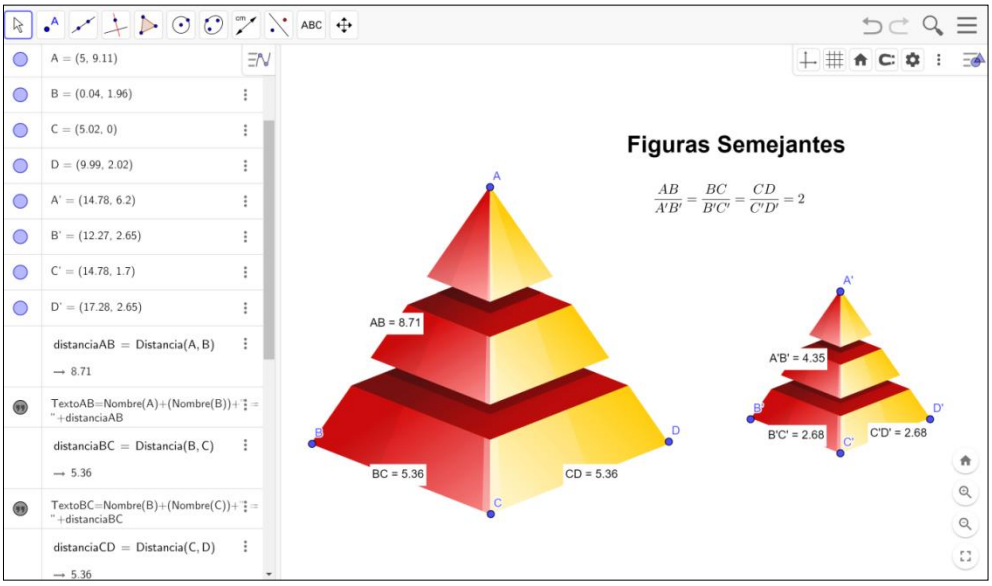


Imagen 2. Comprobación del ejemplo anterior para ver que son figuras semejantes mediante Geogebra

2.2 Puntos notables de un triángulo

El siguiente concepto a explicar a los alumnos es la mediatriz, bisectriz y la aplicación de ambos para calcular el circuncentro y el incentro de un triángulo. Además se explica la mediana y las alturas de un triángulo para calcular el baricentro y el ortocentro de un triángulo.

Para encontrar los puntos notables de un triángulo, los alumnos practican con un triángulo ABC creado en Geogebra.

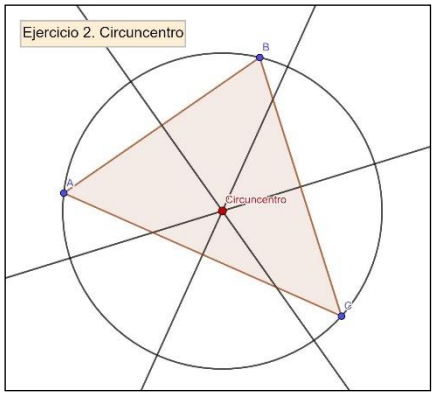


Imagen 3. Ejemplo de circuncentro para practicar

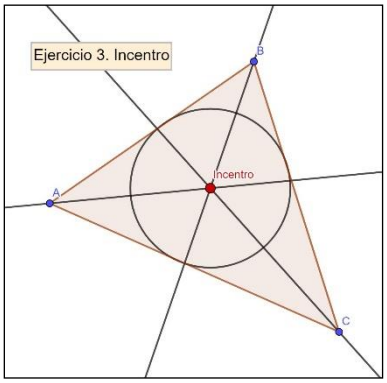


Imagen 4. Ejemplo de incentro para practicar

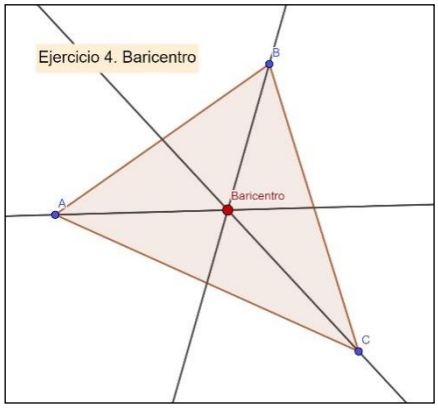


Imagen 5. Ejemplo de baricentro para practicar

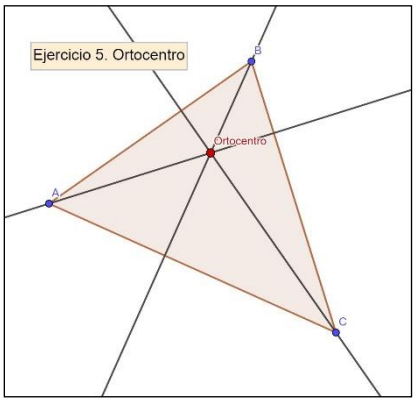


Imagen 6. Ejemplo de ortocentro para practicar

Como los vértices del triángulo creado se pueden mover y además, todas las rectas, intersecciones y circunferencias han sido creadas a partir de estos, se les propone a los alumnos que practiquen en casa con Geogebra y contesten a las siguientes preguntas:

1. Di si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

    a. El circuncentro de un triángulo siempre tiene que estar en el interior del triángulo.

    b. El incentro de un triángulo puede ser un vértice del mismo triángulo.

    c. El baricentro de un triángulo coincide con el circuncentro si el triángulo es isósceles.

2. Construye en Geogebra un triángulo rectángulo e indica qué punto notable coincide con uno de los vértices.

3. Construye en Geogebra un triángulo isósceles e indica qué puntos notables coinciden.

4. Construye en Geogebra un triángulo equilátero e indica qué puntos notables coinciden.

5. Construye en Geogebra un triángulo obtusángulo e indica si el ortocentro está dentro o fuera del triángulo.

6. Calcula mediante Geogebra el perímetro y el área de un triángulo cualquiera. Además, consigue que dichos valores cambien automáticamente cuando movemos los vértices del triángulo.

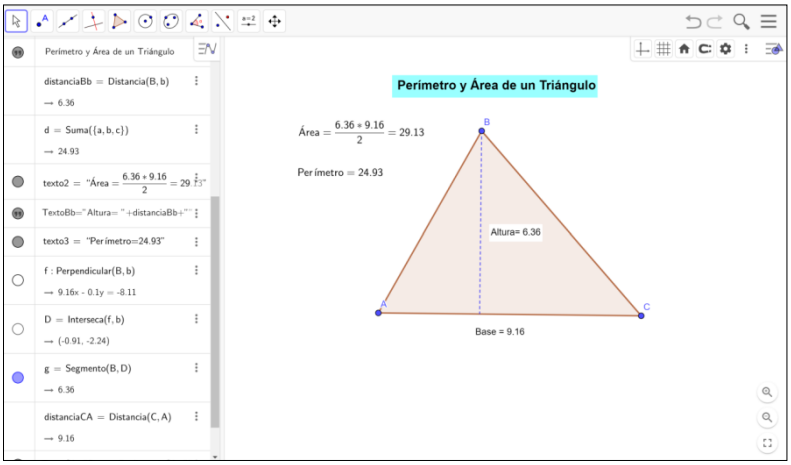


Imagen 7. Área y el perímetro de un triángulo, teniendo en cuenta que los vértices se pueden mover

La propuesta de ejercicios para la tarea final es que los alumnos fotografíen 4 triángulos distintos para calcular un punto notable distinto en cada uno de los triángulos (circuncentro con la circunferencia circunscrita, incentro con la circunferencia inscrita, baricentro y ortocentro).

2.3. Aplicación del Teorema de Pitágoras en un problema de la vida cotidiana

Para demostrar la relación que existe entre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo, se les propone a los alumnos que construyan un triángulo rectángulo con Geogebra y que demuestren que su hipotenusa al cuadrado es siempre igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Al mover los vértices del triángulo, necesitamos que siempre sea un triángulo rectángulo, para ello, se construye un segmento, cuyos extremos serán dos vértices del triángulo y una recta perpendicular al segmento que pasa por uno de sus extremos. El tercer vértice es un punto que pertenece siempre a esta recta perpendicular ("punto en objeto").

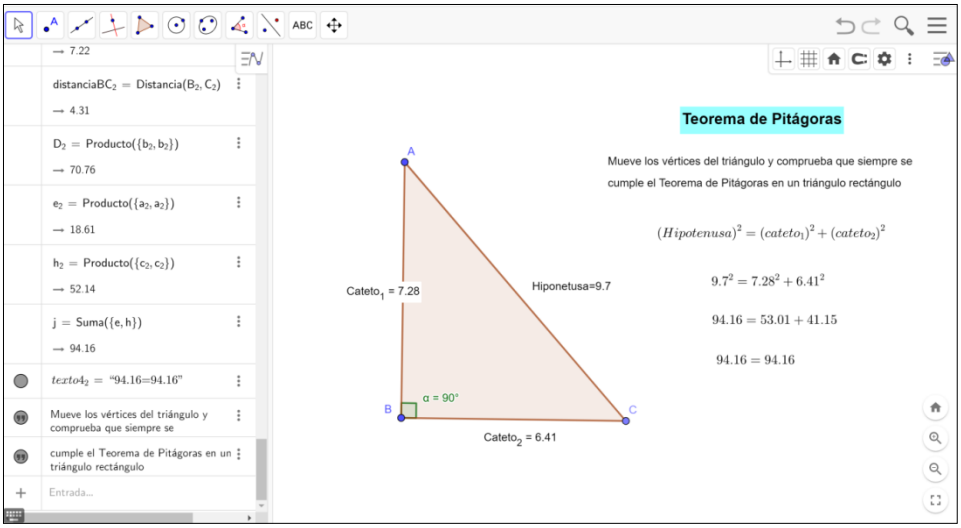


Imagen 8. Comprobación Teorema de Pitágoras moviendo los vértices del triángulo rectángulo

Como ejercicio de la práctica final los alumnos deben buscar en su entorno cotidiano un problema que se pueda resolver utilizando el Teorema de Pitágoras (o si lo prefieren, el Teorema de Tales). Para ello, deben fotografiar un elemento e inventarse un problema que deben escribir con texto y medidas en Geogebra.

Los alumnos tienen que intentar dar medidas reales del objeto fotografiado, a no ser que, por razones de accesibilidad, tengan que aproximar dichas medidas.

2.4. Traslación de un objeto

Para poder explicar este concepto, lo primero que hacemos es definir un vector libre en el plano (módulo, dirección y sentido), y la traslación de un punto con respecto a un vector libre con Geogebra.

Para explicar el concepto de traslación de un objeto, los alumnos practican con un ejemplo de una traslación (imagen 9). Los alumnos deben marcar un punto en cada objeto, calcular el vector de traslación entre dos puntos correspondientes y calcular puntos del objeto trasladado a partir del vector libre (con la función “equipolente”).

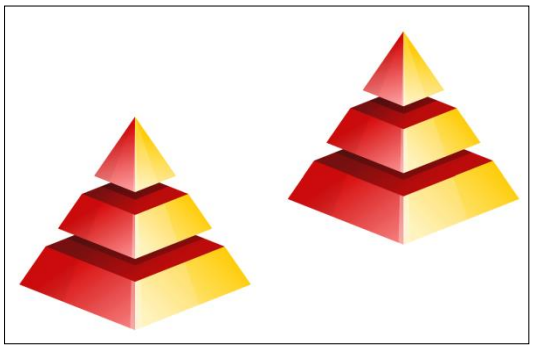


Imagen 9. Ejemplo de traslación para practicar

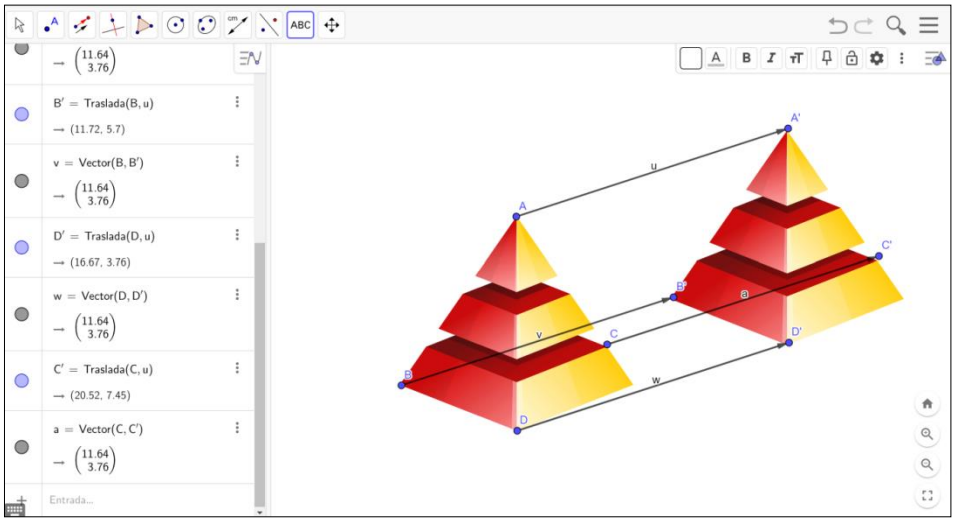


Imagen 10. Trabajo de los alumnos en Geogebra para observar la traslación

2.5. Giro de un objeto

Buscamos que los alumnos sean capaces de identificar los giros y calcular el centro y ángulo de giro. Para ello, se les explica que el centro de una circunferencia siempre pasa por la mediatriz del segmento formado por dos puntos que pertenezcan a la circunferencia.

Para practicar durante la explicación, se les envía a los alumnos una imagen con un giro (imagen 11).

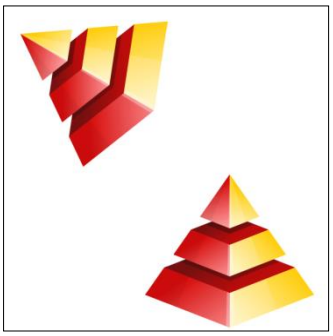


Imagen 11. Ejemplo de giro para practicar

Los alumnos insertan dos puntos del objeto (preferiblemente vértices), y sus dos puntos correspondientes en el objeto girado. Intersecando las mediatrices de los segmentos con extremos cada uno de los puntos del objeto y su punto correspondiente, calculamos el centro de giro.

El ángulo de giro es sencillo calcular a partir de los extremos del segmento anterior y el centro de giro.

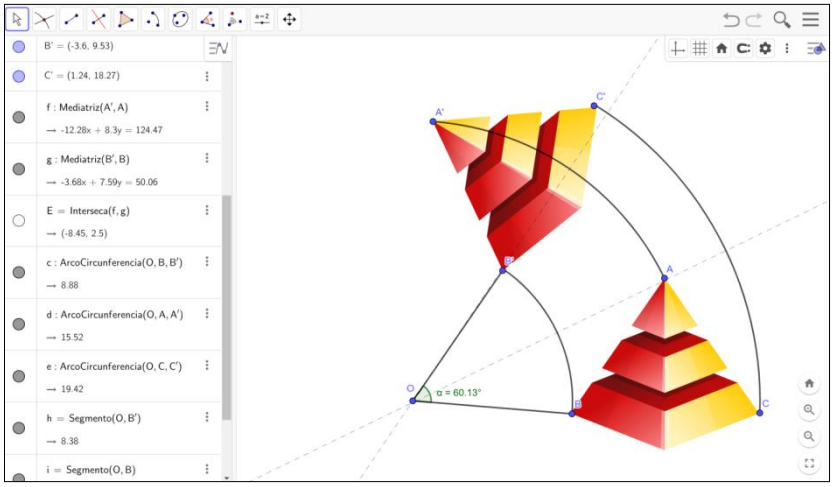


Imagen 12. Giro de un objeto, calculando el centro y ángulo de giro

2.6. Simetría Axial

Buscamos que los alumnos sean capaces de identificar una simetría axial (efecto espejo) y calcular el eje de simetría. Para ello, simplemente marcamos con Geogebra puntos del objeto y sus puntos correspondientes en el objeto simétrico, y

a continuación, calculamos las mediatrices que tienen como extremos cada punto del objeto y su punto correspondiente en el objeto simétrico.

Para que los alumnos practiquen durante la explicación (o en casa), se les adjunta un ejemplo de dos objetos simétricos en los que tienen que identificar los puntos correspondientes y hallar el eje de simetría.

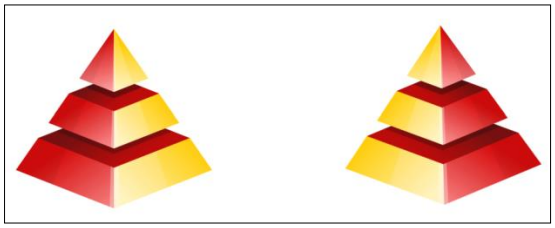


Imagen 13. Ejemplo simetría axial para practicar

Es importante que los alumnos identifiquen la diferencia entre simetría axial y una traslación con respecto a un vector horizontal, ya que a veces se confunden. La mejor forma de verlo es darse cuenta del efecto espejo que tenemos en una simetría axial.

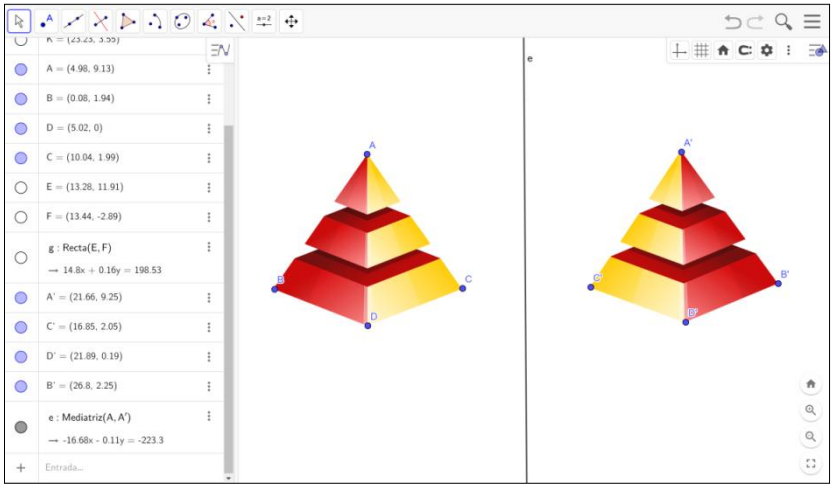


Imagen 14. Cálculo del eje en una simetría axial

Como ejercicio en la tarea final, los alumnos tienen que localizar y fotografiar un objeto y su simétrico. Los cuales deben encontrarse en su entorno cotidiano, no siendo válido que se haga una composición artificial buscando dos objetos iguales y creando la simetría axial.

2.7. Simetría Central

Buscamos que los alumnos sean capaces de identificar una simetría central (efecto de ungiro de 180º) y calcular el centro de simetría. Para ello, simplemente marcamos con Geogebra puntos del objeto y sus puntos correspondientes en el objeto simétrico, a continuación, calculamos las rectas que pasan por cada punto del objeto y su punto correspondiente en el objeto simétrico. El centro de simetría es la intersección de estas rectas.

Para que los alumnos practiquen durante la explicación (o en casa), se les adjunta un ejemplo de dos objetos simétricos respecto de un centro, con la finalidad de que identifiquen los puntos simétricos correspondientes y hallen el centro de simetría.

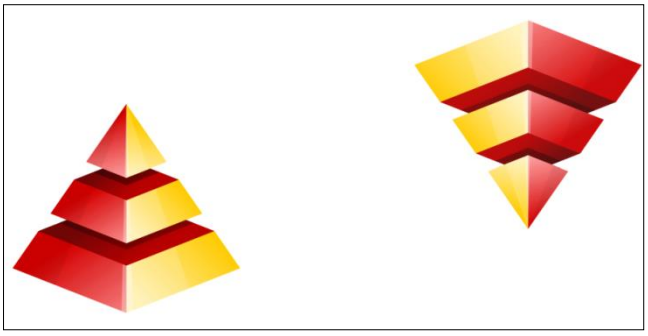


Imagen 15. Ejemplo de simetría central para practicar

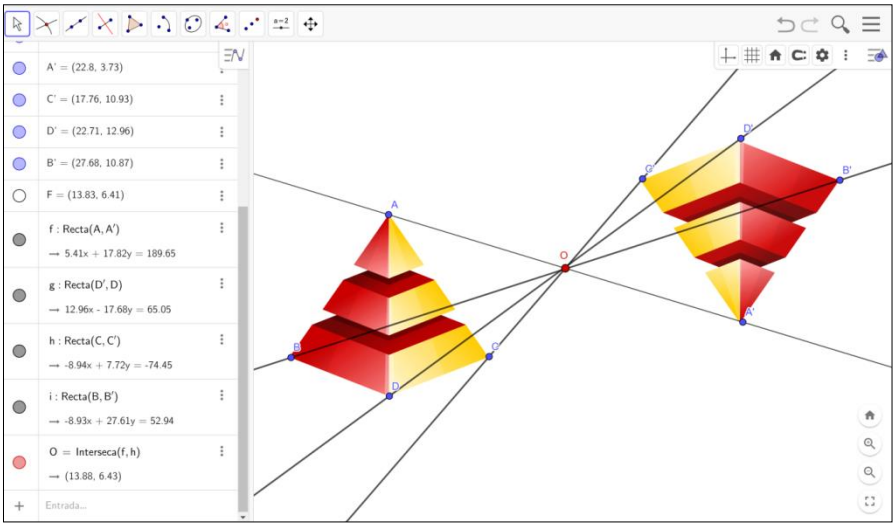


Imagen 16. Cálculo del centro de simetría axial

Como ejercicio en la tarea final, los alumnos tienen que localizar y fotografiar un objeto y su simétrico con respecto a un punto. Los cuales deben encontrarse en su

entorno cotidiano, no siendo válida una composición artificial a partir de dos objetos que se puedan mover.

3. Tarea Final propuesta: “Fotografía Geométrica”

Al final del tema, se les propone a los alumnos una tarea final llamada “Fotografía Geométrica” para evaluar los conceptos trabajados. Dicha tarea se publica en Edmodo y se les da un plazo de dos semanas para hacerla y subirla directamente a la plataforma para ser evaluada.

Posteriormente, los alumnos deben exponer sus fotografías al resto del grupo, explicando los elementos calculados y la forma de hacerlo con Geogegra.

A continuación, detallo las instrucciones que se le adjuntan a los alumnos para realizar la tarea “Fotografía Geométrica”

TAREA “FOTOGRAFÍA GEOMÉTRICA”

Fechas de realización de la tarea: (normalmente dos semanas después de haber explicado y trabajado el tema en clase)**.**

1. Descripción de la tarea propuesta. El alumno debe realizar una fotografía para cada uno de los 10 ejercicios propuestos, los cuales servirán como evaluación de los temas 8 y 9 de la asignatura de Matemáticas de 3º de ESO. Después de entregarla por Edmodo, el alumno deberá exponer en clase los ejercicios realizados.

2. Formas de entrega de los ejercicios. Se entregará adjuntando los 10 archivos en formato JPG o PNG a la asignación de EDMODO. Teniendo en cuenta:

    a. El nombre de cada archivo será: “ejercicio” seguido del número del ejercicio que corresponda.

    b. El tamaño de cada uno de los archivos debe ser menor de 500 KB.

3. Una vez entregada la tarea, el alumno debe exponer los ejercicios en clase, explicando cómo ha calculado cada uno de ellos mediante Geogebra.

4. Calificación de los ejercicios. Se utilizará la siguiente rúbrica en cada uno de los ejercicios:

RÚBRICA DE EVALUACIÓN				
	1 pto.	**2 ptos.**	**3 ptos.**	**4 ptos.**
Con respecto a la realización del ejercicio por medio de Geogebra	El alumno no realiza el ejercicio	El alumno no halla los puntos, rectas o datos solicitados mediante Geogebra	El alumno calcula parte de los puntos, rectas o datos solicitados	El alumno calcula todos los puntos, rectas o datos solicitados mediante Geogebra
Con respecto a la presentación visual del ejercicio	El alumno no realiza el ejercicio	El alumno no elimina el eje de coordenadas y cuadricula. Además, no oculta las líneas o puntos auxiliares o la imagen está muy pixelada.	El alumno no nombra los puntos o rectas de forma correcta o no añade un texto sobre el enunciado del ejercicio.	El alumno presenta el ejercicio de forma limpia, nombrando los puntos de forma correcta, eliminando los puntos y recta auxiliares. Además, añade texto del enunciado.
Con respecto al tamaño del archivo donde se envía el ejercicio	El alumno no realiza el ejercicio	El alumno no presenta el ejercicio en el formato solicitado (JPG o PNG)	El alumno presenta el ejercicio con formato correcto, pero con un tamaño mayor de 500 KB	El alumno presenta el ejercicio con formato y tamaño correcto.
Con respecto a la originalidad del ejercicio	El alumno no realiza el ejercicio	El alumno no utiliza una foto propia, sino que ha sido buscada de internet.	El alumno ha utilizado un tipo de foto idéntica a los ejemplos aportados por el profesor para explicar la tarea.	El alumno ha buscado un objeto original, no siendo de forma o contexto parecido a los expuestos por el profesor para explicar el ejercicio.
Con respecto a la exposición oral del alumno en	El alumno no expone oralmente el ejercicio.	El alumno no explica correctamente cómo ha realizado los ejercicios mediante	El alumno explica cómo se realizan el ejercicio sin utilizar un lenguaje	El alumno expresa, de forma razonada, el proceso seguido en la realización de la Tarea

clase		Geogebra.	matemático apropiado.	mediante Geogebra utilizando un lenguaje apropiado.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1.- Encuentra una fotografía donde aparezcan dos figuras semejantes, indicando la razón de semejanza a partir de varias medias por medio de Geogebra (las medidas deben ser las reales y no las calculadas por Geogebra).

Ejercicio 2.- Encuentra una fotografía donde aparezca un triángulo cualquiera y calcula el circuncentro de dicho triángulo, además dibuja la circunferencia circunscrita al triángulo.

Ejercicio 3.- Encuentra una fotografía donde aparezca un triángulo cualquiera y calcula el incentro de dicho triángulo, además dibuja la circunferencia inscrita al triángulo.

Ejercicio 4.- Encuentra una fotografía donde aparezca un triángulo cualquiera y calcula el baricentro de dicho triángulo.

Ejercicio 5.- Encuentra una fotografía donde aparezca un triángulo cualquiera y calcula el ortocentro de dicho triángulo.

Ejercicio 6.- Plantea un problema mediante una fotografía insertada en Geogebra, en cuya resolución se tenga que utilizar el Teorema de Pitágoras o el teorema de Tales (no es necesario resolver el problema).

Ejercicio 7.- Encuentra una fotografía donde se observe una traslación de una figura con respecto a un vector. Identificar mediante el programa Geogebra distintos puntos donde se aplica dicha traslación, además del vector de traslación.

Ejercicio 8.- Encuentra una fotografía donde se observe un giro de una figura, identifica el centro de giro, además del ángulo de giro.

Ejercicio 9.- Encuentra una fotografía donde se observe una simetría axial de una figura, identifica mediante el programa Geogebra el eje de simetría.

Ejercicio 10.- Encuentra una fotografía donde se observe una simetría central de una figura y calcula el centro de simetría.

4. Conclusión

Al eliminar un examen escrito y evaluar estos conceptos por medio de una tarea y una exposición final, todos los alumnos entregan en tiempo y forma la tarea, obteniendo la mayoría de ellos una calificación exitosa, fomentando la autoestima del alumno y el gusto por la asignatura.

A la hora de buscar las fotografías de los ejercicios de la tarea final, los alumnos suelen tener dificultades en los siguientes ejercicios:

- Encontrar dos figuras realmente semejantes, ya que no suelen comprobar en primer momento que las distancias sean proporcionales.
- Para encontrar giros y simetrías centrales suelo ayudarles, comentándoles que se pueden encontrar en bastantes logos de empresas.
- Suelen tener problemas en el tamaño del archivo que presentan, ya que lo limito a menos de 500 KB y suele ocupar mucho más por realizar las fotografías con móviles de una gran resolución. Durante el tiempo que tienen para realizar la tarea, practicamos cómo descargar el archivo en PNG y reducirlo de tamaño imagen a un porcentaje que no llegue a pixelar las letras escritas en Geogebra.

5. Ejemplos realizados por los alumnos

Ejercicio 1.- Figuras Semejantes

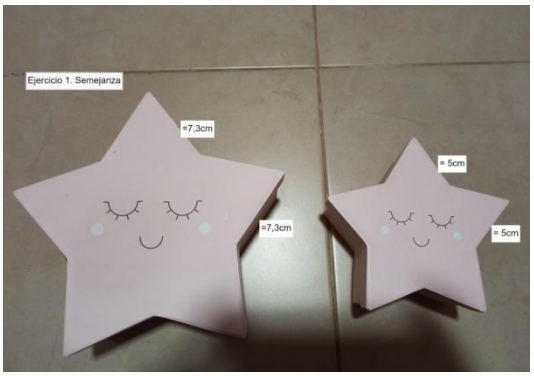


Imagen 17. Ejercicio realizado por un alumno

Imagen 18. Ejercicio realizado por un alumno

Ejercicio 2.- Circuncentro y circunferencia circunscrita

Imagen 19. Ejercicio realizado por un alumno

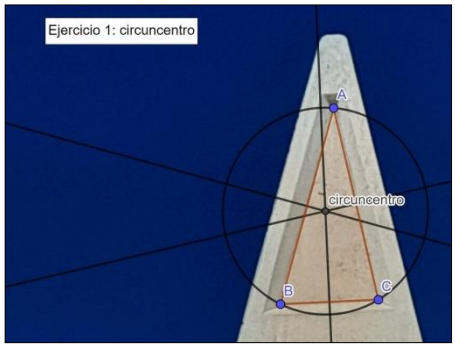


Imagen 20. Ejercicio realizado por un alumno

Ejercicio 3.- Incentro y circunferencia inscrita

Imagen 21. Ejercicio realizado por un alumno

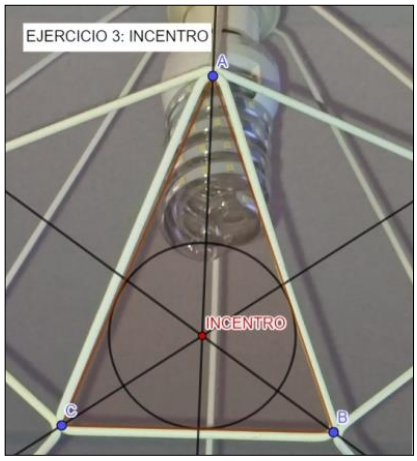


Imagen 22. Ejercicio realizado por un alumno

Ejercicio 4.- Baricentro de un triángulo.

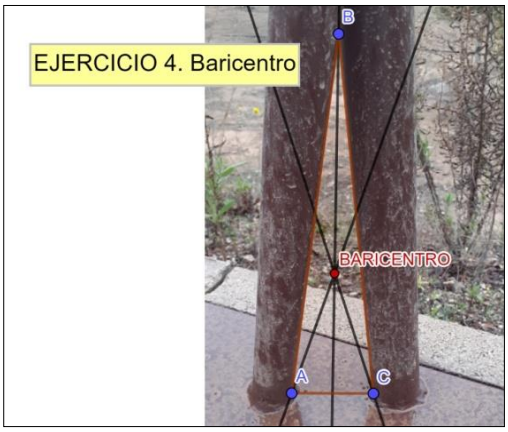


Imagen 23. Ejercicio realizado por un alumno

Imagen 24. Ejercicio realizado por un alumno

Ejercicio 5.- Ortocentro de un triángulo.

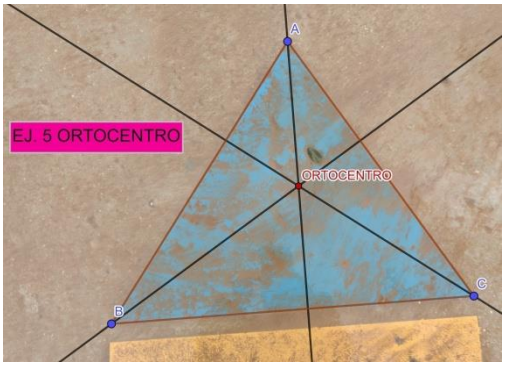


Imagen 25. Ejercicio realizado por un alumno

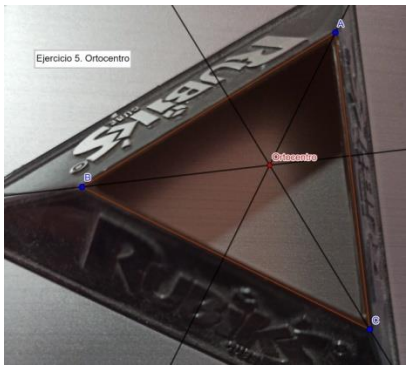


Imagen 26. Ejercicio realizado por un alumno

Ejercicio 6.- Plantea un problema mediante una fotografía insertada en Geogebra, en cuya resolución se tenga que utilizar el Teorema de Pitágoras (no es necesario resolver el problema).

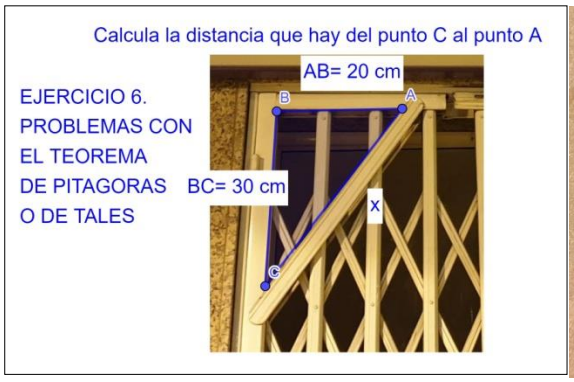


Imagen 27. Ejercicio realizado por un alumno

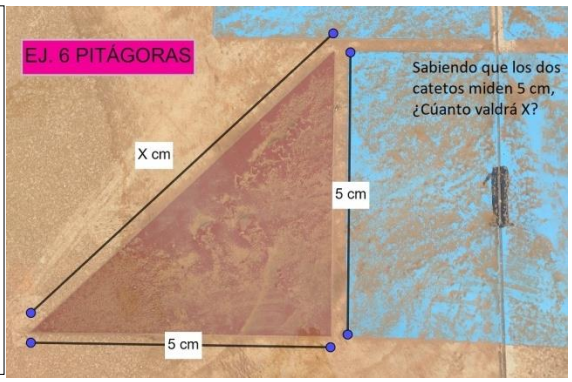


Imagen 28. Ejercicio realizado por un alumno

Ejercicio 7.- Traslación con respecto a un vector guía.

Imagen 29. Ejercicio realizado por un alumno

Imagen 30. Realizado por un alumno

Ejercicio 8.- Giro

Imagen 31. Ejercicio realizado por un alumno

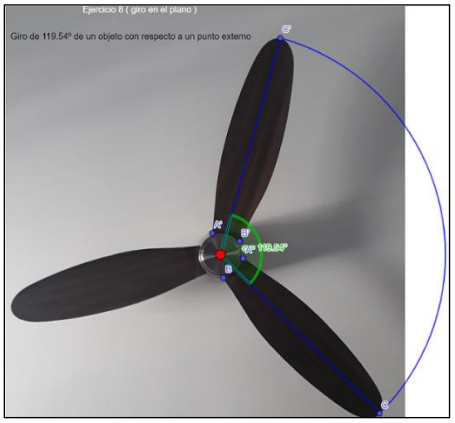


Imagen 32. Realizado por un alumno

Ejercicio 9.- Simetría axial

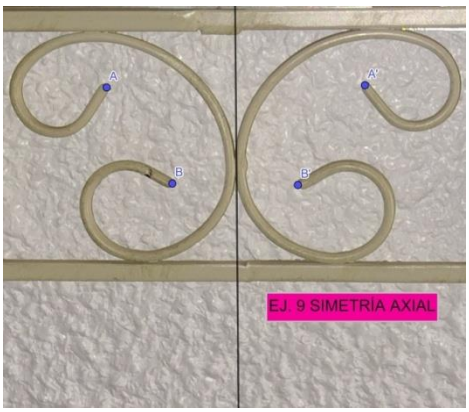


Imagen 33. Ejercicio realizado por un alumno

Imagen 34. Realizado por un alumno

Ejercicio 10.- Simetría central.

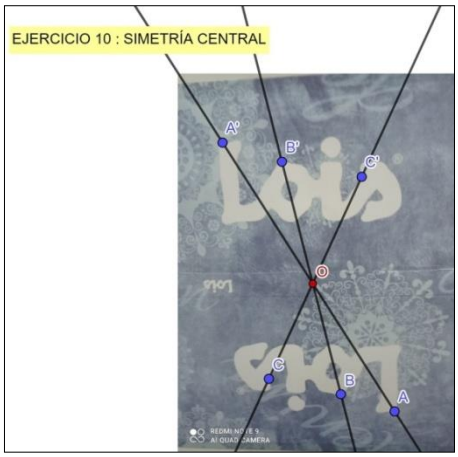


Imagen 35. Ejercicio realizado por un alumno

Imagen 36. Realizado por un alumno

CoR038 Cuentos que cuentan

Paula López-Serentill(1)
paula.lopez@udg.edu(1)
Universitat de Girona (1)
Marta Ruiz Cárcel (2)
mruiz61@iecorbatera.cat (2)
Institut Escola Corbatera (2)
Anna Rodríguez Casas (3)
anrodriguez@fedac.cat (3)
Escola Fedac Sant Narcís (3)

Núcleo temático: Recursos para el aula, Conexiones.

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (formación de maestros).

RESUMEN

A lo largo de la historia los cuentos se han utilizado como recurso para enseñar, despertando el interés y motivación de los alumnos. En matemáticas, el uso del cuento como recurso didáctico presenta una serie de ventajas, por un lado la mayoría de cuentos

plantean un problema al que el protagonista debe enfrentarse y superar utilizando distintas estrategias y por otro lado el cuento nos ayuda a presentar conceptos matemáticos en contexto. Además, es fácil que los alumnos se identifiquen con los personajes del cuento, sus emociones y sentimientos, facilitando el proceso de enseñanza y aprendizaje. En este trabajo se presentan y analizan distintos cuentos con contenido matemático para trabajar en educación infantil, primaria y secundaria y se describen actividades relacionadas con los contenidos matemáticos del cuento explicado.

Palabras clave: Cuento Matemático, Recurso Didáctico, Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria.

1. Introducción

El cuento es una invención humana que se ha utilizado a lo largo de la historia, en todas las culturas, como recurso para enseñar y transmitir conocimiento. Hoy en día se ha hablado mucho del potencial de los cuentos como herramienta para formar adecuadamente la mente de los niños, fomentando la capacidad de entender y razonar. Por eso, algunos autores como Marín-Rodríguez (2007, 2021) los consideran «alimento intelectual» por excelencia de la primera infancia. Un cuento te enseña aunque tú no quieras aprender ya que, según Bettelheim (1999), los cuentos aportan importantes mensajes al consciente, preconsciente e inconsciente, sea cual sea el nivel de funcionamiento de cada uno en aquel instante.

Pero, aunque se ha estudiado largamente su potencial en la primera infancia y se ha instaurado como un recurso básico en la mayoría de aprendizajes de educación infantil dentro y fuera de las aulas (los padres también son conscientes de su potencial y lo usan con frecuencia para contribuir en la educación de sus hijos), a medida que se avanza en la escolarización, va disminuyendo su presencia en las aulas. Nuestra experiencia como maestros de primaria, secundaria y bachillerato, nos ha enseñado que el cuento continúa siendo un recurso con muchísimo potencial para todas las edades.

2. El cuento como recurso para el aula de matemáticas

¿Quién no ha disfrutado nunca con la narración de un buen cuento? Cuando se explica una buena historia en el aula, se abren un sinfín de posibilidades. Cuando los alumnos se quedan boquiabiertos y desean descubrir el final de la historia, te das cuenta de que tienes una oportunidad. Cuando una ilusión crea controversia, se puede generar un debate rico e interesante.

Como se ha dicho ya muchas veces en las últimas décadas, los recursos y materiales didácticos son herramientas fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos, favoreciendo la comprensión de los contenidos y el proceso de abstracción de algunos conceptos.

Pero cabe recordar que su valor didáctico depende no solo del material, sino del buen uso que se haga de ellos en relación a los objetivos marcados y de las estrategias y actividades didácticas que se diseñen para trabajar con ellos.

Entre otros recursos, hay un gran grupo que son los recursos literarios (cuentos, novelas, canciones, poesías,…). Estos recursos literarios conectan directamente con los sentidos de los estudiantes facilitando el aprendizaje de los conceptos que vehiculan (Marín-Rodríguez, 2016). Ésta es una de las primeras razones por las que creemos que el cuento es un recurso muy poderoso para utilizar en nuestras aulas de matemáticas. La investigación en didáctica ha demostrado que el rendimiento en matemáticas puede mejorar si se cuestionan los prejuicios y se desarrollan emociones positivas hacia las matemáticas. Por ello, en el nuevo currículum español (LOMLOE, 2022), se ha añadido el sentido socioafectivo dentro del currículum de matemáticas tanto en primaria como en secundaria. Este sentido socioafectivo integra conocimientos, destrezas y actitudes para entender y manejar las emociones, establecer y alcanzar metas, y aumentar la capacidad de tomar decisiones responsables e informadas, y contribuir a la mejora del rendimiento del alumnado en matemáticas, a la disminución de actitudes negativas hacia ellas y a la erradicación de ideas preconcebidas relacionadas con el género o el mito del talento innato indispensable. Creemos que el cuento puede llegar a ser un gran recurso para trabajar el sentido socioafectivo puesto que conecta las matemáticas con las emociones. Los estudiantes conectan con los protagonistas del cuento y por tanto, sienten como propias las emociones que viven los protagonistas. Además se pueden trabajar a través de cuentos, las vidas y logros de mujeres matemáticas.

Los resultados del informe Pisa (OECD, 2004) señalaban la necesidad de incidir en la comprensión lectora, y recomendaban relacionar la comprensión lectora con otras materias, entre las que incluían las matemáticas. Los actuales Currículos de Educación Secundaria asumen expresamente la necesidad de utilizar adecuadamente y con precisión el lenguaje matemático, en forma oral y escrita, para expresar razonamientos, relaciones cuantitativas, e informaciones que contengan elementos matemáticos. Además, la competencia matemática 8 del nuevo currículum se centra precisamente en la importancia de comunicar de forma

individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas. De acuerdo con otros autores (Wiburne y Napoli, 2008; Bintz y Moore, 2002) creemos que la utilización del cuento en el aula de matemáticas puede ser un gran aliado para motivar a la lectura y mejorar la comprensión lectora de nuestros alumnos, no solo en primaria, sino también en secundaria, a la vez que se familiarizan con el vocabulario matemático.

Otras ventajas de la utilización del cuento, tal como señalan algunos autores (Marín-Rodríguez, 2017; Lemonidis y Kaiafa, 2019) son que nos ayudan a contextualizar los contenidos matemáticos, hacer múltiples conexiones dentro y fuera de las matemáticas, valorando la utilización de las matemáticas en la vida cotidiana. De hecho, si nos fijamos de nuevo en el nuevo currículum, la competencia 5 hace referencia a la importancia de reconocer y utilizar la conexión de las matemáticas con otras materias, con la vida real o con la propia experiencia ya que aumenta el bagaje matemático del alumnado.

Por último, y no menos importante, otra ventaja que queremos destacar de la utilización del cuento como recurso en el aula de matemáticas en cualquier edad, es en relación a la resolución de problemas. Si nos fijamos en la estructura de cuento clásico de planteamiento, nudo y desenlace, la mayoría de las veces los protagonistas se enfrentan a una situación problemática o conflicto y todo el cuento gira alrededor de este conflicto. Por tanto, el cuento ayuda a los alumnos a crear puentes entre la resolución de problemas en situaciones informales, y los procedimientos y estrategias de resolución de problemas matemáticos más formales (Lemonidis y Kaiafa, 2019).

3. Posibles clasificaciones de los cuentos

Compartimos la definición de cuento con Valentín (2007): “Un cuento es una narración breve en extensión, de carácter ficticio pero creíble, que se enfoca en una trama o un solo conflicto. El cuento debe ser corto, narrar un sólo suceso, tener

pocos personajes, ocurrir en un ambiente limitado y provocar alguna impresión al lector".

A continuación exponemos algunos (no todos) de los criterios que se pueden utilizar para clasificar los cuentos matemáticos y que creemos que pueden ser útiles a la hora de escoger adecuadamente los cuentos para llevar al aula:

a) Por la edad. Este criterio tiene dos lecturas. Por un lado se puede clasificar según la edad en que los niños pueden leerlo, pero por otro lado, partiendo de la idea que el cuento lo puede leer el maestro, se puede clasificar según la edad indicada que deben tener los alumnos para poder trabajar los contenidos matemáticos del cuento. Nosotros nos referiremos a este segundo criterio.

b) Según si las matemáticas son explícitas en la historia o no. Hay cuentos que están cien por cien integrados en las matemáticas, muchas veces escritos pensando explícitamente en trabajar cierto contenido matemático y toda la historia gira alrededor de esta idea. Pero hay otros cuentos que de entrada no parece que contengan matemáticas, o no se han escrito con ese propósito, pero en cambio, con la mirada matemática, pueden ser grandes aliados para realizar actividades relacionadas con las matemáticas.

c) Según si solo tienen imagen, solo texto o las dos cosas. Hay cuentos que solo tienen imágenes, de las cuales se desprende una historia, o a partir de las cuales podemos trabajar conceptos matemáticos, otros cuentos (no novelas) solo tienen texto y otros (la mayoría y más recomendados) combinan las dos cosas.

d) Si se narra una historia o solo hechos. Hay cuentos que tienen un inicio o introducción, un nudo donde pasan hechos, y un desenlace o final. Pero hay otros cuentos que son meramente informativos, por ejemplo sobre la forma o el tamaño de objetos.

e) Según criterios matemáticos, como por ejemplo según los contenidos que se pueden trabajar, o según las dimensiones o procesos que están involucrados.

En los cuentos que presentamos más adelante, se han usado algunas de estas clasificaciones.

4. Algunas consideraciones metodológicas

Un cuento, por muy bueno que sea, si no se acompaña de una buena puesta en escena, de una buena planificación y un diseño de actividades adecuado, no será un buen recurso. Por tanto, antes de llevar un cuento al aula, debemos tener presentes algunas consideraciones:

a) A veces, cuando descubrimos un cuento, nos puede surgir la necesidad de llevarlo al aula y compartirlo con nuestros alumnos, pero es importante que se adecúe a los objetivos que nos hemos planteado en nuestra programación y que estamos trabajando en ese momento. Por tanto, la elección del cuento no debe ser aleatoria, o por criterios ajenos a nuestra programación de aula. Debemos escoger el cuento en función de lo que queremos trabajar con él.

b) Es importante que previamente analicemos a fondo el argumento y concretemos qué objetivos queremos trabajar. Un buen cuento estará lleno de matices y nos proporcionará muchas posibilidades que podemos desplegar, pero somos nosotros que debemos decidir, en qué nos centramos y para qué lo queremos utilizar. Es mejor profundizar en uno o dos conceptos y dejar el resto en segundo término.

c) Se debe contar el cuento con emoción, utilizando el tono adecuado en cada momento, poniéndonos en el papel del cuentacuentos, para que así imágenes y texto cobren vida en los ojos y la mente de los oyentes. No podemos contar un cuento como quien lee un enunciado de un problema, sino no tendrá el efecto buscado o se perderá parte de su potencial. A ser posible se deben ir mostrando las imágenes del cuento, que darán riqueza a nuestra narración y ayudarán al alumno a conectar con los personajes y con la narración.

d) Se debe pensar y diseñar bien la dinámica, temporalización y actividades a realizar. Hay cuentos que invitan a leerlos de un tirón, pero otros quizá nos interese más parar de vez en cuando e intercalar actividades entre medio.

e) Por último, no debemos olvidar la evaluación. Toda actividad realizada en el aula, si queremos que tenga la importancia que se merece, debe ser evaluada. Por tanto, de una manera u otra (a partir de las actividades que hemos realizado, de pequeñas preguntas al finalizar el cuento,…) debemos evaluar si se han logrado los objetivos planteados inicialmente.

A continuación os presentamos una serie de cuentos con la descripción de algunas posibles actividades para realizar con cada uno de ellos. Los cuentos se han clasificado según las etapas educativas donde pensamos que se pueden utilizar como recurso para aula de matemáticas según los contenidos que se pueden trabajar y los contenidos matemáticos que marcan los currículums actuales pero eso no quiere decir que no se puedan leer en otras edades, de hecho, muchos de los cuentos que os presentamos a continuación, dependiendo de las actividades que realicemos, son perfectamente útiles a más de una etapa educativa. En cada cuento se ha incluido primero el resumen del autor, después los contenidos que se pueden trabajar y por último una pequeña explicación de las actividades que se pueden realizar a partir del cuento.

5. Cuentos matemáticos para infantil

En este apartado se presentan tres ejemplos de cuentos que podemos utilizar en el aula de matemáticas de educación infantil, detallando algunas de las actividades que se pueden realizar a partir de los cuentos indicados.

5.1 La leyenda de Sant Jordi

En todas las poblaciones o comunidades tenemos leyendas que se van contando a lo largo de los años y que forman parte de nuestra cultura y tradición.

Concretamente, en Catalunya, tenemos " *La llegenda de Sant Jordi", donde* el caballero Jordi salva a todo un pueblo y a la princesa de ser devorada por un dragón. De la sangre del dragón nace una rosa que Sant Jordi regala a la princesa. De aquí, que cada 23 de abril se regala una rosa a las personas amadas.

Imagen 1. Baldó, E.; Gil, R. y Soliva, M. *La llegenda de Sant Jordi*

Contenido matemático: Probabilidad

Actividades:¿Probabilidad en Educación Infantil? ¿Probabilidad a partir de una leyenda?. Las respuestas son sí y sí. Es una bonita y fácil manera de introducir vocabulario básico relacionado con la probabilidad, el seguro, lo probable y lo imposible.

Individualmente o por parejas debaten y anotan un concepto que creen que es seguro, probable o imposible que ocurra en la leyenda. Por ejemplo: seguro que Sant Jordi mata al dragón, es probable que la princesa vista un vestido rosa o que es imposible que Sant Jordi y el dragón se hagan amigos.

Se cierra la actividad compartiendo todas las propuestas y creando un mural con las frases escritas, organizadas según sean probables, improbables o seguras.

No olvidemos usar a lo largo de todo el debate el vocabulario matemático preciso.

5.2 Cinco minutos

Cinco minutos es poco tiempo cuando te lo estás pasando genial, pero cuando toca hacer cosas súper aburridas…, cinco minutos se hacen larguíísimos.

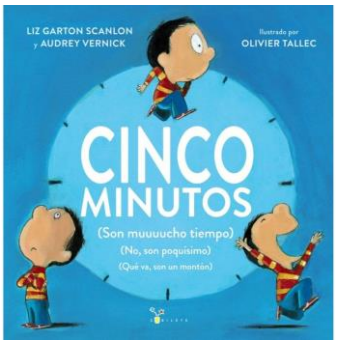


Imagen 2. Garton, L. y Vennick, A. *Cinco minutos*

Contenido matemático: Medida. El tiempo

Actividades: Todos sabemos que la noción del tiempo es muy complejo en las primeras edades. Constantemente decimos expresiones tipo “cinco minutos y nos vamos” o en “dos minutos recogemos”, pero ¿realmente son 5 minutos? ¿Son conscientes los niños de educación infantil cuanto son 5 minutos?.

Este cuento es un buen recurso para hablar con nuestros alumnos sobre sus propias vivencias respecto a cómo se sienten cuando les toca esperar en la cola del supermercado, mientras sus familiares hablan con alguien que se encuentran en la calle o, por ejemplo, en una caravana de tráfico, o cuando están en el parque jugando con sus amigos y sus padres les avisan que tienen que irse.

Posteriormente proponemos hacer el siguiente ejercicio, ponemos el cronómetro a 1’ (o mejor aún utilizamos un reloj de arena de un minuto) y nos quedamos muy quietos con los brazos cruzados, sin hablar y sin movernos. Una segunda vez repetimos 1’ pero pueden ir a jugar con la condición que cuando acabe el minuto todas y todos deben estar sentados otra vez. ¿Qué sensaciones han percibido? ¿Les parece que han tenido el mismo tiempo para jugar que cuando estaban sentados con los brazos cruzados?. Se genera un buen debate reflexionando y comparando las dos situaciones.

5.3 Vecinos

Si paramos a pensar: el techo de mi casa es el suelo de alguien. Y mi suelo es el techo de alguien. De hecho, si pudiera atravesar la pared con la mano, podría tocar a alguien. ¡Y este alguien podría ser mi vecina!.

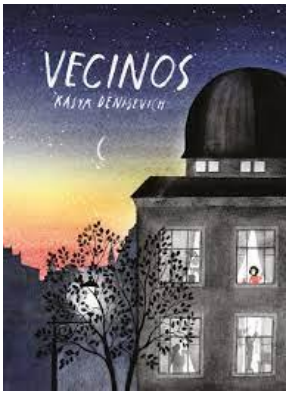


Imagen 3.. Denisevich, K.. *Vecinos*

Contenido matemático: Numeración y cálculo (números ordinales). Estadística (moda). Espacio y forma (nociones de posición).

Actividades: ¿Qué pasaría si todos viviéramos en el mismo edificio? ¿Quién sería vecino o vecina de quién? A partir del relato del cuento podemos dibujar un gran edificio señalizando cada piso (1º, 2º, 3º, etc.) y una casa. Cada alumno obtendrá un cuadrado de papel de unos 6 u 8x8 cm dónde dibujará su rostro como si fuera una fotografía y escribirá su nombre. Deberán pegar cada dibujo en el lugar que les corresponda según en qué piso viven o en la casa si no viven en ningún edificio. Esta actividad nos permite reconocer los números ordinales, saber representar su escritura y diferenciarlos de la grafía de los números cardinales. Además, en el mural queda una representación de un diagrama de barras dónde obtener datos estadísticos. ¿En qué piso vivimos más compañeros y compañeras? ¿En qué piso vivimos menos?, ¿Vivimos más en un edificio o en una casa?, etc.

6. Cuentos matemáticos para primaria

En este apartado se presentan tres ejemplos de cuentos que podemos utilizar en el aula de matemáticas de educación primaria, detallando algunas de las actividades que se pueden realizar a partir de los cuentos indicados.

6.1 ¿Cuánto es un millón?

Un millón es un número muy grande; pero, ¿cómo de grande, exactamente? El pingüino Piquito es muy curioso y quiere averiguarlo. Acompáñalo en su viaje de descubrimiento a través de las páginas de este bonito libro y verás la respuesta con tus propios ojos.

Imagen 4. Milbourne, A i Riglietti, S. *¿Cuánto es un millón?*

Contenido matemático: Numeración y cálculo. Sistema de numeración decimal. Potencias de diez.

Actividades:Este es un maravilloso cuento para ayudar a los niños a entender la magnitud de las potencias de 10 hasta un millón. Muchas veces trabajamos números grandes pero pocas veces enseñamos a los niños cuanto son en realidad estas cantidades, es decir, no han visto nunca (o muy pocas veces de forma inconsciente), por ejemplo, mil objetos juntos para poder tomar conciencia de la magnitud del número. En este cuento, encontraremos representados de forma exacta 10, 100 y 1000 objetos. Y al final del cuento, nos espera una sorpresa maravillosa, un precioso póster en el cual hay representadas exactamente un millón de estrellas. Como actividad inicial es interesante realizar un debate para tratar de responder la pregunta que da nombre al cuento, dónde creen ellos que hay un

millón de objetos, qué tan grande creen que es un millón. Después de su lectura, una buena actividad es intentar tener 10, 100, 1.000 y 1.000.0000 objetos, por ejemplo, granos de arroz, garbanzos, etc. y hacer preguntas como ¿cuánto tardaríamos en contar hasta un millón? ¿Si hiciéramos una torre con un millón de multilinks, hasta donde llegaríamos?. Pensamos que estas preguntas son un buen comienzo para realizar pequeñas investigaciones y para entender la magnitud de las potencias de diez.

6.2 Tangram Gato

Un niño recibe un tangram y le dicen que con él puede hacer cualquier cosa. Para comenzar, hace un gato para que juegue con él, pero el gato se quiere ir. «¡Espera!», le dice el niño. Así comienza una hazaña de creaciones una tras la otra.

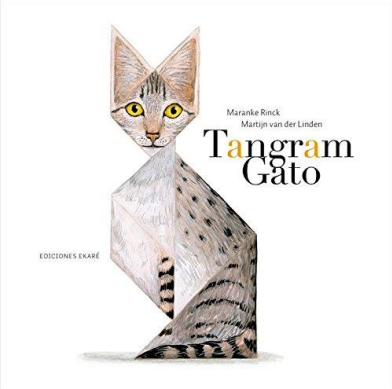


Imagen 5. Rinck, M. y Van der Linden, M. *Tangram gato*

Contenido matemático: Espacio y forma. Medida.

Actividades: Este cuento es ideal para introducir el tangram, un material con infinidad de posibilidades para el aula de matemáticas. Lo primero es tratar que los alumnos adivinen qué objectos representan las figuras hechas con las piezas del tangram que hay en el cuento. Es muy interesante que los alumnos construyan su propio tangram recortando un papel siguiendo las indicaciones del maestro.

Posteriormente podrán intentar reproducir todos los animales y objectos que aparecen en el cuento con las piezas de tu tangram. Por último, una actividad muy bonita es que los alumnos se inventen su propio cuento donde los protagonistas y los objetos que aparezcan en su cuento, sean representaciones hechas con piezas del tangram.

6.3 A remainder of one

Cuando la reina de los bichos exige que su ejército marche en filas pares, el soldado Joe divide a los manifestantes en más y más filas para no quedarse fuera del desfile.

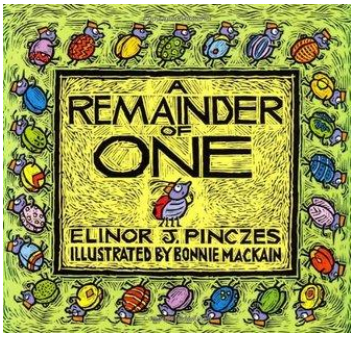


Imagen 6. Pinczes, E. *A remainder of one*

Contenido matemático: Numeración y cálculo. Divisibiliad.

Actividades: La historia trata de Joe, un soldado insecto, que se desanima porque cada vez que se une a un desfile con otros 24 soldados insecto, siempre se queda solo. Han probado con 2 filas de 12 soldados, 3 filas de 8 soldados e incluso 4 filas de 6 soldados: nada funciona hasta que prueban con 5 filas de 5. Por tanto este cuento es perfecto para introducir de forma visual y sobre un contexto exquisito, el concepto de división y del resto a partir de la construcción de matrices o rectángulos. A partir de esta historia los maestros pueden repartir a cada estudiante (o pareja de estudiantes) un número diferente de multilinks y pedir que hagan todas los posibles rectángulos con estos cubitos (serían como los insectos soldados y las

posibles agrupaciones para poder desfilar sin que sobre ninguno). De esta manera se trabajarían los divisores de un número y los números primos.

7. Cuentos matemáticos para secundaria

En este apartado se presentan tres ejemplos de cuentos que podemos utilizar en el aula de matemáticas de educación primaria, detallando algunas de las actividades que se pueden realizar a partir de los cuentos indicados.

7.1 The Rabbit Problem

Inspirado en el famoso problema de Fibonacci este álbum ilustrado muestra la evolución de una población de conejos encerrados en un prado desde una óptica más social que matemática. El álbum tiene el formato de un calendario mensual en el que los conejos protagonistas van anotando las dificultades a afrontar a medida que el grupo va creciendo (1,1,3,5, 8, 13… parejas de conejos…) y las soluciones que adoptan teniendo en cuenta las características de cada mes del año.

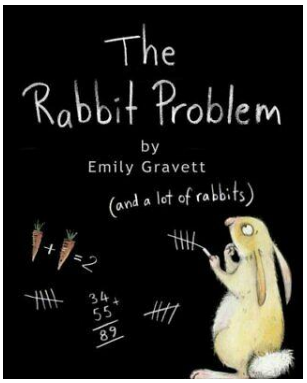


Imagen 7. Gravett, E. *The Rabbit Problem*

Contenido matemático: Sucesiones. Fibonacci.

Actividades: The rabbit problem no es un cuento en el sentido clásico que podamos leer a los alumnos. Podríamos considerarlo más bien un material que incluir en la

biblioteca del aula e invitar a que lo revisen por parejas o pequeños grupos. No contiene ningún texto narrativo pero tampoco se echa de menos; las ilustraciones son tan expresivas que hablan por sí solas y las anotaciones en los calendarios complementan y aportan nuevas informaciones. Está repleto de detalles y nos sirve de punto de partida para abordar temas tan diversos como la sucesión de las estaciones y la agricultura, la convivencia de individuos de edades dispares en espacios reducidos, la familia y el árbol genealógico, la gestión de recursos, el confinamiento, la biología de los conejos, etc. etc. En la clase de matemáticas nos proporcionará un excepcional punto de partida al trabajo con sucesiones y la búsqueda de patrones. A partir de su revisión podemos realizar actividades de identificación de números de la serie de Fibonacci en la naturaleza (piñas de pino y piñas tropicales, alcachofas, disposición de pétalos en flores…) y su relación con el número áureo.

7.2 The lion's Share

Por primera vez la pequeña hormiga es invitada al banquete de la sábana que organiza el rey león y quiere causar muy buena impresión. Pero cuando llega el momento del postre se encuentra en la tesitura de tener que comerse el último pedazo de pastel y dejar al rey león sin la oportunidad de probarlo. Abochornada, la hormiga ofrece preparar a su rey un pastel que le entregará al día siguiente. Pero el resto de animales de la sábana, envidiosos, no quieren ser menos y se enfrascarán en una carrera frenética y un tanto absurda para superar la cantidad de pasteles dispuestos a cocinar a su majestad.

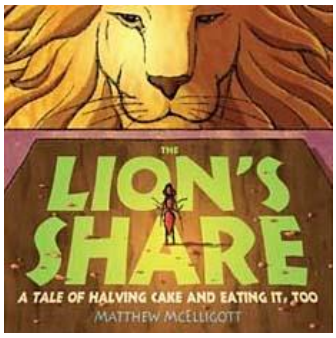


Imagen 8. Mcelligott, M. *The lion's share*

Contenido matemático: Fracciones. Potencias. Progresiones geométricas. Funciones exponenciales.

Actividades: Esta historia resulta perfecta para conversar sobre el significado de las fracciones e introducir la noción de progresión geométrica y potencias de dos. También nos permitirá introducir el crecimiento exponencial y las funciones exponenciales de base dos y base un medio.

A partir de la lectura compartida en 1 de ESO nos puede servir para trabajar las fracciones, como por ejemplo, el concepto de fracción de una fracción o comprobar que todas las porciones del pastel consumidas por los animales invitados al festín suman la unidad. En segundo curso de secundaria por ejemplo se puede enlazar la lectura de The lion's share con la actividad "¿Cuántos pliegues de papel necesitamos hacer para alcanzar la luna?". En esta actividad trabajaremos el crecimiento exponencial con ayuda de una hoja de cálculo. En cursos más superiores, por ejemplo en bachillerato, se puede utilizar este cuento para hablar de las funciones exponenciales con base mayor o menor que la unidad, estudiar el dominio de estas funciones teniendo en cuenta el contexto del cuento o sin tenerlo en cuenta y hacer el paso al límite.

7.3 Sócrates y los tres cochinitos

Sócrates es un lobo filósofo y hambriento. Apremiado por el hambre de su esposa necesita organizar la caza nocturna de uno de los cochinitos vecinos. Pero los tres cerditos disponen de cinco casas y pueden dormir juntos o separados. ¿Cómo planificar el ataque más exitoso? Su amiga la rana Pitágoras le ayudará a analizar de manera sistemática y muy gráfica este problema. Ambos amigos se enfrascan en un ameno diálogo socrático para encontrar solución a un problema que no es tan sencillo como inicialmente podría parecer.

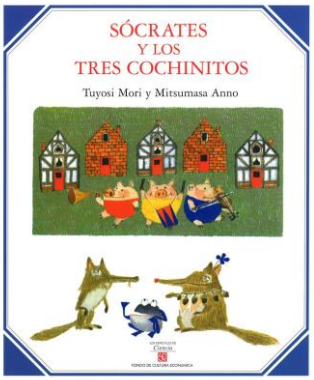


Imagen 9. Mori,T. y Anno, M. ,*Sócrates y los tres cochinitos*

Contenido matemático: Combinatoria.

Actividades: Como la mayoría de cuentos de Mitsumasa Anno este libro ofrece mucho más que una ingeniosa historia y divertidas ilustraciones. El autor introduce al lector al análisis combinatorio y las permutaciones. La historia se puede resumir en una sencilla pregunta que bien podría ser el enunciado de un ejercicio de un libro de matemáticas: ¿de cuántas maneras se pueden acomodar 3 cochinitos en cinco casas? Para contestar el protagonista necesita aclarar otras cuestiones importantes no explícitas. ¿Importa cuál cochinito está en una determinada casa? ¿Puede haber más de un cochinito por casa? Si puede haber más de un cochinito en cada casa, ¿Importa la posición de los cochinitos dentro de ella? Una vez compartida y disfrutada la historia, analizaremos con detalle el procedimiento ordenado que emplean los protagonistas y la utilidad de los sistemas de representación de la información utilizados. Podemos proponer a los alumnos de secundaria que escriban pequeños cuentos a partir de nuevos enunciados de permutaciones y combinaciones empleando recursos similares a los de Mitsumasa Anno, el diálogo socrático entre dos personajes y la representación de la información mediante diagramas de árboles, casillas y puntos, letras del alfabeto…

8. Conclusiones

Una buena historia puede ser un anclaje de un aprendizaje. Hay infinidad de recursos, el cuento simplemente es uno más, un buen recurso que a nosotras nos ha funcionado muy bien, independientemente de la edad. Nos permite conectar con los alumnos que aveces se muestran desmotivados, facilita la conexión de las matemáticas con la realidad, fomenta la comprensión lectora, facilita la resolución de problemas, genera buenos diálogos matemáticos y genera un clima único.

Hay miles de cuentos, algunas veces las conexiones con las matemáticas son obvias, otras necesitaremos de las gafas matemáticas para poder establecer estas conexiones, pero en los dos casos, realizar conexiones entre las matemáticas con estas pequeñas historias y la imaginación de vuestros oyentes, ayudará a nuestros alumnos a consolidar o entender conceptos matemáticos curriculares. Os animamos pues que, a partir de ahora, intentéis descubrir las matemáticas que esconden los cuentos que os encontréis por casa o en la biblioteca, hiendo más allá de las palabras o ilustraciones y os convirtáis de vez en cuando en cuentacuentos matemáticos en vuestras clases independientemente de la edad que tengan vuestros alumnos.

Referencias

Baldó, E.; Gil, R. y Soliva, M. (2020) *La llegenda de Sant Jordi.* Editorial Barcanova.

Bettelheim, B. (1999). *Psicoanálisis de los cuentos de hadas*. Barcelona: Crítica.

Bintz, W. P., y Moore, S. D. (2002). Using literature to support mathematical thinking in middle school. *Middle School Journal*, *34*(2), 25–32.

Blanco, B. y Blanco, L. J. (2009) Cuentos de matemáticas como recurso en la Enseñanza Secundaria Obligatoria. *Innovación Educativa*, vol.19 , 193-206

Denisevich, K. (2021) *Vecinos.* Editorial Juventud

Garton, L. y Vennick, A. (2020) *Cinco minutos.* Editorial Bruño.

Gravett, E. (2009) *The Rabbit Problem.* Macmillan Childrens Books.

Lemonidis, C. y Kaiafa, I. (2019). The Effect of Using Storytelling Strategy on Students' Performance in Fractions. *Journal of Education and Learning*, *8*(2), 165-175.

Marín-Rodríguez, M. (2009). Matemáticas y Literatura, un binomio perfecto. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 50, 47-63

Marín-Rodríguez, M. (2017). *Relatemáticos: cuentos para disfrutar con las matemáticas.* FISEM, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 38-48). Madrid, España: FESPM.

Marín-Rodríguez, M. (2021). Pensamiento matemático y cuentos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 10*(1), 30-44.

Mcelligott, M. (2009) *The lion's share.* Bloomsbury Publishing's Walker and Company (USA)

Milbourne, A i Riglietti, S. (2008) *¿Cuánto es un millón?.* Usborne.

Mori,T. y Anno, M. (2005) *Sócrates y los tres cochinitos.* Fondo de cultura económica.

OECD (2004). Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003. Paris: OECD.

Pinczes, E. (1995) *A remainder of one.* Houghton Mifflin Harcourt.

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado núm.76, de 30 de marzo de 2022, 41571-41789.

Rinck, M. y Van der Linden, M. (2017) *Tangram gato.* Ediciones Ekaré.

Valentín, J. (2007) ¿Cómo se analiza un cuento? En: http://www.pupr.edu/cpu/ (Universidad Politécnica de Puerto Rico).

Wilburne, J. M., y Napoli, M. (2008). Connecting Mathematics and literature: An analysis of pre-service education school teachers' changing beliefs and knowledge. *IUMPST: The Journal*, *2*, 1–10.

CoR040 Contamos y hablamos. Descubrimos el Numicon

Ester Bosch i Casas
ebosch16@xtec.cat
Escola Pompeu Fabra (Anglès)/ Grup Perímetre
GAMAR (Gabinet de Materials i de Recerca per la Matemàtica a l'escola (Girona)

Anna Rodríguez Casas
arodr255@xtec.cat
Escola FEDAC Sant Narcís (Girona)/ Grup Perímetre

Núcleo temático: Recursos para el aula

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria

RESUMEN

La comunicación «Contamos y hablamos. Descubrimos el Numicon» enlaza dos aspectos básicos para el aprendizaje de las matemáticas: la experimentación con materiales y la comunicación de los aprendizajes realizados.

La elección del material manipulativo para los alumnos de Educación Infantil y los primeros cursos de primaria es muy importante para ayudarlos a construir su pensamiento lógico-matemático de manera adecuada y progresiva. El Numicon es un material multisensorial que favorece la subitización, el contaje y posteriormente el cálculo mientras descubres y hablas de números.

Durante la exposición se analizarán las posibilidades que ofrece este material y se propondrán numerosas actividades para realizar tanto en Educación Infantil como en Primaria.

Palabras clave: Numeración, Cálculo, Manipulación, Comunicación y Educación Infantil.

1. Introducción

En la comunicación «Contamos y hablamos. Descubrimos el numicon» se analiza la importancia de que los alumnos comuniquen los descubrimientos realizados a partir de un material manipulativo para consolidar los conceptos trabajados.

El aprendizaje de la numeración y el cálculo es básico para la adquisición de una buena competencia matemática. Desde las primeras edades es primordial visualizar lo que representan los números, compararlos, tener referencias claras para desarrollar estrategias de cálculo y explicar los descubrimientos realizados. Existen muchos materiales que pueden ayudar a adquirir el sentido numérico pero en esta propuesta nos centraremos en el material NUMICON porque, como su nombre indica, sirve para descubrir los números (NUM) y conversar sobre ellos (CON).

1.1. Importancia de trabajar la numeración y el cálculo con materiales

Los niños y niñas construyen el pensamiento lógico-matemático a partir de la observación, manipulación, la experimentación con materiales y la comunicación de sus descubrimientos.

“Saber explicar un conocimiento es básico para comprenderlo y para aplicarlo a la realidad” Maria Antònia Canals (Biniés, 2008)

Adquirir un buen sentido numérico no se reduce a saber enumerar, identificar grafías o reducir las operaciones a algoritmos repetitivos. A partir de situaciones concretas tenemos que realizar propuestas educativas en las que se tenga que interpretar números, subitizar, contar, visualizar cantidades para poderlas comparar y ordenar, descubrir que los números se pueden descomponer, analizar diferentes maneras de calcular y hacer conexiones con los números que nos rodean.

Los materiales manipulativos son muy útiles para ayudar a los alumnos a avanzar hacia la abstracción porque permiten descubrir, practicar y gestionar el error. El maestro tiene que escoger el material con un objetivo didáctico y metodológico claro, proponer una buena actividad y acompañar los alumnos con buenas preguntas para que puedan progresar en sus aprendizajes.

“La experimentación de los niños es fundamental en el aprendizaje. A partir de la acción sobre los objetos, el pensamiento lógico se va estructurando hasta la construcción de conceptos. Los materiales manipulables son fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas” Maria Antònia Canals (Biniés,2008)

Entre los materiales útiles para trabajar la numeración y el cálculo destacan las regletas numéricas y el Numicon. Materiales que se complementan y permiten trabajar los conceptos matemáticos con un procedimiento muy parecido. Sin embargo, en esta propuesta didáctica se ha escogido el Numicon porque, al ser multisensorial, permite la adquisición de las primeras nociones de cantidad, favorece el contaje y visualiza las operaciones.

1.2. El Numicon

El Numicon es un material estructurado basado en el método que la maestra de la Escuela maternal, Herbinère Lebert, desarrolló en 1931 para enseñar la numeración. Actualmente, es un material multisensorial formado por diez formas de distintos colores que corresponden a las representaciones de los números del 1 al 10. Con este material multinivel se pueden ver y tocar los números, relacionarlos entre ellos, contar, visualizar las descomposiciones y descubrir el significado de las operaciones. A través del descubrimiento y la verbalización se pueden establecer relaciones lógico-matemáticas y desarrollar la competencia matemática.

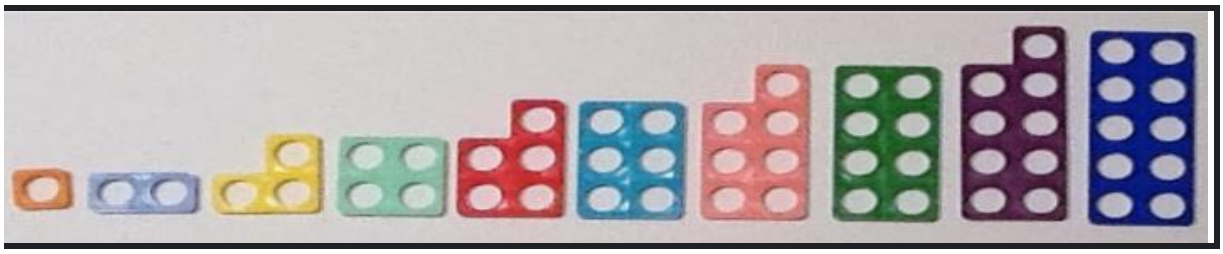


Imagen 1. Material Numicon.

La diferencia principal con las regletas numéricas, que también representan formas numéricas, es que el Numicon favorece el contaje y las regletas el calculaje. Es por esta razón que se aconseja utilizar este material sobre todo en las primeras edades.

Este recurso se puede utilizar individualmente o en grupo y gracias a sus características sensoriales ayuda a los alumnos a mejorar la adquisición del sentido numérico y a los maestros a detectar posibles errores en el aprendizaje de los alumnos.

Además de las formas numéricas, se pueden utilizar complementos como placas de soporte, clavijas, balanza y otros elementos que ayudan a enriquecer las actividades.

Las fases de introducción de este material son similares a las que realizamos con otros materiales didácticos: exploración libre, propuesta de un reto o situación, manipulación y experimentación, descubrimiento y razonamiento, verbalización del aprendizaje realizado, representación gráfica y simbólica.

2. Propuestas didácticas con el Numicon

El Numicon es un material muy completo con el que se puede trabajar casi todos los objetivos de numeración y cálculo en Educación Infantil y del primer ciclo de primaria. A continuación, se van a proponer algunas actividades organizadas según el objetivo de sentido numérico que trabajan.

Estas actividades son solo ejemplos de las muchas que se pueden trabajar. Para seleccionarlas no solo se ha tenido en cuenta el contenido trabajado sinó también que ejemplifiquen la variedad de objetivos didácticos y metodológicos que los materiales pueden aportar: descubrir conceptos, visualizar conceptos, practicar conceptos, crear conexiones o investigar.

2.1 Reconocer cantidades y visualizarlas

Cuando mostramos un material por primera vez a nuestros alumnos es básico darles un tiempo para que lo descubran, manipulen e interactúen con él, sin instrucciones por nuestra parte. Poco a poco mediante preguntas claves entre todas y todos verbalizamos las características del material, igualdades y diferencias entre las piezas, qué cantidad representa cada pieza, etc.

Una vez descubierto el material en todos los sentidos ya podremos usarlo para alcanzar los objetivos propuestos.

Ejemplos de posibles actividades para reconocer y visualizar la cantidad de cada pieza:

- Describir la pieza sin mirarla (dentro de una bolsa, con los ojos cerrados etc.)
- Buscar tantos elementos como representa la pieza.
- Agruparse según la pieza.
- Formar equipos.
- Dar palmadas y coger la pieza que representa.
- Tirar el dado y coger la pieza que corresponda.
- Asociar la pieza con la grafía correspondiente.
- Ordenar las piezas dadas de mayor a menor o viceversa.
- Combinar piezas para construir números más grandes.
- Representar canciones numéricas, cuentos…
- Utilizar el Numicon para representar números de la realidad o situaciones concretas.
- Etc.

Imagen 2. Actividades para reconocer la cantidad

2.2 Comparar y ordenar cantidades

El Numicon es un material que favorece la comparación de números porque permite visualizar las preguntas ¿Qué número es mayor?¿Cuál es menor? ¿Por qué?

Comparando dos piezas interiorizan la diferencia entre las dos cantidades y comparando tres empiezan a descubrir la necesidad de ordenarlas.

Al ordenar las piezas de menor a mayor los alumnos averiguan que la diferencia entre ellos siempre es uno, concepto básico para entender la serie numérica.

“Aprender los números es aprender las relaciones que hay entre ellos porque los números sólo tienen sentido en relación a los otros” (Torra, 2006)

No podemos olvidar la importancia de saber qué posición ocupa cada cantidad en la recta numérica, uno de los conceptos clave para obtener un buen sentido numérico.

Los alumnos pueden vivenciar la recta numérica colocándose ordenadamente según la pieza que lleven colgada como una medalla y verbalizar porque es necesario dejar espacio entre ellos o porque se colocan inmediatamente después de un número concreto.

Conocer las características concretas de los números nos ayuda a conocerlos mejor. Con este material es muy fácil visualizar la diferencia entre números pares o impares. En seguida se dan cuenta que a la pieza impar le falta (o sobra) un agujero y porque en la serie numérica aparecen intercalados.

Además, el Numicon nos permite tener referencias visuales que nos ayudan a imaginar cómo son los números. Los juegos para adivinar números ocultos a partir de preguntas que los identifique: ¿Es mayor que 5? ¿Es par?... contribuyen a completar este proceso.

Imagen 3. Actividades para comparar y ordenar.

2.3 Expresar cantidades de distintas maneras. Descomposición

Una cantidad numérica se puede expresar de formas distintas. Trabajar la descomposición de los números permite profundizar en su conocimiento y su dominio permitirá agilizar las estrategias de cálculo. Las descomposiciones de todos

los números son muy importantes, pero se tiene que consolidar especialmente la descomposición del 10.

Hay muchas actividades que nos permiten alcanzar este objetivo, como por ejemplo:

- Descubrir de cuántas maneras distintas pueden conseguir un número.
- Usar la balanza numérica.
- Buscar su pareja para componer el número acordado (cada alumno tiene una pieza).
- Utilizar el Numicon para contar los distintos resultados que se pueden conseguir cuando chutamos la pelota 5 veces a portería.
- Enseñar una pieza y buscar el complementario de un número.
- Construir torres de descomposición
- Utilizar las piezas de Numicon para pasar lista en clase, primero con piezas de uno y después con piezas de dos, tres o 4 según los grupos que formemos.
- Reproducir numéricamente historias o canciones que escenifiquen descomposiciones diferentes con el Numicon según las actividades de los personajes o objetos. Por ejemplo “En la casa viven 5 niños. Cuatro están en la cocina y uno en el dormitorio. A continuación dos de la cocina van al comedor, ...” .

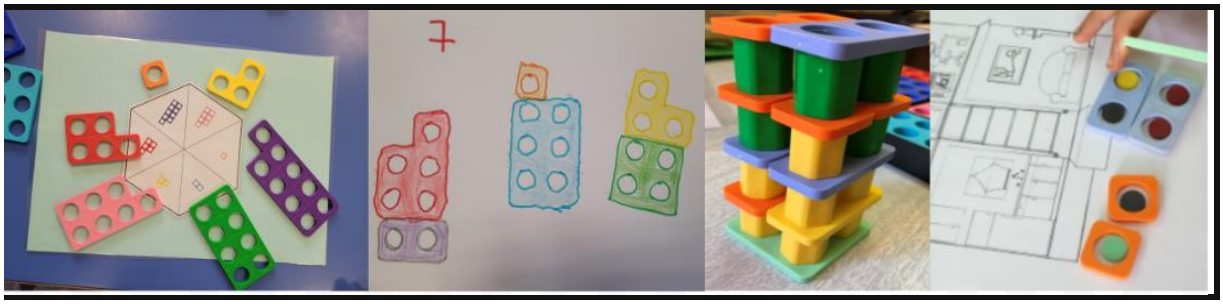


Imagen 4. Actividades de descomposición.

2.4 Series, patrones y simetría

Las características multisensoriales de las piezas Numicon nos permiten trabajar conceptos muy variados. La disposición numérica de las piezas nos facilita el

descubrimiento de patrones, visualizan si es creciente o decreciente, favorecen la detección de errores y sobre todo proporcionan referencias visuales.

Al mismo tiempo su disposición geométrica nos permite realizar clasificaciones, simetrías, entender la diferencia entre giro y rotación, encontrar las piezas concretas para rellenar modelos propuestos, cubrir toda la placa, reproducir dibujos y favorecer la comprensión de juegos difíciles como los sudokus.

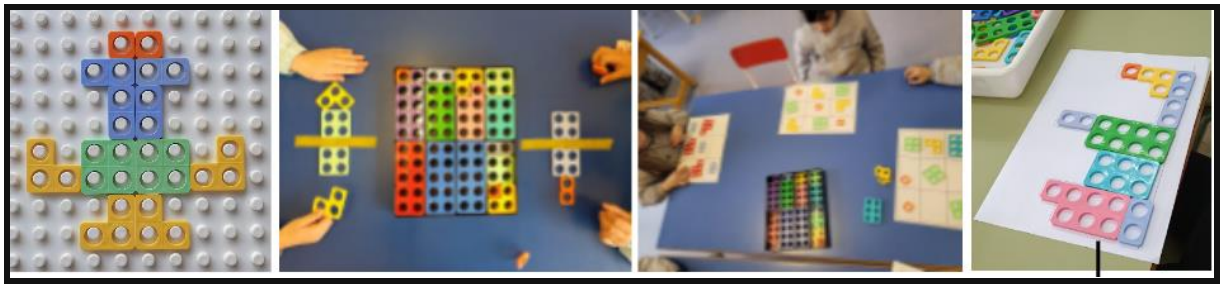


Imagen 5. Actividades para trabajar series, patrones y simetrías

2.5 Operar y descubrir estrategias de cálculo

El Numicon favorece la comprensión del significado de las operaciones y permite crear estrategias de cálculo útiles para la resolución mental de operaciones.

La acción de unir dos piezas y buscar cuál es la pieza resultante, desplazar las piezas en esquemas del todo y las partes o imprimir las piezas sobre plastilina para visualizar el resultado permite al niño interiorizar y verbalizar el significado de sumar de manera activa y significativa.

Al mismo tiempo se pueden visualizar los distintos significados de la resta superponiendo dos piezas. Por ejemplo, si queremos realizar la resta 10 - 7 podemos verbalizar que si a diez le quitamos 7 quedan 3, a 7 le faltan 3 para llegar a 10 o que la diferencia entre 10 y 7 es 3.

Descubrir manipulando el significado de multiplicar como la suma de números iguales o de dividir repartiendo a partes iguales permite a los alumnos crear aprendizajes sólidos.

Este material permite realizar muchas actividades para descubrir estrategias de cálculo. A continuación, proponemos algunas de ellas como ejemplo:

- Calcular el doble de un número
- Sumar 9 unidades con la estrategia diez menos 1
- Visualización de la suma pasando por la decena exacta. Si queremos sumar 8+5, podemos descomponer el 5 en 2 +3 para completar primero el diez y facilitar la suma.
- Añadir o quitar decenas a un número.
- Descomponer un número en decenas y unidades facilita sumar números.
- Realizar de restas con el método “para llegar a…”
- Construir las tablas de multiplicar o aplicar la propiedad distributiva partiendo de otras tablas permite buscar patrones para aplicar en las estrategias mentales.
- Utilizar el esquema del todo y las partes con piezas de numicon no solo facilita la resolución de problemas, sino que también visualiza la mejor estrategia para encontrar el resultado.
- Explicar individualmente el método utilizado para calcular el valor de un dibujo hecho con piezas Numicon permite ver las numerosas estrategias para llegar al mismo resultado.

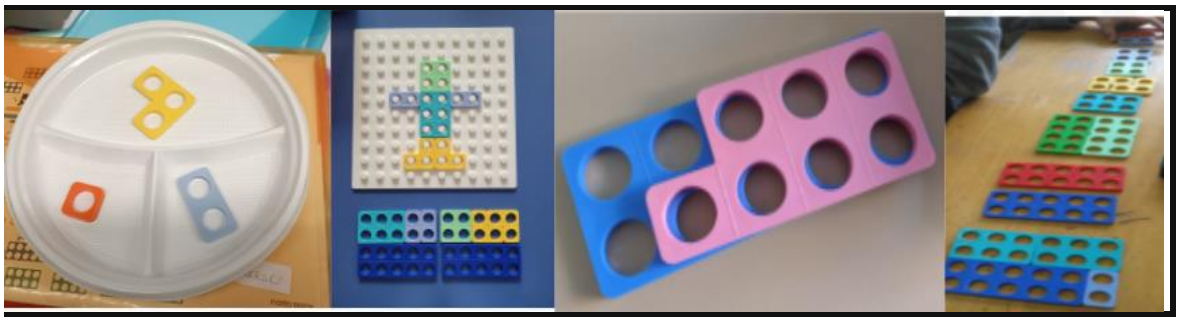


Imagen 6. Actividades para operar y descubrir estrategias de cálculo.

2.6 Múltiplos y divisores

El material Numicon también es útil en los ciclos superiores de primaria para visualizar y entender conceptos como los múltiplos, divisores y fracciones.

Una primera actividad es construir las tablas de multiplicar o los múltiplos utilizando piezas iguales de un número concreto. Con esta actividad se calculan los resultados, pero también nos permite descubrir patrones y propiedades. Por ejemplo, en la tabla del 3 los Numicon visualizan que los resultados con números pares e impares se van intercalando y es muy fácil verbalizar el motivo.

La disposición geométrica propuesta por las piezas de Numicon también favorecen descubrir las relaciones entre las distintas tablas de multiplicar y cómo utilizar la propiedad distributiva para relacionarlas.

Cuando los alumnos han entendido el significado de múltiplo y practicado con distintos números se puede descubrir el concepto de Mínimo Común Múltiplo. Confeccionando los múltiplos de los dos números observamos que van coincidiendo en distintos momentos, pero el que nosotros buscamos es el más pequeño.

El concepto de divisor se puede clarificar con las piezas de colores. Por ejemplo, encontrar los divisores del número 10 es encontrar con qué piezas iguales podemos recubrir el 10 de manera exacta. De esta manera encontramos que los divisores del 10 son el 1, 2, el 5 y el 10.

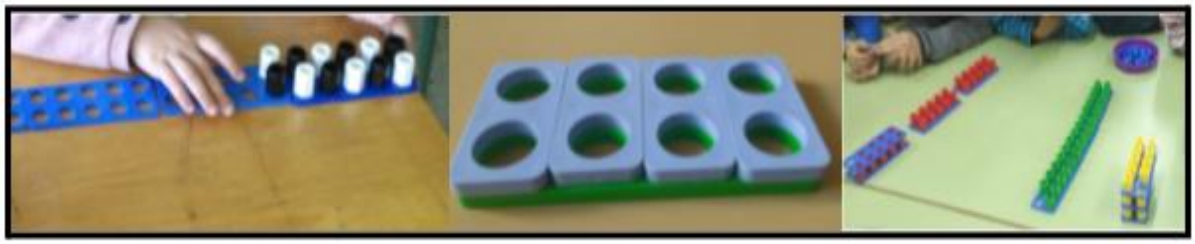


Imagen 7: Actividades de múltiplos y divisores.

2.7 Estadística

En educación infantil el trabajo de la estadística tiene que partir de datos próximos a los alumnos, partir de la vivenciación y utilizar material que favorezca las diferentes fases antes de llegar a la realización de gráficos.

Utilizar el Numicon del 1 para contabilizar cada participante en el recuento estadístico permite entender sus principios y propiedades básicas: la suma de la frecuencia de los distintos valores tiene que ser igual al de los participantes. Todos

los participantes tienen que poder colocar su pieza en alguna de las variables, la cantidad de “unos” que haya en cada variable indica la frecuencia, ...

Pero al mismo tiempo el Numicon del uno que cada niño coloca se puede sumar a los que ya había y como consecuencia obtenemos un número nuevo. Hacer el cambio de piezas de Numicon durante el proceso favorece el recuento y visualiza mejor la recogida de datos. Para realizar los gráficos es mejor utilizar otro material porque la distribución de los números en piezas de dos columnas dificulta la correspondencia con el eje de las frecuencias.

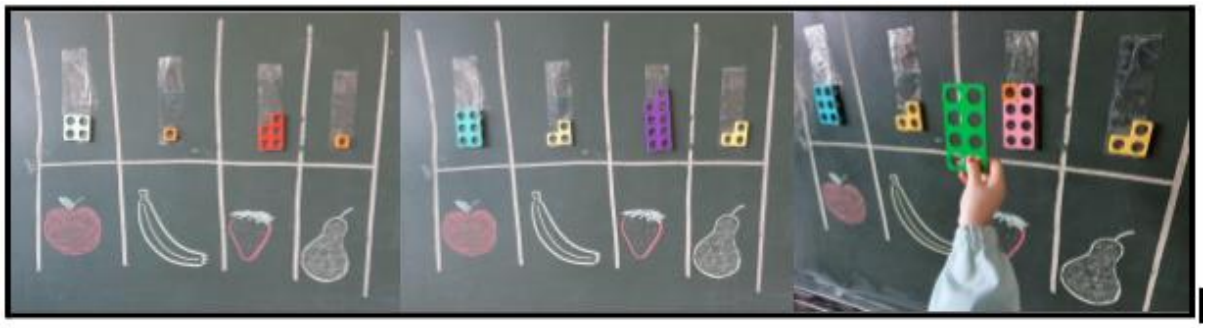


Imagen 8. Proceso del trabajo de estadística

2.8 Pequeñas investigaciones

Los Numicon permiten realizar investigaciones a partir de propuestas diversas. Un ejemplo de reto representativo de este apartado es el siguiente: ¿Cómo será el resultado cuando sumamos dos números pares? ¿Y si sumamos dos impares? ¿Y si sumamos un par y un impar?

Los números pares e impares quedan muy diferenciados en las piezas Numicon. Experimentar este reto con casos particulares permite descubrir resultados concretos para argumentar y generalizar los resultados.

Imagen 9. Investigaciones con Numicon

3. Conclusiones

El Numicon es un buen material para introducir la numeración y el cálculo en las primeras edades porque favorece la visualización y el contaje. Los alumnos pueden manipular libremente para hacer descubrimientos significativos que les permiten entender el concepto y poderlo comunicar.

Sus características multisensoriales permiten proponer gran cantidad de actividades multinivel tanto en educación infantil como en primaria para facilitar los distintos ritmos de aprendizaje y la inclusión.

Referencias

Alsina, A (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años. Propuestas didácticas.* Editorial Octaedro. Barcelona

Biniés, P. (2008). *Conversaciones matemáticas con Maria Antònia Canals.* Editorial Graó. Barcelona.

Torra, M. (2006). *La recta numèrica, una representació per aprendre els nombres.* Monogràfic competències matemàtiques . Guix, nº 329. Novembre 2006

CoR041 Situación de aprendizaje. Tu solución fotovoltaica

Patricia Díez Ortego
patricia.diez@educacion.gob.es
INEE
José Luis Muñoz Casado
joseluis.mcasado@educacion.gob.es
INEE

Núcleo temático: Recursos para el aula

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

En esta comunicación se presenta una ejemplificación de una situación de aprendizaje para Primaria y Secundaria. Este nuevo elemento curricular hace hincapié en la importancia del estímulo a la hora de presentar las tareas y actividades que servirán para desarrollar las competencias específicas a través de los saberes básicos establecidos en los RD 157/2022 y RD 217/2022. A través de una instalación de energía fotovoltaica el alumnado trabajará la resolución de problemas, el razonamiento, las conexiones, la comunicación y representación y el sentido sociafectivo de las matemáticas poniendo en juego diferentes saberes básicos.

Palabras clave: Situación de Aprendizaje, Competencias Específicas, Saberes Básicos.

1. Situaciones de aprendizaje

1.1 ¿Qué son?

Según los reales decretos por los que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de todas las etapas educativas de nuestro actual sistema educativo, en el artículo dos de cada uno de ellos definen las situaciones de aprendizaje como: “situaciones y actividades que implican el despliegue por parte del alumnado de

actuaciones asociadas a competencias clave y competencias específicas y que contribuyen a la adquisición y desarrollo de las mismas.”

Del mismo modo, en el Anexo III se describe más ampliamente y se recogen los detalles de las mismas.

Este nuevo elemento curricular surge de la necesidad de afrontar la enseñanza de las matemáticas de forma competencial, es decir, no sólo tratar los saberes sino su aplicación en el mundo real. Para ello es necesario partir de contextos ricos y significativos para el alumnado, que puedan proporcionar actividades matemáticamente relevantes.

El uso de contextos en matemáticas no tiene porqué devaluar el contenido propiamente matemático ya que en ningún momento se excluyen contextos estrictamente matemáticos relacionados con la ciencia.

Las situaciones de aprendizaje son el elemento curricular donde se interrelacionan todos los elementos del currículo: competencias específicas, criterios de evaluación y saberes básicos.

1.2 Elementos de una situación de aprendizaje

Están formadas por:

- Los datos identificativos que incluyen un título, la etapa, el ciclo o curso y el área, materia o ámbito para el que se diseñan. Señalan la vinculación con otras áreas, materias o ámbitos, su temporalización y la descripción y finalidad de los aprendizajes.
- La conexión con los elementos curriculares: competencias específicas (que están vinculadas con los descriptores de salida), criterios de evaluación y saberes básicos.
- La metodología refleja métodos, técnicas, estrategias y modelos pedagógicos (aprendizaje basado en el pensamiento, aprendizaje basado en problemas, aprendizaje basado en proyectos, aprendizaje cooperativo, aprendizaje –

servicio, clase invertida, gamificación, pensamiento de diseño, técnicas y dinámicas de grupo, otros…)

- La secuenciación describe la actividad y señala los productos evaluables y los instrumentos de evaluación.
- Los recursos, anexos u otra información complementaria o necesaria.

1.3 Características

Una situación de aprendizaje se puede caracterizar por:

- Partir de un estímulo contextualizado, real o ficticio, cognitivamente relevante, de interés para el alumnado y con una finalidad.
- Generar acciones cognitivas a través de tareas y actividades relevantes, matemáticamente significativas, inclusivas y relacionadas con el estímulo elegido, fomentando el diálogo, el pensamiento crítico y la toma de decisiones.
- Ser flexible y contribuir al desarrollo de las competencias específicas a través de los saberes básicos.
- Reconocer al alumnado como sujeto activo fomentando su autonomía para aprender y al profesor como dinamizador de procesos que promuevan el aprendizaje de manera pertinente a las exigencias del contexto de aula

2. Situaciones de aprendizaje

2.1 Estímulo: Tu solución fotovoltaica

Ilustración 20 Tu solución fotovoltaica

2.2 Datos

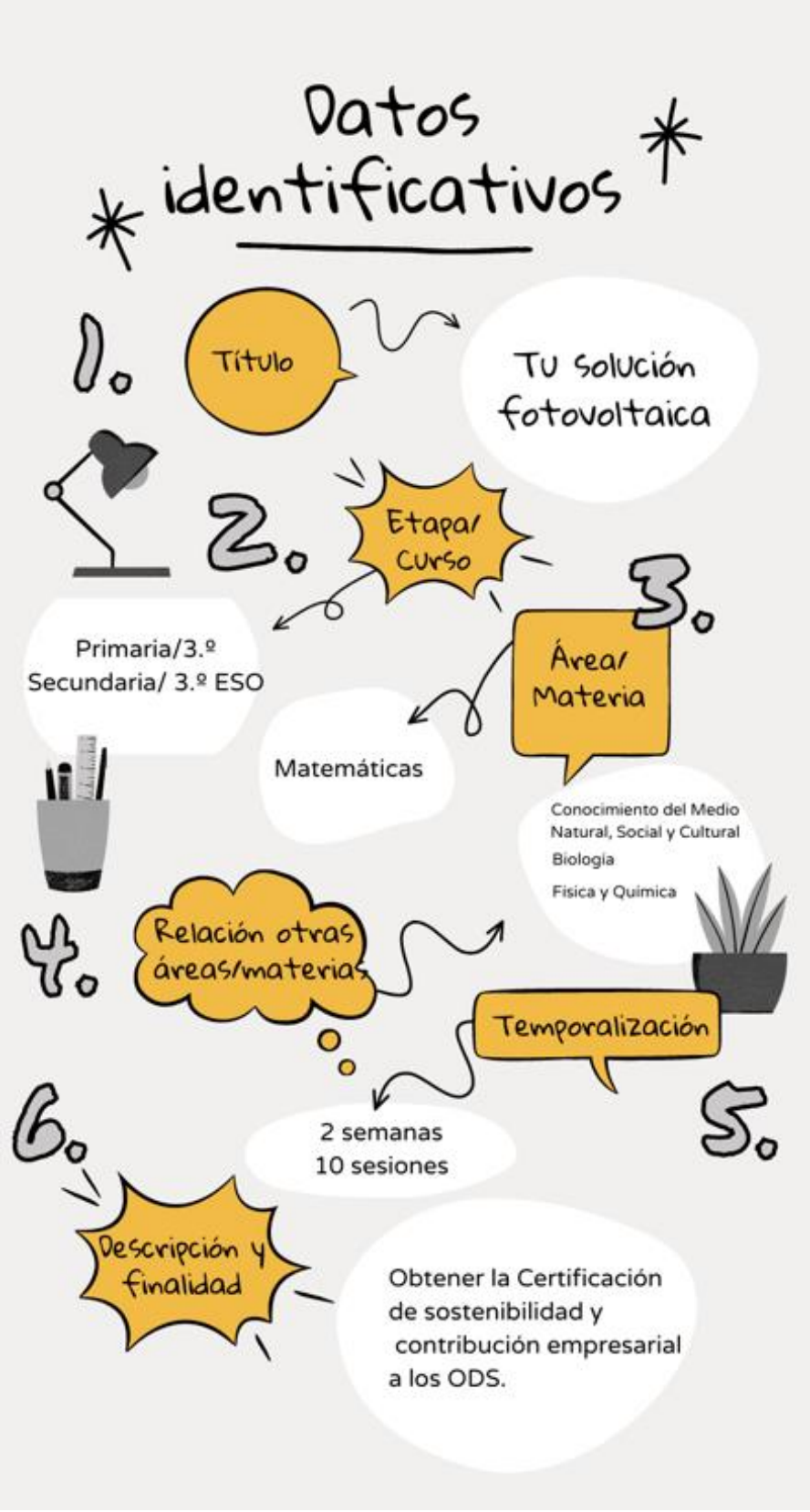


Ilustración 21 Datos identificativos

identificativos

2.3 Conexión curricular

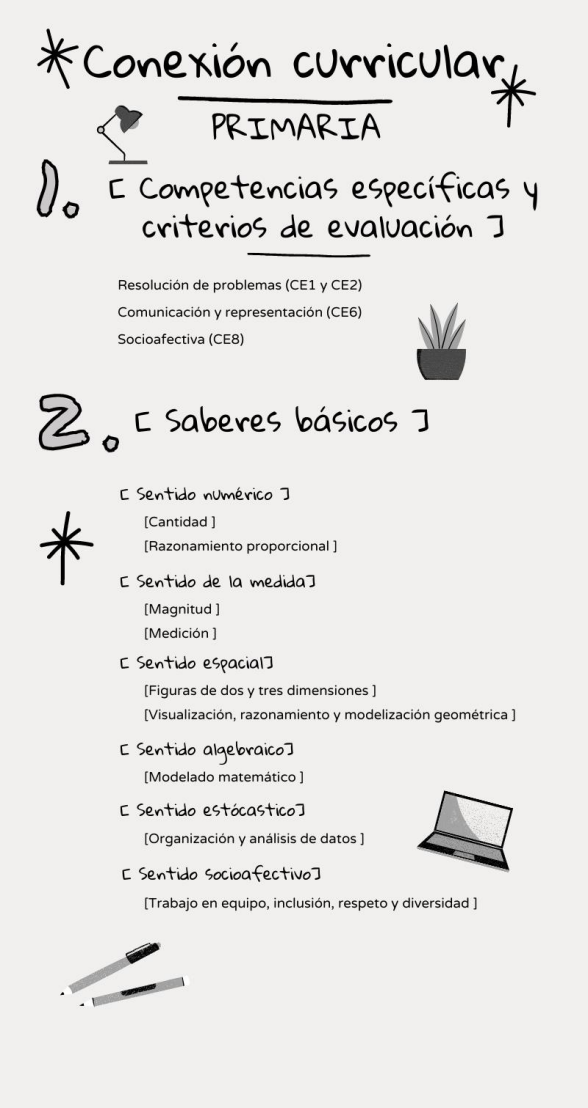


Ilustración 22 Ed. Primaria

Ilustración 23 Ed. Secundaria

2.4 Metodología

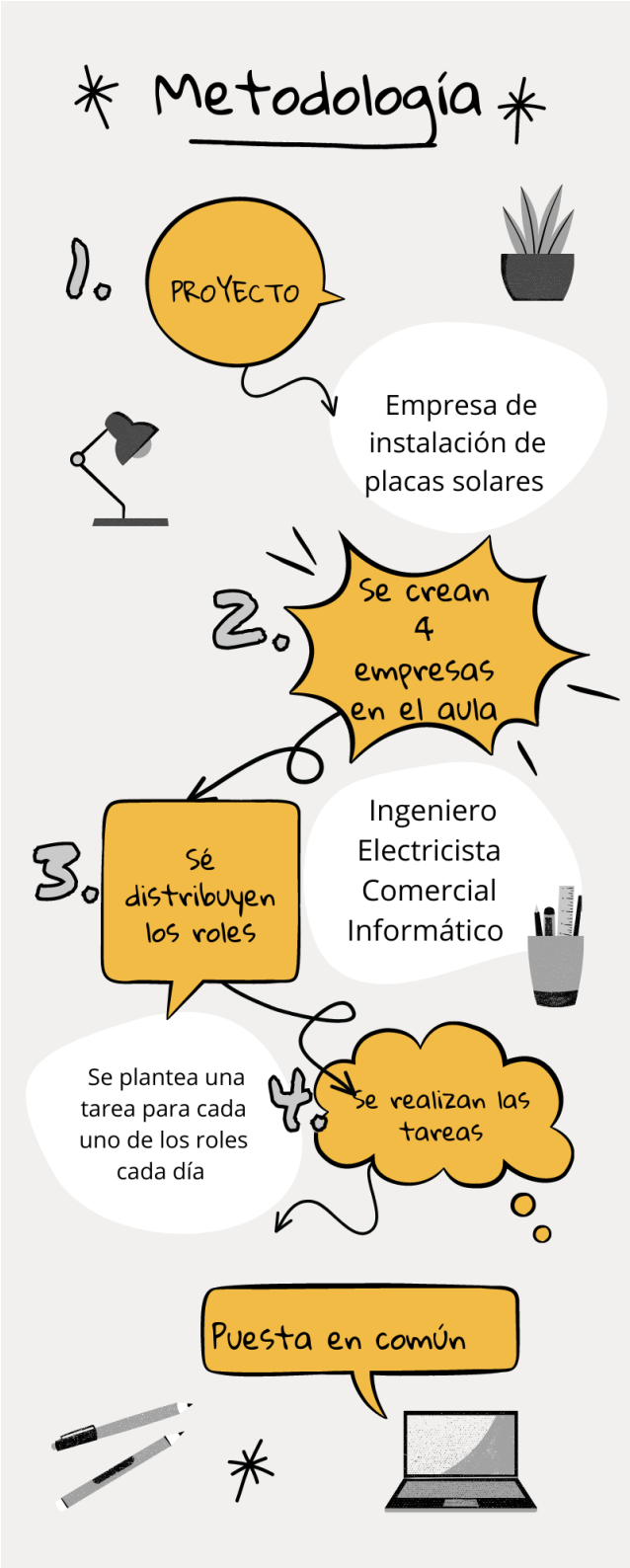


Ilustración 24 Metodología

2.4 Tareas

Ilustración 25 Actividad ingeniero

Ilustración 26 Actividad comercial

Referencias

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.

CoR043 GeoGebra Discovery en la EGMO 2022

Belén Ariño Morera
marino@ucm.es
Universidad Rey Juan Carlos / Universidad Complutense de Madrid

Núcleo temático: Recursos para el aula, Inclusión.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

En la presentación se mostrará la capacidad (o incapacidad) de GeoGebra Discovery para enfrentarse a los problemas de geometría euclídea propuestos en la reciente European Girls' Mathematical Olympiad (Hungría, 6-12 de abril de 2022). Tras una breve introducción al contexto de esta olimpiada y a GeoGebra Discovery, se describirán los problemas y se tratará de resolverlos con GeoGebra Discovery, señalando finalmente la relación entre las dificultades encontradas por las componentes del equipo y por GeoGebra, lo que puede contribuir al establecimiento de criterios sobre el interés (y la complejidad) de los resultados obtenidos automáticamente.

Palabras clave: GeoGebra, Demostración Automática, Geometría Euclídea, Olimpíadas, EGMO.

1. EGMO (European Girls' Mathematical Olympiad)

La EGMO (European Girls' Mathematical Olympiad, [EGMO], 2022), la Olimpiada Europea Femenina de Matemáticas, es una competencia internacional de un estilo similar al de la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO). Es un examen que tiene lugar a lo largo de dos días y en el que cada equipo participante puede mandar hasta cuatro alumnas de enseñanzas medias. Se creó en 2012, por iniciativa del Reino Unido, inspirada en la Competencia China Femenina de Matemáticas (que ahora es un evento internacional), con el objetivo de abrir más espacios para la participación de mujeres en concursos matemáticos internacionales. España

participa ininterrumpidamente desde 2016 (siete ocasiones). La Comisión de Olimpiadas de la Real Sociedad Matemática Española ([RSME], 2022), que gestiona la Olimpiada Matemática Española (OME), configura el equipo español de la EGMO a partir de los resultados de la OME. Véase (Real Sociedad Matemática Española: European Girls' Mathematical Olympiad [RSME-EGMO], 2022), para más detalles sobre la participación española en esta Olimpiada a lo largo de los años.

Este año tuvo lugar la undécima edición de la Olimpiada Femenina Europea (EGMO) en la ciudad de Eger (Hungría), del 12 al 16 de abril de 2022, con la participado de 57 países, de ellos 31 europeos, pero también incluyendo –fuera de la competición oficial-- países de todos los continentes, tales como USA, Perú, Australia, Mongolia, Japón o Túnez (European Girls' Mathematical Olympiad 2022, [EGMO2022], 2022), El equipo español --cuatro alumnas entre 16 y 17 años--logró la mejor posición en la historia de su participación, ocupando la posición 22 por países (sin contar los países invitados, en ese caso sería el 38 de 57), con una participante logrando una medalla de bronce y otras dos participantes logrando menciones de honor (Equipo Español: European Girls' Mathematical Olympiad 2022, [Equipo Español:EGMO2022], 2022).

2. GeoGebra Discovery

GeoGebra Discovery (Kovács, 2022) es una versión experimental de GeoGebra. Contiene algunas características de última generación de GeoGebra que se encuentran bajo un fuerte desarrollo y que, por lo tanto, aún no están diseñadas para el uso diario, por lo que no están incluidas en la versión oficial de GeoGebra. Está previsto que cada función, una vez considerada suficientemente estable, se agregue también a la versión oficial de GeoGebra.

Como se describe en Recio, Van Vaerenbergh, Vélez (2020), GeoGebra Discovery ofrece al usuario la posibilidad de realizar una rica variedad de tareas geométricas:

- Probar automáticamente la veracidad o el error de una afirmación conjetural dada (comandos Demuestra y DemuestraDetalles)

- Descubrir automáticamente cómo modificar una figura dada para que una declaración incorrecta se vuelva verdadera (también llamado descubrimiento automatizado, comando EcuaciónLugar)
- Descubrir automáticamente la relación existente entre algunos elementos concretos de la figura dada (comando Relación)
- Descubrir automáticamente todas las afirmaciones que son verdaderas y que involucran un elemento en la figura seleccionada por el usuario (comando Descubrir)
- Descubrir automáticamente "todas" las propiedades de cierto tipo (perpendicularidad, paralelismo, ...) que involucran todos los elementos de una figura dada (disponible como una aplicación web en http://autgeo.online/ag/automated-geometer.html?offline=1).

Además, se han mejorado algunos de estos comandos al incluir la posibilidad de tratar con propiedades geométricas que se verifican sobre los números reales (desigualdades).

Dado que varios de estos comandos tratan de modo combinatorio (es decir, proponiendo todas las combinaciones de tres puntos que halla en la construcción y verificando si están alineados, etc..) es importante (y difícil) establecer criterios sobre el interés de los resultados obtenidos: son triviales, son complejos…etc.

3. Dos problemas de geometría euclídea

El concurso EGMO propone la resolución de 6 problemas, tres en cada uno de los dos días (Problemas: European Girls' Mathematical Olympiad 2022, [Problemas: EGMO2022], 2022). Este año, de los seis problemas, dos (el 1 y el 6) han sido de geometría euclídea, otro de ellos es de carácter combinatorio y los otros tres tienen que ver, groseramente hablando, con números. A continuación, traducimos los problemas 1 y 6:

Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo con BC < AB y BC < AC. Considere los puntos P y Q en los segmentos AB y AC, respectivamente, tales que P ≠ B, Q ≠

C y BQ = BC = CP. Sea T el circuncentro del triángulo APQ, H el ortocentro del triángulo ABC y S el punto de intersección de las rectas BQ y CP. Probar que los puntos T, H y S están en una misma recta.

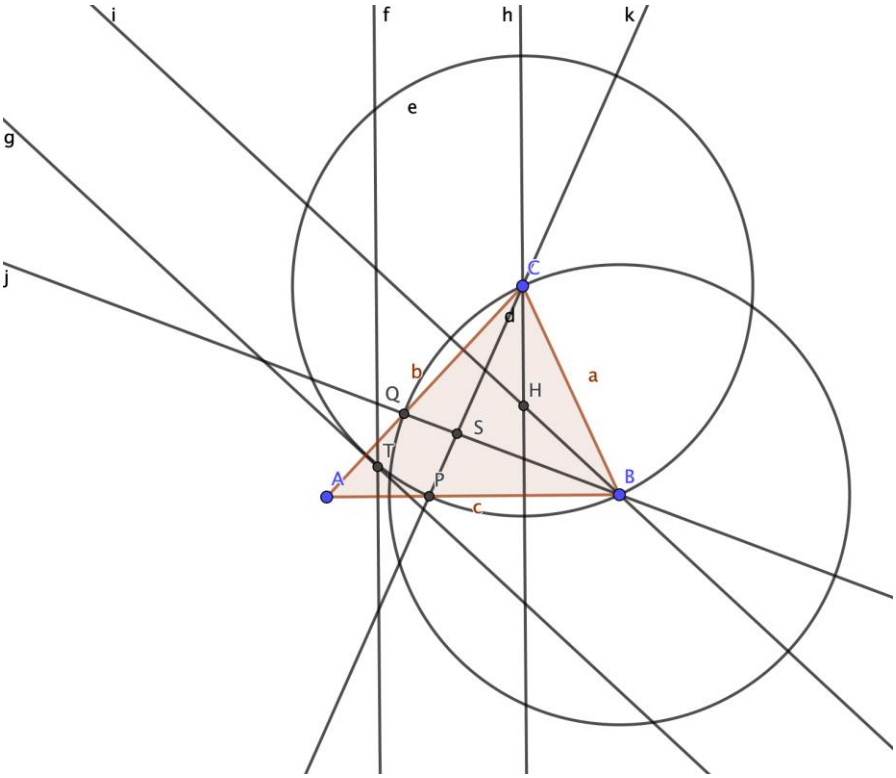


Figura 1: Problema 1. Se ha construido T como intersección de las mediatrices de AP y AQ, f y g.

Problema 6. Sea ABCD un cuadrilátero cíclico con circuncentro O. Sea X el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos ∠DAB y ∠ABC; Y el de las bisectrices de los ángulos ∠ABC y ∠BCD; Z el de las bisectrices de los ángulos ∠BCD y ∠CDA; y sea W el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos ∠CDA y ∠DAB. Sea P el punto de intersección de las rectas AC y BD. Se supone que los puntos O, P, X, Y, Z y W son distintos.

Probar que O, X, Y, Z y W están sobre una misma circunferencia si y sólo si P, X, Y, Z y W están sobre una misma circunferencia.

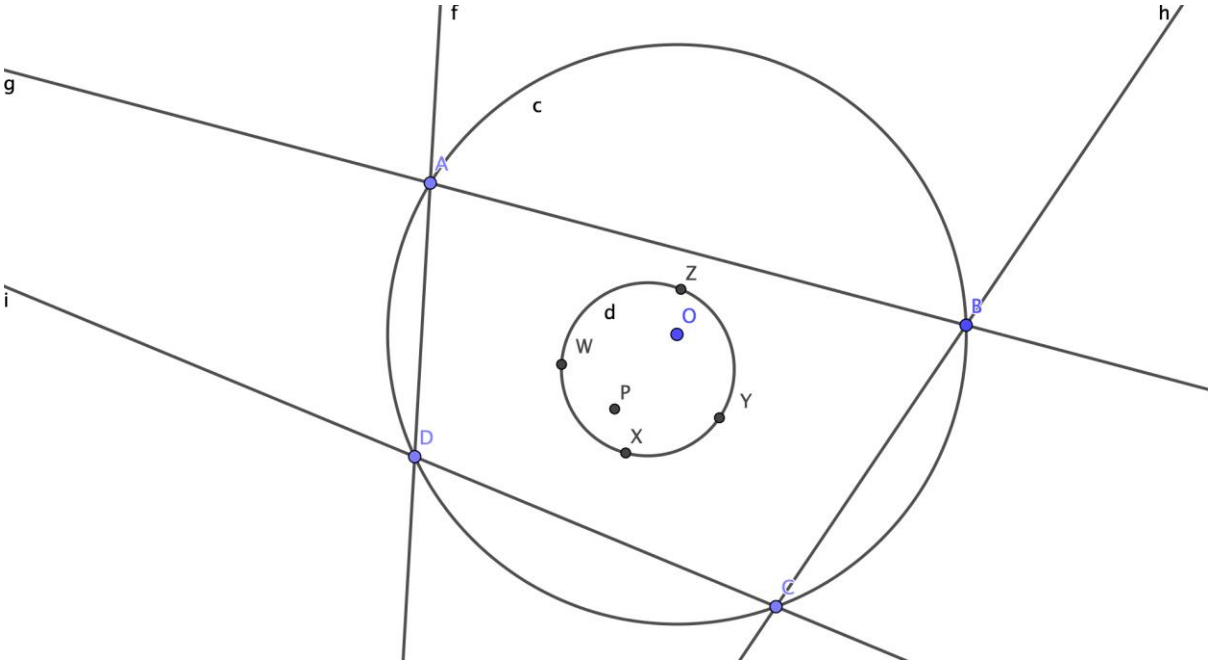


Figura 2: Se ha construido una circunferencia c con centro en O y sobre la misma los cuatro vértices ABCD del cuadrilátero. Tras construir X, Y, Z, W, vía el comando Bisectriz, se halla la circunferencia d que pasa por X,Y,Z (y que resulta contener también a W). A continuación, se mueve algún vértice del cuadrilátero para estudiar cuándo O o P están en d.

3. Solución con GeoGebra Discovery

El problema 1 se resuelve de manera inmediata con GeoGebra. Como se ve en la Figura 3, si se plantea a GeoGebra que calcule la Relación({T,S,H}), la respuesta (simbólica, matemáticamente correcta, no aproximada) es que están alineados excepto en ciertos casos degenerados. En la misma Figura se puede ver también el resultado de preguntar directamente a GeoGebra que demuestre la alineación de estos tres puntos (y contesta “true”).

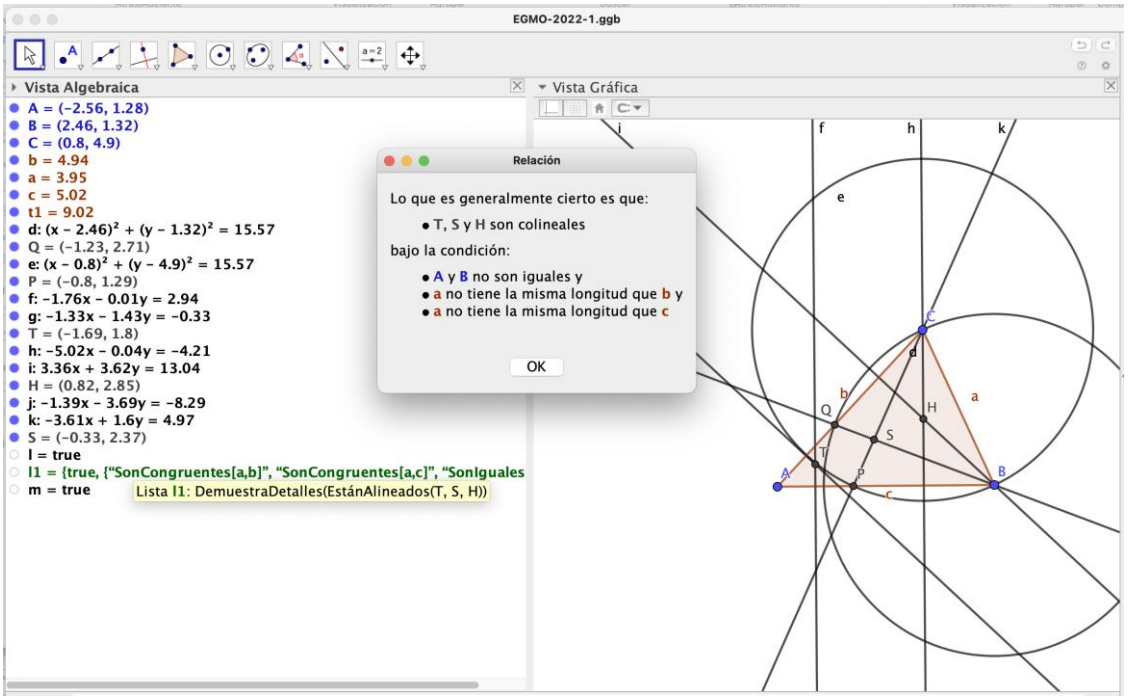


Figura 3: Solución del Problema 1

Obsérvese que no ha hecho falta usar que el triángulo dado sea acutángulo con BC < AB y BC < AC. Ver Figura 4 para una solución en la que BC >AB.

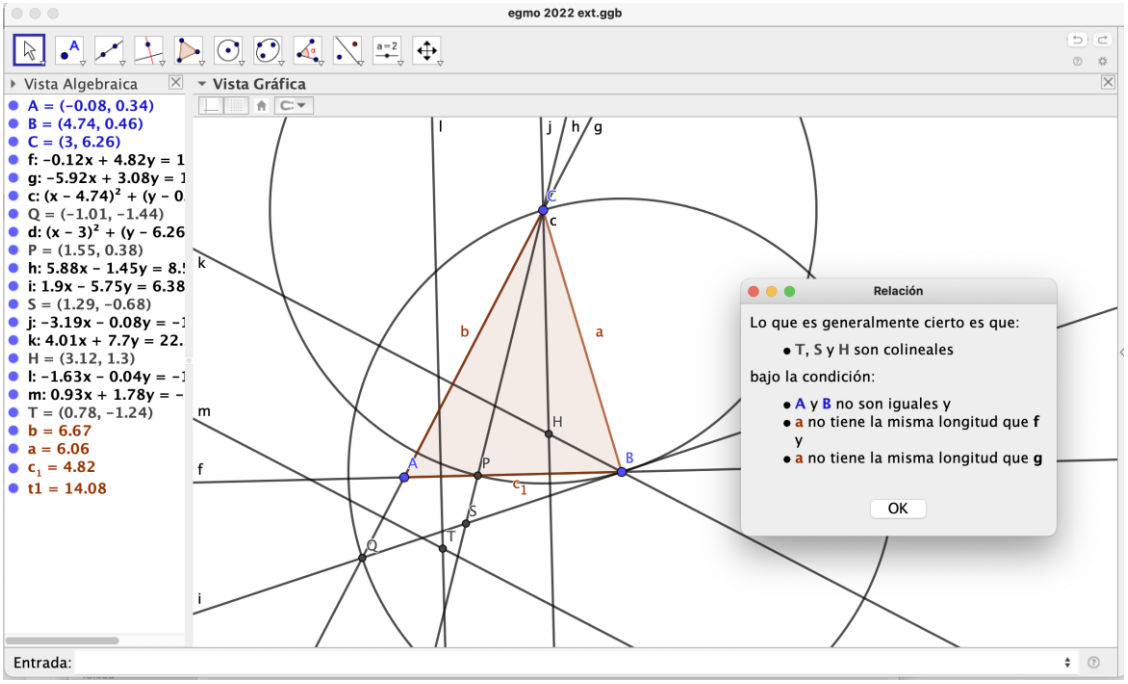


Figura 4: Problema 1 generalizado.

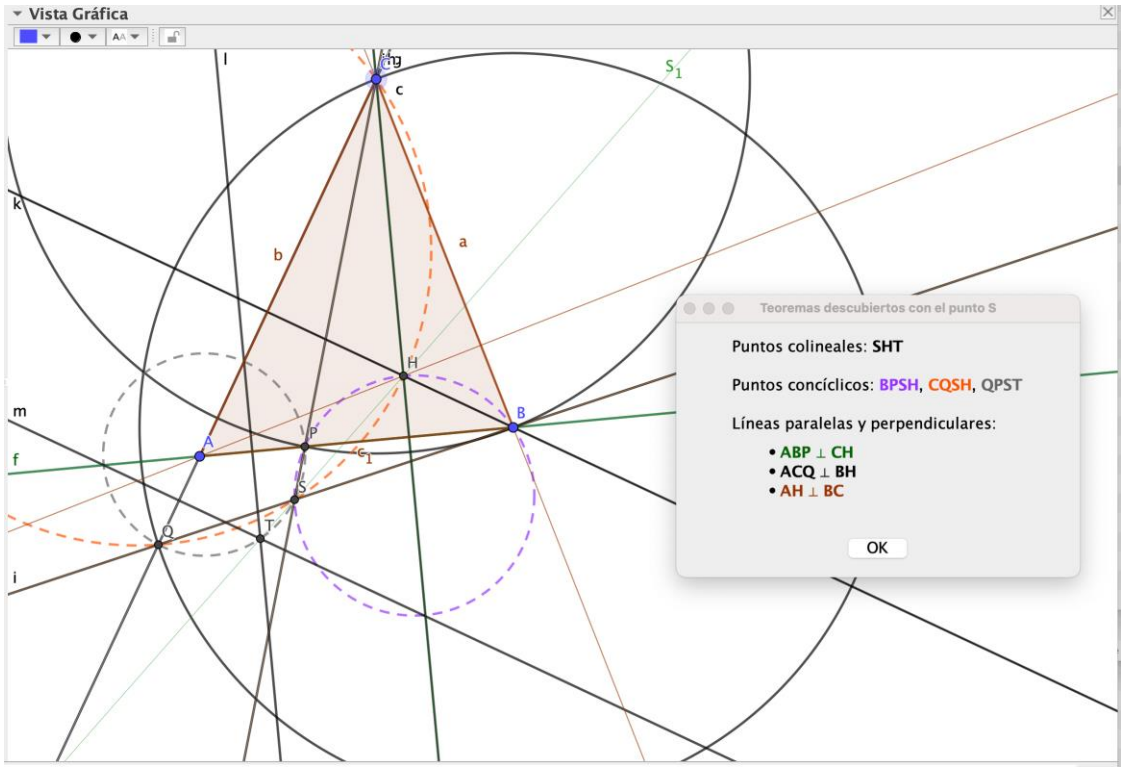


Figura 5: Alineación de T, S, H encontrada simplemente pidiendo a GeoGebra que Descubra todos los teoremas que involucren a S.

Por el contrario, GeoGebra no es capaz de resolver el Problema 6. Se plantea, en primer lugar, verificar (con Relación o Demuestra, etc.) lo que parece ser cierto a simple vista: el que X, Y, Z, W están en la misma circunferencia. Tampoco es posible hallar el lugar geométrico de –digamos– el vértice C para que O, X, Y, Z (y, si la conjetura anterior es cierta, W) estén en la misma circunferencia. La idea es que, una vez sepamos que propiedades tiene que tener C para que O, X, Y, Z sean co-cíclicos, tal vez podamos estudiar si tales propiedades implican, asimismo, que P esté en la misma circunferencia.

Pero en todos los casos, GeoGebra no es capaz de terminar los cálculos, tal vez debido a que el comando Bisectriz conlleva una construcción en la que hay que elegir entre la bisectriz interna o externa, y ellos implica el manejo de signos, lo que hace muy complejo todo el proceso de cálculo.

4. Puntuación del equipo en los problemas 1 y 6.

Las cuatro participantes del equipo español obtuvieron las siguientes puntuaciones (sobre 7):

Problema 1: C1=1, C2=7, C3=0, C4=1
Problema 6: C1=0, C2=1, C3=0, C4=0

Nótese que C1 y C3 obtuvieron Mención y C2 Medalla de Bronce. También se puede observar en el listado de resultados en la web de EGMO 2022 que la puntuación española total (9 puntos obtenidos por 4 personas, sobre un total de 28 posibles puntos en el Problema 1; y 1 punto en total para el Problema 6) situaría al equipo español entre los diez últimos. Otros datos accesibles en esa web muestran que la media de puntuación del Problema 1 en todos los participantes era algo más de 4.6 puntos, frente al 1.05 de la media de puntuación del Problema 6, la más baja tras el Problema 3 (0.78), un problema en el que el equipo español puntuó mejor que en el 6 y que en el 2.

5. Conclusiones finales

Dos conclusiones: una, relativa a nuestro currículo; otra, más informática. En primer lugar, y sin ánimo de presentar un estudio estadísticamente válido (lo que exigiría una muestra mucho más amplia), parece desprenderse, de la observación del comportamiento del equipo español ante los problemas de geometría euclídea planteados, que las participantes españolas tienen un cierto déficit (en comparación con la mayoría de países participantes) de conocimientos en este ámbito, incluso considerando sólo el Problema 1, más sencillo –donde la puntuación del equipo español está claramente por debajo de la media (2.25 frente a 4.6). Lo mismo pasa con el Problema 6, donde nuestra media es de 0.25. Y sin que esto suponga infravalorar a las participantes que, como hemos señalado, obtuvieron dos menciones de honor y una medalla de bronce. Es, claramente, un problema curricular.

La otra conclusión, relativa al uso de GeoGebra en la clase de secundaria, señala, por un lado, la inmediatez y facilidad con la que este programa ofrece a los alumnos una certeza rigurosa sobre la verdad de ciertas propiedades; lo que puede dificultar el interés de estos por abordar tales tareas. Y, por otro, la dificultad –que,

adecuadamente tratada, puede llegar a ser una fuente de inspiración y motivación—que parece inherente en otro tipo de problemas, como el Problema 6, por su formulación ("prueba que xxx si y solo si yyy") y elementos involucrados (ángulos, bisectrices, que implican un marco de trabajo con números reales, mucho más complicados de procesar que los complejos)…Tal vez un estudio sistemático de las características que están detrás de estas dificultades podría colaborar a hacer que los algoritmos de descubrimiento automático en GeoGebra se afinen para enfocarse hacia la obtención de resultados interesantes desde una perspectiva que, justamente, habría que definir con más precisión…

Referencias

European Girls' Mathematical Olympiad. (26 de abril, 2022). https://www.egmo.org

European Girls' Mathematical Olympiad 2022. (26 de abril, 2022). https://www.egmo.org/egmos/egmo11/

Equipo Español. European Girls' Mathematical Olympiad 2022. (26 de abril, 2022). https://www.egmo.org/egmos/egmo11/countries/country45/

Kovács, Z.: GeoGebra Discovery. A GitHub project. (26 de abril, 2022). https://github.com/kovzol/geogebra-discovery.

Problemas: European Girls' Mathematical Olympiad 2022, [Problemas:EGMO2022], 2022). https://www.egmo.org/egmos/egmo11/solutions.pdf

Real Sociedad Matemática Española. Comisión de Olimpiadas. (26 de abril, 2022). https://www.rsme.es/la-sociedad/organizacion-interna/comisiones-comites-y-grupos/comision-de-olimpiadas/

Real Sociedad Matemática Española: European Girls' Mathematical Olympiad. (26 de abril, 2022). https://www.rsme.es/european-girls-mathematical-olympiad/

Recio, T.; Van Vaerenbergh, S.; Vélez, M. P. (2020). Herramientas de Razonamiento Automático en GeoGebra: qué son y para qué sirven. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. Año XVI - Número 59. Agosto 2020, páginas 08-15. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/202

CoR044 Una experiencia de pensamiento computacional en la etapa 3-6 años con BEE-BOT®

Álvaro Aguilar González(1)
aguilaralvaro@uniovi.es(1)
Universidad de Oviedo (1)

Laura Muñiz Rodríguez(2)
munizlaura@uniovi.es(2)
Universidad de Oviedo (2)

Luis J. Rodríguez Muniz (3)
luisj@uniovi.es(3)
Universidad de Oviedo (3)

Nair Fernández Monforte(4)
UO266818@uniovi.es(4)
Universidad de Oviedo (4)

Núcleo temático: conexiones, recursos para el aula

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Infantil

RESUMEN

El presente trabajo muestra una experiencia llevada a cabo con alumnado de la etapa 3-6 años de Educación Infantil. La experiencia tiene como objetivo la adquisición de competencias propias del pensamiento computacional, mediante el uso de Bee-Bot® y del aprendizaje basado en la resolución de problemas, en este caso, problemas matemáticos de orientación espacial. Los resultados señalan que el alumnado posee unas habilidades específicas relacionadas con el pensamiento computacional según su grupo de edad y según la actividad desarrollada. Se concluye que la incorporación de la tecnología y, particularmente, de las destrezas computacionales, complementa las habilidades que paralelamente se adquieren en otros campos.

Palabras clave: Pensamiento Computacional, Educación Infantil, Bee-Bot, Orientación Espacial.

1. Introducción

El desarrollo de las habilidades lógico-matemáticas es uno de los objetivos que tiene el segundo ciclo de Educación Infantil (Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP], 2022). Estas pueden adquirirse desde diferentes aproximaciones y estar enfocadas en los distintos ámbitos de desarrollo, a través de enfoques globalizados. Esto implica integrar la enseñanza de las matemáticas en propuestas didácticas que incluyan el resto de las áreas y no sólo el área del currículo a la que estas pertenecen. La resolución de problemas en las primeras edades de la infancia es uno de los medios y de los fines para adquirir algunas de estas habilidades (Alsina, 2012).

El modelo de aprendizaje de matemáticas que se quiere llevar al aula con esta experiencia sigue las teorías socioconstructivistas de la educación matemática (Planas y Alsina, 2009). Así, el alumnado aprende mediante un proceso de adaptación y de interacción social, resultado de dar solución a las situaciones que se le presentan en el aula (Ruiz Higueras, 2005). Con este posicionamiento nos acercamos al aprendizaje a través de la resolución de problemas, donde se le presenta al alumnado una situación-problema la que tienen que buscar solución, desarrollando y utilizando, entre otras, habilidades lógico-matemáticas.

La presencia de la tecnología en nuestro día a día ha transformado nuestra sociedad, incluyendo los procesos de enseñanza-aprendizaje: ya no se enseña ni se aprende del mismo modo que hace una (o dos) décadas. Sin embargo, en España, este proceso de digitalización todavía no se encuentra en un nivel avanzado, como se indica en la investigación realizada por la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología [FECYT] (2016). Las nuevas directrices curriculares (MEFP, 2022) incluyen de manera explícita en Educación Infantil el desarrollo de las destrezas del pensamiento computacional mediante la manipulación y en conexión con el método científico. Esta nueva incorporación supone un avance significativo en lo que respecta a las competencias que se han desarrollar, y supone que en el futuro este alumnado será competente en aspectos de pensamiento computacional.

El objetivo de este trabajo es analizar el uso del Bee-Bot® para el desarrollo del pensamiento computacional en el segundo ciclo de Educación Infantil.

2. Marco teórico

La introducción de la tecnología en la escuela es algo reciente, y sigue aún en proceso de desarrollo en España. Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) se encuentran incluidas en el currículo como competencia, pero por diversas razones no se desarrollan en el aula tanto o del modo como se debería (Flores-Tena, et al., 2021; Macià Bordalba y Garreta Bochaca, 2017). Principalmente puede estar asociado a tres problemas que el profesorado destaca respecto al uso de las TIC dentro del aula: 1) El acceso a las TIC, en lo que a una falta de recursos se refiere; 2) Problemas de carácter pedagógico, el profesorado no tiene un nivel de competencias adquirido para diseñar materiales didácticos empleando estas tecnologías; 3) Problemas actitudinales, existe cierta resistencia tanto por parte del profesorado como de las familias a la hora de introducir las TIC en el aula de manera habitual (Sosa Díaz y Valverde Berrocoso, 2020).

Dentro del campo en el que se desarrollan las TIC en los últimos años se ha comenzado a incluir las destrezas computacionales. Aunque no existe una definición unánimemente aceptada del pensamiento computacional (Wing, 2008). El Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022) señala dos características principales: la programación (desarrollar y dar instrucciones que permitan que un dispositivo digital las ejecute) y el pensamiento computacional como aproximación al método científico y a la resolución de problemas.

Además, en sus competencias establece que dichos procesos son propios tanto de las destrezas de pensamiento computacional y de diseño como del método científico, y se aplicarán descomponiendo una tarea en otras más simples, formulando y comprobando hipótesis, explorando e investigando, relacionando conocimientos y planteando ideas o soluciones originales (MEFP, 2022).

El pensamiento computacional es una habilidad de la que se comienza a hablar en España y que va asociada con la robótica educativa, y ha permitido que en niveles

iniciales como la educación infantil se hayan llevado a cabo propuestas muy interesantes como la de Pérez-Bui y Diago (2018) de explorar la capacidad de estudiantes de infantil y primaria para elaborar esbozos de programas a partir de su lenguaje propio o también, las investigaciones que tratan los conceptos de robótica educativa como una herramienta para potenciar las habilidades y destrezas técnicas en el proceso de instrucción en matemática, fomentando el uso de la programación en entornos tecnológicos (Ferrada et al., 2019; Ricart-Aranda et al., 2019).

3. Metodología

Lo que nos ha permitido desarrollar, en el último ciclo de Educación Infantil, esta propuesta es algo que no se había llevado a cabo antes por ningún/a autor/a con anterioridad dado que cuando se refieren a edades tempranas suelen ser los primeros cursos de la etapa de educación primaria y/o el último curso del segundo ciclo de Educación Infantil (E.I.), sin embargo, con este trabajo se aplica en el aula una propuesta que lleva el pensamiento computacional a través de los Bee-bot® en todos los cursos del segundo ciclo de Educación Infantil de manera simultánea con una secuencia planificada de trabajo sobre la orientación espacial. Esto nos ha permitido obtener una fotografía de los diferentes niveles de desarrollo que se tienen de manera particular, por lo que, con este trabajo no se pretende extrapolar dichos resultados de manera global, si no que lo tratamos como una aproximación al fenómeno desde un paradigma interpretativo (Bassey, 1999), ya que el propósito es comprender, descubrir, e interpretar la realidad que nos rodea.

La experiencia de aula se ha desarrollado a través de unas actividades diseñadas específicamente para respetar la situación sociosanitaria del momento (COVID-19) en un centro público de Langreo (Asturias). Se ha llevado a cabo en cuatro aulas: una de 3 años (16 alumnos), una de 4 años (18 alumnos), y dos de 5 años (20 y 19 alumnos). Cada actividad estaba diseñada teniendo en consideración las características inherentes al desarrollo cognitivo de los alumnos, y todas estaban contextualizadas en desarrollar las nociones espaciales, en concreto, la orientación espacial, por lo que aunque el concepto matemático de ellas es el mismo, los niveles y el contexto del aula hacen que sean únicas.

Las actividades en el aula se pusieron en práctica mediante una explicación inicial grupal para todo el alumnado por parte de una de las investigadoras y una pequeña demostración de cómo se maneja lun Bee-Bot®, a partir de ese momento se dieron las instrucciones específicas de la actividad que se había diseñado para cada grupo. Las maestras tutoras que se encontraban en el aula tenían la indicación de no intervenir en la actividad principal. Cabe destacar que el resto de los grupos se encontraban realizando otra tarea, actividad o juego utilizando Bee-Bot® para que no viesen la solución que sus compañeros daban al problema. No existía una evaluación específica para la resolución que se dio por parte del alumnado, sino que tenían que llegar a cumplir el objetivo de la actividad, dando por correcto cualquier solución que se hubiese elegido.

Se llevó a cabo una recogida información activa, es decir, se registraron todos los aspectos posibles de lo que pasaba en el aula en cuanto al modo de resolución desarrollado por el alumnado. En algunas ocasiones se solicitó por parte de la investigadora que justificasen algunos razonamientos y decisiones al alumnado. Se registró también el modo en el que el alumnado interaccionaba entre sus iguales, si había alguien con la iniciativa en el grupo, si consultaban y tenían en consideración las opiniones de los otros compañeros o si se colaboraba para tomar una decisión común.

Finalmente, la información se analizó desde un posicionamiento interpretativo para obtener resultados sobre cómo el alumnado resolvió el problema planteado, si puso en práctica el pensamiento computacional o si se trabajó en equipo.

4. Diseño y desarrollo de las actividades

Las actividades que conforman esta experiencia fueron diseñadas para que el alumnado pusiera en práctica la resolución de problemas utilizando Bee-Bot® y están orientadas al desarrollo del pensamiento computacional y espacial, en los tres cursos del segundo ciclo de Educación Infantil, partiendo de la premisa de observar cómo se enfrenta el alumnado a un problema similar en los tres cursos.

4.1 Materiales

Para implementar esta experiencia se necesitan los siguientes materiales:

Tablero específico de Bee-Bot®: se diseñó uno para cada grupo de edad, en el caso de tres años sobre el reciclaje, en el caso de cuatro años un mapamundi y para cinco años un sistema solar (Imagen 1). El tablero de cada aula estaba diseñado con una temática relacionada con el proyecto que se llevaba a cabo dentro de esta.

Imagen: 1. Tableros de Bee-Bot® para cada grupo de edad

Tarjetas de secuenciación: se diseñaron unas tarjetas en las que viene expresado el movimiento del robot mediante flechas, que el alumnado debe utilizar para realizar la secuenciación de movimiento del robot. Las colocarán en la parte de abajo del tablero para saber qué secuencia deben introducir en el robot y así conseguir que este se desplace hasta el objetivo que se ha marcado en el tablero (Imagen 2).

Imagen: 2. Ejemplos de tarjetas de secuenciación

4.2 Actividades

Todo el alumnado que ha participado en este experimento desconoce este material, por lo que independientemente de su edad, para todos es el primer contacto que tienen. Primero, se utilizó el tablero vacío (sin ninguna de las contextualizaciones) para que el alumnado cogiese la referencia espacial de los movimientos que realiza el robot, y se le pidió que realizase secuencias simples de uno y dos movimientos para comenzar a entender su funcionamiento. Una vez finalizada esta actividad, se les planteó el problema específicamente diseñado para su edad (3, 4 o 5 años).

A los diferentes cursos se les explicó que debían realizar libremente un recorrido por el tablero que fuese de un punto A hacia un punto B, estando estos establecidos previamente por el investigador. Eran libres de llevar a cabo el recorrido como quisieran, simplemente tendrían que marcar con la cinta cuál sería este recorrido, posteriormente secuenciarlo con las tarjetas que marcan la dirección y finalmente introducir estas secuencias en el Bee-Bot®. La diferencia entre cursos radica en las diferentes dificultades añadidas a cada actividad, que son desarrolladas a continuación.

4.2.1 Actividad para alumnado de 3 años

Esta actividad ha sido diseñada para el alumnado de tres años teniendo en cuenta la premisa de que este alumnado no tiene adquirido el conteo, ni discrimina izquierda de derecha. Por ello es importante que se utilicen las tarjetas para realizar

la secuenciación, dado que los movimientos que realice el Bee-Bot® serán asociados 1 a 1, no teniendo el alumnado así que contar el número de veces que tiene realizar cada movimiento.

El Bee-Bot® actúa como el objeto a reciclar como podemos ver en la tabla 1 y el alumnado deberá reciclarlo en la correspondiente papelera en función de la premisa que se le dé:

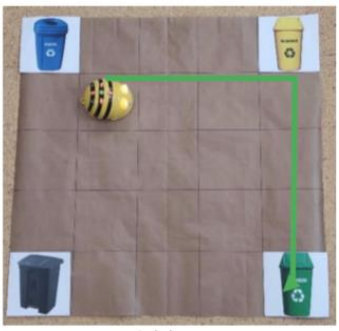
1. Reciclar un papel desde el punto A hacia la papelera de papel.	2. Reciclar un envase desde el punto B a la papelera de plástico.	3. Reciclar una botella desde el punto C a la papelera de vidrio.
		

Tabla 5: Premisas de la actividad para alumnado de 3 años

4.2.2. Actividad para alumnado de 4 años

La diferencia con la actividad planteada para el grupo aula de 3 años es que en este caso el alumnado tenía que realizar el recorrido teniendo en cuenta que van a tener prohibido el paso por algunas casillas del tablero, es decir, no van a poder pasar por algunas casillas teniendo que rediseñar así la ruta del Bee-Bot® para llegar del punto A al punto B.

Las premisas están relacionadas con la temática del tablero (tabla 2):

1. Ir de Norte América a Australia.	2. Ir de la Antártida a Asia sin pasar por Australia.	3. Ir de África a Groenlandia sin pasar por América del Norte, ni por

		el Océano Pacífico.

Tabla 6: Premisas de la actividad para alumnado de 4 años

4.2.3. Actividad para alumnado de 5 años

En este caso el alumnado se encontraba con dos variantes respecto a la actividad diseñada para tres años y con una respecto a la de cuatro: el tablero tenía tanto casillas prohibidas como otras de paso obligatorio, es decir, el Bee-Bot® debía realizar un recorrido de un punto A hacia un punto B evitando ciertas casillas y pasando obligatoriamente por otras.

Las premisas que se dieron son las siguientes (tabla 3):

1. Ir del Sol a Saturno	2. Ir de Neptuno a Saturno pasando por Urano.	3. Ir de Venus a Urano sin pasar por la Tierra.

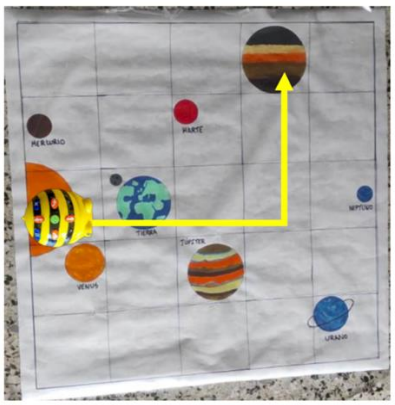
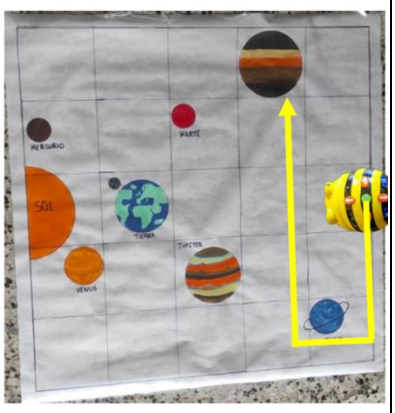
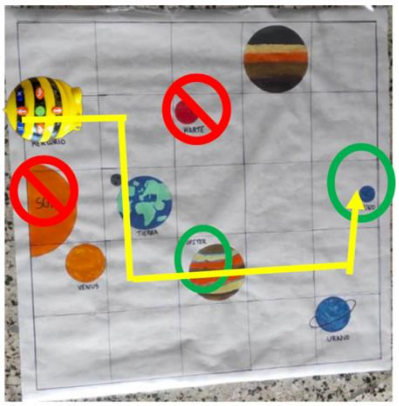




Tabla 7: Premisas de la actividad para alumnado de 5 años

5. Resultados

5.1 Aula de 3 años

La mayor parte del alumnado desarrolló la actividad sin dificultades, es decir, pudieron alcanzar las premisas que se les propuso. Para resolver la actividad, se hicieron tres grupos de trabajo, dentro de cada grupo se pudo observar a dos alumnos que llevaban la iniciativa y se organizaron de manera que, mientras uno cogía las tarjetas, el otro colocaba la secuencia.

Se pudieron observar dificultades asociadas al desarrollo cognitivo como por ejemplo que para introducir la secuencia en el Bee-Bot®, este debía estar siempre orientado hacia delante desde su perspectiva, para no equivocarse al seleccionar las flechas con el sentido correcto. También se pudo observar que las tarjetas simplificaban la tarea si la abeja no estaba orientada en el sentido de la flecha, es decir, si utilizaban las tarjetas que tuviesen el Bee-Bot® siempre orientado hacia delante sin variar en función de la orientación de la flecha.

Con este grupo se pudo observar que para marcar el camino a seguir por el Bee-Bot® no funciona la cinta adhesiva facilitada, si no que deben mover el Bee-Bot® con las manos de casilla en casilla para previsualizar el camino que este va a seguir durante las dos primeras premisas. No es hasta la tercera premisa cuando ya consiguen comenzar a secuenciar sin mover el Bee-Bot®, visualizando el camino

sin una representación sobre el mapa de los movimientos que tienen que realizar antes.

Durante toda la actividad se pudieron observar algunas de las estrategias que llevó a cabo el alumnado, y destacamos que solo un alumno fue capaz de discriminar izquierda-derecha y de mencionarlas de manera correcta, algo que no es común según el desarrollo que tiene el alumnado de estas edades.

Casi todos los grupos desarrollaron la actividad siguiendo los caminos que secuenciaron ellos mismos, a excepción de un equipo que en la segunda premisa en lugar de comenzar dirigiendo el Bee-Bot® en el sentido en el que estaba posicionado en el mapa lo giraron como primer movimiento para dirigirlo en el sentido que consideraron más coherente desde su perspectiva, ya que estaban por un lateral del tablero.

5.2 Aula de 4 años

En esta ocasión se llevó a cabo la actividad en cuatro grupos de trabajo. Al igual que con el alumnado de tres años, el objetivo que tenían que alcanzar se encontraba marcado con una pieza verde, así como las casillas prohibidas se marcaban con piezas rojas, para que se visualizara por dónde iba el recorrido. El mapa plastificado permitió que el alumnado marcase con un rotulador de pizarra el camino que querían recorrer con el Bee-Bot® antes de comenzar la secuenciación.

De manera general, se resolvieron las premisas de la manera que el alumnado se propuso. Casi en la totalidad de ellos, realizaron el recorrido más corto con el Bee-Bot®, tanto cuando había casillas prohibidas (tercera premisa) como cuando sólo tenían que realizar el recorrido de un punto A hacia un punto B.

Aún así se pudo observar que un grupo en la primera premisa hizo pasar el robot por el Océano Atlántico para ir a Oceanía, realizando así un giro más con el Bee-Bot® de los mínimos necesarios. Ante la situación se le preguntó al alumnado por qué este recorrido le resultaba el más lógico y su respuesta fue, que querían pasar por América del Sur. Al realizar la tercera premisa también hicieron un recorrido menos directo por los mismos intereses.

Dado que un grupo de alumnos resolvió los problemas con mayor facilidad, se introdujo una variante: el Bee-Bot® debía comenzar en la casilla de salida al revés. En respuesta a este reto, el grupo giró el Bee-Bot® como primer movimiento en lugar de llevarlo hacia atrás al principio.

De manera general, se puede afirmar que la mayoría del alumnado sigue sin discriminar izquierda de derecha, pero son capaces de secuenciar con las fichas el movimiento del Bee-Bot® sin desplazar este por el mapa. En algunas ocasiones consideran necesario desplazarlo para continuar con la secuencia, pero no con cada movimiento.

5.3 Aula de 5 años

Se diseñó la misma actividad para dos grupos de aula distintos (A y B) dado que el centro es de línea dos para este grupo de edad. Para ambos se siguieron las mismas pautas.

En el aula de 5 años A se llevó a cabo la actividad según estaba prevista a excepción de que no se realizaron todas las premisas por limitaciones de tiempo realizándose solo las premisas 1 y 3.

El grupo, de manera general, realizó ambas premisas sin ningún tipo de dificultades. Pintó el recorrido con un rotulador borrable sobre el mapa en lugar de usar cinta adhesiva. Cuando se realizó la premisa 3 el alumnado entendió las casillas prohibidas, así como las obligatorias. Sin embargo, se presentaron algunas excepciones. Por ejemplo, al realizar la primera premisa un grupo no siguió el camino marcado sino que lo hicieron en zigzag: en un inicio su intención fue mandar el Bee-Bot® de manera diagonal, pero cuando se les dice que deben hacerlo a través de las casillas entonces realizan un zigzag. Con la segunda premisa no utilizaron las tarjetas de secuenciación, hicieron la secuencia pero cuando se tuvo que programar el robot, no las miraron si no que lo hicieron directamente mirando el recorrido del mapa.

Al igual que en el aula de 4 años, para el alumnado que no le presentó dificultad la actividad, se propuso una variable didáctica: en esta ocasión tenían una premisa en

la que se les prohibió el uso de una tecla del Bee-Bot®, para ser exactos una tecla de giro (de las dos que posee). Antes de realizar la premisa se les permitió probar a girar el robot con una sola tecla para que viesen como lo podrían resolver. El alumnado resolvió la premisa sin problemas, trabajaron en común y utilizaron la secuenciación con tarjetas porque ellos mismos consideraron que sino la utilizaban iban a perderse en el mapa.

6. Conclusiones

Para comenzar, se podría afirmar la aportación de los Bee-Bot® como material para desarrollar una experiencia como la que aquí se presenta permite diseñar actividades de muy distinta índole con unas características muy específicas. Se ha podido comprobar el gran interés que suscita en el alumnado este material. Desde el primer momento en el que se presentaron estos robots al alumnado, se mostraron con gran curiosidad hacia a ellos y su funcionamiento, preguntando sobre qué son, cómo funcionan o qué hacen.

Continuando en la línea de la aportación que se da al aula con este material, se ha podido observar que este interés que genera un material desconocido para el alumnado y que además proviene del ámbito de la robótica, provoca que podamos conseguir en el alumnado una atención sostenida que en muy pocos casos podemos lograr teniendo en cuenta a las edades con las que estamos trabajando. Al plantear las actividades el alumnado desde un inicio se ha mostrado impaciente respecto al momento en el que pudieran manipularlos. Además las actividades que se diseñaron se hicieron partiendo del proyecto de aula lo que provocó más interés en el alumnado dado que era el contexto con el que se estaba desarrollando las otras materias y en el que se manejaban con relativa facilidad. En definitiva los Bee-Bot® son un material interesante y versátil para llevar al aula de educación infantil y poder desarrollar las habilidades en el ámbito de la computación, confirmando que a lo largo de la etapa, el alumnado deberá encontrar soluciones o alternativas originales y creativas a diferentes cuestiones, retos o situaciones (MEFP, 2022).

Para esta experiencia se diseñaron dos tipos de tarjetas de secuenciación, unas en las que el Bee-Bot® estaba orientada en el sentido de la flecha y otras en las que el

Bee-Bot® siempre miraba hacia delante desde nuestra posición independientemente del sentido de la flecha. Tras ver al alumnado manipularlas se puede concluir que la flecha debe estar orientada pero el Bee-Bot® no, ya que el alumnado puede confundir la dirección de esta. Por ejemplo: cuando el robot se encontraba orientado hacia la derecha, el alumnado entendía que la siguiente flecha de secuencia que mostrase que querían ir hacia delante sería la que están orientadas hacia la derecha, dado que es la posición en la que el Bee-Bot® está y desde su perspectiva en el tablero esa flecha no gira sino que sigue hacia delante. Esto se había podido observar en el estudio realizado por Diago (2020) en el que menciona el uso de un sistema de tarjetas, y se puede observar en ellas que la abeja está orientada siempre hacia el frente independientemente de la dirección que tenga la flecha que se sitúa encima de la abeja en la misma tarjeta.

Este sistema de tarjetas puede resultar menos útil para el alumnado de una edad mayor. Entre este alumnado de mayor edad se ha podido observar una tendencia generalizada a programar directamente sobre el Bee-Bot® en un inicio. Una vez que se les plantea el uso de las tarjetas las utilizan sin problema.

Respecto al alumnado de menor edad, y que por tanto se espera que tenga un menor desarrollo de las habilidades espaciales, así como del pensamiento computacional, se observaron algunas estrategias comunes que se repetían en algunos casos entre el alumnado con una edad mayor. Necesitan que los materiales sean manipulativos, por ello los objetivos no podían encontrarse pintados sobre el mapa, sino que tenían que ser una pieza que ellos tuvieran que “desplazar” al llegar con la abeja. Con el alumnado de cuatro años sí es posible pintar el recorrido, pero en algunas ocasiones es necesario combinarlo con las piezas físicas para que tengan una referencia visual. Con este alumnado también se ha podido observar una estrategia por intentar minimizar el número de movimientos. Se ha observado una tendencia a realizar siempre el recorrido más sencillo para llegar a dar una solución al problema, es decir, el alumnado tiende a dar una solución que contenga el mínimo número posible de giros y que se realice lo más recto posible.

Con el alumnado de 5 años se ve un salto evidente en su desarrollo cognitivo que permite un grado de dificultad mucho mayor en las actividades propuestas. Además,

otras competencias que ya tienen adquiridas, como el trabajo en equipo, la capacidad de discusión o el manejo de la cadena numérica que les permite introducir las secuencias en bloques de más de un movimiento, facilitan la resolución de estos problemas. De este modo, se puede observar la puesta en práctica de estrategias de otro tipo, como la realización de caminos menos directos respecto a los que se espera que realicen como solución al problema planteado.

En definitiva, trabajando con los Bee-Bot® de una manera cotidiana en el aula podríamos conseguir un increíble desarrollo por parte del alumnado. El desarrollo del pensamiento computacional permite que el alumnado se enfrente a un problema real y lo resuelva a través de las tecnologías, aplicándolas en el aula de una manera útil. Ello conlleva el desarrollo de estrategias como la anticipación y la previsión, mencionadas en el nuevo currículo de educación infantil (MEFP, 2022).

Este desarrollo computacional también está en la línea con otras investigaciones en las que se destacan los beneficios en cuanto al desarrollo de competencias de comunicación, trabajo en equipo, creatividad y resolución de problemas (Flores-Tena, et al., 2021). Cabe destacar que las actividades que se presentaron en el aula iban dirigidas a la orientación espacial, pero pueden llevarse a cabo actividades de otro ámbito matemático, como la recta numérica, las operaciones numéricas, etc. Es un material que permite oportunidades de aprendizaje con el alumnado desarrollando la competencia digital y que además genera un gran interés entre los discentes.

Finalmente, este trabajo representa un aporte práctico significativo para los docentes, facilitando el proceso de digitalización que se está llevando a cabo en el aula, consiguiendo en el alumnado un desarrollo de habilidades tecnológicas prácticas que no se limiten a convertirlos en consumidores pasivos de la tecnología, sino que puedan realizar tareas y enfrentarse a problemas a través de ella, generando un conocimiento específico, en este caso, un desarrollo de las nociones espaciales.

Referencias

Alsina, A. (2012) Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. *Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80*, 7-24.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open university press.

Diago, P. D., y Arnau, D. (2017). Pensamiento computacional y resolución de problemas en educación infantil: una secuencia de enseñanza con el robot bee-bot. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 255-263). Madrid, España.

Flores-Tena, M.J., Ortega-Navas, M. C., y Sousa-Reis, C. (2021). El uso de las TIC digitales por parte del personal docente y su adecuación a los modelos vigentes. *Revista Electrónica Educare*, 25(1), 300-320. https://dx.doi.org/10.15359/ree.25-1.16

Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología [FECYT] (2016). Educación en ciencias de la computación en España 2015. Ministerio de Economía y Competitividad. Recuperado de https://www.fecyt.es/es/publicacion/educacion-de-las-ciencias-de-la-computacion-en-espana

González Fernández M. O., Flores González Y. A. y Muñoz López C. (2021) Panorama de la robótica educativa a favor del aprendizaje STEAM. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias 18*(2), 2301. https://doi.org/10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2021.v18.i2.2301

Grover, S y Pea, R. (2013). Computational Thinking in K-12: A Review of the State of the Field. *Educational Researcher, 42*(1), 38-43.

ISTE y CSTA. (2011) Computational Thinking Leadership Toolkit. Arlington (Virginia): Computer Science Teachers Association (CSTA). *International Society for Technology in Education (ISTE).*

Macià Bordalba, M., y Garreta Bochaca, J. (2017). Accesibilidad y alfabetización digital: barreras para la integración de las TIC en la comunicación familia/escuela.

Revista de Investigación Educativa, *36*(1), 239–257. https://doi.org/10.6018/rie.36.1.290111

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022). Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado*, nº 28 (3-2-2022).

Planas, N., y Alsina, A. (2009). *Educación matemática y buenas prácticas: infantil, primaria, secundaria y educación superior*. Graó. Barcelona.

Ruiz Higueras, M. L. (2005). Aprendizaje y matemáticas. La construcción del conocimiento matemático en la Escuela Infantil. En M. C. Chamorro, J. M. Belmonte Gómez, M. L. Ruiz Higuerasy F. Vecino Rubio (Eds.), *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil* (pp. 1-38). Pearson Educación. Madrid.

Sosa Díaz, M. J. y Valverde Berrocoso, J. (2020). Perfiles docentes en el contexto de la transformación digital de la escuela. *BORDÓN. Revista de pedagogía*, *72*(1), 151-173.

Wing, J. M. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *366*(1881), 3717-3725.

CoR046 EDUMATICUS: EDUcación MATemática con TIC en Universidad y Secundaria

Galán García, José Luis
Jl_galan@uma.es
Universidad de Málaga
Padilla Domínguez, Yolanda
ypd@uma.es
Universidad de Málaga
Rodríguez Cielos, Pedro
prodriguez@uma.es
Universidad de Málaga
Rodríguez Padilla, Pablo
rodriguezpadillapablo@uma.es
Universidad de Málaga

Núcleo temático: Recursos para el aula.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (Grados de Ingeniería).

RESUMEN

El objectivo principal de esta comunicación es presentar la actividad del grupo EDUMATICUS, EDUcación MATemática con TIC en Universidad y Secundaria, cuyo objetivo principal es elaborar materiales multimedia que sirvan de complemento para la docencia de las asignaturas de Matemáticas de Ingeniería y de Bachillerato con vídeos de los desarrollos teóricos y de los ejercicios típicos resueltos paso por paso. Describiremos la web y el canal de YouTube donde alojamos los materiales que elaboramos, prestando especial atención a su estructura y en las categorías en que clasificamos los materiales. Seguiremos detallando los escenarios donde utilizamos estos materiales con nuestros alumnos y terminaremos comentando el trabajo futuro que tenemos previsto desarrollar.

Palabras clave: Vídeos Educativos, Matemáticas, Ingeniería, Bachillerato.

1. Introducción

El grupo EDUMATICUS está formado por profesores de la Universidad de Málaga, tanto del Departamento de Matemática Aplicada como del Área de Estadística e Investigación Operativa y por profesores de Enseñanza Secundaria. Además, también colaboran alumnos del grado de Matemáticas.

Tenemos como objetivo principal elaborar materiales multimedia que sirvan de complemento para la docencia de las asignaturas de Matemáticas de Ingeniería y de Bachillerato con vídeos de los desarrollos teóricos y de los ejercicios típicos resueltos paso por paso. Utilizamos para su almacenamiento y su organización una web estrechamente relacionada con un canal de YouTube.

La utilización de estos vídeos tiene el aliciente para el alumno de que es él quien marca el ritmo de la explicación, pudiendo repetir, parar o avanzar según su propia velocidad de aprendizaje.

2. Materiales multimedia

Los materiales se encuentran alojados en:

- Una página web. Enlace

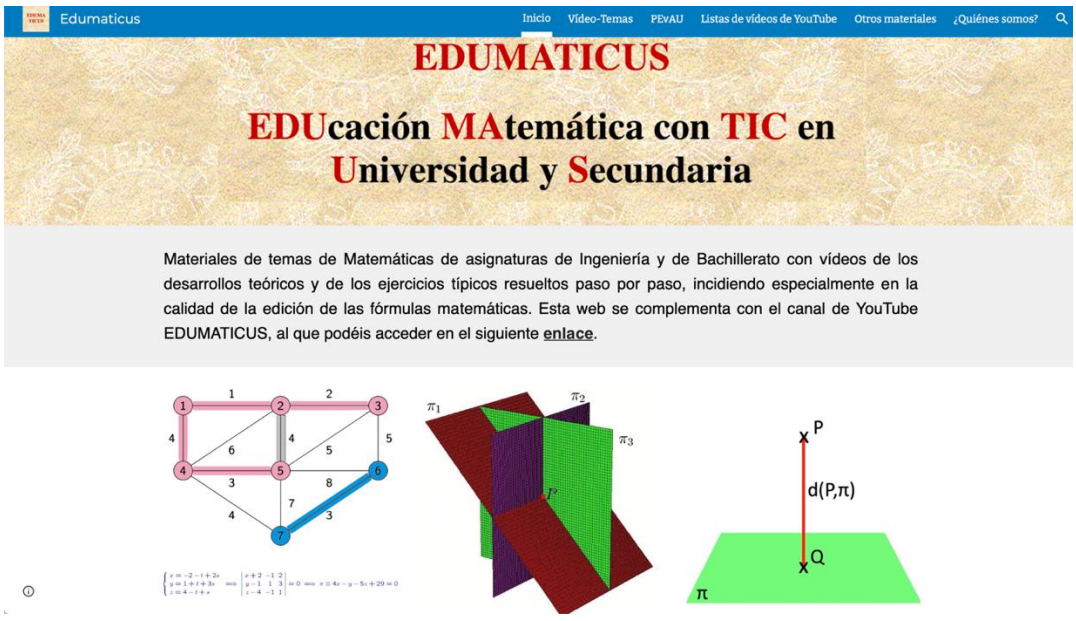


Imagen 1. Página web.

- Un canal de YouTube. Enlace

Imagen 2. Canal de YouTube.

2.1 Página web

Los materiales alojados en la web se clasifican en:

2.1.1 Vídeo-Temas

Son materiales PDF de temas de Matemáticas de asignaturas de Ingeniería y de Bachillerato e incluyen vídeos de los desarrollos teóricos y de los ejercicios típicos resueltos paso por paso, incidiendo especialmente en la calidad de la edición de las fórmulas matemáticas. Actualmente están desarrollados los siguientes temas:

- Continuidad.
- Optimización.
- Integrales.
- Integral definida.
- Matrices.
- Determinantes.

- Sistemas de ecuaciones lineales.
- Geometría en el espacio (I).
- Geometría en el espacio (II).
- El sistema de los números complejos.

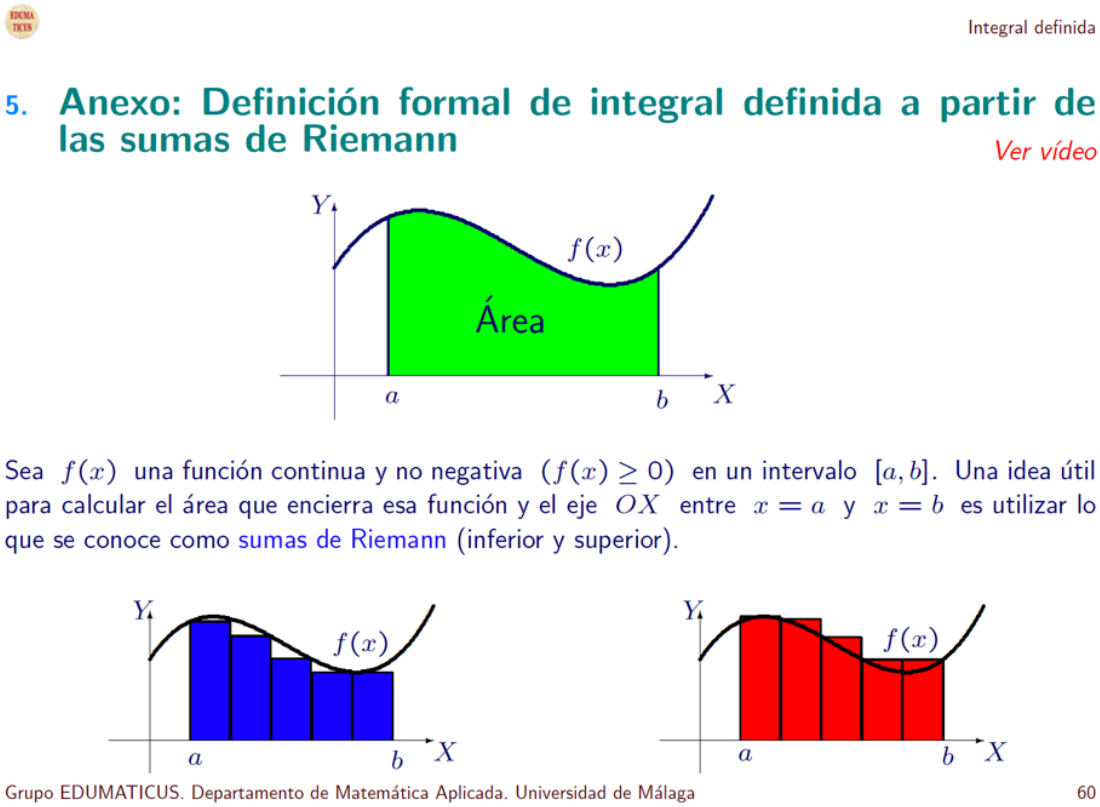


Imagen 3. Ejemplo de Vídeo-Tema.

2.1.2 PEvAU Andalucía

Son los exámenes de la PEvAU de Andalucía de Matemáticas II y de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II resueltos en un documento PDF e incluyen vídeos de los ejercicios resueltos paso por paso. Actualmente, esta sección incluye:

- Matemáticas II. Julio 2021.
- Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. Julio 2021.
- Matemáticas II. Junio 2021.
- Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. Junio 2021.

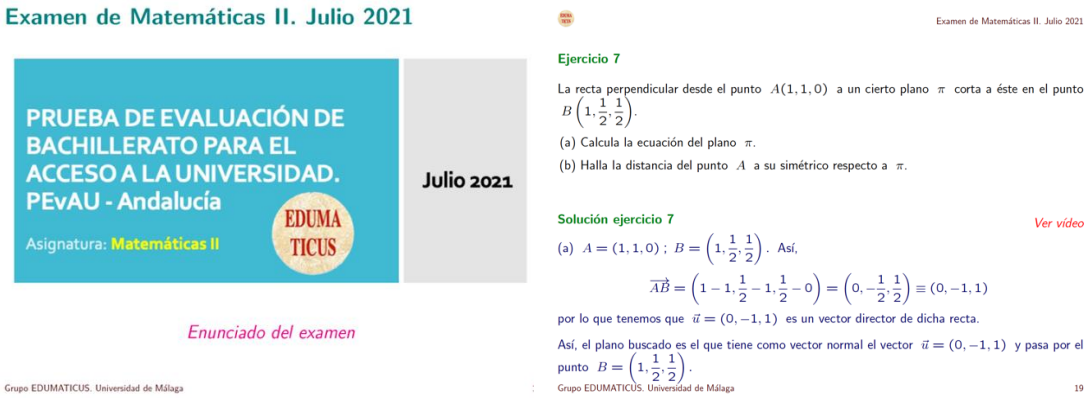


Imagen 4. Ejemplo de examen de PEvAU.

2.1.3 Otros materiales

Son materiales PDF de temas de Matemáticas de asignaturas de Ingeniería y de Bachillerato con desarrollos teóricos y ejercicios típicos resueltos paso por paso. Se complementan con vídeos de algunos de los ejercicios. Actualmente esta sección incluye los siguientes contenidos:

- Análisis Vectorial.
    - Funciones gamma y beta. Operadores diferenciales.
    - Integrales de línea.
    - Integrales múltiples. Teorema de Green-Riemann.
    - Integrales de superficie. Teorema de Gauss.
- Ecuaciones diferenciales ordinarias.
    - Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
    - Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior.
- Ecuaciones en derivadas parciales.
    - Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden.
    - Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.
- Transformaciones integrales.
    - Transformadas de Laplace.
    - Transformadas de Fourier.

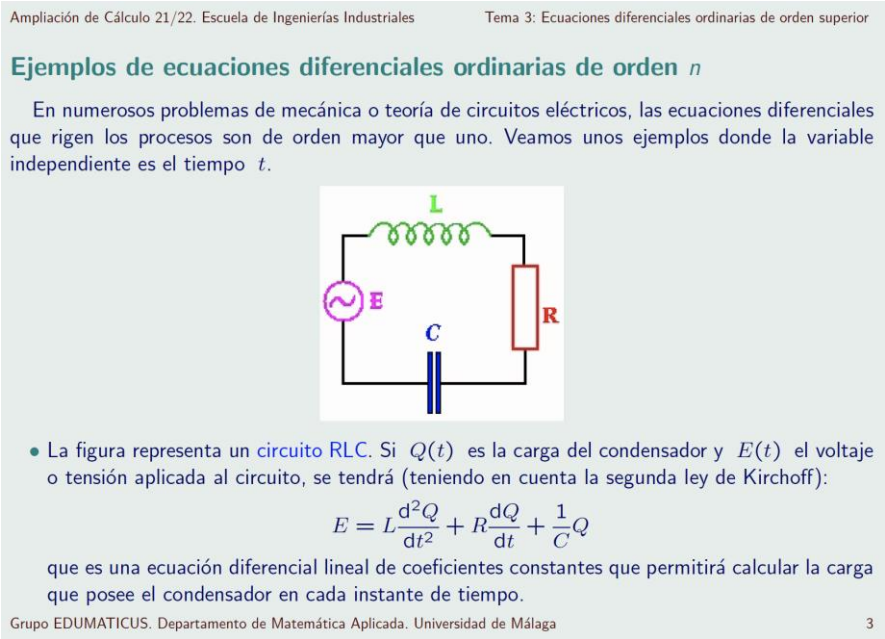


Imagen 5. Ejemplo de Otros materiales.

2.2 Canal de YouTube

Los más de 650 vídeos se agrupan en las siguientes listas de reproducción:

- Bachillerato.
  - Geometría.
  - Matrices.
  - Determinantes.
  - Sistemas de ecuaciones lineales.
  - Descomposición fracciones simples.
  - Continuidad.
  - Optimización.
  - Cálculo de primitivas.
  - Integral definida.
  - Cálculo de límites.
  - Programación lineal.
  - Inferencia y muestreo.
  - Probabilidad.

- PEvAU-Selectividad.
    - Matemáticas II.
    - Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.
- Variable Compleja.
- Integración en una y en varias variables.
    - Cálculo de primitivas.
    - Integral definida.
    - Cálculo de integrales trigonométricas mediante funciones Gamma y Beta.
    - Operadores diferenciales: gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano.
    - Integrales de línea.
    - Integrales múltiples (dobles y triples). Cartesianas, polares, cilíndricas, esféricas.
    - Integrales de superficie.
- Transformaciones integrales.
    - Transformadas de Laplace.
    - Transformadas de Fourier.
- Ecuaciones Diferenciales ordinarias.
    - Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
    - Ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior.
    - Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales con el CAS Derive.
    - Ecuaciones diferenciales ordinarias con el CAS Derive.
- Ecuaciones en Derivadas Parciales.
    - Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden (Pfaff, cuasilineales, Lagrange-Charpit).
    - Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden (ecuación del calor y ecuación de onda).
    - Ecuaciones en derivadas parciales con el CAS Derive.
- Software Derive.
    - Manejo básico de Derive.

- Ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales con el CAS Derive.
- Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales con el CAS Derive.

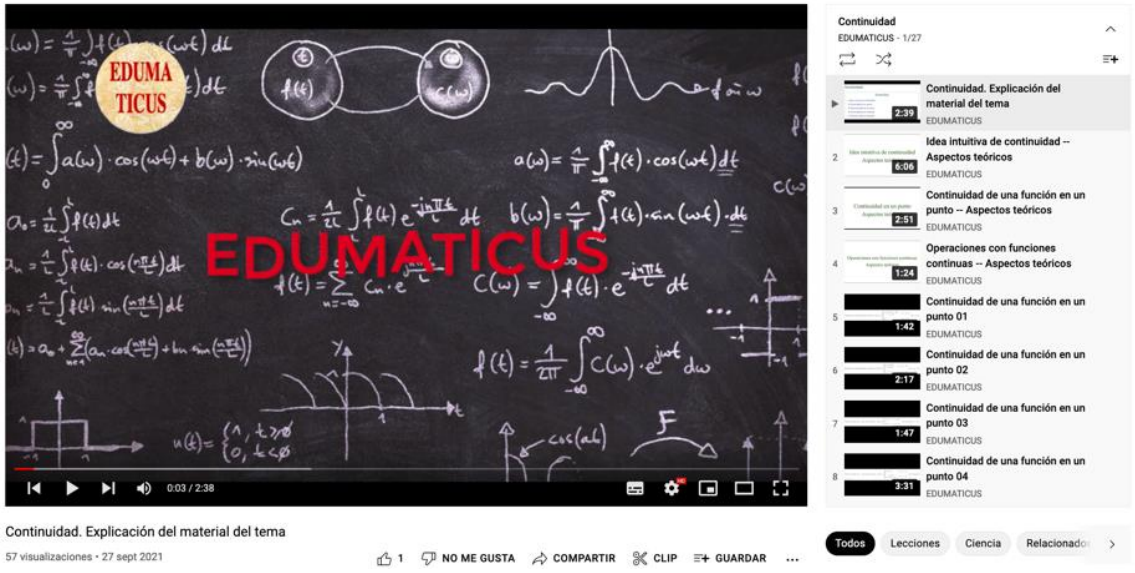


Imagen 6. Ejemplo de lista de distribución.

3. Utilización de los materiales

Estos materiales los utilizamos principalmente con:

- Alumnos de Bachillerato.
- Alumnos de Grados de Ingeniería de la Universidad de Málaga.
- Alumnos de la Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Alumnos del Curso 0 “Aspectos básicos de Matemáticas para alumnos de los Grados de Ingeniería de la Universidad de Málaga”.

Por otra parte, analizando la actividad de los usuarios del canal de YouTube, se observa que más del 50% de las visualizaciones de los vídeos se realiza desde Hispanoamérica.

Desde la creación del canal en febrero de 2017, se han registrado más de 420.000 visualizaciones de los vídeos.

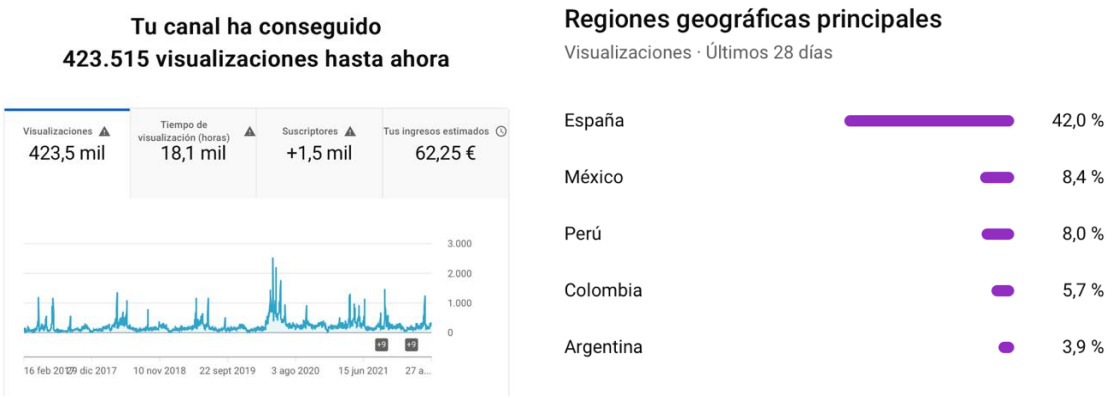


Imagen 7. Estadísticas del canal de YouTube.

En cuanto a la opinión que tienen los usuarios que utilizan nuestros materiales, recogida mediante encuestas de valoración realizadas al final del desarrollo de las actividades correspondientes, nos gustaría destacar que los resultados en estos últimos años se han situado siempre por encima de 4,6 sobre un máximo de 5.

4 Trabajo futuro

Nuestra prioridad en este momento es finalizar los Vídeo-Temas correspondientes al nivel de 2º de Bachillerato, en concreto: Límites, Derivadas y Aplicaciones de las derivadas.

Por otra parte, seguiremos completando la sección de los exámenes de la PEvAU de Andalucía, incluyendo exámenes tanto de años anteriores como los de años venideros.

Otra línea de trabajo futuro es convertir los materiales de la sección “Otros materiales” en Vídeo-Temas, realizando la grabación de los vídeos que hacen falta para completarlos.

Por último, seguiremos añadiendo nuevos materiales que abarquen otros campos de las Matemáticas, poniendo especial énfasis en los temas de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.

CoR050 Trabajando las operaciones con enteros usando juegos de mesa.

Luis Cros Lombarte
lluis.cros@sarria.epiaedu.cat
Escola Pía de Sarrià de Barcelona/SET grup de jocs d'ABEAM

Núcleo temático: Procesos, Recursos para el aula.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Primaria (ciclo superior), Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

En esta comunicación se presentará una experiencia de aula para trabajar las operaciones con enteros usando juegos de mesa. Esta es una experiencia práctica con los objetivos de dotar a los alumnos de herramientas manipulativas y vivenciales para resolver operaciones con enteros, potenciar la práctica de operaciones combinadas y realizar prácticas de cálculo mental de manera lúdica. Esta experiencia se realizó con alumnos de 1º de ESO en la Escuela Pia de Sarrià en Barcelona al detectar que la resolución de las operaciones con enteros no las estaban realizando correctamente después de haberlas trabajado en varias sesiones, los alumnos resolvían correctamente situaciones reales con enteros pero no eran capaces de transferirlo a la resolución de operaciones de manera algorítmica, la experiencia con juegos de mesa mejoró la resolución de las operaciones.

Palabras clave: ABJ (Aprendizaje Basado en Juegos), Aprendizaje Significativo, Juegos de Mesa, Numeración Y Cálculo.

La experiencia que se explica en esta comunicación se realizó con 23 alumnos de la Escola Pia de Sarrià de Barcelona en el curso 2018-19. Se llevó a cabo en 3 sesiones de 50 minutos. Los alumnos se agruparon en grupos de 4 o 5 manteniendo el mismo grupo durante todas las sesiones. Los juegos que se utilizaron fueron

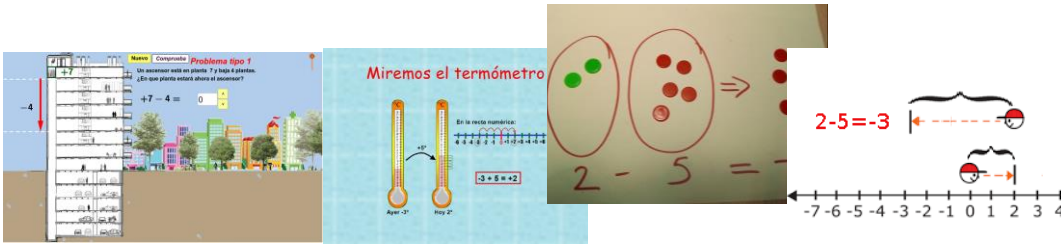
Rondo, Código secreto 13+4, Halli Galli y *Zero win win.* Los objetivos que se perseguían en la realización de esta experiencia fueron:

+ Dotar a los alumnos de herramientas para poder realizar operaciones con enteros de manera abstracta.

+ Mostrar de manera práctica que eran capaces de realizar correctamente las operaciones escritas de manera abstracta.

+ Hacer prácticas repetitivas de operaciones combinadas y mental de manera lúdica.

Antes de las sesiones de juegos habíamos trabajado los números enteros y sus operaciones presentándolas en situaciones reales como subidas y bajadas de pisos o variación de temperaturas. También a través de situaciones vivenciales dibujando una gran recta de números enteros donde los alumnos se desplazaban en función de los valores y las operaciones indicadas y usando material manipulativo como fichas de parchís. Con estos materiales los alumnos daban los resultados de las operaciones de manera correcta pero al pasar a la abstracción de la operación numérica, por ejemplo 3-7, el resultado que daban los alumnos podía ser 10, -10, 4 o -4 sin saber dar argumentos de porque habían obtenido el resultado que daban en el papel. Viendo esta desconexión decidí que el uso del juego podría ser una buena herramienta pedagógica para mejorar el cálculo de operaciones con enteros, ya que el juego permite trabajar conceptos abstractos sin hacerlo de manera directa, pudiéndolo hacer de manera repetitiva siendo lúdico y queriendo volverlo a hacer hasta conseguir ganar la partida no por aprender o practicar sino por el puro placer de jugar.



La primera sesión de juego la dedicamos a conocer la dinámica de los juegos ya que no eran conocidos por ninguno de los alumnos del grupo. En las otras dos sesiones jugamos a los juegos con las adaptaciones necesarias para trabajar lo que queríamos hacer a nivel pedagógico, a medida que se llevaba a cabo la partida, en el caso del *Rondo* y el *Código secreto 13+4*, los alumnos tenían que ir completando una ficha de cálculo, por su parte, a través del *Halli Galli* y el *Zero win win* los alumnos practican el cálculo mental

Los juegos que usamos en la experiencia fueron:

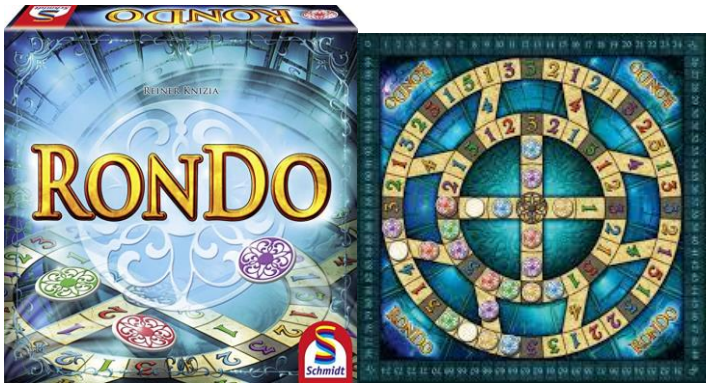
Rondo, es un juego abstracto de colocación de losetas creado por Reiner Knizia doctor en matemáticas por la universidad de Ulm, cuando el color de la loseta coincide con la del número del tablero el jugador acumula los puntos de la casilla, gana el jugador con más puntos al acabar la partida.

En el aula hicimos una adaptación de manera que las fichas rojas y lilas dan puntos negativos, las fichas verdes y azúles dan puntos positivos y el jugador elige el signo de las amarillas en cada turno. Gana la partida el jugador que más se aproxima a cero al finalizar la partida.

En cada turno el jugador que juega ha de ir apuntando la casilla inicial de su marcador de puntuación, las puntuaciones de las fichas colocadas y la puntuación final de su marcador de puntuación.

Lo que se observó durante la práctica fue que los jugadores colocaban bien el marcador de puntuación cuando hacian el contaje pero no hacían bien las operaciones abstractas en el papel.

Con este juego y esta experiencia los alumnos se dieron cuenta que podían usar una recta numérica para hacer las operaciones, gracias al *Rondo* los alumnos con mayor dificultad en el cálculo abstracto añadieron una herramienta para resolver las operaciones correctamente sin verlo como una imposición sino una necesidad.



Codigo secreto 13+4, es un juego de dados, tablero y losetas en las que los jugadores son ladrones que han de entrar al centro del museo de arqueología para hacerse con la mascara de Amon Ra. Para superar las trabas que han puesto la seguridad del museo los jugadores han de hacer operaciones matemáticas con los números de los dados lanzados, gana el jugador que llegue antes al centro del tablero.

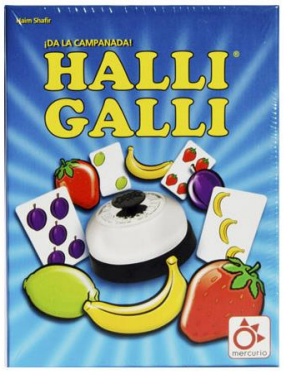
En el aula hacemos un par de modificaciones del juego original, las losetas con los números que hay que superar en cada nivel pueden ser positivas o negativas. Además, el ganador de la partida no es el jugador que llega primero al centro sino quien lo hace usando más dados en cada operación que ha de hacer para superar cada nivel.

Con este juego se potencia la creación de las operaciones combinadas con enteros.

Halli Galli, es un juego infantil de visualización y cálculo rápido, cada jugador tiene delante suyo un montón de cartas con frutas, en turnos se van sacando la primera carta del mazo, cuando boca arriba coinciden exactamente 5 piezas de fruta del mismo tipo hay que tocar el timbre, el primer jugador en hacerlo se queda con las cartas de la mesa que están boca arriba, gana el jugador que se hace con todas las cartas o que tiene más cartas al finalizar la partida.

En clase hacemos la adaptación que las ciruelas y las fresas son cantidades negativas y las uvas y los plátanos son cantidades positivas, cuando la suma de los valores de las cartas que están boca arriba suma cero se ha de tocar el timbre. El resto de la dinámica del juego se mantiene igual.

A través de esta adaptación los alumnos hacen muchos cálculos mentales con enteros sin hacerlo de manera aburrida y repetitiva.



Zero win win, es un jugador de cartas numeradas de -6 a +6, con las que se pueden hacer diferentes tipos de juegos de operaciones ya sean combinadas, suma cero, etc. De la misma manera que el *Halli Galli* es un juego en el que los alumnos practican el cálculo mental de manera repetitiva sin ser una actividad soporífera.

Gracias a las sesiones con los juegos de mesa la práctica en la realización de las operaciones de manera abstracta mejoró, y eran capaces de usar diferentes recursos para desbloquearse cuando no tenían claro un procedimiento. Al preguntarles por los motivos de algún resultado podían justificarlo y rectificarlo si estaba mal con un sentido matemático. Sin obtener unas grandes mejoras en los resultados de las pruebas realizadas con situaciones abstractas del cálculo puedo afirmar que la experiencia fue un éxito por consolidar un aprendizaje significativo de los conceptos trabajados.

Invito a todos los docentes que quieran hacer una experiencia similar para estos conceptos o cualquiera de los que nos podemos encontrar en el aula a ponerse en contacto conmigo mismo o con el grupo SET de investigación didáctica para el uso del juego de mesa como herramienta pedagógica que coordino desde hace cinco cursos y con el que vamos probando juegos para ver si son viables como herramienta pedagógica.

Luis Cros Lombarte:

Correo electrónico: lluis,cros@sarria.epiaedu.cat

Twitter: @cros_luis_77

Grup SET:

Correo electrónico: grupdejocsabeam@gmail.com

Twitter: @GrupSetAbeam

Instagram: grup_set_abeam

Facebook: Set Grupde jocs

CoR052 El diseño del Tangram Egipcio

Carlos Luna-Mota
carlos.luna@mmaca.cat
Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA)

Núcleo temático: Recursos para el aula / Comunicación y divulgación.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

RESUMEN

En esta comunicación se explica brevemente el proceso de diseño del Tangram Egipcio, un nuevo material pedagógico desarrollado en el Museu de Matemàtiques de Catalunya.

Primero, se detallan algunas de las propiedades clave que debe tener un tangram que vaya a ser usado con fines pedagógicos.

A continuación, se explican varias filosofías de diseño que se usan habitualmente para generar rompecabezas de este tipo.

Finalmente, se listan las principales propiedades del Tangram Egipcio y se dan ideas concretas sobre cómo explotar esas propiedades en el aula.

Palabras clave: Tangram, Tangram Egipcio.

1. El Tangram, los tangrams

El Tangram es un rompecabezas de origen chino formado por 5 triángulos, un cuadrado y un paralelogramo. Comúnmente, se acompaña de un libreto de siluetas y el reto consiste en reproducir cada una de esas figuras usando las 7 piezas, sin superponerlas ni dejar huecos (Gardner, 1988).

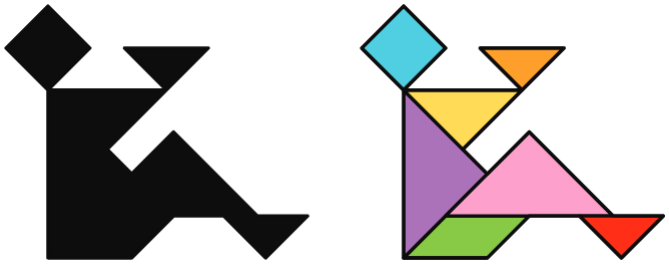


Imagen 1. Ejemplo de silueta y solución.

El éxito del Tangram ha dado lugar a numerosas variantes, siendo algunas de origen histórico, como el Tangram Japonés (Gardner, 1988), mientras que otras son mucho más recientes, como el Tangram de la Cruz Griega, de Henry Dudeney (Coffin, 2006).

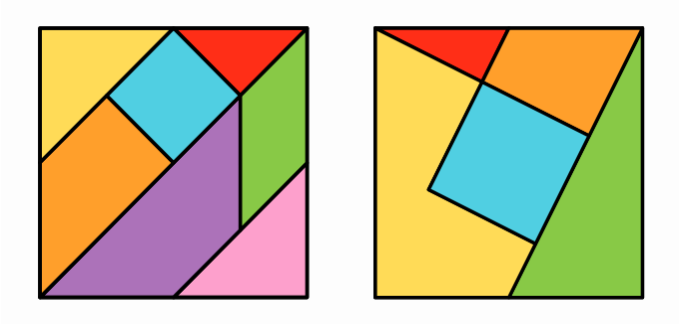


Imagen 2. Tangram Japonés (izquierda) y Tangram de la Cruz Griega (derecha).

1.1 Usos pedagógicos del Tangram

El Tangram tiene diversas propiedades matemáticas que lo convierten en un buen material pedagógico:

Es fácil de fabricar a partir de un cuadrado

Todas sus longitudes[46*] son múltiplos de 1 o de $\sqrt{2}$

[46] Tradicionalmente, en los rompecabezas de este tipo, se usa como unidad de medida el lado más corto de entre todos los que aparecen en el perímetro de sus piezas.

Todos sus ángulos son múltiplos de 45º

Todas sus áreas son múltiplos de 1/2

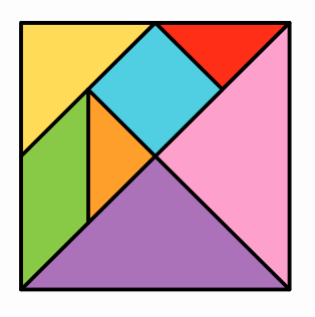


Imagen 3. El Tangram.

A partir de las propiedades anteriores, es fácil imaginar actividades con las que trabajar áreas, perímetros o la irracionalidad de $\sqrt{2}$, pero también propuestas más complejas como las de encontrar todos los cuadriláteros o todos los polígonos convexos que se pueden formar con sus 7 piezas.

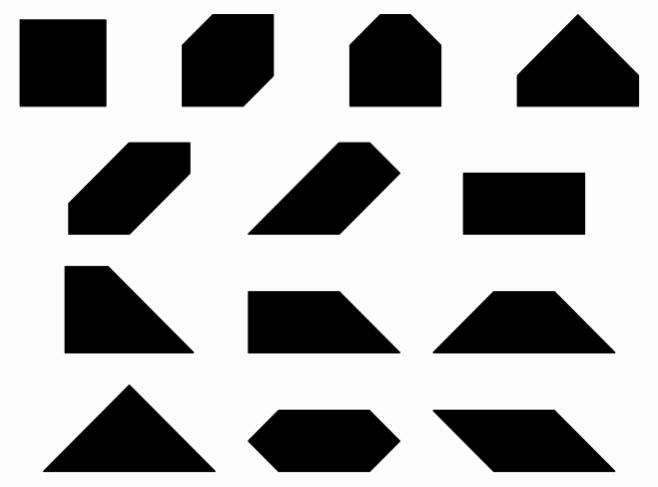


Imagen 4. Los 13 polígonos convexos que se pueden formar con las piezas del Tangram (Hsiung, 2001).

Especialmente interesante es el uso de las “paradojas del Tangram”, parejas de siluetas aparentemente iguales, tales que una de ellas presenta un hueco y, sin embargo, ambas pueden formarse con las mismas 7 piezas (Loyd, 2007).

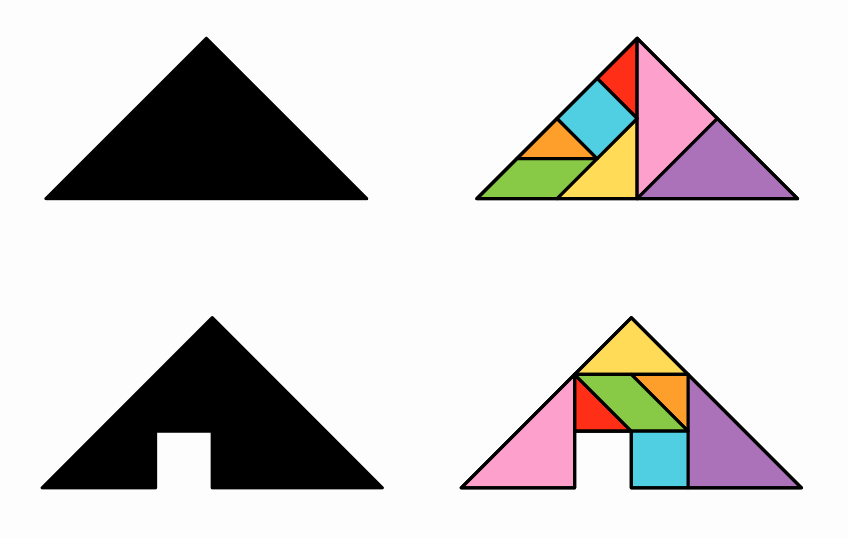


Imagen 5. Ejemplo de paradoja y solución.

1.2 Propiedades deseables en los tangrams pedagógicos

En base a nuestra experiencia usando diferentes tangrams en el Museu de Matemàtiques de Catalunya y en el aula, hemos identificado una serie de propiedades clave que son deseables en un tangram que vaya a usarse con fines pedagógicos (Luna-Mota, 2019). No se trata de características necesarias o suficientes para asegurar la calidad de un tangram sino, más bien, guías heurísticas que podemos aplicar a la hora de crear nuevos diseños.

Un tangram pedagógico debe ser…

Inteligible: Para ello es necesario que sus piezas sean de naturaleza geométrica sencilla y que podamos deducir ángulos y medidas por mera observación, sin necesidad de realizar cálculos complejos. Es también muy útil que las piezas sean fáciles de dibujar/fabricar usando papel pautado.

Ergonómico: Un tangram pedagógico debe tener pocas piezas (cuatro o cinco son buenos candidatos) y estas deben tener áreas que no sean muy dispares para que todas ellas puedan tener un tamaño razonable que las haga fáciles de manipular. Otra medida que favorece la ergonomía de un tangram es evitar piezas que tengan ángulos muy agudos o concavidades, ya que en ambos casos se dificulta el encaje con otras piezas.

Versátil: De cara a poder generar un mayor número de figuras, es recomendable que el tangram no tenga piezas repetidas y que estas no tengan ningún tipo de simetría. También es necesario que todos los ángulos y longitudes puedan expresarse como combinación lineal de unos pocos “ángulos y longitudes base”, de manera que las piezas encajen con facilidad unas con otras.

Matemáticamente interesante: Aparte de poder generar figuras de carácter realista, es necesario que puedan generarse figuras matemáticamente interesantes: diferentes tipos de triángulos y cuadriláteros, figuras con algún tipo de simetría, figuras convexas, paradojas, etc. También es deseable que el tangram pueda usarse para ilustrar/practicar el temario básico de geometría: Teorema de Pitágoras, Teoremas de la Altura y el Cateto, semejanza de figuras, fórmulas trigonométricas, inconmensurabilidad de los irracionales, rectángulos áureos, etc.

Diferentes tangrams satisfacen en diferentes grados estos requerimientos, y ello nos abre la puerta a compararlos y buscar nuevos diseños que se adapten mejor a nuestras necesidades como docentes y divulgadores.

2. Diseñando nuevos tangrams

El diseño de rompecabezas tiene más de arte que de ciencia. Sin embargo, hay una serie de técnicas que se han usado con anterioridad y puede ser de utilidad conocer a la hora de diseñar un tangram.

2.1 Por agregación

Técnicamente, los tangrams pertenecen a la familia de los rompecabezas de empaquetamiento, y una de las técnicas más habituales para diseñar este tipo de rompecabezas es la de agregación de un mismo elemento base (Horn, 2016). Dos exponentes bien conocidos de esta técnica serían los Pentominós, cuyas piezas se forman por agregación de 5 cuadrados, y los Hexamantes, cuyas piezas se forman por agregación de 6 triángulos equiláteros.

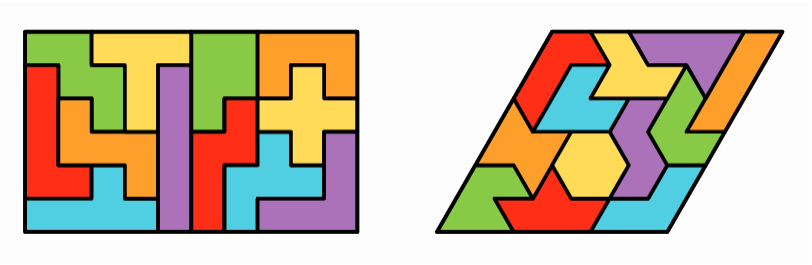


Imagen 6. Los 12 Pentominós (izquierda) y los 12 Hexamantes (derecha)

Es posible fabricar las 7 piezas del Tangram agregando triángulos rectángulos isósceles y, si bien nadie nos asegura que ese fue el principio que rigió su diseño, es innegable que esta es una manera razonable de interiorizar las medidas de las mismas.

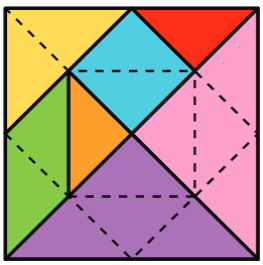


Imagen 7. Las piezas del Tangram como agregación de triángulos congruentes

2.2 Por intersección de retículas

Otra técnica que se ha usado con éxito para diseñar tangrams es la de usar como base la intersección de dos o más retículas (Coffin, 2006). No es difícil imaginar que esa fue la fuente de inspiración que usó Henry Dudeney para diseñar el Tangram de la Cruz Griega.

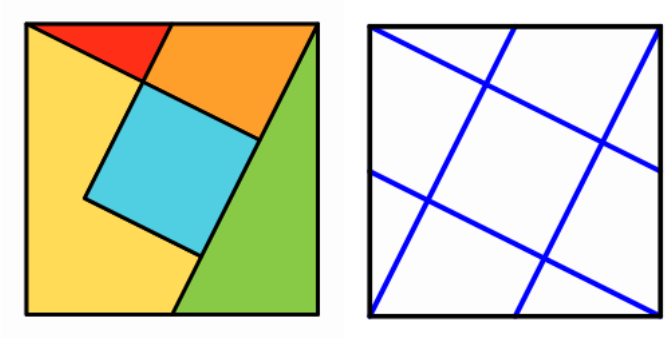


Imagen 8. El Tangram de la Cruz Griega (izquierda) y sus retículas subyacentes (derecha).

3. El Tangram Egipcio

El diseño del Tangram Egipcio (Luna-Mota, 2019) partió de la siguiente observación: Varios de los tangrams que nos parecían más interesantes desde el punto de vista pedagógico compartían una misma pieza, el triángulo rectángulo de proporciones 1:2:√5 que resulta de unir uno de los vértices del cuadrado con el punto medio de uno de los lados no adyacentes. De hecho, la disección del cuadrado que se forma al realizar ese corte constituye un tangram de dos piezas con el que pueden construirse diversas siluetas interesantes desde el punto de vista matemático.

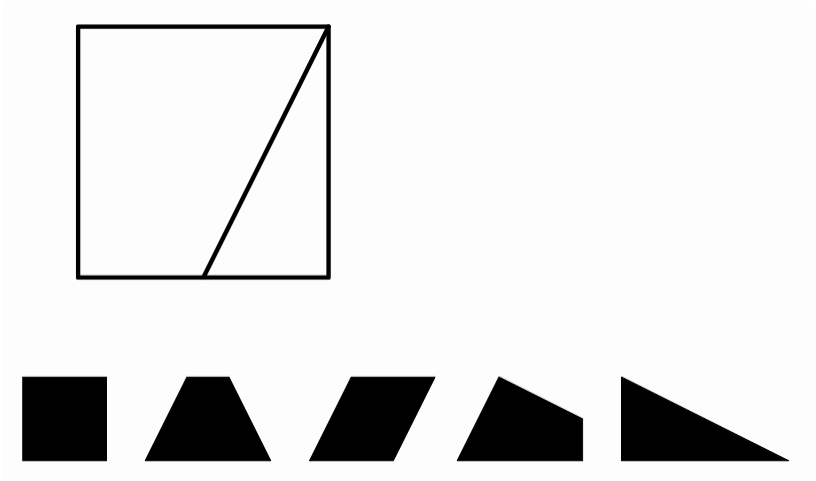


Imagen 9. Tangram de dos piezas y algunas de las siluetas que pueden formarse con él.

En base a la observación anterior, e intentando no introducir más longitudes y ángulos base en nuestro diseño, repetimos el corte diversas ocasiones hasta conseguir una disección con un número razonable de piezas.

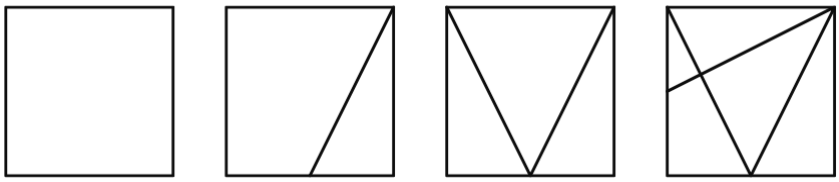


Imagen 10. Proceso de diseño del Tangram Egipcio.

El resultado es un tangram que cumple muchas de las propiedades que habíamos identificado como deseables:

Cinco piezas, todas ellas diferentes, asimétricas y geométricamente sencillas

Áreas de valores enteros no muy dispares (1, 4, 4, 5 y 6)

Todas las longitudes son múltiplos de la unidad o de $\sqrt{5}$

Todos los ángulos son combinaciones lineales de 90º y arctan(1/2)

Sus piezas son fáciles de dibujar, fabricar y entender

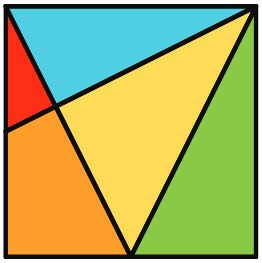


Imagen 11. El Tangram Egipcio

La aparición de un triángulo egipcio (de proporciones 3:4:5) en un diseño basado en los triángulos de proporciones 1:2:√5 dio nombre a este tangram, aunque esto no debería sorprendernos, dado que ambos tipos de triángulos están íntimamente relacionados y con frecuencia aparecen juntos en problemas geométricos. De hecho, con posterioridad hemos encontrado este mismo diseño en colecciones de problemas geométricos (Detemple & Harold, 1996), si bien siempre como ilustración y jamás como rompecabezas o disección formada por piezas independientes.

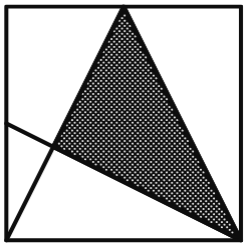


Imagen 12. Problema 3 de Detemple & Harold (1996).

3.1 Usos del Tangram Egipcio

Con el Tangram Egipcio pueden formarse un número razonable de siluetas de carácter realista, lo cual demuestra su versatilidad.

Imagen 13. Algunas siluetas de carácter realista del Tangram Egipcio

Sin embargo, este tangram fue específicamente diseñado como material pedagógico del ámbito matemático y es en sus propiedades matemáticas en las que nos centraremos. En particular, es posible formar un gran número de figuras geométricas interesantes con él.

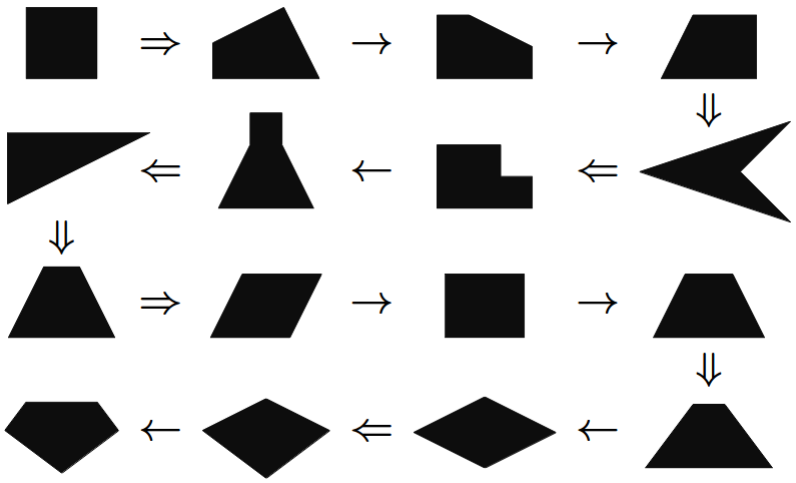


Imagen 14. Siluetas de carácter geométrico. Es posible pasar de una a la siguiente moviendo una o dos piezas.

De hecho, es posible dibujar todas las figuras anteriores, exceptuando una, de manera que todas las piezas tengan sus vértices en las intersecciones una cuadrícula de ancho unidad, lo cual permite usar el teorema de Pitágoras para calcular longitudes y el teorema de Pick para calcular áreas.

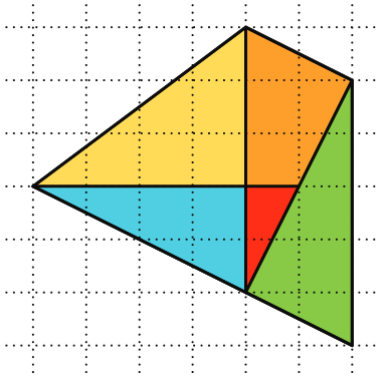


Imagen 15. Solución dibujada sobre una cuadrícula.

La mayoría de figuras geométricas tienen su versión paradójica:

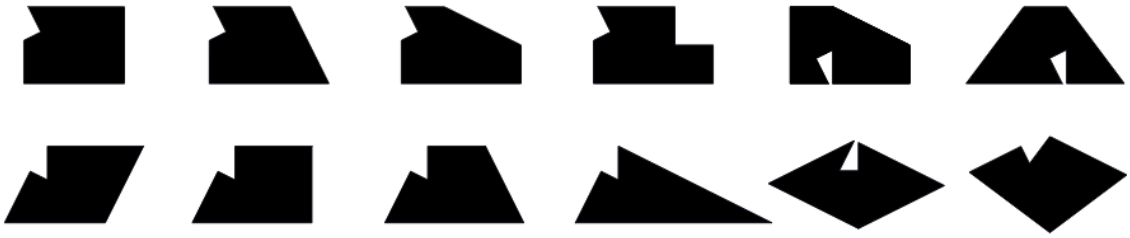


Imagen 16. Algunas paradojas del Tangram Egipcio

Y, en general, también tienen más de una solución posible, lo cual se considera poco deseable en un rompecabezas, pero puede aprovecharse para tratar temas como la simetría o la combinatoria. Por ejemplo, a partir de la noción de número irracional, no es difícil demostrar que el cuadrado sólo tiene tres soluciones esencialmente diferentes.

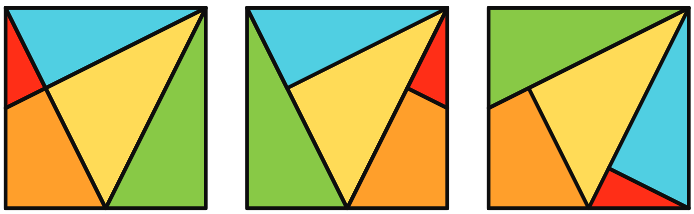


Imagen 17. Las tres soluciones del cuadrado.

El Tangram Egipcio también puede usarse para trabajar la clasificación de los cuadriláteros, ya que podemos encontrar ejemplos de las principales familias: complejos, simples, cóncavos, convexos, cíclicos, tangentes, trapecios, paralelogramos, rectángulos, rombos, dardos, cometas, etc.

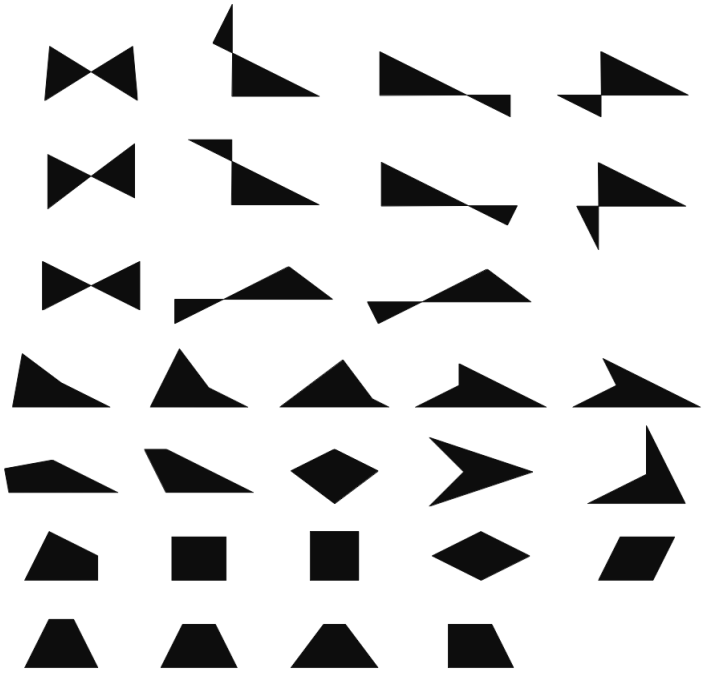


Imagen 18. Cuadriláteros que se pueden formar con el Tangram Egipcio

Finalmente, es posible encontrar rectángulos áureos de 17 tamaños diferentes en el perímetro de algunas figuras.

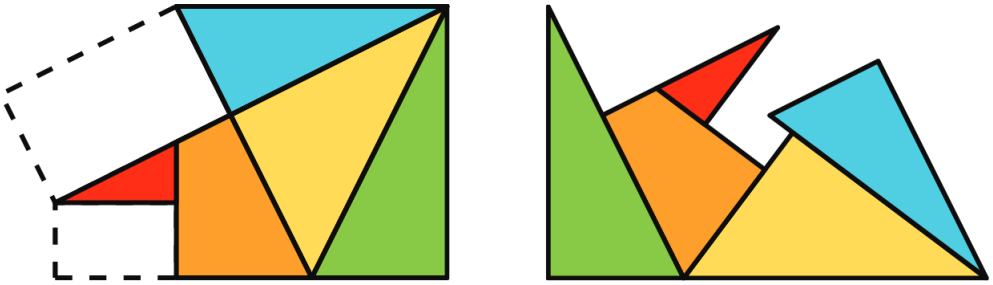


Imagen 19. La figura de la izquierda muestra dos rectángulos áureos mientras que la figura de la derecha oculta otros cinco.

3.2 Versiones simplificadas del Tangram Egipcio

Otra propiedad interesante del Tangram Egipcio es que podemos trabajar con un subconjunto de sus piezas y aún así obtener retos interesantes.

Por ejemplo, podemos usar el subconjunto de los 4 triángulos para ilustrar demostraciones sin palabras de algunas fórmulas trigonométricas (Nelsen, 1997 & 2000).

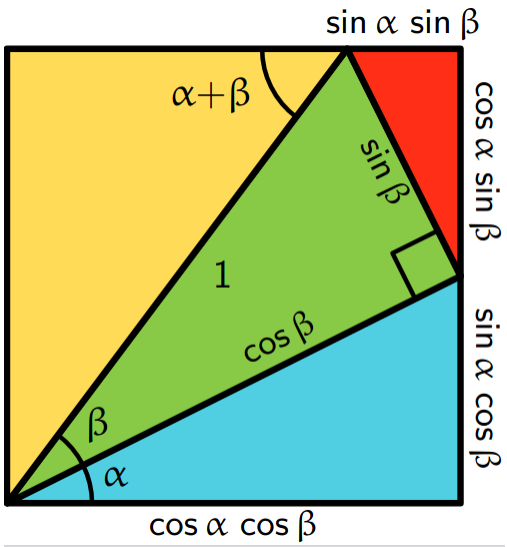


Imagen 20. Demostración sin palabras de las fórmulas del seno y el coseno de una suma.

Si nos limitamos al conjunto de los tres triángulos semejantes también podemos hacer demostraciones sin palabras del teorema de Pitágoras, los teoremas de la Altura y el Cateto o la desigualdad Aritmético-Geométrica (Nelsen, 1997 & 2000).

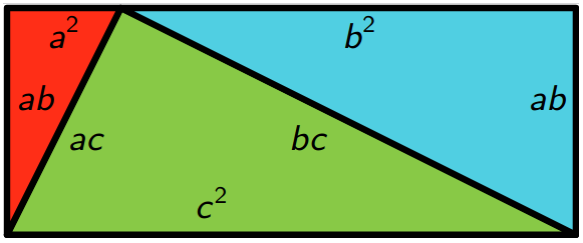


Imagen 21. Demostración sin palabras del Teorema de Pitágoras.

En ambos casos, especialmente en el segundo, la combinatoria se reduce hasta el punto de permitirnos enumerar a mano todas las figuras de un determinado tipo (cuadriláteros, polígonos convexos, etc.) que se pueden formar con ese subconjunto de piezas, cosa prácticamente imposible con el Tangram Egipcio al completo.

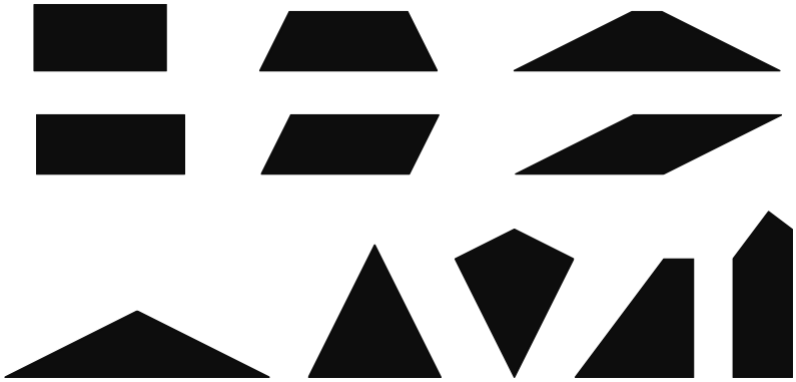


Imagen 22. Los 11 polígonos convexos que pueden formarse con los tres triángulos semejantes del Tangram Egipcio (Brügner, 1984).

4. Conclusiones

Los tangrams son una familia de rompecabezas apta para la docencia o la divulgación de la geometría, pero no todos los tangrams son igual de útiles desde el punto de vista pedagógico.

Establecer a priori una serie de propiedades deseables desde el punto de vista pedagógico permite guiar con éxito el proceso de diseño, como demuestra nuestra experiencia con el Tangram Egipcio.

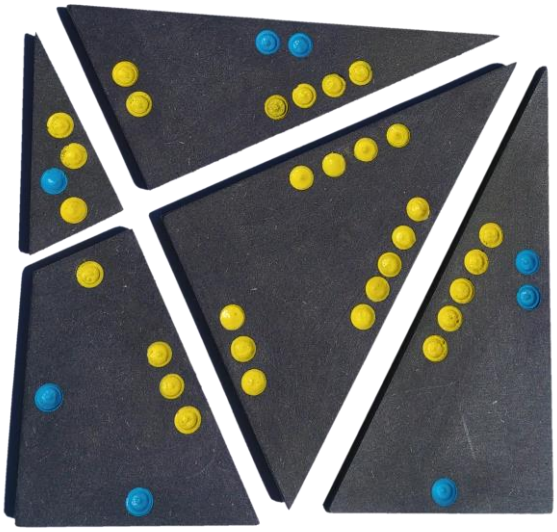


Imagen 23. Prototipo del Tangram Egipcio que usamos en nuestras exposiciones temporales.

Referencias

Brügner, G. (1984). Three triangle tangram. *BIT,* 24(3).

Coffin, S. (2006). *Geometric Puzzle Design*. AK Peters Series. Taylor & Francis.

Detemple, D. & Harold, S. (1996) A Round-Up of Square Problems. *Mathematics Magazine*, 69(1).

Gardner, M. (1988). *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*. W.H. Freeman.

Horn, F. (2016). The development of a tangram family. *Game & Puzzle Design*, 2(2)

Hsiung, C. (2001). *Selected Papers of Chuan-Chih Hsiung*. World Scientific.

Loyd, S. (2007). *Sam Loyd's Book of Tangrams*. Dover Recreational Math Series. Dover Publications, Incorporated.

Luna-Mota, C. (2019). El tangram egipci: diari de disseny. *Nou Biaix*, 44.

Nelsen, Roger B. (1997). *Proofs without Words.* Mathematical Association of America.

Nelsen, Roger B. (2000). *Proofs without Words II.* Mathematical Association of America.

CoR054 Curso 0 Online de Aspectos Básicos de Matemáticas para alumnado de la Escuela de Ingenierías Industriales de la Universidad de Málaga

Galán García, Mª Ángeles
magalan@ctima.uma.es
Universidad de Málaga
Padilla Domínguez, Yolanda
ypd@uma.es
Universidad de Málaga
Rodríguez Cielos, Pedro
prodriguez@uma.es
Universidad de Málaga
Rodríguez Padilla, Pablo
rodriguezpadillapablo@uma.es
Universidad de Málaga

Núcleo temático: Recursos para el aula.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Bachillerato y Universidad (Grados de Ingeniería).

RESUMEN

El objetivo principal de esta comunicación es describir la experiencia que, desde el curso 2018/2019, venimos desarrollando un grupo de 7 profesores de las Áreas de Matemática Aplicada y de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Málaga con el alumnado de nuevo ingreso en la Escuela de Ingenierías Industriales.

Esa experiencia consiste, básicamente, en un curso 0 virtual que se estructura en torno a una serie de materiales multimedia que establecen un punto de nexo común y que pueden ser utilizados tanto en las Matemáticas de Bachillerato como en las de Ingeniería, además de servir para ayudar al alumnado en su preparación antes de iniciar sus estudios de Ingeniería, ya que la mayoría de los estudiantes que provienen del Bachillerato encuentran un gran desnivel entre las Matemáticas que han visto en su centro de Secundaria y Bachillerato y las de la Universidad.

Describiremos los inicios de la experiencia, su evolución durante los distintos cursos académicos (incluidos los cursos de la pandemia por la COVID19), llegando hasta su estructura actual. Terminaremos analizando las valoraciones del alumnado participante en el curso 0 y algunas pinceladas sobre el trabajo futuro.

Palabras clave: Curso 0, Vídeos Educativos, Matemáticas, Ingeniería, Bachillerato.

1. Introducción

Es bien conocido que los estudiantes suelen encontrar bastantes dificultades para superar el primer año de Universidad en los Grados en los que las Matemáticas son una componente importante. La mayoría de estos estudiantes provienen del Bachillerato y encuentran un gran desnivel entre las Matemáticas que han visto en su centro de Secundaria y Bachillerato y las de la Universidad.

Se hace necesaria una mayor coordinación entre el Bachillerato y la Universidad, además de una mejora de los procedimientos que facilite la adaptación de los alumnos al primer curso de Universidad. Todo ello con el objetivo principal de que todo alumno que inicie unos estudios de Ingeniería adquiera los conocimientos básicos de Matemáticas que necesita antes de empezar los estudios de grado.

Por todo ello, en el curso 2017/18, nos propusimos recabar información sobre esta problemática, además de aportar soluciones concretas mediante el desarrollo de una serie de acciones en las asignaturas de Matemáticas de primer curso de Ingeniería de la Escuela de Ingenierías Industriales donde el Departamento de Matemática Aplicada imparte docencia en la Universidad de Málaga.

El fin principal que perseguíamos era el de proporcionar a los estudiantes los recursos (materiales y humanos) necesarios para ayudarles a superar las dificultades que se encuentran para superar el primer año de Universidad y reducir, en la medida de lo posible, la diferencia de nivel antes comentada.

Para ello, de forma genérica, decidimos elaborar un curso 0 virtual que se estructurara en torno a una serie de materiales multimedia que establecieran un

punto de nexo común y que pudieran ser utilizados tanto en las Matemáticas de Bachillerato como en las de Ingeniería. Además, debía servir para ayudar al alumnado en su preparación antes de iniciar sus estudios de Ingeniería.

Para la consecución de nuestra finalidad general nos propusimos alcanzar los 3 siguientes objetivos principales:

Elaboración de materiales multimedia (presentaciones, vídeos educativos y cuestionarios) para su utilización en el proceso de enseñanza-aprendizaje tanto en Bachillerato como en Universidad, además de en el periodo intermedio entre ambos niveles educativos.

Utilizar las distintas herramientas que ofrece el Campus Virtual de la Universidad de Málaga e integrarlas en la transición del alumno entre Bachillerato y Universidad.

Establecer los mecanismos necesarios para poder ayudar y atender a los alumnos en ese proceso de transición. Estos mecanismos se estructurarían en torno al curso 0 virtual.

2. Descripción de la experiencia

Las acciones concretas que desarrollamos tienen que ver con lo enunciado en los objetivos y se pueden concretar en las siguientes:

Elaboración de un sitio web dentro del marco del Campus Virtual de la Universidad de Málaga que sirviera para ubicar el curso 0.

Creación de diversos foros, chats y videoconferencias para establecer *un sistema de tutorías virtuales* con los alumnos dentro del curso 0 virtual.

Elaboración de materiales multimedia (presentaciones y relaciones de problemas) de los principales conceptos matemáticos correspondientes a 2º de Bachillerato.

Elaboración de vídeos que sirvieran a modo de “explicación presencial tradicional” de los conceptos y ejercicios desarrollados en esas presentaciones.

Pasamos a detallar las características más destacadas de cada una de estas acciones concretas.

Materiales multimedia

En cuanto a los materiales multimedia podemos afirmar que es claro que, en los últimos años, la utilización de manuales electrónicos se ha impuesto a la de los tradicionales libros de texto en la docencia. Sin embargo, se plantea el reto de elaborar verdaderos materiales electrónicos. Los manuales electrónicos se implementan para ser leídos en la pantalla, no para imprimirlos. El cansancio al leer en un monitor de ordenador o tablet durante largos períodos de tiempo hace que el diseño de pantalla sea muy importante. También sería conveniente utilizar hipertexto para facilitar el estudio con las referencias cruzadas. Por otra parte, también es necesario que haya sencillez en el uso y manejo en la navegación por los contenidos. Por último, también deberían contemplar la posibilidad de uso por el profesor en el aula para su exposición didáctica en una sala de ordenadores o con proyector digital.

A estas características se une la problemática fundamental que presentan este tipo de materiales en el área de Matemáticas: la edición de fórmulas matemáticas. Normalmente, el hecho de estar elaborados en formato de páginas web hace que el aspecto no sea el más deseable para unos materiales de calidad: las fórmulas hay que extraerlas del texto en renglones aparte en formato dibujo, lo que crea incluso deformaciones en los textos para “cuadrar” las fórmulas, además del tamaño considerable de los ficheros (lo que retarda la carga de las páginas).

Nosotros decidimos utilizar, al igual que ya hacemos en el desarrollo habitual del proceso de enseñanza-aprendizaje de nuestras asignaturas, el procesador de textos científicos LaTeX combinado con el formato PDF, de forma que se creen presentaciones de alta calidad en PDF (que ocupan muy poco tamaño). Este procesador de textos es el que utilizan la mayoría de las revistas científicas importantes, además de las editoriales para elaborar los libros de Matemáticas. Con ello se consiguen presentaciones de alta calidad, “agradables” a la vista y preparadas para ser utilizadas en la docencia de las asignaturas. Nuestras

experiencias iniciales con alumnos universitarios nos ayudaron a pulir y definir el modelo de presentaciones que decidimos realizar en ese momento.

La idea es que estos materiales puedan ser utilizados por los profesores de Bachillerato para explicar las Matemáticas de 2º, con el fin de que se compruebe que se adecúan al nivel requerido para este nivel educativo.

Vídeos.

Su necesidad viene marcada por la experiencia acumulada por este equipo de profesores al impartir una asignatura no presencial en la oferta de libre configuración de la Universidad de Málaga durante los 8 cursos académicos anteriores al inicio de esta experiencia objeto de la comunicación. El hecho de ser una asignatura totalmente virtual nos obligó a elaborar unos materiales que se adaptaran a la característica de que los alumnos no acudían físicamente a clase.

Esto es justo lo que necesitábamos en este momento para nuestro curso 0, poder transmitir a los alumnos que van a acceder a la Universidad ciertos conceptos matemáticos que deben asimilar antes de iniciar sus estudios y que, por razones diversas, no se ha podido hacer antes.

Cuando para transmitir a un alumno un contenido concreto se desarrolla una clase presencial, luego se puede complementar esa clase con una serie de materiales adicionales, o con un foro en el cual se debata o se resuelvan dudas sobre el contenido en cuestión.

Sin embargo, cuando no se puede desarrollar esa clase presencial (como es el caso de un alumno que necesite asimilar “por sí solo” un concepto antes de acceder a la Universidad), se hace necesario buscar alternativas que sustituyan a esa clase. La elección que se haga, en nuestra opinión, dependerá bastante de la materia en cuestión que se esté abordando.

Por las características especiales del caso concreto de las Matemáticas, la simple entrega de un material escrito para que el alumno lo trabaje (solución que se adopta en muchas ocasiones en asignaturas virtuales) no es suficiente, a nuestro entender,

para que el alumno alcance el nivel suficiente de conocimiento de un concepto determinado.

La solución que nosotros adoptamos en su momento consistió en utilizar una serie de vídeos a modo de “pizarra virtual”, con el fin de que los alumnos recibieran las explicaciones como si de una clase se tratase. La utilización de estos vídeos tiene muchas de las ventajas de una clase presencial, con el aliciente para el alumno de que es él quien marca el ritmo de la explicación, pudiendo repetir, parar o avanzar según su propia velocidad de aprendizaje.

Esta utilización de vídeos complementa perfectamente los demás materiales multimedia, así como el sistema de tutorías virtuales para que los alumnos pregunten y resuelvan sus dudas.

Sistema de tutorías virtuales.

Con el fin de que el alumno pueda completar su trabajo autónomo necesita el apoyo puntual de un tutor en los momentos que lo requiera. Para ello, establecimos un sistema de tutorías virtuales aprovechando las herramientas (foros y chats, entre otros recursos) que ofrece el Campus Virtual de la Universidad de Málaga y lo pusimos a disposición de los alumnos para que lo utilizaran, tanto antes de empezar sus estudios de Ingeniería como durante el desarrollo normal de las asignaturas del primer curso universitario. Este sistema de tutorías virtuales complementó a los materiales multimedia y constituyó el esqueleto vertebrador del curso 0.

Sitio web.

Con el objetivo fundamental de que sirviera, tanto como albergue de los materiales y actividades del proyecto como punto de encuentro común entre los profesores y los alumnos, se elaboró un canal de YouTube que sirviera de eje central del curso 0. El canal se denomina EDUMATICUS: EDUcación MAtemática con TIC en Universidad y Secundaria y se puede ver en el siguiente enlace.

Imagen 1. Canal de YouTube.

El canal contiene ya más de 650 vídeos educativos y, como puede verse en las capturas de pantalla, lleva ya más de 420.000 visualizaciones.

Imagen 2. Estadísticas del canal de YouTube.

3. Evolución de la experiencia

Desde el curso 2018/19 hemos venido desarrollando esta experiencia con nuestros alumnos, adaptándola a las circunstancias diversas que nos hemos ido encontrando en estos cursos. Pasamos a detallar algunos aspectos destacados durante el desarrollo del curso 0 en estos cursos académicos:

En el inicio, curso 2018/2019, tuvo una duración de 1,5 créditos ECTS y los contenidos se limitaron a un módulo de cálculo de primitivas. Se impartió para los alumnos de nuevo ingreso en los grados de Ingeniería Eléctrica, Ingeniería Electrónica Industrial, Ingeniería Mecánica e Ingeniería en Diseño Industrial y Desarrollo del Producto.

Esa misma estructura, destinatarios y duración se repitió durante el curso 2019/2020.

A partir del curso 2020/2021 decidimos ampliar los contenidos y pasó a tener una duración de 3,5 créditos ECTS. Se añadieron los siguientes módulos: matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

En este último curso académico, 2020/2021, hemos mantenido los mismos contenidos, pero hemos desdoblado el curso 0 para dar cabida a los alumnos de nuevo ingreso de todos los grados de la Escuela de Ingenierías Industriales de la Universidad de Málaga, añadiendo los grados de Ingeniería Electrónica, Robótica y Mecatrónica, Ingeniería de la Energía, Ingeniería de Organización Industrial e Ingeniería en Tecnologías Industriales. Además, y ya fuera del desarrollo usual del curso 0, se les proporcionó a los alumnos materiales de los módulos de geometría, integral definida, optimización y continuidad para que pudieran trabajarlos por su cuenta en cualquier momento.

En el siguiente enlace puede verse con más detalle en forma de vídeo las características fundamentales de este curso 0.

Imagen 3. Presentación del Curso 0.

4. Conclusiones finales y trabajo futuro

Mostramos a continuación un resumen de los resultados globales de la encuesta de satisfacción cumplimentada por los alumnos de este curso 0 al finalizar su realización en este curso 2021/2022. Las altas valoraciones alcanzadas en esos ítems, valoración general del curso, materiales y labor del profesorado, hablan por sí solas de la satisfacción del alumnado sobre esta actividad.

VALORACIÓN GENERAL DEL CURSO

Por favor, señale un número entre el 1 (estoy en completo desacuerdo) y el 5 (estoy completamente de acuerdo)

	Ranking de la media ⇓					No sabe o no contesta
	1	2	3	4	5	
Mi valoración general sobre el curso es					4.5	0

Imagen 4. Valoración general del Curso 0 2021/2022.

7 Por favor, valore con un número su opinión sobre los siguientes ítems entre el 1 (muy mala) y el 5 (muy buena)

	Ranking de la media ⇓	No sabe o no contesta
	1 2 3 4 5	
Mi opinión sobre el material en PDF proporcionado es	4.5	0
Mi opinión sobre los vídeos explicativos de los aspectos teóricos es	4.3	0
Mi opinión sobre los vídeos explicativos de los ejemplos resueltos es	4.5	1
El número de vídeos sobre los aspectos teóricos es suficiente	4.5	1
El número de vídeos sobre ejemplos resueltos es suficiente	4.6	1
Mi opinión global sobre el material proporcionado es	4.7	1
Mi opinión sobre el Canal de YouTube EDUMATICUS es	4.5	2

Imagen 5. Opinión global sobre los materiales del Curso 0 2021/2022.

15 Por favor, señale un número entre el 1 (estoy en completo desacuerdo) y el 5 (estoy completamente de acuerdo)

	Ranking de la media ⇓	No sabe o no contesta
	1 2 3 4 5	
Los distintos profesores que aparecen en los vídeos explican con claridad	4.6	0
Sinceramente, pienso que el profesorado de este Curso 0 ha desarrollado su labor de forma satisfactoria	4.6	0

Imagen 6. Opinión sobre la labor del profesorado del Curso 0 2021/2022.

En cuanto a las reflexiones propias del profesorado que impartimos la actividad (7 profesores de las Áreas de Matemática Aplicada y de la de Estadística e Investigación Operativa), nos gustaría destacar que si en los inicios de esta experiencia teníamos muy clara la necesidad de su realización (por todas las razones desarrolladas en el apartado Introducción), después de lo acontecido por la pandemia de la COVID19 esa necesidad se ha visto todavía más reforzada. Por el cambio en Bachillerato de la docencia presencial a docencia online inicialmente y mixta posteriormente, algunos de los contenidos dejaron de impartirse totalmente o en el mejor de los casos se impartieron parcialmente, por lo que algunos alumnos llegaban a la Universidad sin haber trabajado algunos de estos contenidos esenciales. Baste como ejemplo que han llegados alumnos a Grados de Ingeniería sin haber cursado, ni siquiera por encima, el concepto de primitiva de una función.

Por otra parte, al ser uno de los componentes del equipo docente profesor-tutor de la Universidad Nacional de Educación a Distancia, hemos comprobado que tanto este curso 0 como los materiales utilizados en el mismo, eran perfectamente adecuados para los alumnos de esta Universidad y los hemos utilizado también para los alumnos que han accedido en los 2 últimos cursos académicos a diversos grados de Ingeniería, grado de Física y grado de Química.

Por último, hemos detectado que en Andalucía, a pesar de estar incluido en los contenidos a desarrollar en el currículum de Secundaria, la mayoría de los Centros no imparte el módulo de combinatoria, por lo que ya estamos elaborando los materiales correspondientes para incluirlo en el curso 0 del curso que viene.

CoF001 Un acercamiento al pensamiento probabilístico en alumnado con trastorno del espectro autista

Mª del Pilar Sabariego Arenas
sabariego0@educantabria.es
IES Santa Cruz (Villabáñez. Cantabria)
Irene Polo-Blanco
irene.poco@unican.es
Universidad de Cantabria
Melody García-Moya
melody.garcia@uclm.es
Universidad de Castilla La Mancha
Juncal Goñi-Cervera
juncal.goni@unican.es
Universidad de Cantabria

Núcleo temático: formación del profesorado, inclusión.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

Se han llevado a cabo distintos estudios para evaluar aspectos como la comprensión y el uso de conceptos probabilísticos y estadísticos en estudiantes de desarrollo típico. Sin embargo, hemos encontrado escasas investigaciones que evalúen estos aspectos en alumnado con Trastorno del Espectro Autista (TEA), a pesar de que cada vez es más frecuente su escolarización en todos los niveles educativos y de que la probabilidad y la estadística son contenidos del currículum básico de Eduación Primaria y de Educación Secundaria.

Dadas las características de este trastorno, y con el fin de profundizar en el razonamiento matemático, se hace necesario el diseño de instrumentos de evaluación que se adapten a las necesidades del alumnado TEA.

En este trabajo damos algunos detalles del proceso de diseño, construcción y validación de un cuestinario para conocer los significados intuitivos de la

probabilidad que dan estudiantes TEA y mostramos los resultados obtenidos en un caso particular.

Palabras clave: Cuestinario, Diseño, Valoración, Trastorno del Especto Autista, Intuiciones Probabilísticas

1. Diseño, construcción y validación

El diseño, construcción y validación del instrumento consta de dos partes: en la primera se realiza una revisión de la literatura relativa a tres hechos: las intuiciones probabilísticas primarias presentes en los estudiantes (Green, 1982; Fischbein y Gazit, 1984; Cañizares, 1997), las investigaciones realizadas en cuanto a la enseñanza de la probabilidad y la estadística en niños con algún tipo de discapacidad (López-Mojica, 2012, 2013) y los rasgos que presentan los estudiantes con TEA, con el fin de tenerlos en cuenta a la hora de diseñar los items, como se ha hecho en trabajos similares relativos al aprendizaje de las matemáticas en alumnado con este tipo de trastorno (Polo-Blanco y otros, 2022). En la segunda parte, se construye y valida el cuestionario siguiendo siete fases: en la primera, se elabora una versión inicial del instrumento; en la segunda, dicha versión se somete a la valoración por un grupo de expertos; en la tercera, teniendo en cuenta las aportaciones de los expertos, se construye una nueva versión del instrumento, en adelante segunda versión; en la cuarta, esta nueva versión es sometida de nuevo a juicio de los expertos; en la quinta, tras las modificaciones llevadas a cabo después de la segunda valoración, se elabora una versión piloto del cuestionario; en la sexta, la versión piloto es puesta en práctica con un estudiante que cumple los requisitos de la población a la que va dirigido el cuestionario; y en la séptima, se construye la versión final del instrumento teniendo en cuenta el análisis realizado tras la realización del test en la prueba piloto.

1.1 Diseño inicial de cuestionario

Como se comentó antes, en el diseño y/o adaptación de los ítems se han tenido en cuenta dificultades propias del trastorno de autismo. En particular, se han tenido en cuenta las dificultades de comprensión de lenguaje (AAP, 2013), tanto oral como escrito, creando enunciados con un vocabulario sencillo y claro y evitando palabras

que pudieran ser desconocidas para los estudiantes (azar, probable, equiprobables,...); los déficits en la teoría de la mente (Ozonoff y Schetter, 2007) que dificultan que una persona con TEA sea capaz de ponerse en el lugar de otra persona, por lo que, en la medida de los posible, se ha intentado que el participante sea el protagonista de cada ítem y se han evitado los enunciados donde aparececiesen varias personas, así como la literalidad en la interpretación del lenguaje (Happé, 1993), puesto que impide a la persona con TEA comprender los enunciados con doble sentido o incluir aspectos que se omitan. Por esta razón, y con el fin de facilitar el entendimiento del enunciado, hemos proporcionado material físico en muchos de los items. Por último, también hemos tenido en cuenta los déficits de atención sostenida y focalizada (Ozonoff y Schetter, 2007), presentando los enunciados y los datos numéricos de los items de la manera más simplificada posible.

1.2 Construcción del cuestionario

A partir de la revisión de las investigaciones relativas a las intuiciones probabilísticas primarias presentes en los estudiantes (Green, 1982; Fischbein y Gazit, 1984; Cañizares, 1997) y a las características de los estudiantes con TEA (Happé, 1993; Ozonoff y Schetter, 2007) se diseñó una versión inicial del cuestionario que estaba dividida en tres partes. La primera fue pensada para hacerla oralmente y estaba compuesta por nueve ítems relativos a concepciones previas sobre el azar, la aleatoriedad y las supersticiones que pueden afectar a situaciones aleatorias, así como a la compresión de la independencia y del muestreo con y sin reemplazamiento. La segunda parte constaba de siete ítems en formato escrito relacionados con la comparación de probabilidades simples con un número de bolas pequeño, la compresión del suceso seguro con un número de bolas más grande y la capacidad de razonamiento combinatorio. Por último, la tercera parte consistía en cinco ítems también en formato escrito, pero opcionales. Se realizarían sólo si el estudiante respondía correctamente a alguno de los ítems relativos a la comparación de probabilidades con bolas. En este caso, los problemas eran relativos a la comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos

experimentos con sucesos equiprobables y no equiprobables con un número de bolas mayor.

Teniendo en cuenta las cuestiones y los materiales que se usan en las investigaciones realizadas por López-Mojica (2012, 2013), así como la literatura relativa a las dificultades de aprendizaje, sobre todo en matemáticas, que presentan los estudiantes con TEA, decidimos añadir imágenes en algunos de los items, sobre todo en aquellos que tratan de cajas y bolas.

1.3 Primera y segunda validación del cuestionario mediante juicio de expertos

Según Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008) el juicio de expertos es un método cualitativo de validación útil para verificar la fiabilidad de una investigación. Lo definen como "una opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados en éste, y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones".

La validación de nuestro instrumento se llevó a cabo por siete expertos en matemáticas y en educación matemática de Canarias, Cantabria, Castilla la Mancha, Cataluña y País Vasco. Se les enviaron tres documentos: uno explicando el diseño y justificando la necesidad de la elaboración de un test que permita conocer los significados intuitivos que estudiantes con TEA dan a la noción de probabilidad, de qué forma evalúan probabilidades sencillas y cuáles son algunas de las dificultades relacionadas con el razonamiento probabilístico con las que se encuentran; otro que contenía la versión inicial del instrumento; y, por último, una pauta para valorar la adecuación de cada ítem del cuestionario.

Concretamente, se solicitó a los expertos que evaluasen: a) la claridad, es decir el lenguaje y los apoyos gráficos utilizados en cada ítem, teniendo en cuenta las características de aprendizaje de los estudiantes con TEA; b) la relevancia o interés para la investigación de los contenidos trabajados en cada ítem; y c) la pertinencia de dichos contenidos teniendo en cuenta las características de la población a la que va dirigido el instrumento. Además, para cada ítem se ofreció un apartado en el que añadir cualquier sugerencia que se quisiera realizar sobre el mismo, y hubo otro

apartado en el que podían realizar aportaciones o recomendaciones generales sobre el cuestionario o sobre el protocolo de aplicación.

Teniendo en cuenta las primeras valoraciones de los expertos, se analizaron las distintas aportaciones realizadas y se reelaboró el cuestionario contrastando las evaluaciones y añadiendo contribuciones sugeridas y propias. Esta segunda versión constaba de dos partes, ambas pensadas para ser realizadas en formato oral. La primera constaba de 20 ítems relativos a: concepciones previas sobre el azar, la aleatoriedad y las supersticiones que pueden afectar a situaciones aleatorias; la compresión de la idea de experimento determinista y de experimento aleatorio, de la idea de independencia y del muestreo con y sin reemplazamiento; la distinción entre suceso seguro y suceso imposible; la comparación de probabilidades con una escala cualitativa y con un número pequeño de bolas; y la capacidad de razonamiento combinatorio. La segunda parte estaba formada por seis ítems opcionales, que se realizarían sólo si el estudiante contestaba correctamente a alguno de los problemas 10, 11 o 12 de la primera parte, los relativos a la comparación de probabilidades con un número pequeño de bolas. En todos ellos, como ocurría en la tercera parte de la versión inicial, se evaluaba la comparación de probabilidades simples con un número mayor de bolas.

La segunda versión del instrumento se sometió de nuevo al juicio de los siete expertos. Como en la primera ocasión se les enviaron tres documentos y se les pidió que evaluasen los mismos aspectos que en la anterior versión.

Una vez realizada la segunda validación de los expertos y teniendo en cuenta sus nuevas aportaciones, se reelaboró el cuestionario. En esta ocasión los cambios se refirieron sobre todo al formato de los items y no al contenido. La versión piloto obtenida constaba de dos partes en formato oral. La primera parte estaba formada por 19 items y la segunda por seis. Todos ellos relativos a los mismos conceptos que los items de la segunda versión. Como en las versiones anteriores, la segunda parte era opcional y sólo se realizaría si fuesen correctas las respuestas de alguno de los problemas 10, 11 o 12 de la primera parte, los relativos a la comparación de probabilidades con un número pequeño de bolas.

2. Aplicación del cuestionario piloto y construcción del cuestionario definitivo

Se puso en práctica la versión piloto del cuestionario con un estudiante que cumplía los requisitos de la población a la que va dirigido el cuestionario. A continuación mostramos algunas de las preguntas que se hicieron y las respuestas que dio el estudiante.

- Ítem 3a.

  Evaluador: *¿Has tenido suerte alguna vez? ¿Cuándo fue? ¿Qué ocurrió? ¿Por qué tuviste suerte? ¿Hay algo que piensas que te da suerte? ¿Hay cosas que dan suerte? Di alguna*.

  Estudiante: *¿De cuál, por ejemplo?*

  Ev: *Suerte, … ¿en qué ocasión?... ¿Cuándo has tenido suerte?... Alguna vez que hayas tenido suerte…*

  Est*: ¡Ah, ya! ¿Sabes cuál? ¿Sabes cuál por ejemplo? Pues exactamente porque… porque yo iba pensando en positivo ¿sabes?... Iba pensando… pues no me voy a decir que voy a perder, pero si llego a pensar igual que voy a perder… igual ya… es más complicado.*

Como vemos el estudiante muestra tener concepciones sobre el control de los fenómenos aleatorios, puesto que pensar en positivo afecta positivamente a la situación. Esta misma situación se refleja en la respuesta dada en el ítem siguiente.

- Ítem 3b.

  Ev: *Ahora te voy a contar una historia de otro niño que se llama Jose. Jose piensa que si pone el pie derecho al entrar en su habitación tendrá buena suerte. Así que todos los días entra en su habitación poniendo el pie derecho porque piensa que eso le va a ayudar a ganar la partida de cartas que juega todas las tardes con su hermana. ¿Crees que entrar con el pie derecho le ayuda a Jose a ganar la partida de cartas a la que juega todas las tardes con su hermana? ¿Por qué?*

  Est: *Pues, hombre, puedes ganar una vez… una tarde, dos tardes, tres, … pero ya más de tres… cuatro ya seguidas, ya… son muchas ¿sabes? Para mí son ya como demasiadas.* (Aquí el estudiante muestra no tener percepción de la propiedad de pérdida de memoria.) *Yo creo que igual… Yo pienso que igual no. Igual ahí no. Con el tiempo igual sí, pero con este… igual… no ¿sabes? Yo ahí… igual ya… ¿Pensar en positivo? Le ayudará a ganar la partida*".

Observamos que el estudiante vuelve a su experiencia para dar una respuesta definitiva, mediante un pensamiento que le permite controlar el fenómento aleatorio.

Profundizando un poco más en la propiedad de pérdida de memoria, analizamos la respuesta dada al items 7a y 7b.

- Ítem 7a.

  Ev: *¿Cómo se llama tu profesor o monitor favorito? ¿De qué es profesor: de matemáticas, lengua, monitor de cocina,... ?*

  Est: *Laura. Cocinamos juntos.*

  Ev: *Imagínate que Laura hace un sorteo todos los días del año que tienes taller de cocina con ella. Cada día Laura escribe los nombres de todos los compañeros de clase en un trozo de papel y los mete dentro de una bolsa negra. Después saca un papel sin mirar. El nombre del compañero que salga gana una chocolatina. Imagínate que se termina este mes de marzo y no has ganado ningún día la chocolatina. ¿Crees que en abril ganarás tú la chocolatina algún día?*

  Est: *Creo que sí.*

  Ev: *¿Por qué?*

  Est: *Pues porque si la gano… o qué sé. ¡Ah! Pues porque si la han ganado unos cuantos chicos en… durante el mes de marzo ¿no? Eso pone. Pues igual en abril, puede ser… puede ser que me toque a mí ¿sabes? El ganarme la chocolatina.*

  Ev: *¿Crees que es más probable que ganes en abril porque en marzo no has ganado?*

  Est: *Sí.*

- Ítem 7b.

  Ev: *Miguel participa una vez al mes en un sorteo porque quiere ganar un patinete. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero ha decidido seguir jugando por la siguiente razón: "un sorteo es un juego de suerte, algunas veces se gana y otras se pierde. Como he jugado muchas veces y no he ganado todavía, estoy seguro de que voy a ganar muy pronto". ¿Crees que Miguel ganará el sorteo muy pronto, por ejemplo, la semana que viene?*

  Est*: Depende. Sí… muy pronto sí… puede ser que muy pronto o… o… o un poco… o bastante más tarde. Te quiero decir.*

  Ev: *¿Crees que Miguel lo ganará… pronto, más o menos o tal, porque no lo ha ganado todavía?*

  Est: *Ahí igual te pued… te puedo decir que sí.*

En ambos ítems, cuando el estudiante es el protagonista y cuando no lo es, la respuesta es la misma y muestra que no existe comprensión de la idea de independencia en la repetición de experimentos aleatorios, ni percepción de la propiedad de pérdida de memoria.

- Ítem 8.

  Ev: *En la clase de Matilde su profesor hace un sorteo de un premio todos los meses: escribe el nombre de todos los niños y niñas en un trozo de papel y los mete dentro de una bolsa negra. Después saca un papel sin mirar. Si en la clase de Matilde hay 9 niños y 12 niñas* (el evaluador enseña las tarjetas donde aparecen 9 niños y 12 niñas), *¿crees que es más probable que salga el nombre de un niño, el de una niña o los dos igual de probables?*

  Est: *El de una niña.*

  Ev: *¿Por qué?*

  Est: *Porque… porque 12 es mayor que… es… es más grande ¿no? Mayor es más grande ¿no? Es más grande que 9.*

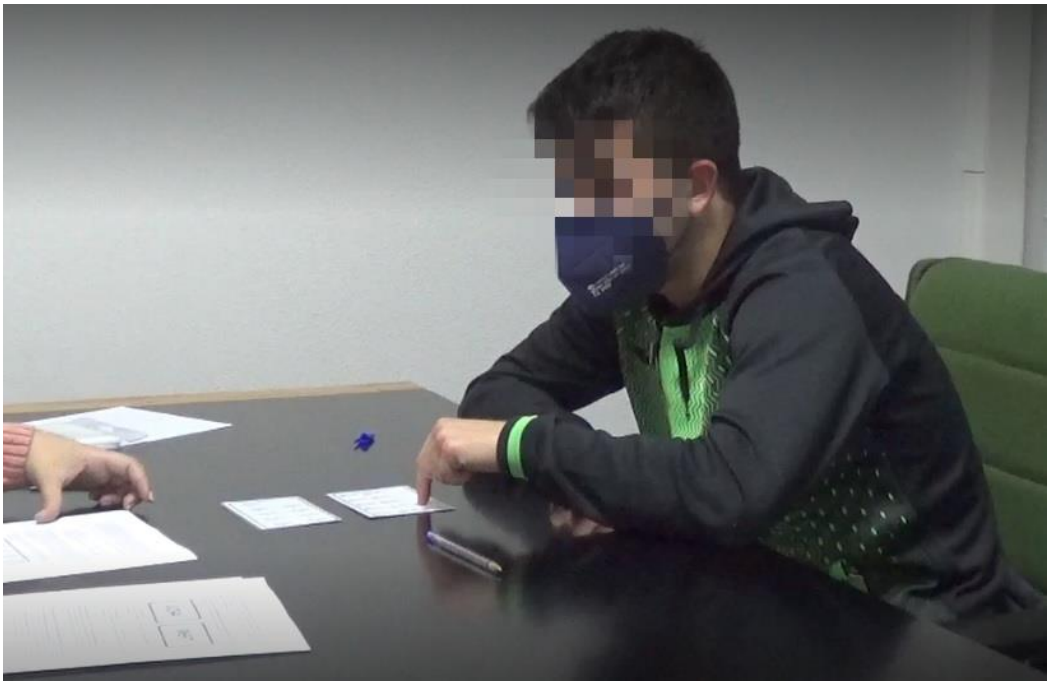


Imagen 1. Estudiante explicando la respuesta al ítem 8.

En este caso la respuesta es correcta lo que muestra que el estudiante es capaz de comparar la probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple con dos resultados no equiprobables. Además entiente la utilización de términos probabilísticos de uso común al referirnos a la incertidumbre.

- Ítem 9.

  Ev: *En el kiosco donde Ana compra habitualmente una revista sortean un premio. Ana quiere participar en el sorteo y decide comprar un número. Al kiosquero solo le quedan dos números, el 1234 y el 3697. ¿Con cuál de estos boletos es más probable que le toque el premio del sorteo a Ana?* (El evaluador entrega los dos boletos al estudiante.)

  Est: *El más grande ¿sabes? Por… porque es mayor que… que… que… que 1234.*

  Ev: *Con el mayor. Vale. ¿Por qué? Porque es mayor ¿no? Has dicho.*

  Est: *Exactamente.*

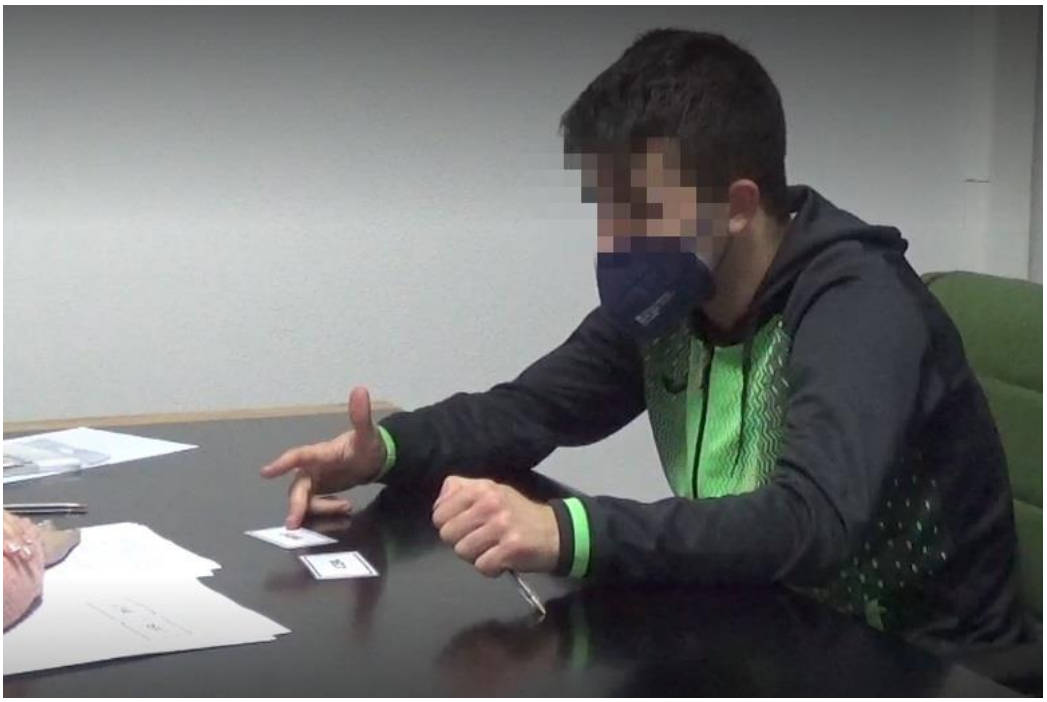


Imagen 2. Estudiante explicando la respuesta al ítem 9.

En este caso la respuesta es incorrecta ya que el estudiante asocia la probabilidad de ganar con el hecho de que salga el número más grande. Piensa que el número más grande tiene más probabilidad de salir. Los factores de tipo subjetivo que aparecen en el planteamiento de la situación influyen en la respuesta, no realizándose una comparación correcta de las probabilidades de los sucesos elementales en el experimento compuesto.

A continuación, vamos a exponer las respuestas dadas por el estudiante en los items donde se planteaban problemas de comparación de probabilidades simples de

un mismo suceso en dos experimentos con dos sucesos no equiprobables. Posteriormente las analizaremos conjuntamente.

Al inicio de cada ítem, el evaluador entrega al estudiante la tarjeta correspondiente al ítem que se va a trabajar y después de poner las bolas en las cajas le recuerda que en la tarjeta poner las bolas que hay en cada caja.

- Ítem 10.

  Ev: *[...] En la primera caja pon una bola blanca y otra bola negra. En la segunda caja pon una bola blanca y dos bolas negras. Ahora, tápalas y agítalas. Ganas si eliges la caja de donde es más probable sacar una bola negra, ¿qué caja eliges la 1 o la 2? ¿Por qué?*

  Est: *¡Ah! Porque como en la Caja 2… en la Caja 2 había… 2 bolas negras y en la Caja 1 hay una… pues igual hay… tendría más suerte en la Caja 2.*

Imagen 3. Estudiante introduciendo las bolas para realizar el ítem 10.

- Ítem 11.

  Ev: *[...]En la primera caja pon dos bolas blancas y dos bolas negras, en la segunda caja tres bolas blancas y dos bolas negras, tápalas y agítalas. Ganas si eliges la caja de donde es más probable sacar una bola negra, ¿qué caja eliges la 1 o la 2? ¿Por qué?*

  Est: *Pues porque en la caja número 1 hay… están… hay igual 2 bol… 2 bolas blancas ¿no? y dos bolas negras. Y en la caja número 2 hay 3 bolas… hay 3 bolas blancas y 2 bolas negras…*

Que en la caja número 1 hay el mismo número de bolas blancas y negras … y en la número 2, son… hay más… un poco… una más de blancas y una… de negras… para… La número 2.

- Ítem 12.

Ev: *[...] En la primera caja pon dos bolas blancas y dos bolas negras, en la segunda caja una bola blanca y una bola negra, tápalas y agítalas. Ganas si eliges la caja donde es más probable sacar una bola negra, ¿qué caja eliges la 1 o la 2? ¿Por qué?*

Est: *La 1.*

Ev: *Vale. ¿Por qué la 1?*

Est: *La 1. ¡Ah! Porque en la caja número 1 hay, aunque estén igualadas… en las dos cajas, pero en la caja número 1 hay 2 bolas blancas … y 2 bolas negras. O sea, el número es mayor que en la caja número 2, porque ahora en la caja número 2 hay una bola blanca…*

- Ítem 13.

Ev: *[...] En la primera caja pon dos bolas blancas y cuatro bolas negras, en la segunda caja cuatro bolas blancas y ocho bolas negras, tápalas y agítalas. Vuelves a ganar si eliges la caja de donde es más probable sacar una bola negra. ¿Qué caja eliges la 1 o la 2? ¿Por qué?*

Est: *La caja número 2.*

Ev: *¿Por qué?*

Est: *Pues… Te puedo decir por… por qué… Aunque en la caja número 1 haya… en… haya… en las… en la 2, en la… 2 blancas y 2 negras. No. No me estoy explicando bien. En la caja número 1 es menor número que en la caja número 2… Porque en la caja número 2 hay ya 4 bolas blancas y 4 bolas negras. Así que la caja número 2 es mayor número… que… que en la caja número 1. Que en la caja número 1 hay menor número.*

- Ítem 14.

Ev: *[...] En la primera caja pon una bola blanca y tres bolas negras, y en la segunda una bola blanca y dos bolas negras, tápalas y agítalas. Vuelves a ganar si eliges la caja de donde es más probable sacar una bola negra. ¿Qué caja elijes la 1 o la 2? ¿Por qué?*

Est: *Yo he cogido la caja número 1.*

Ev: *¿Por qué?*

Est: *Pues porque en la caja número 1 hay más… hay 3 bolas negras … y una bola blanca. Y en la caja número 2 hay una bola blanca y… y dos bolas negras. En la caja número dos hay menos… hay menos… menos bolas negras… menos bolas negras que en la 1.*

- Ítem 15.

  Ev: *Ya estamos terminando. Introduce en cada caja las bolas que pone en la tarjeta. En la primera caja pon dos bolas blancas y siete bolas negras, y en la segunda caja tres bolas blancas y ocho bolas negras, tápalas y agítalas. Vuelves a ganar si eliges la caja de donde es más probable sacar una bola negra. ¿Qué caja eliges la 1 o la 2? ¿Por qué? Recuerda que en la tarjeta pone las bolas que hay en cada caja.*

  Est: *2 también. Te lo explico. ¿Vale, amiga? Te lo... Porque en la caja número 1… Te digo el número de las negras. Hay…* [NO SE ENTIENDE]. *Mucho dos y poco uno. ¡Fíjate! Pero no suele ser así. Porque en la caja número 1 hay 7 bolas negras … Hay menor número… hay menor número que en la caja 2 …*

Aunque la respuesta al primer ítem de esta serie es correcta y puede hacer pensar que el estudiante razona bien en el caso en que comparamos probabilidades simples con igualdad de casos desfavorables y desigualdad de casos posibles, no es así al analizar las respuestas a los items donde se comparan probabilidades mediante el uso de bolas y cajas. El estudiante en todos los casos salvo en el ítem 11 elige la caja donde hay un mayor número de bolas negras, independientemente de la relación que haya entre las bolas blancas y las bolas negras. En la mayoría de los casos piensa que es más probable sacar una bola negra en aquella caja donde el número de bolas negras es mayor. Durante la realización del cuestionario, se improviso realizando el experimento (en el ítem 14) para que el alumno comprobara que no siempre iba a ganar al elegir la caja que tuviese el mayor número de bolas negras. El azar hizo que al hacerlo saliera una bola blanca y la cara de sorpresa del estudiante mostraba que el resultado contradecía su intuición. A pesar de esto, en el ítem siguiente volvió elegiendo la caja que tenía mayor número de bolas negras.

En el ítem 11 el estudiante elige la caja que tiene un mayor número de bolas, independientemente del color de las misma.

Imagen 4. Estudiante realizando el experimento del ítem 14.

En general, al analizar la puesta en práctica de la versión piloto observamos que el estudiante utiliza experiencias vividas para dar solución a los items planteados, lo cual fue utilizado para realizar preguntas guia que ayudaron a que entendiera conceptos más abstractos como “suerte”.

También observamos que la duración del test en una única sesión fue de una hora y media, lo que es excesivo ya que el cansancio del estudiante dificultó atención.

A partir del análisis de la puesta en práctica de la versión piloto se rehízo el cuestionario, eliminando algunos ítems y añadiendo modificaciones propias, por ejemplo, no vemos necesario realizar todos los items de cajas y bolas usando cajas y bolas, basta con realizar el primero para que el estudiante entienda la dinámica del resto de items. En los siguientes basta con utilizar la tarjeta correspondiente.

La versión definitiva, que se puede consultar en Sabariego y otros (2021), tiene forma de entrevista semiestructurada, en la que se destaca en color morado las sugerencias para el entrevistador con el fin de que pueda recabar la información que pretende conseguir. Está concebida para ser realizada en formato oral y está formada por 23 items: 17 relativos a los mismos contenidos que los items de las primeras partes de las versiones anteriores y los otros seis relativos a la comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con sucesos no equiprobables o equiprobables, todos ellos en situaciones distintas y con un número pequeño de bolas.

A continuación, se muestran los contenidos que se trabajan en el cuestionario definitivo (Sabariego y otros, 2021) y de dónde se han extraído o inspirado.

Ítem	Contenido	Inspirados o adaptados
1a,b,c	Sucesos seguros, posibles e imposibles.	Alsina y Vásquez (2015)
2	Posibilidad de que sucedan diversas situaciones familiares.	Vásquez y otros (2020)
3a,b	Sucesos aleatorios y posibilidades de control sobre ellos.	Fischbein y Gazit (1984) (Cuestionario B, ítem 2)
4a,b,c	Supersticiones sobre circunstancias.	Cañizares (1997) (Ítem 3)
5	Idea de independencia en la repetición de un experimento.	Green (1982) (Ítem 5)
6a,b	Idea de independencia en la repetición de un experimento.	Fischbein y Gazit (1984) (Cuestionario B, ítem 3.)
7a,b	Diferencia entre muestreo con y sin reemplazamiento.	Fischbein y Gazit (1984) (Cuestionario B, ítem 5)
8	Elección de una opción entre dos dadas comparando probabilidades.	Green (1982) (Ítem 2)
9	Elección de una opción entre dos dadas aplicando sus propias creencias.	Fischbein y Gazit (1984) (Cuestionario B, ítem 4)
10	Compración de cajas con igualdad de casos desfavorables y desigualdad de casos posibles.	Green (1982) (Ítem 6c)
11	Comparación de cajas con igualdad de casos favorables y desigualdad de casos posibles.	Green (1982) (Ítem 6a)
12	Comparación de cajas con casos equivalentes.	Green (1982) (Ítem 6b)
13	Comparación de cajas con casos equivalentes.	Fischbein y Gazit (1984) (Cuestionario B, ítem 6)
14	Comparación de cajas donde los casos favorables son múltiplo de los desfavorables, però estas no son equivalentes.	Green (1982) (Ítem 6d)
15	Comparación de cajas donde los casos favorables no son múltiplo de los desfavorables y, además, no son equivalentes.	Sugerencia de un experto
16	Habilidad combinatoria de recuento multiplicativo.	Green (1982) (Ítem 26)

Tabla 1. Contenido tratado en cada uno de los ítems del cuestionario definitivo

3. Conclusiones

En este trabajo, no solo se ha descrito el diseño, construcción y validación de un cuestionario para evaluar el pensamiento probabilístico del alumnado con TEA, sino que se han revisado algunos resultados obtenidos al aplicarlo en un caso particular. Esto permite mostrar como el uso del cuestionario ayudará a los docentes a orientar la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos probabilísticos en el alumando TEA, al poder identificar creencias, fortalezas y debilidades de este

colectivo respecto a estos contenidos matemáticos, así como, conocer los términos y expresiones probabilísticas que emplean en contextos probabilísticos cotidianos. Por otro lado, podran comprobar en que estadío se encuentran los estudiantes en cuanto a la comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos con dos sucesos equiprobables y no equiprobables, según los números de casos posibles, favorables o desfavorables sean iguales o no en todas las combinacions posibles.

4. Agradecimientos y apoyos

Trabajo parcialmente financiado por:

PID2019-105677RB-100-AEI/10.13039/501100011033 del Ministerio de Economía y Competitividad de España, PREJCCM2019/7 de la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha y por las Ayudas Concepción Arenal del Gobierno de Cantabria.

Referencias

Alsina, Á. y Vásquez, C. (2015). *La enseñanza de la probabilidad en educación primaria: el currículo versus el libro de texto. Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia*,SEMRM, nº.1, 1-14.

Asociación Americana de Psiquiatría (2013). *Guía de consulta de los criterios diagnósticos del DSM 5*. Arlington, VA: Asociación Americana de Psiquiatría.

Cañizares, M.J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Escobar-Pérez, J. y Cuervo-Martínez, Á. (2008). *Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización*. *Avances en medición*, nº, 1, 27-36.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, nº.1, 1-24.

Green, D.R. (1982). *Probability concepts in school pupils aged 11-16 years*. Tesis Doctoral. University of Loughborough.

Happé, F.G. (1993). Communicative competence and theory of mind in autism: a test of relevance theory. *Cognition: International Journal of Cognitive Science*, nº.2 , 101–119.

López-Mojica, J. M. (2013). *Pensamiento probabilístico y esquemas compensatorios en la educación especial*. Tesis Doctoral. Universidad de México.

López-Mojica, J. y Ojeda Salazar, A. M. (2012). La probabilidad en educación especial: experiencia en el sexto grado. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C*, nº.1, 395-404.

Ozonoff, S. y Schetter, P. L. (2007). Executive dysfunction in Autism Spectrum Disorders: From research to practice. *Executive function in education: From theory to practice*, nº.1, 287-308.

Polo-Blanco, I., Van Vaerenbergh, S., Bruno, A., Gonzalez, M. J., (2022). Conceptual model-based approach to teaching multiplication and division word-problem solving to a student with autism spectrum disorder. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, nº.1, 31-43.

Sabariego, P., Polo-Blanco, I., García-Moya, M., Goñi-Cervera, J. (2021). Diseño, construcción y validación de un cuestionario para evaluar el pensamiento probabilístico en alumnado con trastorno del espectro autista. *Dykinson: Entornos Virtuales para la Educación en Tiempos de Pandemia: Perspectivas Metodológicas*, nº1,438-468.

Vásquez, C., Rodríguez-Muñiz, L.J., Muñiz-Rodríguez, L. y Alsina, Á. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para la Educación Secundaria. *Números*. Revista de Didáctica de la Matemáticas, nº.1, 239-260.

CoF002 Percepciones de los y las maestras en formación inicial durante sus prácticas externas en tiempos del covid-19 sobre la resolución de problemas matemáticos

María Santágueda Villanueva
santague@uji.es
Universitat Jaume I, Castellón.
Gil Lorenzo Valentín
Gil.Lorenzo@uji.es
Universitat Jaume I, Castellón.

Núcleo temático: Formación del profesorado, procesos

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Universidad (Grado en Maestro/a de Educación Infantil y Primaria, Universitat Jaume I, Castellón).

RESUMEN

En el contexto de las prácticas externas del Grado en Maestro/a de Educación Infantil y Primaria de la Universitat Jaume I, desde del área de Didáctica de la Matemática de esta misma universidad nos planteamos indagar sobre la percepción que tienen nuestro alumnado con respecto a las dificultades que aparecen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con relación a la resolución de problemas. También si la manera de trabajar estos ha variado en tiempos de la pandemia ocasionada por el COVID-19. Para ello se realizó un cuestionario online en Google forms y se ha analizado algunas de las preguntas. Como principales conclusiones destacamos que nuestro alumnado ha detectado algunos de los errores documentados en la literatura y relacionados con la resolución de problemas y que la pandemia no ha modificado sustancialmente las dinámicas establecidas en el ámbito de primaria sobre cómo se resuelven problemas matemáticos.

Palabras clave: Resolución de Problemas, Educación Matemática, Formación de Profesores, Prácticum.

1. Introducción

Entre nuestras tareas docentes en el Grado en Maestro/a de Educación Primaria de la Universitat Jaume I, además de trabajar estrategias didácticas para un desarrollo apropiado de los contenidos de los currículos correspondientes (Alcalde, Pérez y Lorenzo, 2014; Pérez, Alcalde y Lorenzo, 2014; Lorenzo, Alcalde y Pérez, 2015; Cañal, García-Carmona y Cruz-Guzmán, 2016; Pujol, 2003), destaca la tutorización de estudiantes que se encuentran realizando prácticas externas en centros de educación infantil y primaria. Estas prácticas se realizan actualmente en 2.º, 3.º y 4.º curso del grado, donde el alumnado ha cursado estudios de didáctica de la matemática para poder desarrollar la enseñanza de estas materias en un aula de primaria excepto el alumnado de 2.º que no ha cursado la asignatura de didáctica de la matemática.

Durante la estancia en prácticas del alumnado, los tutores y tutoras de la universidad realizan diversas visitas a los centros en los que se efectúa un seguimiento de las actuaciones docentes de nuestro alumnado. Además, al finalizar el periodo de prácticas, el alumnado presenta una memoria que incluye, entre otros contenidos, las programaciones de las asignaturas impartidas. A partir de esta información hemos identificado dificultades en el momento de implementar, en las aulas de primaria e infantil, el contenido trabajado en las sesiones teórico-prácticas de la universidad. Tal y como indica Bretones (2013), el alumnado está muy satisfecho por las prácticas realizadas, pero a través de sus memorias se observa una escasa reflexión crítica y una falta de interdependencia con la teoría aprendida en su formación previa.

Por este motivo hemos creado un instrumento para indagar sobre la práctica docente tomando como referencia los trabajos de Llinares (1998), Gil Cuadras (2000), Azcárate (2001) y Vásquez (2014). Dichos autores analizan desde diferentes perspectivas el conocimiento didáctico del profesorado de matemáticas. Mediante la combinación de las categorizaciones de García-Sáiz (2011) y de Hill, Ball y Schilling (2008), hemos diseñado un cuestionario cuyos ítems esperemos permitan recoger información suficiente como para dar respuesta a nuestros objetivos de investigación, relacionados con el comportamiento y el desempeño

docente de los y las maestras en las asignaturas de matemáticas. Además, se han utilizado los trabajos de Madrid, Maz-Machado, León-Mantero, Casas y Jiménez-Fanjul (2016) y Vilches y Escobar (2014) para el diseño de este instrumento.

Al igual que Giaconi, Perdomo-Díaz, Cerda y Saadati (2018), consideramos la práctica docente como "el conjunto de actividades que llevan a cabo lo maestros, como parte de su trabajo en el aula o en relación directa con él, con el propósito de que los estudiantes alcancen los objetivos de aprendizaje establecidos en planes y programas de estudio" (Martínez-Rizo, 2012, p. 1).

Nuestro trabajo quiere indagar cómo el alumnado de prácticas y sus supervisores[47] afrontan la resolución de problemas matemáticos en sus clases, de forma similar al trabajo realizado por Giaconi, Perdomo-Díaz, Cerda y Saadati (2018), esta puede considerarse como las formas de interacción entre el docente y sus alumnos (Cornelius-White, 2007). Así, el protagonista en la resolución es el estudiantado del aula de primaria y el docente es un guía en la resolución (Stephan, 2014). En este sentido, las matemáticas se convierten en una disciplina donde se discute (Swan, 2006). Otra forma de afrontar las clases de resolución de problemas es aquella donde el profesor explica el problema y el alumnado escucha de forma pasiva, absorbe el conocimiento transmitido y contesta a sus preguntas (Stephan, 2014). En este escenario, la situación problemática desaparece y se convierten en meros ejercicios para el estudiantado (Cai y Lester, 2010). El trabajo de Planas, Arnal-Bailera y García-Horando (2018) presenta el enfoque mixto en la práctica del aula, donde el profesorado y el alumnado alternan el liderazgo en la resolución de problemas matemáticos.

Por otra parte, los errores que cometen el alumnado provocan preocupación en cualquier docente a cualquier nivel (García, Segovia y Lupiáñez, 2011), por lo que su análisis puede servir para ayudar al docente a crear estrategias para mejorar la enseñanza y aprendizaje. Para Rico (1998) los errores pueden mejorar positivamente el proceso de enseñanza, por lo que, como docente, no hemos de culpabilizar al alumnado por realizarlos, sino prevenirlo pues cualquier proceso de

[47] En la Universitat Jaume I de Castelló y para todas las prácticas externas de sus titulaciones se denomina supervisor o supervisora al profesional que acoge al alumnado en prácticas. En nuestro caso, a los maestros y maestras en activo.

instrucción es potencialmente generador de errores y forma parte de las producciones del alumnado durante su aprendizaje. Juidías y Rodríguez (2007) distinguen cuatro dimensiones que provocan dificultades al alumnado a la hora de resolver problemas: errores de conocimiento de base (por ejemplo, el alumno traduce textualmente el enunciado, el alumnado comprende el enunciado, pero se equivoca cuando elige las operaciones a realizar, el alumnado tiene problemas con el conocimiento lingüístico y semántico), errores relacionados con los heurísticos, de procesos "metacognitivos" en este caso que hace referencia a la autoevaluación que hace el individuo de sus propias capacidades y limitaciones para resolver un problema y componentes afectivos (por ejemplo, el alumnado piensa que los problemas se resuelven con pocos pasos, existen palabras clave, hay que ser hábiles para resolver problemas,...)

Además, en este trabajo también indagamos sobre la autoeficiencia, es decir, las creencias que tiene el profesorado sobre su capacidad para realizar una tarea e influenciar sobre el aprendizaje de su alumnado (Bandura, 1997). Existen estudios como el de Tschannen-Moran y Hoy (2007) o Woolfolk Hoy, Hoy y Davis (2009) que señalan que la autoeficiencia del profesorado influye en la motivación y las actitudes del alumnado. Además de permitir que los maestros y maestras se desarrollen de forma plena en el aula (Covarrubias y Mendoza Lira, 2015).

En Giaconi, Perdomo-Díaz, Cerda y Saadati (2018) encontramos distintas autoeficiencias que se pueden indagar, pero en este trabajo nos centramos en la autoeficiencia de enseñar problemas, que consistiría en la creencia de las propias capacidades para enseñar la resolución de problemas, plantear y ejecutar actividades para su resolución y guiar y motivar al alumnado (Tschannen-Moran et al., 1998).

Encontramos trabajos como el de Dorfsman y Horenczyk (2021) que estudian los cambios pedagógicos de la docencia universitaria en los tiempos del COVID-19, estos vienen influenciados sobre todo por el nivel de alfabetización digital tanto del profesorado como del alumnado y de la concepción pedagógica de la enseñanza. Posiblemente el mayor problema que se ha encontrado ha sido la falta de interacción entre el profesorado y el alumnado. Trabajos como LLinares (2021)

presentan la parte positiva de esta experiencia, pues la comunicación digital nos hizo pensar y representar matemáticas de forma diferente. Aunque otros estudios como Candray (2021) observa que en muchos casos las clases presenciales se pasaron al entorno virtual, siendo solamente un cambio de formato.

Actualmente un campo de estudio en Educación Matemática se postula como la influencia del COVID-19 en nuestra forma de dar clase. Por ello, en este trabajo, nos planteamos si las clases de resolución de problemas matemáticos en las aulas de Educación Infantil y Primaria han sido modificadas o no después de aquel confinamiento. La experiencia se realizó el año siguiente del confinamiento, con las restricciones ocasionadas por la pandemia aún vigentes.

2. Metodología

Este estudio es exploratorio y descriptivo. Se creó un cuestionario, similar a los propuestos por Madrid, Maz-Machado, León-Mantero, Casas y Jiménez-Fanjul (2016) y Vilches y Escobar (2014), diseñado *ad hoc* después de las reflexiones que el alumnado realizaba con sus tutores y tutoras de la universidad en los seminarios del prácticum dual en 2.º curso. En nuestra titulación se realizan prácticas, denominadas duales, que alternan seminarios en la universidad un día a la semana y con los tutores y tutoras de prácticas externas y las propias prácticas en los colegios el resto de semana. Este cuestionario se validó mediante triangulación con tres expertos del área de Didáctica de la Matemática.

Una vez decidido el cuestionario final que se pasaría al alumnado, se les hizo llegar mediante correo electrónico. En concreto se envió a todo el alumnado que cursaba el práctium del grado de Maestro/a de Educación Primaria e Infantil de nuestra universidad. Es un cuestionario de 62 ítems y se efectuó durante el curso 2020-2021. Entre otras preguntas queremos destacar las siguientes:

- Centro, población, titularidad del centro.
- En qué curso ha realizado las prácticas externas.
- Qué contenidos de matemáticas ha trabajado con su alumnado.
- Desde su experiencia en estas prácticas, qué contenidos de matemáticas les ha resultado más difíciles de explicar a sus alumnos y alumnas.

- Desde su experiencia en estas prácticas, qué contenidos de matemáticas les ha resultado más difíciles de aprender a sus alumnos y alumnas.
- Uso de situaciones problemáticas de la vida real por parte de su supervisor o supervisora para contextualizar el trabajo de las matemáticas.
- Uso de algún tipo de esquema o fases para resolver los problemas matemáticos.
- Consideración de si los problemas matemáticos son difíciles para el alumnado de primaria. En caso afirmativo les pedíamos que marcaran algunas razones y pensaran el porqué:
    - Si el idioma de la redacción del problema no es su lengua materna.
    - Aunque sepan realizar las operaciones que resolverán el problema no las saben identificar y por ello no las utilizan.
    - Aunque hayan realizado problemas similares, no los identifican y no replican el procedimiento.
    - Identifican las operaciones que resolverán el problema, pero tienen dificultades con la mecánica de las operaciones, cometiendo errores de cálculo o de procedimiento.
    - No identifican datos o incógnitas del problema.
    - Cuando la solución es imposible, no identifican que ha podido ser culpa de algún error.
    - No comprueban la solución.
    - No reflexionan sobre lo que pedía el problema.
    - No saben explicar cómo han realizado la resolución de su problema, sea este correcto o incorrecto.

Obtuvimos la contestación de 136 estudiantes (de los cuales 114 eran chicas) que cumplimentaron el cuestionario de forma anónima y voluntaria, por tanto, se trata de una muestra intencional y a conveniencia, que refleja la población a la cual queremos destinar nuestro estudio. Destacamos que 44 contestaciones proceden del grado de Maestro/a en Educación Infantil y el resto de Educación Primaria. Aproximadamente la mitad (63 de 136) realizan las prácticas externas por primera vez en su formación, en 2.º curso. Los 73 restantes las realizaban en 3.º y por tanto era su segunda vez.

La información se volcó a una base de datos y luego se realizó un análisis de contenido utilizando el SPSS 28.

3. Resultados

A partir de los datos descriptivos se les solicitaba una pregunta de concepción obvia, si habían impartido clases de matemáticas. Obvia porque todo tutor/a de Infantil o primaria ha de impartir matemáticas, y el alumnado, durante una parte de sus prácticas, se ha de convertir en la figura de este tutor o tutora. Pero aun así, 20 de las contestaciones fueron que no.

A esta pregunta le seguían dos que consideramos importantes:

- Desde tu experiencia en las prácticas, ¿crees que las matemáticas son difíciles de explicar en el aula?
- Desde tu experiencia en las prácticas, ¿crees que las matemáticas resultan difíciles al alumnado?

Entendemos que dichas así falta mucha concreción, es decir, dependerá mucho del contenido concreto de matemáticas que hayan trabajado, y del nivel donde hayan desarrollado sus prácticas. Pero aun así queríamos valorar la percepción global que tenían sobre estas dos cuestiones. Para ello la pregunta tenía una graduación de escala Likert, donde marcar un 1 mostraba que estabas totalmente en desacuerdo con la frase y marcar un 5 todo lo contrario.

En general 90 contestaciones (66,17%) considera que no son difíciles de explicar, se sitúan en un plano de autosuficiencia para desempeñar la tarea. Del resto de contestaciones, 29 (21,3%) se sitúa en la escala en un 3, es decir no se define, y solo 17 contestaciones (de las cuales 2 eran de escala 5) piensan que efectivamente son difíciles de explicar. Globalmente podemos percibir que la población encuestada considera una tarea sencilla la de explicar matemáticas. Como tenemos los datos de procedencia, afinamos la búsqueda y obtenemos la figura 1 y 2, donde se muestra esta misma pregunta distinguiendo entre alumnado que cursa grado en Infantil o Primaria y alumnado que cursa su primera o segunda vez de prácticas externas, respectivamente.

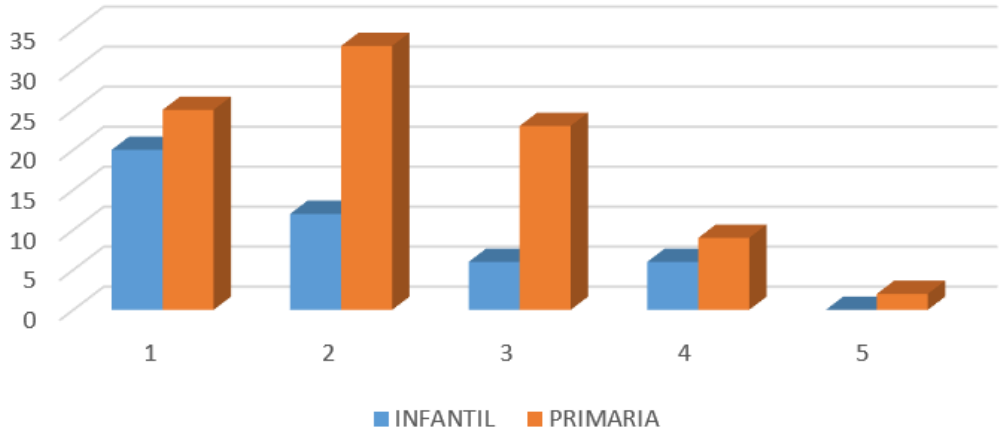


Figura 1: Diagrama de barras que muestra resultados a la pregunta de si consideran que las matemáticas son difíciles de explicar en el aula, distinguiendo si cursan estudios de Infantil o Primaria.

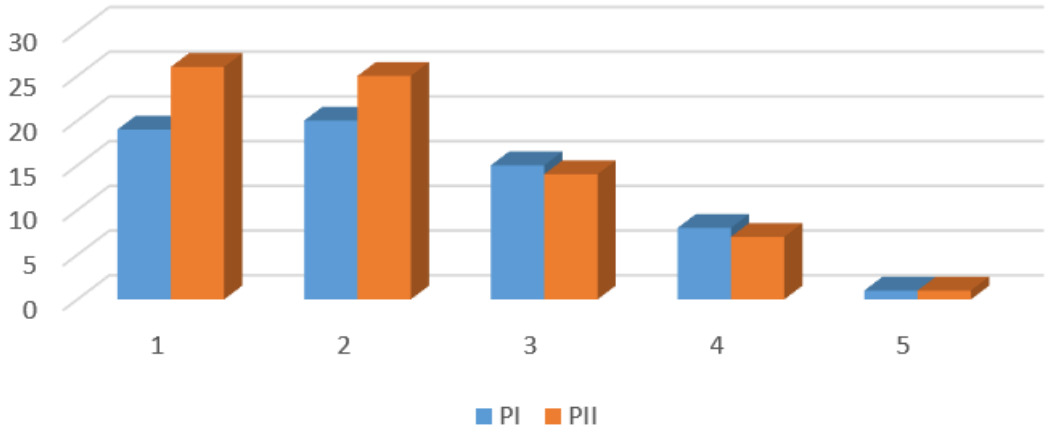


Figura 2: Diagrama de barras que muestra resultados a la pregunta de si consideran que las matemáticas son difíciles de explicar en el aula, distinguiendo si cursan las prácticas externas la primera o la segunda vez en sus estudios.

La tendencia en ambas gráficas es la misma, no encontramos diferencias de criterio en función de si las prácticas son de un grado u otro o si es la primera o la segunda vez que están realizando las prácticas. Hay que explicitar que la instrucción completa de contenidos a trabajar en las aulas de Infantil y Primaria, es decir, haber cursado las asignaturas correspondientes de Didáctica de la Matemática, se obtiene en 3.º de ambos grados y, por tanto, cuando hablamos de la primera vez que

realizan prácticas es en 2.º y todavía les quedan contenidos de didáctica de matemáticas por trabajar, pero aun así, no se observa que haya diferencia entre las contestaciones de 2.º o de 3.º.

Observando la segunda de las preguntas "*desde tu experiencia en las prácticas, ¿crees que las matemáticas resultan difíciles al alumnado?*" las contestaciones han sido algo diferentes. Un 44,4%, es decir 60 contestaciones considera que las matemáticas resultan fáciles al alumnado, un 25,2% se muestra indiferente y el resto considera que son difíciles para el alumnado. De entrada sitúan, de forma más mayoritaria, el problema en el alumnado, trasladando a él el protagonismo de las dificultades, si es que las hay, en el proceso de enseñanza aprendizaje. Observando de nuevo esta pregunta bajo la lupa de los dos grados, y los dos momentos de prácticum, obtenemos las figuras 3 y 4.

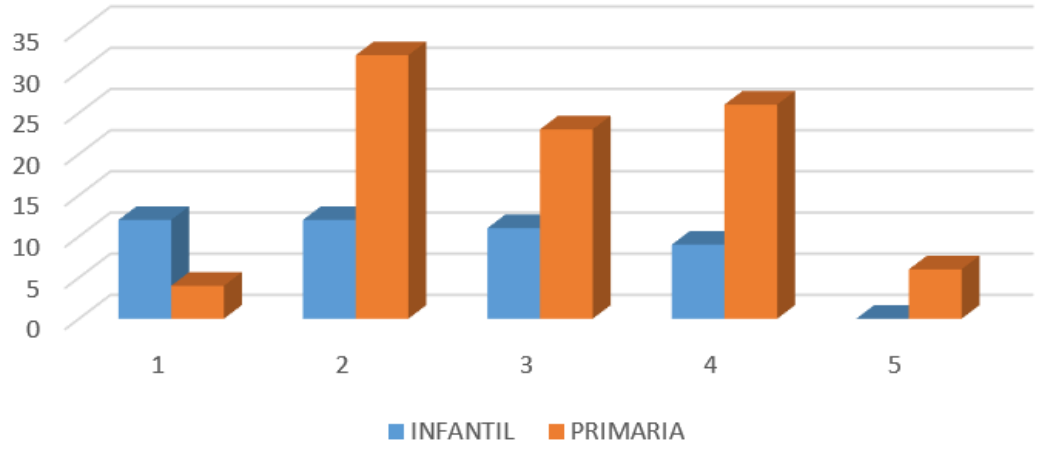


Figura 3: Diagrama de barras que muestra resultados a la pregunta de si consideran que las matemáticas resultan difíciles para el alumnado, distinguiendo si cursan estudios de Infantil o Primaria.

En esta figura 3 observamos que ciertamente en Primaria se percibe un poco más de dificultad en el alumnado para trabajar las matemáticas, y queda justificado por los contenidos específicos que hayan podido trabajar según en qué cursos.

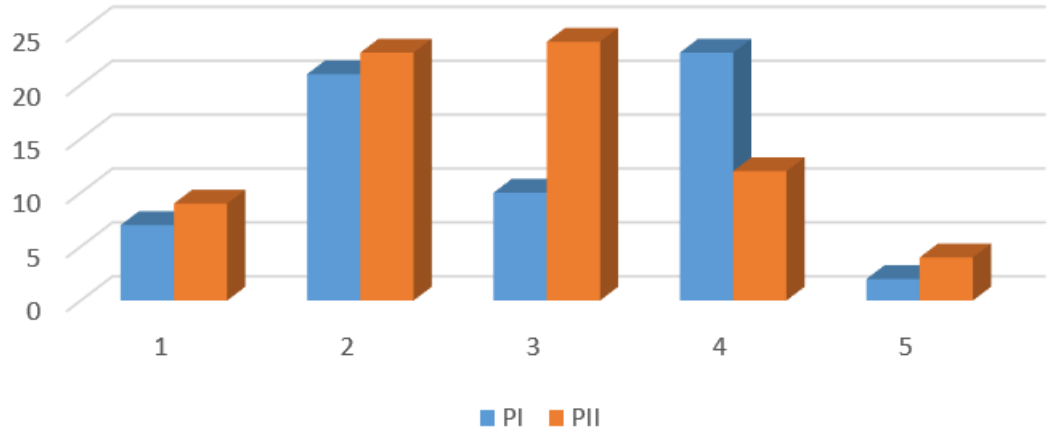


Figura 4: Diagrama de barras que muestra resultados a la pregunta de si consideran que las matemáticas resultan difíciles para el alumnado, distinguiendo si cursan las prácticas externas la primera o la segunda vez en sus estudios.

A destacar que en la primera vez que cursan el prácticum (en 2.º curso del grado) encuentren más dificultades en el alumnado para con las matemáticas, coincidiendo esta sensación de inseguridad que provoca el no tener toda la instrucción didáctica cursada ya que, como se ha explicado anteriormente, no será hasta 3.º cuando se complete, esto es, al curso siguiente.

Centrándonos en la resolución de problemas, comentamos ahora las preguntas que tuvo que contestar nuestro alumnado.

Desde el área de Didáctica de la Matemática, y en la Universitat Jaume I, insistimos mucho en la importancia de contextualizar, en la realidad cercana, las situaciones problemáticas que les planteamos a nuestro alumnado (Alcalde, Pérez y Lorenzo, 2014; Pérez, Alcalde y Lorenzo, 2014; Lorenzo, Alcalde y Pérez, 2015). Este ejercicio tiene dos ventajas, (1) que el alumnado del grado experimente esta contextualización de una manera socioculturalmente próxima y (2) que este hecho le anime a trasladar esta contextualización a su futura aula de Primaria. Por tanto, nos interesa conocer si han observado esto en sus prácticas, si sus supervisores y supervisoras también tienen esto como un valor añadido. En este sentido la pregunta fue "*uso de situaciones problemáticas de la vida real por parte de su supervisor o supervisora para contextualizar el trabajo de las matemáticas*".

Nuevamente tenían una gradación likert para contestar y hay que resaltar que un 70,5% de las contestaciones estaban de acuerdo o muy de acuerdo con esta afirmación, y este porcentaje se mantiene si focalizamos en 2.º o 3.º curso, o si distinguimos entre Infantil o Primaria. Constatamos pues que está bastante generalizada la sensación que es importante conectar con la realidad cercana de los y las estudiantes y así lo han percibido nuestro estudiantado en prácticas.

Otro pilar bastante importante en el que basamos nuestra instrucción al estudiantado de grado es la resolución de problemas como motor para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dentro de los autores que se trabajan destacamos a George Polya (1887-1985), Polya (1965), y sus fases para la resolución de problemas. En este sentido les preguntamos por el "*uso de algún tipo de esquema o fases para resolver los problemas matemáticos*". Esta pregunta era de contestación abierta y por tanto hay mucha dispersión en las contestaciones, pero destacamos algunas de ellas que nos han parecido interesantes (obviamos las contestaciones del alumnado de Educación Infantil, porque no suelen resolver problemas), las ordenamos por orden de frecuencia y categoría:

- *Habitualmente explicitan los datos del problema, las operaciones, realizaban el cálculo y explicaban la solución.*
- *En mi periodo de prácticas utilicé las fases de Polya para resolver los problemas.*
- *Marcan los datos, la pregunta y las palabras clave. Se intenta representar el problema y se realiza la operación matemática. Finalmente se explica la solución del problema.*
- *Marcan los datos con color rojo, y lo que quieren saber con color azul. Después se anotan los datos, se opera y se proporciona la solución.*
- *Simplemente hacían los cálculos y daban la solución.*

En general notamos a faltar algún heurístico del tipo, Alcalde *et al.* (2015):

- ¿El problema es resoluble? Antes de iniciar ningún proceso de resolución.
- ¿Qué harás para resolver el problema? Que sería la fase 2 de Polya. Pensar los pasos a seguir para ejecutar la resolución del problema.

- ¿El resultado es coherente? Una vez lo han resuelto y a la vista del resultado y antes de comprobarlo por otra forma numérica diferente a la utilizada y que me dé seguridad de que la solución es correcta.

Finalmente les pedíamos reflexionar sobre las dificultades detectadas en Juidías y Rodríguez (2007) que habían observado en sus estudiantes respecto de la resolución de problemas. Ante la pregunta inicial de si consideraban que la resolución de problemas es un tema complicado para los estudiantes un 72,8% mostraba que sí lo era, argumentando una serie de razones (que les pedíamos explícitamente y tenían que valorar en una escala likert de 1 (más en desacuerdo) hasta 5 (muy de acuerdo). A continuación describimos estas razones:

1. Al preguntar si la causa por la que tienen dificultades es que la redacción del problema no está en su idioma materno, un 68% de los y las estudiantes mostraron que estaban muy o en desacuerdo con esta afirmación. Tan solo un 12,2% pensaba que esta era una causa importante o muy importante.
2. En el caso de preguntar si la causa de las dificultades con la resolución de problemas es la comprensión lectora, tan solo un 20,7% piensa que efectivamente la es, pero un 39,6% considera que no. No consideramos que el sentir sea que este es un problema como sí se demuestra en otras etapas educativas.
3. A la pregunta de si “aunque sepan utilizar las operaciones matemáticas, no las identifican en el problema” un 36,1% piensa que sí, mientras que un 23% piensa que no, el resto indeciso. Nuevamente un detalle de en qué curso y con qué operaciones hablamos nos daría más luz, pero es significativo que más de un tercio de los 121 alumnos y alumnas en prácticas piensen que no saben identificar la operación necesaria para resolver el problema.
4. Hay un 65% de los encuestados que piensan que los alumnos de primaria identifican los datos que proporciona el problema, tan solo un 11,7% piensa que no. Creemos que este no es el problema que identifican para tener dificultades con la resolución de problemas.
5. Un 57,1% de las respuestas del cuestionario indica que los alumnos y alumnas de primaria identifican la incógnita del problema, tan solo un poco

más del 10% piensa que no la identifica. Por tanto no identifican que este es el problema.

6. Si el resultado es imposible, y claramente no puede ser la contestación del problema, se les pregunta si han observado que su alumnado ha cambiado de punto de vista, o ha dado alguna explicación al respecto. Un 27,1% piensa que no lo hacen mientras que un 41,5% sí lo hacen. Esta respuesta es especialmente esperanzadora, ya que es un error muy común no volver sobre los pasos anteriores para descubrir qué ha podido fallar.
7. Un 41,1% de nuestro alumnado de grado opina que los alumnos que han tenido en las prácticas comprobaban las soluciones obtenidas frente a un 27,7% que no. Es cierto que está muy extendido, en casi todos los libros de texto, el hecho de intentar buscar un camino numérico alternativo al encontrado para solucionar el problema. Lo cual nos congratula enormemente porque es una de las fases de resolución de problemas que propone el mencionado George Polya.
8. Leer el enunciado de un problema y ponerse a resolverlo directamente es una práctica habitual muy extendida en el alumnado. Así lo piensan un 41,5% de los encuestados frente a un 17,8 que piensan que sí reflexionan sobre esta cuestión.
9. Finalmente un 41,2% piensan que los alumnos observados saben explicar cómo han resuelto su problema, esté este bien o mal resuelto. Un 21% opina que no sabría explicar qué ha hecho para resolverlo.

4. Conclusiones

Podemos concluir que nuestro alumnado de prácticas presenta una alta autoeficiencia, por lo que como dice Covarrubias y Mendoza Lira (2015) en el futuro se podrán desenvolver de forma plena en el aula. Además la autoeficiencia de enseñar problemas también es elevada, por lo que podrán guiar y motivar al alumnado (Tschannen-Moran et al., 1998).

Aunque estudios recientes como el de Llinares (2021) presentan la parte positiva del COVID-19 ya que nos hizo pensar y representar de forma diferente las matemáticas, no hemos observado cambios sustanciales en la resolución de problemas en el

aula. Ya que en la mayoría de casos se utilizan algunas de las fases de Polya (1965).

Podemos concluir que nuestro alumnado en prácticas ha observado que mayoritariamente el profesorado explica el problema y el alumnado escucha de forma pasiva en el sentido de Stephan (2014b). Por lo que los problemas se convierten en meros ejercicios (Cai y Lester, 2010). En pocos centros se presenta la propuesta mixta de Planas, Arnal-Bailera y García-Horando (2018) donde se alterna el liderazgo en la resolución de problemas.

Otra conclusión que podemos extraer es que nuestro alumnado de prácticas ha podido detectar diversos errores que se citan en Juidías y Rodríguez (2007), como por ejemplo: “aunque sepan utilizar las operaciones matemáticas, no las identifican en el problema” presentado por Tomás (1990) o como leer el enunciado de un problema y ponerse a resolverlo directamente es una práctica habitual muy extendida en el alumnado, error detectado por Schoenfeld (1992). Aunque, llama la atención que casi la mitad de nuestro alumnado observó que su alumno cambia de punto de vista cuando cometen un error y se les explica, otro de los problemas detectados por Schoenfeld (1992).

Referencias

Alcalde, M., Pérez, I. y Lorenzo, G. (2014). *Els nombres naturals a l'aula de Primària*. Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions. Col·lecció Sapientia 90.

Azcárate, P. (2001). *El conocimiento profesional didáctico-matemático en la formación inicial de los maestros: Una propuesta de intervención para su organización y su elaboración*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. W. H. Freeman

Bretones, A. (2013). El Prácticum de Magisterio en Educación Primaria: una mirada retrospectiva. *Revista Complutense de Educación,* 24(2) 443-471.

Cai, J., y Lester, F. (2010). *Why is teaching with problem solving important to student learning?* Reston, NCTM

Cañal, P., García-Carmona, A. y Cruz-Guzmán, M. (2016). *Didáctica de las Ciencias Experimentales en Educación Prima*ria. Paraninfo.

Candray, J. (2021). Diálogos sobre la enseñanza de la matemática en tiempos de pandemia: una experiencia de docentes salvadoreños. *Cuadernos,* 20, pp. 114-134 .

Cornelius-White, J. (2007). Learned-centered teacher-student relationships are effective: a metaanalysis. *Review of Educational Research*,77 (1), 113-143. https://doi.org/10.3102/003465430298563

Covarrubias, C. G., y Mendoza Lira , M. (2015). Sentimiento de autoeficacia en una muestra de profesores chilenos desde las perspectivas de género y experiencia. *Estudios Pedagógicos,* 41 (1), 63-78. https://doi.org/10.4067/S0718-07052015000100004

Dorfsman, M. I., y Horenczyk, G. (2021). El cambio pedagógico en la docencia universitaria en los tiempos de Covid-19. *Revista de Educación a Distancia (RED),* 21(67). https://doi.org/10.6018/red.475151

García Suárez, J., Segovia, I. y Lupiáñez, J. L. (2011). Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática*. (pp. 145-155). Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Garcia-Saiz, M. (2011). Una revisión constructiva de la gestión por competencias. *Anales de Psicología,* 27(2), 473-497.

Giaconi V., Perdomo-Díaz J., Cerda G., y Saadati F. (2018). Prácticas docentes, autoeficacia y valor en relación con la resolución de problemas de matemáticas: diseño y validación de un cuestionario.*Enseñanza de las ciencias*, 36 (3), 99-120.

Gil Cuadras, F. (2000). *Marco conceptual y creencias de los profesores sobre evaluación en matemáticas.* Servicio de Publicaciones: Universidad de Almería.

Hill, H.C., Ball, D.L. y Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

Juidías, J. y Rodríguez, I. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, 342, 257-286.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas,*17, 51-63.

Llinares, S. (2021). Educación Matemática y COVID-19 en las Américas: limitaciones, adaptaciones, y lecciones aprendidas. *Cuadernos,* 20,. 12-28 .

Lorenzo, G., Alcalde, M., y Pérez, I. (2015). *La geometria i l'estadística en l'aula de primària.* Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions. Col·lecció Sapientia 110.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., León-Mantero, C., Casas, J. C. y Jiménez-Fanjul, N. (2016). Actitudes hacia las matemáticas de maestros en formación: una visión sobre su futuro desempeño docente. *Epsilon. Revista de Educación Matemática*, 94, 33-42.

Manuel Alcalde Esteban, Gil Lorenzo Valentín, Inmaculada C. Pérez Serrano, María Sandra Peris Diago, Laura Peydró Pons, Maria Santagueda Villanueva, Juan Serrano Mata, Rafael Simó Sancho. (2015). En. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM). *Algunas reflexiones sobre la didáctica de la resolución de problemas matemáticos. XVI Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción).*

Martínez-Rizo , F. (2012). Procedimientos para el estudio de las prácticas docentes. Revisión de la literatura. *RELIEVE. Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa,* 18(1), 1-22.

Pérez, I., Alcalde, M. y Lorenzo, G. (2014). *Els nombres enters i racionals, les magnituds i la mesura a l'aula de primària.* Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions. Col·lecció Sapientia 96.

Planas, N., Arnal-Bailera, A., y García-Honrado , I. (2018). El discurso matemático del profesor: ¿Cómo se produce en clase y cómo se puede investigar? *Enseñanza de las Ciencias*, 36 (1), 45-60. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2240

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México DC, México: Trillas.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Granada: Comares.

Pujol, R.M. (2007). *Didáctica de las ciencias en la educación primaria.* Síntesis educación.

Stephan , M. (2014). Learner-centered teaching in mathematics education. En S. Lerman (ed.),Encyclopedia of mathematics education (338-343). Springer.

Swan, M. (2006). Designing and using research instruments to describe the beliefs and practices of mathematics teachers. *Research in Education*,75(1), 58-70. https://doi.org/10.7227/RIE.75.5

Tschannen-Moran, M., y Hoy , A. W. (2007). The differential antecedents of self-efficacy beliefs of novice and experienced teachers. *Teaching and Teacher Education,* 23 (6), 944-956. https://doi.org/10.1016/j.tate.2006.05.003

Tschannen-Moran, M., Hoy, A. W., y Hoy, W. K. (1998). Teacher efficacy: Its meaning and measure. *Review of Educational Research,* 68 (2), 202-248. https://doi.org/10.3102/00346543068002202

Vásquez, C.A y Alsina, A. (2015). Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesorado de Educación Primaria sobre Probabilidad: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Bolema,* 29(52), 681-703.

Vásquez, C.A. (2014). Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo (tesis doctoral). Universidad de Girona.

CoF003 Una tarea de alta demanda cognitiva para introducir la paridad en 1º de primaria

Rocío Pérez Guzmán
yo.chiogpic@gmail.com
CEIP Aurora Moreno
Juan Pedro Martín Díaz
Juan.martin@ddcc.uhu.es
Universidad de Huelva
Alice Díez Fernández
alicediezf@gmail.com
Institución
Nuria Climent Rodríguez
climent@uhu.es
Universidad de Huelva

Núcleo temático: Procesos y formación del profesorado

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria.

RESUMEN

El objetivo de esta comunicación es dar a conocer una investigación realizada en un proyecto de investigación educativa de la Junta de Andalucía, formado por docentes de diferentes niveles educativos, investigadores, doctorandos, donde se ha investigado la resolución de problemas y la alta demanda cognitiva. La dinámica de trabajo de este grupo es investigar sobre un contenido matemático, diseñar e implementar en el aula diferentes sesiones (en distintas etapas educativas: Infantil, Primaria y ESO), para posteriormente estudiar la progresión del contenido elegido, construyendo una trayectoria hipotética de aprendizaje. Aquí presentamos el diseño y el análisis de la enseñanza y el aprendizaje realizado en primero de Ed. Primaria, utilizando la resolución de problemas, bajo una perspectiva de alta demanda cognitiva, para introducir el concepto de paridad. Mostramos, de este modo, la gestión de la maestra, que mantiene la alta demanda cognitiva de la tarea, relacionándola con el aprendizaje de los estudiantes.

Palabras clave: Primaria, Infantil, Resolución de Problemas, Demanda Cognitiva

1. Introducción y bases teóricas

Las tareas de alta demanda cognitiva están consideradas por la literatura de investigación como un reto más allá de la memorización de contenidos. A través de estas tareas se pretende que los alumnos construyan un conocimiento que genere conexiones entre conceptos matemáticos mediante el razonamiento y la indagación. Una tarea de alta demanda cognitiva implica involucrar a los estudiantes en un aprendizaje profundo, que requiere interpretación, flexibilidad y construcción de significados (Stein et al.,1996). En este sentido, la resolución de auténticos problemas (para los que el resolutor no tiene una respuesta inmediata) puede ser considerada una tarea de alta demanda cognitiva.

Para que el aprendizaje a través de tareas de alta demanda cognitiva se haga efectivo, se requiere que el profesor seleccione tareas de este tipo y que, además, mantenga con su gestión dicha demanda. Éste no es un cometido fácil, como han puesto de manifiesto algunas investigaciones (Henningsen y Stein, 1997; Stein et al., 2008). Para apoyar al profesorado, algunos investigadores han explorado elementos de la gestión del aula que mantienen, aumentan o inhiben la demanda cognitiva de las tareas. En particular los trabajos de Henningsen y Stein (1997) y Stein y Smith (1998), señalan la importancia de factores como, poner el foco en el razonamiento y el pensamiento matemático, modelizar actuaciones de alto nivel, hacer preguntas que conlleven la argumentación, favorecer el establecimiento de conexiones conceptuales y el control del tiempo. De este modo, el docente tiene ante sí el reto de orientar al alumnado sin revelar información que dé una respuesta inmediata a la tarea. La comunicación que presentamos muestra la puesta en práctica de una tarea de alta demanda cognitiva en Educación Primaria en la que se introduce el concepto de paridad. La intencionalidad es mostrar cómo una maestra gestiona la tarea evitando perder la alta demanda.

Esta experiencia se desarrolla en el seno de un grupo de investigación colaborativa (al que denominamos PIC y del que formamos parte los 4 autores de esta comunicación). El PIC está conformado por 12 miembros, entre maestras de Infantil y Primaria, profesores de Secundaria, formadores de profesores y estudiantes de

doctorado. El trabajo en el grupo se organiza en torno a proyectos bianuales[48]. Una de las riquezas del PIC es la variedad de perspectivas de sus miembros, en parte influenciadas por su diferente formación y experiencia profesional. El objetivo del PIC es el desarrollo profesional de sus miembros a través de la reflexión sobre la práctica. El diseño de propuestas de enseñanza, su implementación y análisis forma parte de la dinámica del grupo.

Posteriormente estudiamos la progresión del contenido elegido, construyendo una trayectoria hipotética de aprendizaje. Nos referimos a las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA), término acuñado por Simon (1995) para describir las asunciones realizadas por un profesor al planificar una lección, una especie de ruta posible anticipada del aprendizaje de un objeto matemático. Al mismo tiempo, utilizamos la noción de THA como una de las posibles rutas o caminos por los que puede transitar un aprendiz, desde la Educación Infantil hasta acabar la Educación Secundaria Obligatoria, en relación con el aprendizaje de un objeto matemático particular, y guiado por sus maestros y profesores y las correspondientes secuencias didácticas diseñadas por éstos.

En el proyecto en el que se enmarca la experiencia que narramos aquí, el objetivo era diseñar e implementar tareas de alta demanda cognitiva, analizando la gestión del profesor y el aprendizaje de los estudiantes. Elegimos el tema de divisibilidad para diseñar sesiones en Infantil, Primaria y Secundaria. Para Infantil pensamos que la diferenciación entre número par e impar y algunas de sus propiedades era un contenido apropiado para la etapa y que podía dar juego para que los alumnos hicieran matemáticas, desde la perspectiva de las tareas de alta demanda cognitiva. Como comentaremos, el diseño se acabó implementando en 1er. curso de Educación Primaria.

2. Diseño para la introducción al concepto de paridad en 1er. curso de Educación Primaria

[48] El trabajo que aquí presentamos se inserta en el proyecto "Resolución de problemas de Matemáticas a partir de la formulación de problemas y el planteamiento de cuestiones". Cursos 2019/20 y 2020/21. (PIV 037-19). Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

Estas actividades se diseñaron para una clase de 5 años de Educación Infantil, prevista de implementarse en el aula a finales de marzo de 2020. Con la llegada de la pandemia se pospuso la grabación a octubre (estando ya este grupo de alumnos en primero de Ed. Primaria), y sufrió modificaciones debido a las limitaciones de los protocolos COVID de los centros en cuanto a agrupamientos de alumnos y manipulación de materiales.

2.1. Primera actividad: descubriendo la paridad del 1 al 10

El alumnado, por parejas, tendrá que dividir en dos: primero 10 objetos (Figura 1), luego, 9; luego, 8; y 7; y 6; y 5, y 4; y 3; y 2 y 1. (Comenzamos por el 10 por ser un número manipulable, con un reparto no inmediato para todos los alumnos y de resto 0).

Cada pareja dispondrá de una plantilla (Figura 2) para registrar el resultado de cada reparto. Tendrán que escribir en el círculo el número y al final de la flecha un sí, si pueden hacer el reparto equitativo y un no en caso contrario.

Figura 1: Objetos para repartir en dos grupos

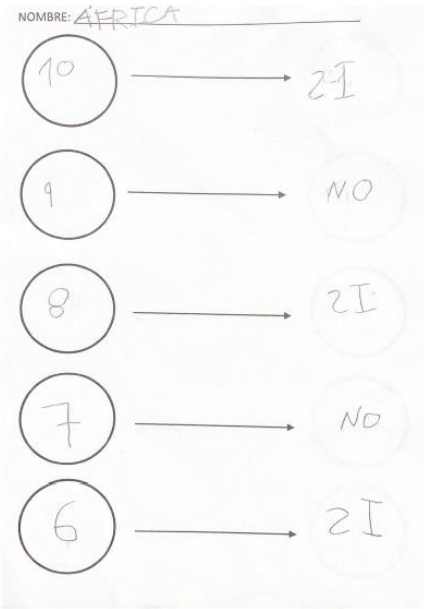


Figura 2: plantilla de registro de cada pareja

Pasado el tiempo de trabajo, se hará una puesta en común de los resultados obtenidos y se deja registrado en un mural (Figura 3). Se busca que hayan reparado en que, al repartir algunas cantidades, quedan en los dos lados la misma cantidad de elementos (¿en cuáles?) y, sin embargo, en otras, no ocurre esto quedando en

cantidad desigual (¿en cuáles?). Posteriormente se preguntará: "¿qué pasará con el 11, 12, etc.? ". Y se deja registrado en el mural

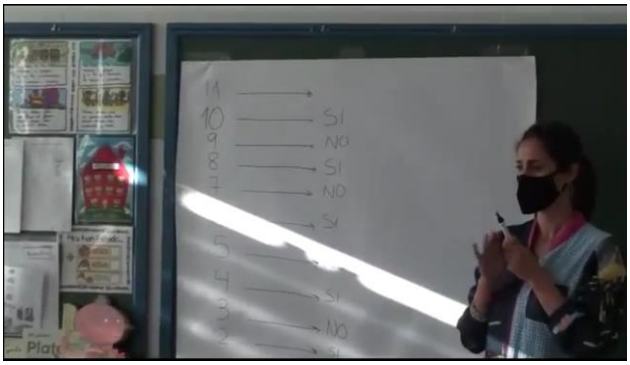


Figura 3: Mural para la puesta en común de la actividad 1

2.2. Segunda actividad: ¿y con otros números?

A cada niño se le da una tarjeta, para colgarse en el cuello, con un número (del 1 al 24) (Figura 4) que debe repartir en dos grupos iguales de forma individual. Deberá pegar una pegatina con un Sí o No en función de si ha podido hacer o no el reparto equitativo. Pasado el tiempo de trabajo, se colocarán ordenados en círculo con la hoja a la vista. Se les pedirá que compartan lo que observan (Figura 5).

Figura 4: Tarjetas (del 1 al 24)

Figura 5: la rueda del 1 al 24

La maestra colocará en la pizarra la tabla del 0 al 99 y rodeará los pares hasta el 24 (Figura 6). Preguntará si hay que rodear o no otros números (¿y el 35, y el 64?). Pedirá a un niño que diga dos números que se puedan repartir en dos partes iguales y dos que no. En cada caso se pregunta al grupo si está de acuerdo y si no están de acuerdo, se comprueba con material. Se pueden ir discutiendo cada varios números en lugar de preguntar después de cada número.

Figura 6: la tabla del 0 al 99

2.3. Tercera actividad: algunas propiedades y definición de par e impar

Se buscará que expresen qué cosas se observan, dejando que cada uno exprese lo que ve. Se puede preguntar qué ocurre con los amigos del 1 (todos los que terminan en 1), del 2... Esperamos que vean que los pares (así como los impares) van alternándose. Se preguntará entonces si conocen el nombre de los números con los que se pueden hacer (dividir en) dos grupos y los que no, esperando que salgan los nombres PAR e IMPAR.

Luego se pedirá que expliquen a otro compañero cómo sabrá si su número es PAR o IMPAR (esperando que digan su “definición”). Para próximas sesiones los niños pueden presentar los números para interiorizar esta propiedad, por ejemplo: “este es el número 8, es anterior al 9 y posterior al 7, es 4 + 4 y es par”.

3. Recogida de datos y análisis de la sesión

La sesión es implementada en un curso de 1º de Primaria por una de las maestras del PIC. A la implementación nos pudimos asistir miembros del grupo como observadores debido al protocolo COVID, pero se grabó la sesión en video y lo visionamos antes de la siguiente reunión del PIC. En esta reunión hacemos primero un análisis libre de la sesión, para después analizar de forma conjunta la gestión de la maestra (en relación con la demanda cognitiva de la tarea) y el aprendizaje de los estudiantes.

Para el análisis de la gestión de la tarea hemos diseñado un instrumento de análisis basado en Stein y Smith (1998) y Stein et al. (1996). Algunas de sus categorías se refieren a si el profesor favorece que el alumnado tome de conciencia de lo que requieren las tareas, el tipo de ayudas que ofrece (si mantienen la alta demanda cognitiva), si propicia paradas de reflexión para que el estudiante tome conciencia

de su progreso en la tarea, y si en la puesta en común favorece que se presenten resoluciones de distinto nivel y se avance hacia un nivel mayor de complejidad.

En relación con el aprendizaje de los estudiantes, estudiamos cuáles son las estrategias que desarrollan para resolver la tarea, cuál es su nivel argumentativo cuando justifican sus resultados y sus procesos de resolución, si aplican sus conocimientos para resolver la tarea, si son capaces de generalizar la situación que se presenta y su implicación en la tarea.

En los dos apartados que siguen mostraremos el análisis con los dos focos citados.

4. Gestión de la demanda cognitiva

En el inicio de la sesión, la maestra se asegura (mediante preguntas que favorecen la comprensión de la tarea) que los alumnos hayan comprendido la actividad. En un primer momento introduce una pequeña puesta en común en la que apunta en la pizarra cómo realizar la primera parte de la tarea (“Yo lo voy a apuntar en la pizarra para ayudaros con el registro”). Asimismo, acompaña esto con una explicación mientras reparte el material y concreta la instrucción (“Yo tengo aquí una bolsita. Tenéis que contar y repartir lo que os voy a dar”).

Una vez se ha iniciado la actividad, la maestra se ocupa de que los alumnos avancen en la tarea sin que la alta demanda cognitiva se pierda. Para ello, se apoya en ayudas y preguntas heurísticas, así como ayudas que favorecen el progreso hacia resoluciones de alto nivel. Por ejemplo, mientras están trabajando por parejas, realiza preguntas del tipo: por qué sucede algo, qué vas a hacer a continuación; otras tienen por objeto que los alumnos fijen su atención en los datos que tienen, animarlos a comparar con la pareja o a continuar el reparto en caso de haberse detenido (“¿puedes continuar?”) y sugiriendo a algunos alumnos que expliquen a su pareja qué han logrado.

No solo realiza intervenciones a modo de ayuda mientras trabajan en parejas, también cuando están trabajando de manera grupal encontramos momentos donde proporciona ayudas. Por ejemplo, en la actividad 1, sugiere a una alumna que explique a los compañeros qué ha pasado o pregunta a todos los alumnos qué ha pasado cuando han repartido el 9 (observan que sobra uno).

En la actividad 2 un alumno afirma que lo ha hecho “de cabeza” y, la maestra, le anima a explicar cómo lo ha hecho (“¡Ah! Que tú lo has hecho de cabeza, ¿cómo lo has hecho?”). Otro alumno tiene aún dos objetos sin repartir y la maestra le pregunta si puede seguir repartiéndolos (“Y esos dos que sobran, ¿los puedes seguir repartiendo?”) y, por último, pregunta sobre un número que no aparece físicamente en la tarea como es el catorce (“¿Tú qué piensas? ¿qué pasa con el 14?”).

Asimismo, se observa que, mientras una pareja está completando la secuencia sí/no en la actividad 1, la maestra les pregunta si lo han comprobado. Esto se debe a que se percató de que un alumno parecía haber descubierto el patrón si-no. Sin embargo, al voltear la hoja y no saber el orden de aparición del sí/no, el alumno lo pone de manera que los “sí” coinciden con los impares y los “no” con los pares, siendo una conclusión errónea del estudiante (“Tú has visto que por delante has hecho SI-NO-SI-NO y esto lo has hecho sin pensar. Siempre, siempre tenemos que pensar…”).

En cuanto a la atención que presta al alumnado, parece atenderlos a todos, tratando de preguntar sobre el proceso seguido, animándolos a reflexionar y ayudándoles cuando se encuentran ante dificultades para generar conclusiones o continuar con el problema. Además, ofrece materiales a los alumnos que no consiguen realizar el reparto de una manera abstracta (“¿Alguien necesita algo para poder hacerlo? ¿Qué necesitas?”).

Otro ejemplo donde se aprecia cómo la maestra proporciona ayudas en forma de material a los alumnos lo encontramos cuando dos niños afirman que, en el caso del 5, es posible hacer un reparto equitativo. Ante esto, la maestra les sugiere que vuelvan a hacerlo con el material. Los niños lo hacen y concluyen ellos mismos que no se puede repartir en partes iguales.

En cuanto a las paradas de reflexión observamos que la maestra recurre a estas en la transición de una actividad a otra, como resumen de lo hecho. Por ejemplo, después de repartir los 10 primeros objetos, la maestra planteó una serie de cuestiones con la intención de que sus alumnos reflexionaran y expresaran qué estaba sucediendo en la actividad (“¿Qué ha dicho lo primero la seño? Que lo

teníamos que contar. ¿cuántas había? ¿Todo el mundo tenía 10? Y, ¿después? lo hemos repartido. ¿Qué ha pasado?").

En lo referido a las puestas en común, la maestra permite que los niños intervengan libremente, no habiendo sido seleccionados previamente estos niños por ella. Por ejemplo, en la actividad 3, en un momento dado la maestra pregunta a un niño si 34 es par, este dice que 2+2 es 4, y otro que en el caso del 28 también 4+4 es 8. No parece que elija a los alumnos que intervienen. Sin embargo, en algunas ocasiones, sí observamos que pide la intervención de algún alumno específico sabiendo que puede aportar algo diferente.

Por otro lado, es muy claro cómo se pone el énfasis en los procesos más en los resultados. Por ejemplo, cuando orienta a las parejas, el foco está puesto en cómo se ha hecho, incluso cuando tienen la ficha completa con resultados "correctos" pero sospecha que no lo han experimentado. En las puestas en común también se observa claramente el énfasis en los procesos. Esto lo observamos en una evidencia mostrada con anterioridad en la que un alumno se da cuenta del patrón de sí y no. (Un alumno dice: si, no, si, no). Entonces, la maestra cuestiona: "¿por qué piensas tú que pasa eso?", restándole importancia al hecho de haber encontrado la solución y poniendo el foco en el proceso seguido para alcanzarla.

Incluso es posible encontrar situaciones donde los alumnos responden incorrectamente a las actividades y la maestra no da la solución correcta, sino que persigue que ellos mismos evalúen el proceso seguido para tratar de encontrar dónde se han equivocado ("¿Por qué dices que sí?").

Además, consigue mediante las preguntas sobre procesos que algunos estudiantes realicen reflexiones con un gran potencial matemático teniendo en cuenta el nivel en el que se desarrolla la sesión. Es el caso de la reflexión que sigue, de un alumno: "En el 11 no se puede porque 6 para mí y 5 para él, y cuando pones 2 más, que es uno más [con respecto al 11] es uno para él y otro para mí". La constancia de las preguntas "por qué" y "qué ha pasado" da cuenta de la petición a los alumnos para que expliquen y justifiquen sus ideas. Por ejemplo, en la puesta en común pregunta el porqué de lo que han aprendido. Esto a pesar de que en algunos momentos los niños tienen dificultades para verbalizar sus ideas. A veces parece que entiende lo

que quieren decir a pesar de que no puedan expresarlo. Por ejemplo, en la socialización sobre qué se ha aprendido surgen las siguientes situaciones:

Al finalizar cada tarea, la maestra realiza reflexiones de manera grupal que permite a los alumnos institucionalizar los conocimientos que han emergido durante la actividad. Así, en la primera actividad, la docente anota en un mural los distintos resultados que los niños han ido obteniendo.

Asimismo, al finalizar la segunda actividad, la maestra realiza una reflexión a nivel grupal para facilitar a sus alumnos una explicación del transcurso de la misma con la intención de que los niños afiancen los conocimientos empleados ("Vamos a hablar de lo que hemos hecho y de lo que os ha salido en la ficha. ¿En el 10?, ¿en el 9? ...").

Por último, para finalizar la sesión, la maestra formula una nueva pregunta para comprobar qué han aprendido sus estudiantes durante el desarrollo de las actividades.

5. Aprendizaje del alumnado

En primer lugar, en relación con las *estrategias empleadas*, apreciamos que algunos alumnos utilizan estrategias de cálculo mental que le permiten descomponer un número como suma de dos sumandos iguales (n+n). Esto se aprecia, por ejemplo, cuando una alumna dice que "si tengo 8 reparte a 4 porque si 4+4 son 8, entonces reparte a 4". En otro momento, un alumno también hace referencia a esta descomposición cuando explica por qué el 10 sí se puede repartir en dos grupos iguales: "porque si a tu compañero le das 5 y al otro compañero le das también 5".

No solo encontramos en la sesión estrategias que descomponen un número en dos sumandos si no que, además, identificamos que hay alumnos que utilizan la descomposición de un número en tres sumandos como n+n$\pm$1. En este caso hay dos posibilidades: n+n+1, cuando la maestra propone ampliar la serie al 11, un alumno dice "con el 11 igual que 5 más 5 es 10 si le añado uno más es 6 más 5 y es 11 y uno se queda con uno menos y otro con uno más"; y n+n-1, cuando otro alumno dice que con el 9 no se pueden hacer dos grupos iguales, porque "10 es uno más que el 9 y el 10 se puede repartir 5 para cada uno y 9 no se puede repartir porque sería 4 para él y 5 para mí". Otro ejemplo de n+n-1 lo encontramos cuando

un alumno distinto a los anteriores justifica el número 13 apoyándose en el número 14.

La última estrategia de cálculo mental identificada la apreciamos en algunos alumnos cuando la maestra procede a sustraer uno de los diez elementos que les ha facilitado al principio. Los alumnos, cuando la maestra le quita el objeto, utilizan expresiones como “me ha quitado uno, entonces ahora tengo 9”.

Otras estrategias, diferente al cálculo mental que los alumnos utilizan, las identificamos cuando tratan de repartir los objetos en dos grupos. Para repartir los objetos, los alumnos tienden a utilizar dos estrategias diferentes: por un lado, encontramos estrategias de reparto de uno en uno, dando a cada grupo un objeto hasta que el reparto se haya completado y, por otro lado, realizando el reparto “a ojo” y compensando la desigualdad en caso de haberla.

Por otro lado, en lo que se refiere a los niveles argumentativos de los alumnos, apreciamos tres niveles diferentes de argumentación. Identificamos un nivel descriptivo cuando, realizando la actividad, los alumnos simplemente describen qué está ocurriendo (en el reparto del 9: “tenemos que tener 4 (…) y el otro se tiene que quedar aquí”). Algunos estudiantes van un poco más allá en su razonamiento y son capaces de elaborar un argumento de conexión. En este caso, el alumno que describió qué ocurría con el número 13 apoyándose en el 14, generó un discurso que conectaba dos números para generar una propiedad (13= 14-1). Para finalizar con los niveles argumentativos, identificamos alumnos que no solo son capaces de generar conexiones entre dos números como ocurría en el ejemplo anterior, sino que llegan a argumentar que lo que ocurre sucede como norma para todos los números que cumplen con una característica concreta. Por ejemplo, cuando la maestra reveló qué eran los números pares, un alumno argumentó que “los que se pueden repartir se llaman par porque es en parejas”, dando así una justificación a que, todos los números pares, siempre van a poder dividirse en dos grupos.

Poniendo la atención en los recursos cognitivos que emplean los alumnos en cuanto a si usan su propio conocimiento y experiencia para resolver el problema, observamos que establecen conclusiones generales sobre el contenido trabajado y movilizan los conocimientos previos necesarios para resolver el problema del modo

más eficaz. Entre los contenidos previos que los alumnos utilizan durante la sesión para iniciarse en el conocimiento del concepto de paridad observamos que utilizan el reparto (durante el desarrollo de la primera actividad); sumas, restar 1 y descomposición de números (por ejemplo, sumar dos números iguales para evidenciar que pueden dividirse en dos grupos iguales, restar uno como n -1 y descomponer un número como n+n).

Incluso, algunos estudiantes son capaces de generalizar y extraer patrones. Por ejemplo, un alumno justifica que el 28 se puede descomponer en dos grupos iguales porque “2 más 2 es 4 y 2 más 2 de nuevo será 4 y, 4 más 4 es 8”. Asimismo, identifican que los números pares aparecen siguiendo un orden lógico ya que, en el gran grupo, son capaces de adelantar resultados (sabiendo que el 6 se puede, verbalizan que el 8 también se va a poder descomponer en dos grupos iguales). Esto también se observa en la actividad 3, cuando se comenta que, si un número se puede dividir en dos grupos iguales, todos sus amigos también -los que comparten la unidad-, y si no, sus amigos tampoco (“toda la fila del 2 tiene que ser SÍ porque si debajo del 2 pone un 12 y pone SÍ pues tiene que ser”).

Por último, en relación con la actitud hacia la tarea, podemos afirmar que los alumnos han mantenido una actitud positiva y participativa. Aunque no todos se implican de manera activa, en algunas parejas se aprecian roles de liderazgo y pasividad y, en otras, roles de liderazgo y control. En general tratan de corregir sus errores cuando la maestra les indica que hay un aspecto de la tarea que deben corregir.

6. Conclusiones

Como se ha podido observar a lo largo del análisis, la maestra ejerce un papel de gestora de la sesión, tratando de intervenir solo con preguntas o aportaciones que ayuden a su alumnado a continuar con la actividad. Las ayudas que utiliza permiten que la demanda de la actividad se mantenga y los alumnos construyan el concepto de paridad a través del desarrollo de la actividad y no como proceso memorístico.
Las paradas de reflexión que realiza la docente le permiten conocer en qué punto se encuentra cada alumno. Sus intervenciones se basan también en preguntas para conocer avances o dificultades que puedan estar teniendo en el trascurso de la

actividad. Estas paradas también le sirven para que los alumnos expliquen el proceso a otros alumnos en voz alta y que emerjan resoluciones diferentes.

Este último aspecto también se evidencia a través del análisis de las puestas en común. No solo permite que los alumnos expongan diferentes resoluciones a una misma tarea, sino también selecciona a aquellos que piensa que pueden tener una resolución con un nivel superior.

Esta gestión de la maestra parece clave para el desarrollo de la tarea por parte de los estudiantes. A través del análisis realizado sobre el aprendizaje de los alumnos, se evidencia que, a pesar de su corta edad, son capaces de generar diferentes estrategias de cálculo mental para una misma tarea.

Por otro lado, identificamos que los alumnos son capaces de llegar a diferentes niveles de comprensión y razonamiento. Esto se evidencia en los tres niveles argumentativos que los alumnos movilizan y que identificamos a lo largo de la sesión. Estos tres niveles parecen, además, que guardan una correspondencia en algunos conocimientos movilizados en la sesión como, por ejemplo, el alcanzar a describir un número como suma de dos sumandos iguales o la identificación de patrones en los números pares con ayuda de la tabla del 0 al 99.

Para finalizar, de manera general, se aprecia que los estudiantes se involucran de manera directa en la tarea, siendo capaces de llegar a argumentos y deducciones interesantes teniendo en cuenta su edad. Sin embargo, los alumnos no alcanzan de manera autónoma el objetivo, sino que, se aprecia que la gestión de la maestra en relación con la demanda de la tarea, resulta clave para que la dificultad de la misma no se vea alterada y que los alumnos alcancen un nivel de razonamiento y argumentación más allá, quizá, de lo esperable para esta etapa.

Referencias

Henningsen, M. y Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for research in mathematics education*, *28*(5), 524-549.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145. https://doi.org/10.2307/749205

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., y Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*, 313-340.

Stein, M. K., Grover, B. W., y Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*(2), 455-488.

Stein, M. K., y Smith, M. S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268-275.

CoF004 Razonamiento espacial y educación matemática entre 0 y 6 - 7 años

Montserrat Torra Bitlloch
mtorra12@xtec.cat
Institución/Centro de referencia CESIRE
Maria Roca Parpal
mrocap@bcn.cat
Escola Bressol COBI, IMEB

Núcleo temático: Formación del profesorado, Recursos para el aula

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Infantil

RESUMEN

Existen en este momento una amplia diversidad de estudios sobre cómo los niños en la primera infancia, entre 0 y 6 - 7 años, desarrollan el razonamiento espacial y la importancia que las educadoras les apoyen en este aspecto de su desarrollo. El razonamiento espacial está estrechamente unido al aprendizaje de las matemáticas, en este momento existen distintos grupos de profesionales que trabajan para divulgar este conocimiento y justificar su importancia. Esta comunicación trata de dar a conocer el trabajo realizado por Early Childhood Maths Group un grupo de expertos del Reino Unido que se definen a sí mismos como entusiastas de las matemáticas y trabajan juntos para promoverlas en la primera infancia. Creemos que contar con sus argumentos resulta de gran interés para dar coherencia y ayudar a avanzar en este tema. Completará esta comunicación la presentación de materiales, situaciones e intervenciones de escuelas infantiles que ya trabajan en esta línea.

Palabras clave: Razonamiento Espacial, Primera Infancia

1 ¿Qué es el razonamiento espacial?

El razonamiento espacial consiste en nuestra interpretación de cómo se relacionan las cosas, incluyéndonos a nosotros mismos, en relación con los demás y nuestro entorno espacial El término “razonamiento espacial” se utiliza de forma indistinta e intercambiable con “pensamiento espacial”.

El razonamiento espacial nos permite anticipar y resolver problemas e implica reconocer objetos por la forma, localizar objetos, navegar por el entorno, encajar cosas en un espacio determinado, e interpretar fotografías, diagramas o dibujos, para lo cual es preciso utilizar el razonamiento y la manipulación mental de imágenes.

1.1 ¿Qué implica el razonamiento espacial?

El razonamiento espacial implica relaciones espaciales:

- Lenguaje de posición: donde, al lado de, entre, ….
- Distancia: lejanía, longitud, área, …
- Dirección: ¿en qué dirección? movimiento arriba/abajo, a derecha a izquierda
- Cambio de orientación: subiendo, bajando …
- Composición: encajar formas de puzle, patrones, construcciones…
- Movimiento y rotación: girar, deslizar, encajar, coincidir…
- Reconocimiento de la simetría: reflexión, creando patrones, construyendo bloques…
- Perspectiva: apariencia desde distintos puntos de vista, visibilidad, medida y distancia, posición, …
- Escala: acercando y alejando, interpretar juguetes qué reproducen objetos reales más pequeños, fabricación de mapas…
- Navegación: buscar caminos y rutas…

Objetos e imágenes:

- Identificar objetos en 2D y 3D, hojas, nubes, figuras geométricas, puzles, ...
- Propiedades: Medida, caras, ángulos…
- Componer y descomponer formas: crear nuevas formas, doblando, plegando, reduciendo, creando simetrías,…
- Estructura: simetría a través de seccionar 2D y 3D
- Escalar: Identificar el mismo objeto o imagen ampliando o reduciendo

1.2 La importancia del razonamiento espacial en el aprendizaje de las matemáticas

Mientras que el vínculo entre el razonamiento espacial y el aprendizaje matemático está, en general, bien establecido por la investigación, la naturaleza de este vínculo no está clara y de manera particular para el número (Hawes y Ansari, 2020). Hay

evidencia de que usamos la misma área del cerebro para visualizar y para representar relaciones numéricas.

Muchas representaciones concretas del número son espaciales, como los materiales manipulables, las rectas numéricas, los gráficos y otras habilidades de visualización también ayudan a trabajar con los números.

Cuando los niños deciden dónde deben situar los números en la recta numérica la visualización les ayuda a identificar el punto medio, y esto requiere pensamiento proporcional. Las rectas numéricas pueden ser a diferentes escalas incluyendo fracciones o extendiéndose a números negativos. Es útil, por lo tanto, que los niños tengan habilidad para aumentar o encoger imágenes mentalmente haciendo zoom de pequeño a grande o de grande a pequeño. Parece que las posibilidades de escalar y fraccionar ayudan a interpretar otros diagramas o esquemas matemáticos y no solo en matemáticas sino también en otras situaciones.

2 ¿Cómo proporcionar apoyo al Razonamiento Espacial de los niños?

El desarrollo de la consciencia espacial de los niños y el razonamiento, mejora con el uso del lenguaje y el gesto. Un lenguaje preciso ayuda a los niños a focalizar en las propiedades de la posición en el espacio y a conceptualizarlas.

Los gestos son el camino inicial para la comunicación, la respuesta del adulto interpretando el significado y añadiendo palabras al gesto en el mismo momento en el que se producen, son de una gran ayuda a este aprendizaje. Preguntar, invitando a precisar indicando más claramente que es lo que quieren, qué esperan que pase, ofreciendo por ejemplo dos alternativas… Es un paso más en la toma de consciencia y en la elaboración y consideración de ideas contrapuestas o complementarias.

Algunas aportaciones de la investigación sobre la influencia del lenguaje espacial son las siguientes. El lenguaje también puede ayudar a los niños a:

- Usar y recordar información espacial relacionando objetos como “al lado de” o “delante de” (Feist & Gentner, 2007)
- Mejorar los conceptos de los niños comprendiendo y refinando categorías espaciales como la diferencia entre “sobre” y “dentro” (Farran & Atkinson, 2016)
- Ayudar a fijar la atención en los atributos relevantes del espacio cuando resuelven problemas. Por ejemplo, la posición relativa de los bloques cuando copian construcciones (Bower et al. 2020)
- Resaltar las relaciones espaciales que hay implícitas en conceptos matemáticos como por ejemplo los números en la recta numérica (Mix; Cheng, 2012).”

Los gestos, también pueden ayudar a introducir visualmente un significado, acompañando la palabra. Por ejemplo, juntando las manos o separándolas para

indicar el tamaño de un objeto, ilustrando así si es grande o pequeño. O preguntando si quieren poner la pelota sobre la caja, o dentro de la caja, con la ayuda del gesto.

No tan solo el uso de términos geométricos sirve para describir objetos o rutas cotidianas. El lenguaje informal también ayuda a expresar analogías acompañando al gesto. Por ejemplo, indicar un cruce, un bucle, una forma ondulada o una forma en zig zag, para describir una ruta. O usar analogías como la forma de una mano o de un corazón para indicar la forma de una hoja o representar con los dedos un ángulo recto para indicar la forma de la pieza de puzle que buscamos para una esquina.

Los investigadores han constatado que introducir objetos formas irregulares en los que se ponen habitualmente al alcance de los niños, los anima a realizar distinciones más finas sobre las propiedades de la forma (Verdine y otros, 2019). Lo cual sugiere que deberíamos presentar y describir la forma de propiedades espaciales de una forma más amplia, fomentando la propia manera de describir y la creatividad de los niños en el uso de la lengua y de las analogías, además del uso de términos matemáticos cuando puedan ser útiles.

2.1 ¿Existen diferencias individuales y de grupo en este aprendizaje?

Las personas varían sus habilidades espaciales en función de sus características, su desarrollo y experiencias.

Existen evidencias de diferencias en la experiencia de niños y niñas con la mirada puesta en las actividades físicas, la lengua materna y el grado de reto, tres cuestiones importantes para el desarrollo espacial. Enseñar razonamiento espacial es efectivo para compensar las diferencias de género en las habilidades espaciales.

Los niños y niñas con experiencias pobres tienen tendencia a entrar en la escuela con menos habilidades espaciales, pero efectúan grandes progresos en respuesta a la enseñanza espacial.

Los niños y niñas con determinadas necesidades especiales pueden construir los conceptos espaciales a través del movimiento y el tacto

2.2 ¿Cómo compensar estas diferencias?

Los entornos espaciales los construyen los adultos. Aquellos qué reconocen la importancia del razonamiento espacial, es más fácil que planifiquen y animen a los niños a trepar y en general a disfrutar de distintas perspectivas. También van a proporcionar más tiempo para participar en el juego espacial, valorando la repetición y revisando ideas. Crearán una atmósfera propicia al ensayo-error y a asumir riesgos, además de modelar la curiosidad y animar a los niños a participar, explorando y buscando respuestas.

Los materiales también juegan un papel importante para compensar diferencias, disponer de puzles, construcciones, materiales que estimulen el juego simbólico, libros, etc.

Los materiales, sin embargo, no son suficientes, es preciso que el adulto pueda interaccionar de manera sensible en la actividad infantil, proporcionándoles las palabras junto con la experiencia o llamando la atención sobre un aspecto del pensamiento espacial.

Se puede animar el razonamiento espacial:

- Dejando tiempo para explorar el entorno físico.
- Modelando la curiosidad
- Mostrando un interés genuino en la exploración de los niños
- Acompañando con términos espaciales la experiencia.

Compensar estas diferencias pasa por acoger a las familias, mostrarles entornos ricos, materiales asequibles y por encima de todo ayudando a modelar la intervención acompañando su comprensión de la importancia que tiene lo que el niño está haciendo para su desarrollo intelectual.

3 Concebir el aprendizaje como una trayectoria

El documento sobre el razonamiento espacial de ECMG Early Children Mathematics Group, al qué nos estamos refiriendo en esta comunicación, incluye una trayectoria del aprendizaje temprano de experiencias para desarrollar el razonamiento espacial, en el cual se puede ver la progresión desde el nacimiento hasta los seis o siete años en el razonamiento espacial, donde se especifica:

- Qué aprenden los niños
- Qué pueden hacer los adultos y
- Qué debería incluir el entorno para qué el aprendizaje sea posible.

Destacamos 4 de las trayectorias que se desarrollan en el documento por considerarlas probablemente las menos conocidas: el sentido de la simetría, la perspectiva, la escala, así como la navegación y los mapas

3.1 La simetría

Los niños llegan a la escuela con una buena capacidad para identificar simetría, sugiriendo un potencial mayor para trabajar con más profundidad este aspecto.

Los niños pequeños crean imágenes simétricas o construyen estructuras en equilibrio de forma espontánea.

Los niños de cinco años a menudo pueden invertir formas para que coincidan sobre un eje vertical, muchos niños de seis años pueden hacer esto sobre un eje horizontal y a siete años sobre un eje diagonal.

La investigación sugiere que los niños pequeños pueden desarrollar una comprensión más sofisticada de la simetría si tienen experiencias apropiadas a la edad, materiales y contexto.

3.2 Ver las cosas en perspectiva

Ver las cosas desde donde nos encontramos implica visibilizarlas. Reconocerlas también desde otros puntos de vista implica tener la flexibilidad cognitiva necesaria para comprender que las cosas se pueden ver también desde un punto de vista distinto, es decir que existe una perspectiva alternativa que nos muestra una visión diferente “del mismo objeto”.

Aunque nos parece difícil, es más natural de lo que pensamos y no solo pueden reconocer objetos sino disfrutar imaginando nuevos puntos de vista. Es importante facilitar ocasiones para “ver” la cosas por encima, por debajo, por distintos lados y estimularlos a imaginar que podría ver un personaje determinado desde donde está o donde deberían situarse para ver determinado objeto.

3.3 Comprender las representaciones a escala

Escalar significa trabajar con versiones distintas de una misma cosa, como por ejemplo coches de juguete. Esto les ayuda a desarrollar el sentido de la proporción y les permite comprender por ejemplo como es de grande un dinosaurio en comparación con un caballo, trasladando la comparación realizada con juguetes a escala.

O las posiciones relativas en un mapa. Niños de 3 o 4 años pueden encontrar objetos representados en un mapa básico. También comprenden la escala a partir del dibujo cuando representan su familia o dibujan el patio en una hoja de papel.

Y adquieren la capacidad de repartir números en una recta numérica, una representación a escala muy importante en este aprendizaje.

Los niños desarrollan el sentido de escala de forma significativa entre 3 y 5 años

3.4 Navegación y mapas

Cuando aprenden a desplazarse, los niños desarrollan la habilidad de encontrar objetos que están ocultos, por ejemplo, debajo de una tela, pero a su alcance. Esta capacidad progresa a estrategias más sofisticadas, a los 18 meses pueden

encontrar objetos escondidos y no es hasta los 5 años que empiezan a recordar los giros y puntos de referencia para encontrar algo.

Dibujar una representación del espacio da a los niños una oportunidad para pensar en las relaciones espaciales entre las cosas de su entorno.

A los 3 años pueden comprender una foto aérea básica de objetos familiares y a los 4 años pueden encontrar un objeto oculto basándose en información de la distancia y en seguir una ruta. A los seis años pueden localizar objetos e identificar donde están en un mapa y a los 7 pueden dibujar un mapa del área cercana a su casa.

4 Vamos a mostrar a continuación, materiales, situaciones e intervenciones realizadas con niños del primer ciclo de educación infantil entre 0 y 3 años y las ideas que sustentan estas propuestas de aprendizaje.

Referencias

Bower, C., Zimmermann, L., Verdine, B., Toub, T. S., Islam, S., Foster, L., Evans, N., Odean, R., Cibischino, A., Pritulsky, C., Hirsh-Pasek, K., & Golinkoff,R. M. (2020). *Piecing together the role of a spatial assembly intervention in preschoolers' spatial and mathematics learning: Influences of gesture, spatial language and socioeconomic status. Developmental Psychology,* 56(4), 686-698. http://dx.doi.org/10.1037/dev0000899

Farran, E.K., Atkinson, L. (2016). *The development of spatial category representations from four to seven years. British Journal of Developmental Psychology,* 34, 555-568. https://doi.org/10.1111/bjdp.12149

Feist, M., & Gentner, D. (2007). *Spatial language influences memory for spatial scenes. Memory and Cognition*, 35, 283–296. https://doi.org/10.3758/BF03193449

Hawes, Z. & Ansari, D. (2020). *What explains the relationship between spatial and mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. Psychonomic Bulletin & Review,* 27:465–482. https://doi.org/10.3758/s13423-019-01694-7

Mix, K. S., & Cheng, Y. L. (2012). *The relation between space and math: Developmental and educational implications. In J. B. Benson (Ed.), Advances in child development and behaviour,* 42, 197–243. https://doi.org/10.1016/B978-0-12394388

Verdine, B.N., Zimmermann, L., Foster, L., Marzouk, M.A., Golinkoff, R.M., Hirsh-Pasek, K., & Newcombe, N. (2019). *Effects of geometric toy design on parent–child interactions and spatial language. Early Childhood Research Quarterly,* 46, 126-141. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2018.03.015

CoF006 Cuéntame un cuento: una nueva forma de construir el conocimiento lógico-matemático

Juan Antonio Antequera-Barroso
jaab@unex.es(1)
Universidad de Extremadura/Facultad de Formación del Profesorado (1)
Enrique Carmona Medeiro(2)
enrique.carmona@uca.es(2)
Universidad de Cádiz/Facultad de Ciencias de la Educación (2)

Núcleo temático: Conexiones y Formación del Profesorado.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Infantil y Universidad (Grado de Educación Infantil).

RESUMEN

Los cuentos son una oportunidad de adentrarse en un mundo fantástico, estimular la imaginación y la creatividad. Este hecho se pone más de manifiesto en la etapa de Educación Infantil. Además, los y las docentes de esta etapa lo utilizan como una herramienta no solo lúdica sino también para trabajar ciertas nociones sobre todo en el campo de la comprensión lectora. En este trabajo se presentan las opiniones de maestros y maestras en formación inicial sobre el uso del cuento como herramienta didáctica para la enseñanza y aprendizaje del conocimiento matemático en Educación Infantil. A través de una metodología de análisis mixto se han llegado a definir las que podrían ser las características que debería tener un cuento para trabajar el conocimiento matemático con su futuro alumnado.

Palabras clave: Cuento, Educación Infantil, Desarrollo Profesional, Conocimiento Lógico-Matemático.

1. Introducción

Si pensamos en la etapa de Educación Infantil no podemos obviar que una de las herramientas que más utilizan los maestros y las maestras son los cuentos. En muchas ocasiones, simplemente, como elemento lúdico que sirve de premio al buen

comportamiento de su alumnado. Pero, un cuento puede aportar muchos más aspectos interesantes a la vida del alumnado que el mero divertimento. Si nos fijamos en esos niños o niñas los cuentos les sirven para crear un nuevo mundo, un mundo donde ellos y ellas son los/as protagonistas según su propia imaginación y creatividad tal y como indica González López (2006) citando a Sáez (1999). Les permite vivir aventuras siguiendo la historia, imaginar que va a pasar después o qué podría pasar. Tal y como dice Amar (2018) citando a Romero (2011):

> "Simplemente haremos referencia a 'lectura apropiada', a tenor de las características del aula donde nos desenvolvamos teniendo a nuestro alumnado como la verdadera red de receptores, poliédrica y diversa, con diferentes ritmos de imaginar, disfrutar y, por tanto, de aprender" (p. 13)

En el párrafo anterior aparece ya la palabra aprender vinculada a imaginar y a disfrutar, por tanto, el cuento presenta características que pueden mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje entre ellas según González López (2006) citando a Quintero (2005), el cuento:

- Sirve para divertir y entretener a la vez que transmiten conocimientos ricos y complejos.
- Satisface las ganas de acción del alumnado puesto que en su imaginación proyectan lo que les gustaría hacer.
- En un elemento socializador que favorece las relaciones, empezando por el simple hecho de que son los propios personajes los que interactúan socialmente.

Todas estas características fácilmente pueden ser aprovechadas para trabajar las distintas disciplinas. En concreto, en el trabajo que se presenta, el interés se centrará en el conocimiento lógico-matemático en Educación Infantil. Algunos ejemplos de cuentos para trabajar este conocimiento se presentan en Garrote García y otros (2019) modificando o ajustando cuentos clásicos como 'El Patito Feo', 'La Ratita Presumida' y 'Ricitos de Oro'. Cuentos conocidos que permiten la ràpida familiarización de los y las estudiantes para facilitar el anàlisis de los mismos, creando así una oportunidad de aprendizaje para estos y estas docentes en formación inicial, aunque inicialmente no se haya creado el cuento con dicho fin. Tal

y como indica Fernández Bravo (2000) hablar de grande, mediano o pequeño no tiene sentido matemático sino se pone en relación a otro elemento, es decir, se permite establecer una relación como puede ser una comparación que dé lugar, por ejemplo, a una ordenación. Se busca, por tanto, una reflexión, un análisis de las distintas situaciones planteadas que enriquezcan el aprendizaje de los distintos conceptos o nociones a trabajar con el cuento. Además, Blanco y Blanco (2009) citado en Caballero y otros (2010) señalan la eficacia de los cuentos 'matemáticos', alegando que crean la necesidad de relacionar conocimientos matemáticos con situaciones reales…. También, de Castro Hernández y otros (2009) indican que el objetivo matemático de los cuentos es que los pequeños conozcan una historia en la que se basa el problema, de modo que les sea familiar y puedan darle sentido y buscar una solución.

Bajo todas estas premisas se ha desarrollado un taller para la elaboración de un 'cuento matemático' por parte de estudiantes del Grado de Educación Infantil. Este taller se ha llevado a cabo bajo las siguientes preguntas y objetivos de investigación.

Pregunta de Investigación 1.- ¿Consideras que un cuento podría tener valor como herramienta que favorezca el proceso de enseñanza-aprendizaje del conocimiento lógico-matemático?

Objetivo de Investigación 1.- Averiguar la opinión de los estudiantes en relación a la utilidad del cuento como herramienta que mejora el proceso de enseñanza-aprendizaje del conocimiento lógico-matemático.

Pregunta de Investigación 2.- ¿Qué características crees que debería tener un cuento para trabajar el conocimiento lógico-matemático?

Objetivo de Investigación 2.- Averiguar la opinión de los estudiantes sobre las características principales que debería tener un cuento para trabajar el conocimiento lógico-matemático.

2. Diseño y desarrollo del taller

2.1 Contextualización

Los y las estudiantes participantes fueron estudiantes del 2º Curso del Grado de Educación Infantil de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Cádiz. En total participaron 160 estudiantes de la asignatura "El Conocimiento Matemático en Educación Infantil" durante el primer semestre del curso 19/20. Se

encontraban distribuidos en tres clases, grupos A, B y C. Durante esta asignatura los estudiantes se encargan de construir su propio discurso sobre los distintos ámbitos del conocimiento lógico-matemático. Buscan las relaciones que se establecen entre las distintas nociones que conforman el ámbito y concretan ejemplos donde aparecen dichos conceptos en su vida cotidiana. Para posteriormente en tercer curso del Grado desarrollar los otros dos pilares que componen la didáctica que son los principios de enseñanza y aprendizaje de los cinco ámbitos del conocimiento que constituyen la Educación Matemática a través de la asignatura “El Desarrollo del Conocimiento Matemático en Educación Infantil”.

2.2 Diseño

El taller se diseñó para trabajar una triple vertiente por parte de los futuros y futuras docentes en Educación Infantil. La primera vertiente relacionada con la identificación de los conocimientos o nociones a desarrollar por parte de su alumnado a través del cuento. Una segunda vertiente relacionada con el desarrollo del cuento ‘matemático’ para trabajar las nociones o conocimientos seleccionados como reflejo de sus ideas o creencias tanto sobre el cuento como sobre el conocimiento lógico-matemático. Y una última vertiente relacionada con la aplicación del cuento al aula para el que se ha diseñado el cuento.

2.3 Desarrollo

El taller se desarrolló en las últimas semanas del semestre tanto en las clases de gran grupo como en las clases de seminario/laboratorio. Se mantuvo la distribución en pequeños grupos realizada al principio del semestre. La distribución de las clases se realizó dividiendo a los distintos grupos/clase en pequeños grupos de 4 o 5 estudiantes para facilitar el trabajo cooperativo.

En el campus virtual de la asignatura se creó una sección en la que se ofrecía para el estudiantado toda la información necesaria para realizar este taller. En dicha sección se introducían las distintas consignas que deberían ser la base de su trabajo. Cabe destacar que:

- El cuento debía mantener el aspecto divertido de los cuentos normalmente usados en una clase de Educación Infantil.

- El cuento debía servir para trabajar el conocimiento lógico-matemático de una manera innovadora alejada de las fichas tradicionales. Debía servir como una forma innovadora para crear oportunidades de aprendizaje.

El esquema de trabajo que se les propuso, hubo adaptaciones al mismo por parte de algún grupo, fue el siguiente:

1. Decidir la temática de 'su cuento matemático'.
2. Quién o quiénes van a ser los personajes protagonistas y secundarios.
3. Describir a través de la narrativa qué les va a suceder a los personajes.
4. Qué conocimientos lógico-matemáticos se van a trabajar en el cuento.
5. Qué tipo de actividades o pruebas deben realizar que posean ese potencial lógico-matemático.
6. Dónde se va a llevar a cabo el cuento (aula, patio, ambos,...)

Estos puntos se trabajaban en los pequeños grupos formados. El cuento resultante sería fruto del dialogo, la reflexión y la negociación. Tal y como indican Carmona y Cardeñoso (2021) en este tipo de proyectos cooperativos aparecen las sinergias e interrelaciones entre las relaciones sociales, el conflicto socio-cognitivo y el lenguaje. Se fomenta así una relación entre el aprendizaje significativo y las relaciones sociales.

En el campus, también se introdujo un enlace para recabar datos sobre las opiniones de los y las estudiantes sobre sus creencias de los cuentos que iban a desarrollar. En el cuestionario también se les preguntaba si consideraban que el cuento pudiese servir como herramienta que facilitase el proceso de enseñanza-aprendizaje y si creían que la creación del cuento les había servido para mejorar su conocimiento lógico-matemático.

En este taller los docentes encargados de la asignatura se convertían en meros guías u orientadores de la actividad. Los verdaderos protagonistas del taller eran los y las estudiantes.

3. Resultados y Discusión

3.1. Recogida y análisis de datos

La metodología para la recolección de datos se ha realizado siguiendo una metodología mixta con el fin de observar los datos y así obtener una mejor comprensión de la utilidad de la actividad desde diferentes perspectivas, cualitativas

y cuantitativas, tal y como indica Creswell (2009, p. 18). Desde el punto de vista cuantitativo se ha establecido de manera descriptiva los porcentajes asociados a las respuestas ofrecidas por los estudiantes a las distintas preguntas. También se ha establecido la comparación de las respuestas dadas al inicio y al final del taller a la pregunta sobre la utilidad del taller en su formación a través de una escala Likert, NS/NC (1), No (2) y Sí (3). El análisis de los datos se realizó con ayuda del programa estadístico SPSS en su versión 24. Los datos recogidos en el formulario inicial (pre-test) como en el formulario final (post-test) muestran una distribución no normal en todas las cuestiones planteadas ($p<0.05$), se estableció un intervalo de confianza del 95%. Este hecho implica la utilización de test no paramétricos para el análisis de los datos recogidos, en concreto, se utilizó el test de Wilcoxon. A través de este test se puede estimar si el taller ha tenido o no influencia en nuestro estudiantado. De manera cualitativa, se ha introducido en las distintas preguntas la posibilidad de justificar su respuesta, de tal forma que se puede conocer mejor la opinión del estudiantado.

3.2. Resultados

La primera de las cuestiones que aparecía en el test está relacionada con su creencia sobre la utilidad de los cuentos como herramienta que favorezca el proceso de enseñanza-aprendizaje. Las respuestas dadas por los estudiantes se pueden encontrar en la imagen 1.

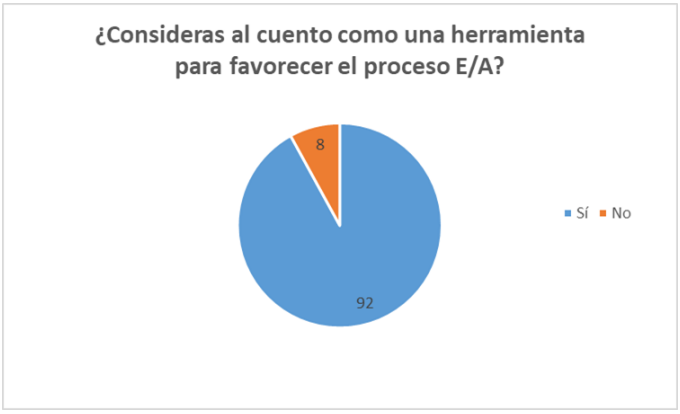


Imagen 1.- Consideración sobre la utilidad del cuento en el proceso de enseñanza-aprendizaje

La siguiente cuestión versaba sobre la temática elegida por los estudiantes a la hora de desarrollar su cuento. Se pueden establecer cuatro categorías de acuerdo a las respuestas dadas por los estudiantes tal y como puede observarse en la imagen 2.

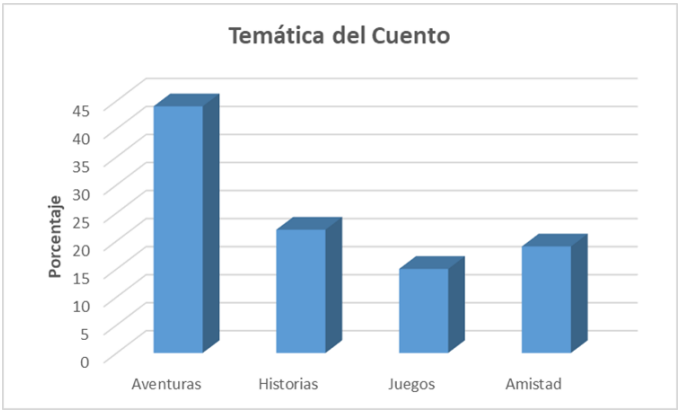


Imagen 2. Tipología de los cuentos realizados por los estudiantes.

A continuación, se le preguntó sobre los personajes de la historia y sus características. A partir de la tipología de cuentos descrita por Toledo Morales (2005) citando a otros autores se les preguntó sobre el grado de acuerdo que tenían con respecto a si los personajes de los cuentos dedicados a Educación Infantil tenían que tener o no características humanas fácilmente reconocibles y, sobre, cómo tenían que ser dichos personajes. Las respuestas dadas por los estudiantes se encuentran en las imágenes 3 y 4.

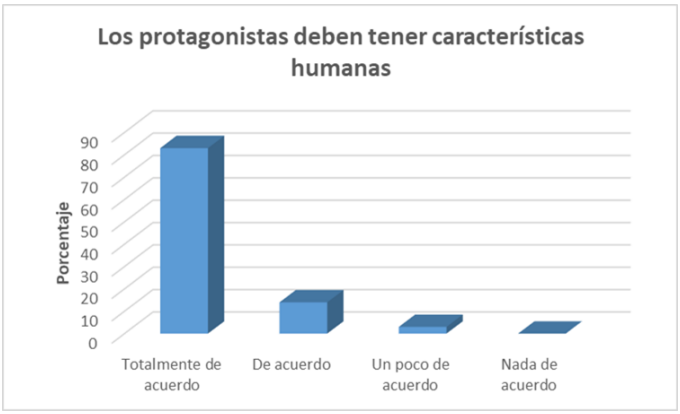


Imagen 3. Grado de acuerdo sobre las características humanas de los personajes.

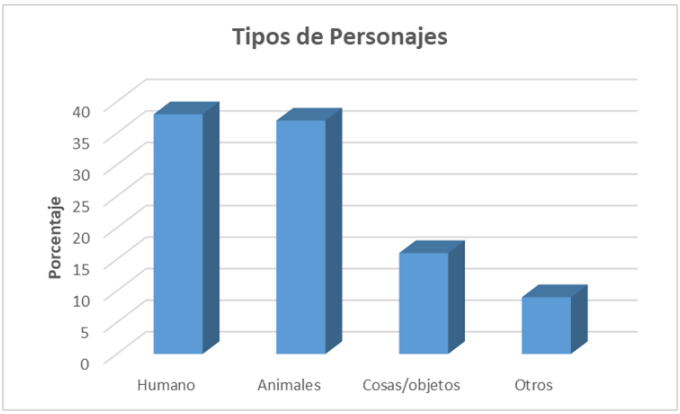


Imagen 4. Tipos de personajes de los cuentos.

Siguiendo el esquema del taller se les pregunto sobre la participación de su futuro alumnado en el cuento que como futuros docentes estaban elaborando. Primero estaban de acuerdo que su alumnado tuviese también protagonismo en la narrativa. Y, a continuación, cómo debía ser esa participación. En las imágenes 5 y 6 se muestran las respuestas dadas por los estudiantes.

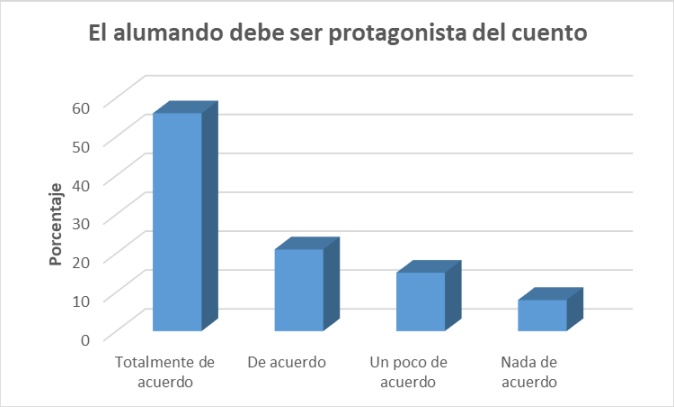


Imagen 5. Grado de acuerdo sobre la participación del alumnado en el cuento

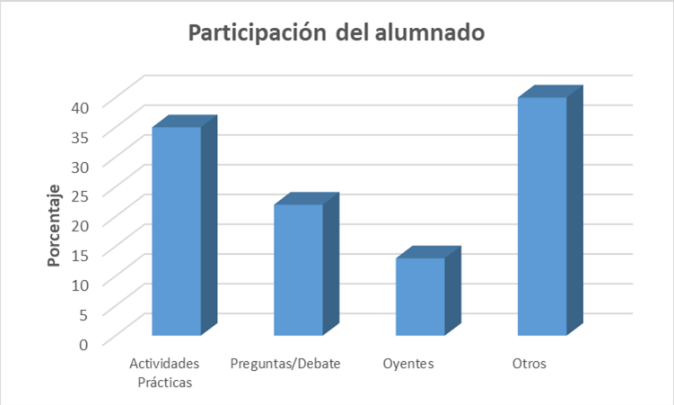


Imagen 6. Tipo de participación del alumnado en el cuento.

La última cuestión que respondieron fue en relación a si consideraban que la realización de este taller les había servido para mejorar su comprensión sobre el conocimiento lógico-matemático. Las respuestas dadas pueden verse en la imagen 7.

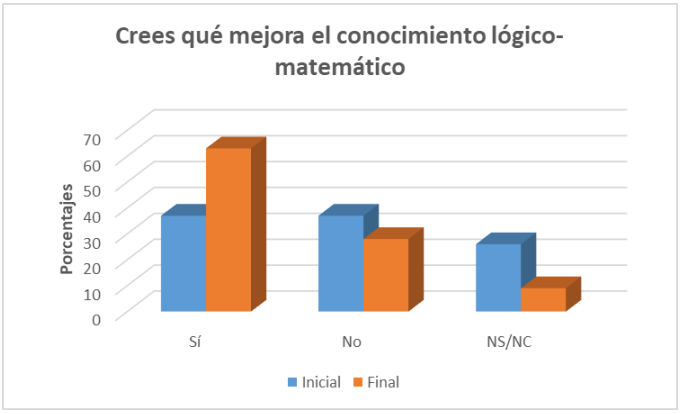


Imagen 7.- Consideración sobre la utilidad del taller en la mejoría del conocimiento lógico-matemático

3.3. Discusión

Como se puede ver en la imagen 1, los y las estudiantes del Grado de Educación Infantil de la Universidad de Cádiz reconocen, en su mayoría, que el cuento puede ser utilizado como una herramienta que mejore el proceso de enseñanza-aprendizaje. La mayoría de las opiniones dadas por los estudiantes se pueden resumir en la opinión dada por:

> Estudiante 13.- En mi clase se utilizaba para entretener y ver si éramos capaces de responder a preguntas del tipo: ¿Y ahora qué va a pasar? ¿Qué haríais vosotros? O preguntas para ver si lo habíamos entendido.

Esta opinión se encuentra de acuerdo con lo que establece el currículo de Educación Infantil (2008) en la que aparecen frases como: *Se observará si entiende órdenes e instrucciones que serán inicialmente muy sencillas, si escucha los cuentos y las explicaciones con atención y las comprende globalmente respondiendo con expresiones, gestos o acciones a lo que se está relatando...(p. 1030).*

Sin embargo, hay un pequeño porcentaje, un 8%, que considera que no se puede utilizar como herramienta que favorezca el proceso de enseñanza y aprendizaje. El motivo que estos y estas estudiantes argumentan es la siguiente:

> Estudiante 30.- El cuento se utilizaba en clase como premio por haber acabado alguna tarea o para completar el tiempo de clase, pero nunca como algo educativo. En muchos casos, el cuento se proyectaba para que estuviesen callados.

La segunda cuestión, imagen 2, se encontraba relacionada con la temática de los cuentos. En este caso, los maestros y las maestras en formación inicial establecen

cuatro categorías, aventuras, historias, amistad y juegos. La categoría más empleada por los y las estudiantes es la de aventuras seguida de la de historias, amistad y juegos. En los comentarios realizados se indica que los cuentos que gustan a los niños y niñas de Infantil son aquellos en los que los personajes viven aventuras a medida que transcurre el cuento, en este aspecto podría relacionarse también aventuras con historias o incluso con la amistad, valor que es importante y que en la mayoría de los cuentos se ensalza. Y, por último, cuentos que involucren juegos incluyendo adivinanzas o acertijos que como indica el currículo de Infantil (2008). Las temáticas incluidas por los y las estudiantes se relacionan con las tipologías mostradas por Toledo (2005).

Las siguientes respuestas ofrecidas por los estudiantes estaban relacionadas con las características, imagen 3, y los tipos de personajes que aparecían en sus cuentos, imagen 4. La respuesta dada por los y las estudiantes es que los personajes que aparecen deben tener características humanas que faciliten la comprensión de las acciones así como el acercamiento a ese personaje al poder identificarse. Entre las opciones mencionadas por los estudiantes destacan, personajes humanos o animales con porcentajes de 38 y 37%, respectivamente. Las respuestas que siguen son objetos u otros. En el caso de otros, hablan de extraterrestres, monstruos, hadas, duendes, etc. Como se puede ver en Toledo (2005) coinciden con los personajes que aparecen en las distintas tipologías descritas.

Las siguientes preguntas se relacionaron con la participación de su futuro alumnado en el cuento o en la dramatización o narración del cuento, imágenes 5 y 6. La primera de ellas se les preguntó de nuevo si estaban o no de acuerdo con que su alumnado fuese partícipe del cuento como protagonista del mismo, no simplemente como oyente. Mayoritariamente se encuentran de acuerdo con la participación en forma de protagonistas intervinientes en el desarrollo del cuento. Visto el grado de acuerdo, cabe preguntar cómo debe ser esa participación en la narrativa/dramatización del cuento. Entre las opciones definidas por los estudiantes destacan las actividades prácticas, preguntas/debates, como oyentes u otras opciones. En concreto, en esta última opción los y las estudiantes que la indican que el cuento tiene que mostrar todas las opciones anteriores, que el cuento proponga

actividades a realizar, al igual que momentos en los que se propongan preguntas que hagan que en función de las respuestas avance el cuento y momentos en los que deben estar atentos a la narración para responder o realizar las actividades. Estas opiniones se encuentran de acuerdo con lo indicado por Toledo (2005) citando a Conde (2001) al hablar de cuentos motores como una manera distinta de presentar a los cuentos narrados y representados. Indica que el cuento se juega y el niño o la niña es el/la protagonista de ese juego trabajando distintos aspectos no solo conocimientos también aspectos afectivos.

La última de las cuestiones planteadas, imagen 7, a los estudiantes estaba relacionada con la utilidad del taller. En concreto, se les preguntó sobre si consideraban que el taller les había servido para mejorar su conocimiento lógico-matemático. La misma cuestión se les preguntó al inicio del taller para así poder ver sus expectativas sobre esta propuesta y al final para ver si había cumplido o no sus expectativas. Antes del taller los y las estudiantes se mostraban más su escepticismo ante la utilidad del taller la media de los valores obtenidos es de 2,11 con una desviación estándar de 0.79 y una mediana de 2. Sin embargo, al final del taller se decantan más por ver de una manera positiva la realización del taller y las posibilidades que ofrece el cuento como herramienta didáctica para la enseñanza y aprendizaje del conocimiento matemático. Los valores estadísticos obtenidos fueron para la media 2.54 con una desviación estándar de 0.65 y una mediana de 3.

Entre las opiniones dadas por los y las estudiantes cabe destacar la mostrada por el siguiente estudiante que refleja el cambio de opinión sobre la realización del taller.

> Estudiante 82: Me genera curiosidad, aunque no creo que aporte nada nuevo. El cuento sirve para divertir a los niños y no para que aprendan mates.
>
> Estudiante 82: Me ha dado otra perspectiva para trabajar algo que no me gusta de una manera divertida. Creo que a los niños les puede gustar más que las fichas.

Sin embargo, no es una opinión compartida por todos los y las estudiantes. Algunos siguen manifestando su disconformidad con el taller, al considerar que no les ha aportado nada nuevo o que su utilidad es nula.

Estudiante 132: No creo que sirva para nada. Para trabajar las mates ya hay establecidos otros procedimientos que les permite que aprendan. El cuento es algo lúdico.

Estudiante 132: He visto que se puede hacer algo con el cuento. Sin embargo, si ya hay establecido algo para qué hacer algo nuevo. El cuento debe ser algo divertido para los niños, un premio.

3.4. A modo de ejemplo

En esta sección se presenta el resultado de uno de los cuentos realizados por los estudiantes. El cuento se titula "*Nos visitan los monstruos*". En el se desarrolla la visita de una serie de mostruitos, véase la imagen 8, se instalan en una clase de 4 años de Educación Infantil y causan el caos, esconden cosas, mueven otras y dejan pruebas a los niños y niñas para que las resuelvan para recuperar algún objeto de la clase. Además, se dejan pistas para que sean capaces de averiguar cuál de ellos ha sido y cuál ha decidido quedarse para siempre con ellos.

La primera actividad que presentan se llama: "Conociendo a nuestros extraños visitantes. ¿Quién nos ha visitado?". Tiene como objetivo conocer a los monstruitos que nos han invadido la clase y están haciendo toda clase de trastadas. En esta actividad los niños y niñas en sus grupos/clase deberán identificar las características más significativas de los monstruitos. Cualidades sensoriales, cuantificables y geométricas. Con esta actividad se pretende trabajar el ámbito lógico, el ámbito numérico y el geométrico.

Imagen cedida por la estudiante MRLP en su cuento: "*Nos visitan los monstruos*"

Imagen 8. Representación de los monstruos que visitan la clase de 4 años

4. Conclusiones

Todo el mundo recuerda algún cuento infantil, bien porque lo haya leído o bien porque se lo han leído y le ha gustado. Esos cuentos nos evocan momentos muy felices, momentos en los que dejamos volar nuestra imaginación sintiéndonos protagonistas y queriendo participar en esa historia que ha despertado esas agradables sensaciones en nosotros.

El trabajo que se presenta en esta comunicación pretende aprovechar todas las virtudes que ofrecen los cuentos para poder trabajar el conocimiento lógico-matemático. El cuento como generador de oportunidades para trabajar el conocimiento. De ahí los objetivos que nos hemos planteado con el taller presentado en esta comunicación.

Con respecto al primer objetivo planteado en el taller podríamos considerar que se ha cumplido en su mayor parte. Los y las estudiantes han reconocido la utilidad del cuento como una herramienta que puede favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje teniendo en cuenta que es un elemento que se encuentra fácilmente en todas las clases de Educación Infantil. El desarrollo del cuento, por parte de ellos y ellas, les ha dado otra perspectiva diferente para poder trabajar el conocimiento lógico matemático con su futuro alumnado de Educación Infantil o cualquier

disciplina aprovechando el aspecto lúdico. Sin embargo, existe un porcentaje que de maestros y maestras en formación inicial que consideran que el cuento debe mantenerse en esencia como un elemento lúdico, como un premio para la finalización de la tarea o del día. Además, consideran que existen ya suficientes materiales para el proceso de enseñanza y aprendizaje del conocimiento lógico-matemático.

El segundo objetivo planteado, aunque se ha dirigido al conocimiento lógico-matemático, se podría orientar para cualquier disciplina. Los y las estudiantes del Grado de Educación Infantil han considerado que los cuentos tienen que tener una temática cercana al alumnado, una temática de aventuras o historias que les haga volar la imaginación, con personajes con características humanas que favorezca que puedan identificarse con ellos. Aventuras en las que se sientan protagonistas, que ayuden a los personajes a resolver situaciones, problemas o cuestiones que puedan surgir y que hagan avanzar la historia. Estas características se pueden aplicar a cualquier disciplina y más en la etapa de Educación Infantil ya que es una enseñanza globalizadora e integradora.

Del taller planteado se puede concluir que los y las estudiantes han recordado los momentos que han vivido con los cuentos tanto en su etapa de Educación Infantil como en su vida. Recuerdos que en muchos casos han intentado verter en el cuento que han desarrollado en el taller. El cuento que a ellos y a ellas le hubiese gustado leer o escuchar, en el que sentirse protagonistas al poder interaccionar con el cuento. Un juego de roles que vaya más allà de la mera escucha de la dramatización del cuento o de la proyección del mismo en la pizarra o pantalla.

5. Referencias

Amar, V. (2018). Déjame que mire un cuento: Narración, familia y educación infantil. Una investigación narrativa. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, nº. 22 (2), 389-405. https://doi.org/10.30827/profesorado.v22i2.7729

Caballero, A.; Blanco, B. y Blanco, L. J. (2010). Matemáticas a través de los cuentos: Propuesta Didáctica Educación Primaria. *Aula de Innovación Educativa*, nº.188, 79-95.

Carmona Medeiro, E. y Cardeñoso, J. M. (2021). Social Interaction: A Crucial Means to Promote Sustainability in Initial Teacher Training. *Sustainability*, nº 13(15), 8666. https://doi.org/10.3390/su13158666

Creswell, J. W. (2009). *Research design. Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches*. 3rd Edition. Sage pub, California.

de Castro Hernández, C.; Pina Plaza, L. C.; Pastor Llamas, C.; Rojas Díez, M. I. y Escorial González, B. (2009). *Resolución de problemes con niños de 4 y 5 años: Matemáticas a través de la literatura infantil*. XIV JAEM, Girona, España.

Fernández Bravo, F. (2000). Érase una vez un cuento que… no contaba cuentos sobre las matemáticas. *Revista Jara. Red de Formación de la Comunidad de Madrid*, nº. 7, 11-16

Garrote García, V.; Alcalaya Simón, M.; Solís Mozos, M.; Gómez-Recuero Sánchez, L. J.; Gutiérrez Nieto, L. y Arteaga Martínez, B. (2019). El cuento clásico en educación infantil: un proyecto para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático. *Revista Digital Educamadrid*, 1, 1-7.

González López, I. (2006). El valor de los cuentos infantiles como recurso para trabajar la transversalidad en las aules. Campo Abierto, nº. 1(25), 11-29.

ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil. 5 de enero de 2008. Boletín Oficial del Estado, nº 5. https://www.boe.es/eli/es/o/2007/12/19/eci3960

Toledo Morales, P. (2005). El cuento: concepto, tipologia y criterios para su selección. Aprende Idea. *El valor educativo del cuento: Didáctica y evolución històrica* (7-29)

CoF007 Cuatro fases para aprender a medir.

Teresa Calabuig i Serra
teresa.calabuig@udg.edu
Universitat de Girona

Núcleo temático: Formación del profesorado; Conexiones.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Universidad (Grado en maestro de Educación Primaria).

RESUMEN

El objetivo de la actividad que se presenta es la consolidación de los conocimientos básicos y necesarios a cerca del proceso de medida por parte de los estudiantes y que éstos aprendan estrategias para trabajarlos en el aula de primaria. Para ello se trabajaron en contexto las etapas de estimación, medida, cálculo y aproximación. Se trabajaron los contenidos a través de la resolución de problemas, el establecimiento de conexiones y su verbalización y todo ello llevó a la adquisición, por parte de los estudiantes, de conocimientos matemáticos y didácticos a los cuales podrán dar sentido a la hora de llevarlos a las aulas de primaria.

Palabras clave: Formación Inicial, Primaria, Medida, Conexiones.

1. Introducción.

El trabajo que se presenta a continuación se desarrolló en un aula universitaria de formación inicial del profesorado del Grado en Maestro de Educación Primaria y en el Doble Grado en Maestro en Educación Infantil y Primaria de la Universitat de Girona. Está enmarcada dentro de los programas de aprendizaje de los bloques de Medida y de Espacio y forma y su didáctica.

El objetivo de la actividad es consolidar los conocimientos básicos y necesarios a cerca del proceso de medida por parte de los estudiantes y que aprendan estrategias para trabajarlos en el aula de primaria.

Para ello se diseñó una actividad para trabajar en contexto y en paralelo diferentes magnitudes de medida y las diferentes etapas de su aprendizaje.

2. Presentación de la actividad.

Como es sabido, en el aprendizaje de las matemáticas en general, es importante avanzar de manera progresiva. Este proceder es relevante en el caso del aprendizaje de la medida para no cometer el error de asimilar o reducir el proceso de medida al del cálculo aritmético. De hecho, se llegará al cálculo, pero si se aspira a que el uso de estrategias de cálculo sea comprendido, se han de respetar las etapas de aprendizaje del proceso de medición. Como ciudadanos tenemos interiorizadas dichas etapas, casi automatizadas. Estimamos, medimos, calculamos y aproximamos casi de manera inconsciente y en muchas ocasiones sin establecer fronteras entre un proceso y otro. Por ejemplo, determinamos el peso de una bolsa de fruta con más o menos precisión solamente echándole un vistazo o sopesándola con la mano. Sin embargo, como docentes, hemos de conocer las características de cada uno de estos procesos y qué nos ofrecen para que, en la escuela, nos aseguremos de que el aprendizaje se realiza de manera lógica y respetando las etapas que irán desde la estimación hasta la comprensión y aceptación de que todos los resultados obtenidos de una medición o cálculo son una aproximación.

En la propuesta de actividad se trabajarán diferentes magnitudes, instrumentos y unidades de medida que si se cree necesario pueden haber sido comentadas y trabajadas en clases anteriores. Con el fin de que los futuros maestros aprendan el proceso, lo vivirán e irán tomando notas de la experiencia. Con las notas de campo ellos revisan sus conocimientos matemáticos y van uniéndolos a nuevos conocimientos didácticos. Se tratará de actividades variadas, pero con un mismo patrón de actuación y con un claro hilo conductor.

De una lectura del apartado del currículo (2017) relacionado con el aprendizaje de la medida, se puede extraer que, en lo referente a conocimientos, con el desarrollo de una actividad como la que se presenta o similar, se estarán trabajando los siguientes aspectos:

- el sentido y el proceso de la medida;
- la comprensión de las magnitudes mensurables de los objetos, distancias y tiempos;
- la comprensión y uso de las unidades e instrumentos de medida pertinentes en cada ocasión y para cada magnitud;
- la toma y comprensión de medidas en contextos reales;
- el desarrollo de referentes comunes que faciliten la comparación de la medida y la estimación;
- la comprensión de que la medida obtenida es siempre una aproximación;
- el contraste y análisis de diferentes estrategias de medida;
- la anticipación e interpretación del error de una medición.

En lo referente a las dimensiones y competencias, la práctica se enmarca en las siguientes dimensiones:

- resolución de problemas;
- conexiones;
- comunicación y representación.

3. Desarrollo de la actividad.

La actividad consistirá en poner en práctica las 4 etapas de aprendizaje de la medida que han ido apareciendo en el relato anterior: estimación, medición, cálculo y finalmente aproximación. Se considera importante comentar con los alumnos que las fronteras en el uso de cada una de estas etapas en ocasiones, y sobre todo en contexto, puede ser muy fina.

Previamente en sesiones anteriores, si se cree necesario, se puede haber trabajado el significado de cada una de ellas. En el caso que se expone, se presentaron las definiciones en la misma sesión de práctica.

En la etapa de *estimación* se harán comparaciones directas con otras unidades de medida o referentes previos relativos a la magnitud en cuestión. Sin utilizar instrumento de medida alguno, se ha de ser capaz de dar un resultado de medición.

Dos ejemplos comunes de estimación en contexto que los estudiantes y ciudadanos en general podrían necesitar en su día a día están relacionados con el uso del coche y la cocina. Todos los conductores han necesitado alguna vez determinar si la plaza de aparcamiento encontrada es lo suficientemente amplia para el coche en cuestión y todo aquél que cocina ha tenido que elegir qué cazo era el adecuado para la cantidad de agua necesaria para hervir 4 raciones de pasta. A ojo y usando referentes se toman frecuentemente estas decisiones.

En la etapa de *medida* se procederá a medir mediante repetición de una unidad y mediante la utilización de instrumentos de medida. En esta práctica se utilizaron unidades de medida estándar y unidades de medida antropométricas.

En la etapa de *cálculo* se utilizarán fórmulas, por ejemplo, de cálculo de áreas o volúmenes. Para ello se precisará haber obtenido datos a través de la etapa anterior de medida.

En último lugar está la *aproximación*, aunque está claro que va íntimamente relacionada con todas las anteriores. Tal y como se ha comentado anteriormente, es importante ser conscientes de que todos los resultados obtenidos en un proceso de medida son aproximaciones de la realidad. También es importante tomar consciencia de que, en ocasiones, por las características del contexto, nos podemos permitir dar resultados que conscientemente habremos aproximado a otro cercano. Comparar contextos de competición deportiva, en los cuales una décima de segundo representa pasar a la historia o que nadie se percate de ti, con las actuaciones de la vida cotidiana puede ayudar a tratar la relevancia de la aproximación.

3.1. Cómo se organizó la actividad.

Para llevar a cabo la sesión se precisa cierta organización. Esta es la propuesta basada en nuestra experiencia. Se trabajarán las siguientes magnitudes: longitud, área, volumen, capacidad, amplitud de ángulos, masa, tiempo y temperatura. No en todas las magnitudes se podrá profundizar de la misma manera en cada una de las 4 etapas.

Antes de empezar habremos tenido que localizar el lugar en el cuál vamos a trabajar, preparar el material y ser consciente del tiempo que vamos a necesitar para justarlo al tiempo del cual dispongamos. La propuesta está pensada para una sesión de entre 80’ y 90’.

3.1.1. El emplazamiento.

Debemos elegir un lugar lo suficientemente rico para poner en práctica las 4 etapas en las diferentes magnitudes. En el caso que se expone el lugar escogido fue la Plaça de Sant Domènec en el casco antiguo de Girona y en la cual está situada la Facultat d’Educació i Psicologia de la UdG (Imágenes 1 y 2).

Imagen 1

Imagen 2

Nos situaremos en lo alto de la escalinata para poder trabajar sin estar en medio de la gente y para tener una visión global del espacio. Esta visión general de la escena será especialmente importante en la etapa de estimación ya que de esta forma tomarán cierta distancia con los elementos de los cuales habrá que determinar la longitud, el área, el volumen y la capacidad.

¿Qué convierte la Plaça de Sant Domènec en un lugar idóneo para esta actividad? Seguidamente se destacan los elementos que pueden verse en las imágenes 1 y 2 y que son usados para el estudio de cada una de las magnitudes:

- ✓ Longitud. Disponemos de una serie de bolardos dispuestos en línea recta y separados entre sí aproximadamente por un metro de distancia (Imagen 1). También disponemos de la escalinata que lleva a la plaza del Aula Magna

(Imagen 2) de la universidad y de su pared lateral que queda libre y puede ser estudiada.

- ✓ Área. Este estudio lo realizamos en la plaza situada en lo alto de las escaleras por ser de menor tamaño que la de Sant Domènec y por tener forma cuadrada. Es la plaza del Aula magna (Imagen 2).
- ✓ Volumen. Los bolardos.
- ✓ Capacidad. Papeleras cilíndricas.
- ✓ Amplitud de ángulos. Los peldaños.
- ✓ Massa. Las mochilas de los propios estudiantes.
- ✓ Tiempo. Para el estudio del tiempo se cruzará la parte central de la Plaça de Sant Domènec (Imagen 1). Tiene forma rectangular y una longitud lateral lo suficientemente larga como para tener tiempo de adoptar una marcha de paso más o menos regular.
- ✓ Temperatura. Se está al aire libre.

3.1.2. El material necesario.

La lista de material aconsejado es la siguiente: cordel de aproximadamente 30 metros, cintas métricas de distintas longitudes (a ser posible de entre 1 metro a 30 metros), hodómetro, piezas cuadradas de plástico u otro material resistente de $1m^2$, bolsas de basura de diferentes capacidades, garrafas de 5 y 8 litros de capacidad, transportador de ángulos, goniómetro, báscula de baño, cronómetros y termómetro.

Para tomar notas se propone la tabla 1.

TABLA 1. Resultados y observaciones.

	ESTIMACIÓN	MEDIDA	CÁLCULO	APROXIMACIÓN
LONGITUD 1. Se ha de determinar la distancia que hay entre el primer y el último bolardo.				

LONGITUD 2. Se ha de determinar la altura de la escalinata, el desnivel sorteado.				
ÀREA de la plaza del aula magna.				
VOLUMEN de un bolardo.				
CAPACIDAD de una de las papeleras.				
AMPLITUD de los ángulos que se forman en los escalones.				
MASA (peso) de vuestra mochila.				
TIEMPO necesario para cruzar la Plaça Sant Domènec andando.				
TEMPERATURA ambiente.				

Una vez los estudiantes se encuentran en contexto y disponen de la tabla 1, es el momento de empezar. Se organizarán en grupos de 4 estudiantes. Se puede proceder a trabajar la tabla por filas, con lo cual se trabajarían las 4 etapas para una misma magnitud en cada paso, o bien se puede proceder por columnas y trabajar la estimación para todas las magnitudes y así sucesivamente. Las dos opciones son correctas, pero si lo que deseamos es reforzar la distinción entre estimar, medir, calcular y aproximar, lo recomendado es proceder por columnas. Evidentemente

partimos de la idea de que los estudiantes conocen las distintas magnitudes a trabajar.

Las indicaciones iniciales de las que disponen los estudiantes se muestran en la tabla 2. No siempre será posible rellenar todas las entradas de la tabla. Cada vez que se termine el trabajo de una de las columnas, se deberán comparar los resultados obtenidos por los diferentes grupos. Así mismo, cada grupo deberá comparar los resultados de una columna con los de las anteriores.

TABLA 2. Orientaciones/Indicaciones para cada una de las actividades.

	ESTIMACIÓN	MEDIDA. Para tomar las medidas pueden utilizar el material que crean pertinente.	CÁLCULO Pueden utilizar fórmulas de cálculo. Para tomar las medidas que precisen para hacer los cálculos, pueden utilizar el material que crean pertinente.	APROXIMACIÓN
LONGITUD 1 Se ha de determinar la distancia que hay entre el primer y el último bolardo.	Se debe estimar la distancia.	Se debe medir la distancia. En este caso, cada grupo dispone de un instrumento de medida distinto.	Se debe calcular la distancia.	Partiendo del resultado de la medición o del cálculo, se debe obtener una aproximación.
LONGITUD 2	Se debe estimar la	Se debe medir la altura.	Se debe calcular la	Partiendo del resultado de la

Se ha de determinar la altura de la escalinata, el desnivel sorteado.	altura. Pueden fijarse en la escalinata o en su pared lateral.		altura.	medición o del cálculo, se debe obtener una aproximación.
ÀREA de la plaza del aula magna.	Se debe estimar el área.	Se debe medir el área.	Se debe calcular el área.	Partiendo del resultado de la medición o del cálculo, se debe obtener una aproximación.
VOLUMEN de un bolardo.	Se debe estimar el volumen.	Se debe medir el volumen.	Se debe calcular el volumen.	Partiendo del resultado de la medición o del cálculo, se debe obtener una aproximación.
CAPACIDAD de una de las papeleras.	Se debe estimar la capacidad.	Se debe medir la capacidad.	Se debe calcular la capacidad.	Partiendo del resultado de la medición o del cálculo, se debe obtener una aproximación.
AMPLITUD de los ángulos que se forman en los escalones.	Se debe estimar la amplitud.	Se debe medir la amplitud.	Se debe calcular la amplitud.	Partiendo del resultado de la medición o del cálculo, se debe obtener una aproximación.
MASA (peso) de vuestra mochila.	Se debe estimar la masa.	Se debe medir la masa.	Se debe calcular la masa.	Partiendo del resultado de la medición o del cálculo, se debe

				obtener una aproximación.
TIEMPO necesario para cruzar la Plaça Sant Domènec andando.	Se debe estimar el tiempo necesario.	Se debe medir el tiempo necesario. Deben caminar por la zona de inicio de la marcha durante un minuto y en cuanto caminen con paso constante pueden iniciar el trayecto de cruzar la plaza.	Se debe calcular el tiempo necesario.	Partiendo del resultado de la medición o del cálculo, se debe obtener una aproximación.
TEMPERATURA ambiente.	Se debe estimar la temperatura.	Se debe medir la temperatura.	Se debe calcular la temperatura.	Partiendo del resultado de la medición o del cálculo, se debe obtener una aproximación.

3.1.1. ¿Cómo proceden ellos?

El tutor da unas determinadas indicaciones, pero, ¿de qué manera proceden ellos? Cada grupo irá tomando sus propias decisiones que el tutor deberá guiar. En la tabla 3 se apuntan algunas de las situaciones propuestas y vividas.

TABLA 3. ¿Cómo proceden ellos?

	ESTIMACIÓN	MEDIDA	CÁLCULO	APROXIMACIÓN
LONGITUD 1	Los referentes tomados suelen	Cada grupo dispone de un	Miden la distancia entre	Aproximan el resultado a metro

Se ha de determinar la distancia que hay entre el primer y el último bolardo.	ser furgonetas de reparto que en este instante estén estacionadas en la plaza, laterales de unas pistas deportivas, etc.	instrumento de medida distinto.	dos bolardos y multiplican. El principal problema es que la distancia entre bolardos es parecida pero no idéntica. Miden la distancia entre tres de los bolardos, calculan la media aritmética y la toman como valor de referencia.	entero.
LONGITUD 2 Se ha de determinar la altura de la escalinata, el desnivel sorteado. Pueden fijarse en la escalinata o en su pared lateral.	Los referentes tomados suelen ser la altura de uno de los componentes del grupo o altura de la propia habitación de los estudiantes.	En ocasiones han utilizado el hodómetro encaramados a la pared. Los más perspicaces sueltan una cinta métrica con un peso en el extremo a modo de plomada.	Los más perspicaces sueltan medir la altura de un peldaño y multiplicar.	Aproximan el resultado a metro entero.
ÀREA de la plaza del aula magna.	Los referentes tomados suelen ser el área de una de las aulas, de una pista	Absolutamente todos empiezan midiendo la longitud de los	Ahora sí utilizan la fórmula de lado por lado.	Aproximan el resultado a metro cuadrado entero.

	deportiva o de la vivienda en la cual viven.	lados de la plaza.		
VOLUMEN de un bolardo.	Toman como referente garrafas de agua o bidones de cerveza.	En este caso se termina siempre hablando del principio de Arquímedes. Entretanto algunos han propuesto envolver el bolardo con bolsas de basura de las que conozcamos la capacidad y relacionar capacidad y volumen.	Toman medidas del diámetro y de la altura y aplican la fórmula de volumen de un cilindro.	Se dan cuenta de que el resultado en centímetro cúbicos es poco orientativo per ser una cantidad muy grande y para la cual no tiene referente. Trabajar con decímetros cúbicos les ayuda.
CAPACIDAD de una de las papeleras.	Toman como referente garrafas de agua o bidones de cerveza.	Retoman la idea de la bolsa de basura.	Toman medidas del diámetro y de la altura y aplican la fórmula de volumen de un cilindro.	Se dan cuenta de que el resultado en centímetro cúbicos es poco orientativo per ser una cantidad muy grande y para la cual no tiene referente. Trabajar con decímetros cúbicos, y sobre todo con litros, les ayuda.
AMPLITUD de los ángulos que se	Los ángulos de 90º son	En muchos casos no		En este caso sí que dan importancia a la

forman en los escalones.	habituales, pero nos da pie a hablar de los de 270º.	realizan la medición perqué el resultado les es conocido.		máxima aproximación posible a 90º.
MASA (peso) de vuestra mochila.	Sopesan la mochila con la mano.	Utilizan la balanza de baño.	En ocasiones pesan por separado los elementos que llevan en la mochila.	En la conversación que se genera sobre el problema de cargar con tanto peso se utilizan aproximaciones al quilo.
TIEMPO necesario para cruzar la Plaça Sant Domènec andando.	Suele ser bastante subjetiva y alejada de la realidad.	Andan durante medio minuto para coger un ritmo constante (de paseo o de marcha) y luego cruzan la plaza cronómetro en mano.		En ocasiones se oyen comentarios como “En lo que dura la canción X, me da tiempo a cruzarla 5 veces”.
TEMPERATURA ambiente.	Suele ser bastante subjetiva y alejada de la realidad si la mañana es especialmente fría o cálida.	Consultan la temperatura en la aplicación del móvil.		

3.1.4. Complementos.

Como complemento a esta actividad dirigida a reforzar la distinción y funcionalidad de estimación, medida, cálculo y aproximación de distintas magnitudes, se pueden

realizar muchísimos más trabajos. Seguidamente ofrezco, de forma breve, abreviadas algunas ideas de materiales y actividades que pueden ser de ayuda. Son las siguientes:

- El juego de mesa “Rally de zanahorias”, especialmente indicado para trabajar la estimación de longitudes.
- La construcción de un hodómetro, interesante para trabajar los instrumentos de medida de longitud.
- Mediar la superficie de la palma de la mano o de la planta del pie utilizando una superficie cuadriculada. Casi imprescindible para que interioricen como se miden áreas de superficies.
- Recordar el Principio de Arquímedes para la medida del volumen.
- Los cuentos “Pequeño inuit” (Geis, 1999), y “How big is a foot?” (Myller, 1991) para trabajar las unidades de medida antropométricas de longitud.
- Conocer la historia de la medida y del Sistema Métrico decimal.
- Volver a estudiar las fórmulas de cálculo de áreas a través de la comprensión. Un buen recurso para ello es el geoplano.
- Volver a estudiar las fórmulas de cálculo de volumen y capacidad a través de la comprensión. El uso de cuerpos geométricos de acetato y rellenables puede ser de utilidad.
- Situar las magnitudes y etapas estudiadas en diferentes contextos.
- Algunos libros infantiles interesantes para hablar de distintas magnitudes son los siguientes: ¿Hay algo más rápido que un guepardo? (Wells, 2006), ¿Hay algo más pequeño que una musaraña? (Wells, 2009), ¿Hay algo más grande que una ballena azul? (Wells, 2008), ¿Hay algo más viejo que una tortuga gigante? (Wells, 2009), ¿Cuánto mide? (Trius, 2020). En este caso no se trata de relatos.

4. Observaciones y conclusiones.

Seguidamente se transcriben algunas de las observaciones hechas durante la puesta en práctica de la actividad y comentarios que pueden ser de ayuda:

- Estimar es la etapa a la que dedican más tiempo por las dudas que les genera el tener que pensar en un referente conocido que no siempre es común y compartido con los compañeros.
- Les cuesta un gran esfuerzo distinguir entre medir y calcular. En clases posteriores se debe insistir en la diferencia y en las ventajas y desventajas de uno y otro en diferentes magnitudes. Entienden perfectamente por qué no es usual utilizar instrumentos de medida de áreas.
- Buscamos como minimizar el error a través del uso de instrumentos de medida más precisos y a través de, por ejemplo, medias aritméticas entre los resultados obtenidos por diferentes grupos.
- Para trabajar la longitud, proponemos dos contextos diferentes. El primero es una distancia entre elementos que se encuentran en el suelo y a cuyo espacio puedo acceder en cualquier punto. El segundo es una altura y sólo se puede acceder a los puntos inicial y final. De esta forma deben idear diferentes formas de medir.
- En ocasiones, un mismo grupo puede estar midiendo en paralelo con diferentes instrumentos de medida, por ejemplo, con pasos o con cinta métrica.

Sin duda alguna, la contextualización nos proporcionó sólidos aprendizajes. Estudiar los contenidos a través de la resolución de problemas, el establecimiento de conexiones y su verbalización han colaborado a una adquisición, por parte de los estudiantes, de conocimientos matemáticos y didácticos a los cuales pueden dar sentido a la hora de trabajarlos en las aulas.

5. Referencias

Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya. (2017). Currículum d'educació primària. Barcelona: Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament.

Geis, P. (1999). El petit inuit. Editorial Combel.

Trius, M. y Julve, O. (2020). ¿Cuánto mide? Editorial Zahorí books. Barcelona.

Wells, R. (2004). ¿Hay algo más viejo que una tortuga gigante? Editorial Juventud.

Wells, R. (2006). ¿Hay algo más rápido que un guepardo? Editorial Juventud.

Wells, R. (2008). ¿Hay algo más grande que una ballena azul? Editorial Juventud.

Wells, R. (2009). ¿Hay algo más pequeño que una musaraña? Editorial Juventud.

Myller, R. (1991). How big is a foot? Editorial Yearling.

CoF012 Estadística en conexión con la sostenibilidad a través de cuentos: una experiencia con futuro profesorado de primaria

Claudia Vásquez
cavasque@uc.cl
Pontificia Universidad Católica de Chile

Ángel Alsina
angel.alsina@udg.edu
Universidad de Girona

Núcleo temático: formación del profesorado, procesos.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Universidad (futuros profesores de Educación Primaria).

RESUMEN

Actualmente el profesorado que enseña matemática en los distintos niveles educativos está desafiado a uno de los mayores retos del siglo XXI: la Educación para el Desarrollo Sostenible. Esto implica repensar la enseñanza de la matemática con el propósito de iniciar desde edades tempranas el desarrollo de competencias de sostenibilidad. Por tanto, es necesario que los futuros profesores cuenten con experiencias en su formación que les permitan establecer conexiones entre la competencia matemática y las competencias de sostenibilidad. En este contexto, en este trabajo se muestra una experiencia vinculada a la Educación Estadística con foco en sostenibilidad desarrollada con 28 futuros profesores de Educación Primaria. Para ello, se ha utilizado la lectura del cuento “El Monstruo de Colores” como elemento para promover y vivenciar el ciclo de investigación estadística, que consta de cinco fases: Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusión (PPDAC).

Palabras clave: Educación Estadística, Sostenibilidad, Profesorado, Educación Primaria.

1. Introducción

Cada vez son más las orientaciones curriculares que incluyen la enseñanza de la estadística desde edades tempranas (Vásquez y Cabrera, en prensa). Esto con el propósito de avanzar en el desafío de desarrollar habilidades y conocimientos que permitan formar ciudadanos capaces de "extraer información significativa de los datos, comprender qué significan los datos, incluyendo cómo leerlos de manera apropiada, extraer conclusiones, así como reconocer cuándo se utilizan de manera engañosa o inapropiada" (OCDE, 2019, p. 5). Esto cobra aún más sentido si consideramos que a diario nos enfrentamos a una cantidad desmesurada de información, ante la cual es necesario contar con un pensamiento crítico, así como conocimientos que permitan interpretarla, y de esta manera poder tomar decisiones de manera informada, o bien, distinguir entre aquella información que no es relevante o no se ha comunicado adecuadamente. Por consiguiente, es de importancia allanar el camino desde los primeros cursos para el desarrollo de la alfabetización estadística en el sentido planteado por Gal (2002), como una competencia que se debe desarrollar con el fin de contar con consumidores de datos educados, capaces de interpretar, evaluar críticamente y, cuando sea pertinente, expresar opiniones respecto a la información estadística, los argumentos relacionados con los datos o fenómenos estocásticos. Para ello, se requiere de la activación conjunta de componentes cognitivos y de disposición, por tanto, es esencial que estos "se vayan adquiriendo a lo largo de la escolarización, a través de una planificación que considere los conocimientos que se deberían enseñar y una gestión que tenga presente las formas más eficaces de enseñarlos" (Alsina, 2017, p. 29). De este modo, se favorecerá que "todos los ciudadanos adquieran las habilidades y los conocimientos necesarios para desenvolverse en el mundo actual como ciudadanos críticos, capaces de tomar decisiones -a partir del análisis de datos- en situaciones de incertidumbre; de modo que puedan participar de manera informada y conformar sociedades cada vez más democráticas" (Vásquez, 2020, p. 9).

En dicho escenario, en las últimas décadas, cada vez cobran mayor relevancia los estudios que se ocupan de indagar en diversos aspectos vinculados a la enseñanza

y el aprendizaje de la estadística desde temprana edad, por ejemplo en los conocimientos disciplinares y didácticos del profesorado (Vásquez y Alsina, 2015), o bien sobre experiencias didácticas en estadística y probabilidad (Alsina, 2012; Vásquez y Alsina, 2017), o en cómo los libros de texto promueven la enseñanza de estos contenidos (Alsina y Vásquez, 2016; Vásquez et al., 2022). Tales estudios evidencian, por un lado, que en muchas ocasiones la enseñanza de estos temas se deja para el final de curso, otorgando un escaso tiempo a su estudio en comparación con otros bloques de contenidos dentro del currículo. Y, por otro lado, se observa en algunos casos una enseñanza centrada en conocimientos técnicos, en la resolución de ejercicios descontextualizados, lo que desencadena en la clase de estadística y se transforme en una clase de aritmética en la que sólo se aplican fórmulas de manera mecánica y carentes de un sentido (Batanero y Díaz, 2011). Por tanto, es necesario repensar la enseñanza de la estadística sobre todo en los primeros niveles educativos, puesto que los aprendizajes que los alumnos adquieran en los primeros años son vitales para el aprendizaje de la estadística en los cursos superiores. En concreto, se requiere una enseñanza de la estadística con significado, en contexto. En especial, si consideramos que “la estadística requiere de una forma diferente de pensar, porque los datos no son sólo números, ellos son números en un contexto. En matemáticas el contexto oscurece la estructura. En análisis de datos, el contexto proporciona significado” (Moore y Cobb, 1997, p. 801).

En esta dirección, se requiere encauzar la enseñanza de la estadística a partir de contextos reales, adecuados a la edad y a la etapa escolar de los alumnos, que tengan significado para los estudiantes y que les permita avanzar hacia el aprendizaje de conceptos estadísticos, el empleo de técnicas de cálculo, mejorar sus capacidades de argumentación, formulación de conjeturas y reflexión en torno a dicho contexto (Vásquez, 2020; Alsina y Annexa, 2021). Sin embargo, “el contexto no está presente automáticamente en el aula –tenemos que introducirlo” (Gal, 2019, p.3). Y quedará como responsabilidad del profesorado la correcta selección de este. Pero ¿qué contextos utilizar? Las respuestas pueden ser variadas. No obstante, un contexto acerca del cual resulta de vital importancia reflexionar es el desarrollo sostenible (CMMAD, 1987), pues desde hace ya algunos años el mundo está inmerso en una emergencia planetaria que impacta en diversos ámbitos: sociales,

medioambientales y económicos. Por lo que urge actuar y desarrollar competencias que permitan contar con ciudadanos alfabetizados en sostenibilidad. Abordar este desafío requiere de un esfuerzo conjunto de diversas disciplinas, que convoquen a un trabajo interdisciplinario. Lo cual implica una manera diferente de afrontar la educación del siglo XXI, e impone no solo la necesidad de contar con ciudadanos alfabetizados en sostenibilidad (Wals, 2015), sino que constituye un desafío para el profesorado a cargo de educar hoy a los ciudadanos del mañana.

Desde esta perspectiva, la Educación Matemática en general y la Educación Estadística en particular son disciplinas clave, al brindar herramientas para comprender y dar respuesta a problemas de la vida real y de otras disciplinas, lo que permite establecer conexiones entre contextos y problemáticas diversas, por ende, permite establecer conexiones con la sostenibilidad (Vásquez et al., 2022). Para ello, de acuerdo con Vásquez (2020), una opción es considerar el trabajo con proyectos estadísticos en torno a problemáticas vinculadas con el desarrollo sostenible o bien con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) y con competencias de sostenibilidad (Unesco, 2017). Lo anterior, permitirá establecer conexiones entre la alfabetización estadística y la alfabetización en sostenibilidad.

En esta dirección, es necesario brindar al profesorado en formación experiencias de aprendizaje que les permitan evidenciar las conexiones entre la Educación Estadística y la sostenibilidad. Teniendo en cuenta estos antecedentes, en este trabajo se muestra una experiencia de aprendizaje desarrollada con 28 futuros profesores de Educación Primaria. A través de la cual, a partir de la lectura del cuento “El Monstruo de Colores” (Llenas, 2012), futuros profesores de Educación Primaria han vivenciado el ciclo de investigación estadística en conexión con la sostenibilidad.

2. Los cuentos como recurso para el desarrollo de proyectos estadísticos en conexión con la sostenibilidad

Los cuentos son un recurso poderoso para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, ya que no solo permiten motivar a los estudiantes y generar interés, sino que también ayudan a los estudiantes a: conectar ideas matemáticas con

experiencias personales, desarrollar el pensamiento crítico, al proveer contextos en los que la matemática es útil para resolver problemas (Haury, 2001). La Educación Estadística no es una excepción, puesto que a través del planteamiento de situaciones problemas, ya sea provenientes del mismo cuento o bien de aquellos que pueden surgir a partir de la lectura misma, permiten que los alumnos discutan y argumenten ideas vinculadas a nociones de estadística, sus representaciones, toma de decisiones, etc. con el fin de dar respuesta a la situación planteada. Así, el uso de este recurso no solo permitirá conectar conocimientos con experiencias significativas, sino también permitirá que los estudiantes se vean a sí mismos como consumidores de datos, favoreciendo la comprensión del valor y la cercanía de estos. Esto, además de motivar y reportar beneficios para un aprendizaje activo, también permite reducir la ansiedad y aumentar el deseo por aprender (Luedtke y Sorvaag, 2018), al proporcionar infinitas oportunidades para que los alumnos compartan sus conocimientos y a la vez fomentar experiencias de aprendizaje únicas (Columba *et al.*, 2005). Sin embargo, pese al potencial de este recurso, son escasos los estudios respecto de su uso vinculado al desarrollo de nociones de estadística (e.g. García, 2018; Alencar et al., 2021; Alsina et al., 2021). Entonces, ¿cómo incorporar los cuentos infantiles en la enseñanza de la estadística? Las respuestas pueden ser diversas e ir desde seleccionar cuentos que trabajen directamente nociones de estadística, en que tales nociones aparezcan de manera natural en la narración, hasta utilizar cuentos que, si bien no abordan tales nociones, proporcionan un contexto motivante, con sentido para desarrollar actividades que involucren contenido estadístico. Es en este sentido, que los cuentos otorgan un contexto para el desarrollo de proyectos estadísticos, y así generar instancias que integren la estadística en la resolución de problemas que involucren las fases de un ciclo de investigación estadística (Wild y Pfannkuch, 1999).

Diversos organismos y resultados de investigación sugieren que el trabajo con proyectos estadísticos es una herramienta poderosa para el desarrollo de la alfabetización estadística (e.g. Batanero y Díaz, 2011; Bargagliotti *et al.*, 2020), pues promueve la enseñanza de la estadística como un proceso investigativo de resolución de problemas y toma de decisiones. Un aspecto clave a considerar en el trabajo con proyectos estadísticos es el contexto desde el cual provienen los datos

con los que se trabajará, pues pueden ser datos recolectados por los propios alumnos o bien datos provenientes de otras fuentes (bases de datos, periódicos, noticias, etc.), que desafíen a los alumnos a aplicar sus conocimientos para resolver problemas procedentes de contextos reales y significativos, de manera similar a como lo hacen los estadísticos, siguiendo los pasos de un ciclo de investigación estadística (Wild y Pfannkuch, 1999); el cual considera las fases de Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusiones, conocido por el acrónimo PPDAC (Imagen 1).

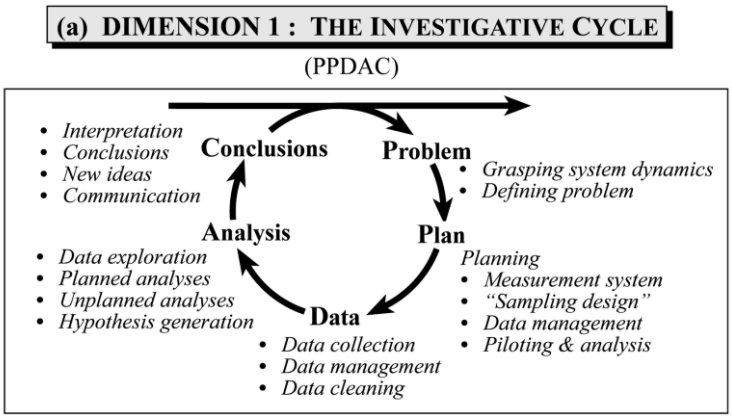


Imagen 1. Ciclo de investigación estadística.

Fuente: Wild y Pfannkuch (1999, p. 226)

Tales proyectos deben considerar contextos reales y cercanos para los alumnos (Alsina y Annexa, 2021), que motiven a preguntar, investigar, representar, argumentar y discutir. En definitiva, se trata de generar instancias que permitan a los alumnos aprender estadística con sentido, sino también adquirir conocimientos, competencias, valores y actitudes con los que puedan contribuir al desarrollo sostenible. Para ello, una posibilidad es considerar el trabajo con proyectos estadísticos (siguiendo las fases del ciclo de investigación estadística) en torno a problemáticas vinculadas con los ODS y con las competencias de sostenibilidad (Imagen 2).

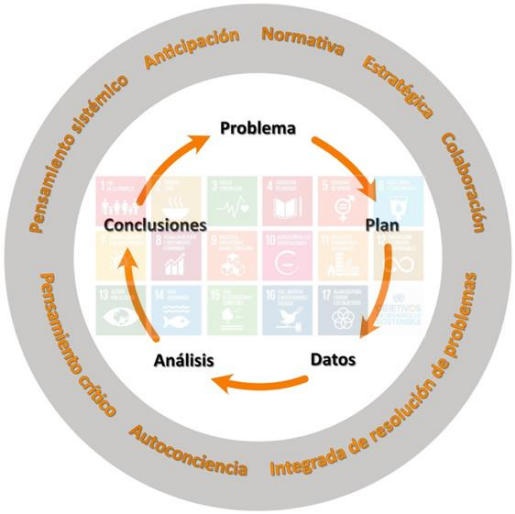


Imagen 2. Proyectos estadísticos con foco en sostenibilidad.

Fuente: Vásquez (2021, p. 10)

Este ciclo además de favorecer un aprendizaje en contexto permitirá avanzar hacia la construcción de sociedades cada vez más sostenibles, lo que requiere contar con ciudadanos alfabetizados en sostenibilidad, es decir, ciudadanos que, más allá de poseer conocimientos sobre este tema, desarrollen habilidades, actitudes, competencias, disposiciones y valores necesarios para avanzar en pos de frenar y superar el actual deterioro que aqueja a nuestro mundo (Stibbe, 2014).

3. Conectado estadística y sostenibilidad a través del cuento "El Monstruo de Colores"

Esta experiencia de aprendizaje se ha implementado en 28 futuros profesores de primaria que cursaban por primera vez la asignatura de análisis de datos durante el primer semestre académico de 2022. A través de dicha asignatura se busca que los futuros profesores adquieran conocimientos básicos de estadística y probabilidad. Para ello, se prioriza el trabajo por proyectos además el uso de diversos recursos como material manipulativo, cuentos, análisis de libros de texto entre otros.

En dicho contexto, en marzo de 2022, al inicio del curso con el propósito de iniciar a los futuros profesores en el ciclo de investigación estadística (Wild y Pfannkuch, 1999) e indagar en sus emociones relacionadas con el retorno a clases presenciales luego de 2 años de clases on-line producto de la pandemia de la Covid-19. Para

ello, se propone el desarrollo de un proyecto estadístico que gira en torno a conocer las emociones de los estudiantes del curso (Imagen 3).

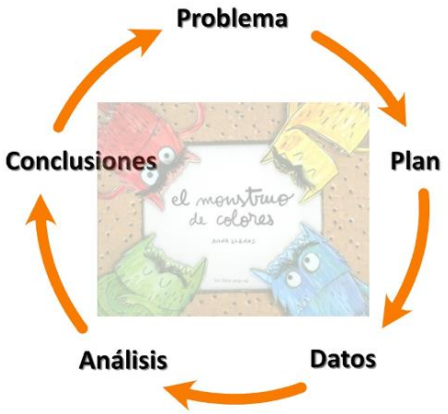


Imagen 3. Proyecto estadístico en torno a las emociones.

Fuente: Elaboración propia.

Las emociones son un tema importante en la agenda del desarrollo sostenible, aún más si consideramos los efectos que ha tenido la pandemia. Por otro lado, las emociones se vinculan con el bienestar físico y mental, por tanto se relacionan directamente con el ODS 3 de Salud y Bienestar que busca garantizar una vida sana y promover el bienestar de todos a todas las edades (Unesco, 2017).

3.1 Formulando preguntas de investigación estadística

En primer lugar, para sensibilizar y conectar a los futuros profesores con las emociones, se inicia con la lectura del cuento “El Monstruo de Colores” (Llenas, 2012). Luego, se plantea la pregunta ¿cómo te sientes con el retorno a clases presenciales? ¿con cuál emoción te identificas? Algunos indican verbalmente con cuál emoción se identifican mayormente. Pero, uno de los estudiantes plantea la pregunta ¿creen que toda la clase siente la misma emoción? Esto conlleva a distinguir entre aquellas preguntas cuya naturaleza es estadística de las que no, donde las primeras requieren de la recopilación e interpretación de datos. Así el interés por indagar en las emociones del grupo curso ante el retorno a clases, supone la definición de un problema y el planteamiento de un propósito y/o pregunta de investigación ¿Qué emoción es la que predomina en nuestro curso? Esta pregunta de investigación estadística intenta medir una característica, en este caso

el tipo de emoción en la población de futuros profesores, que representa una variable cualitativa.

3.2 Ideando un plan para la recolección de los datos

Para dar respuesta a la pregunta planteada se debe precisar qué información o datos es necesario recolectar, de qué forma se hará, y tomar decisiones sobre la forma en que se recolectarán los datos. Se decide elaborar una encuesta como método de recogida, en la que la posible pregunta a realizar es ¿cuál es tu emoción ante el regreso a clases? Sin embargo, la pregunta de la encuesta en esta forma podría suscitar muchas respuestas diferentes, lo que podría dificultar el análisis de los datos. Tras debatir los pros y los contras de una pregunta abierta o más restringida, los futuros profesores proponen modificar la pregunta de la encuesta de la siguiente manera ¿Cuál es tu emoción predominante ante el regreso a clases: alegría, tristeza, calma, miedo, rabia, amor? Como esta pregunta pide específicamente a los encuestados que elijan entre seis opciones, será más fácil gestionar y analizar los datos. El inconveniente de esta pregunta es que restringe las opciones de los encuestados. El análisis de los resultados de esta única clase se utilizará para inferir cuál es la emoción predominante en todo el curso. Una vez que se decide la pregunta de la encuesta, se pone en marcha la recolección de los datos. Para ello, se divide el grupo curso en tres grupos que deben proponer alternativas distintas sobre cómo llevar a cabo el proceso de recolección.

3.3 Recolectando y analizando los datos

El primer grupo propone que estudiante del curso coloree un monstruo de acuerdo con el color de la emoción que le representa. Para luego, organizar los datos según emoción (alegría, tristeza, calma, miedo, rabia, amor) lo que implícitamente conlleva identificar las distintas categorías de la variable en estudio. En una primera instancia se organizan en grupos según emoción (Imagen 4), sin embargo, rápidamente observan que se dificulta poder establecer comparaciones entre las distintas emociones, aun cuando si pueden hacer el recuento de los datos.

Imagen 4. Organizando la recolección de datos.

Fuente: Elaboración propia.

Frente a esta situación algunos plantean la estrategia de organizarse en columnas para así poder comparar y visualizar de manera concreta el recuento asociado a cada una de las categorías de emociones (Imagen 5).

Imagen 5. Organización y representación de los datos grupo 1.

Fuente: Elaboración propia.

A partir de esta representación concreta, que busca organizar y presentar visualmente los datos, se utilizan los propios individuos para representar la preferencia frente a cada categoría de la variable, emergiendo el concepto de frecuencia absoluta, al realizar recuento para cada categoría. Sin embargo, al organizarse en columnas, algunos hacen notar que no todos se encuentran a la misma distancia, lo que distorsiona los datos visualmente, dificultando que se establezca visualmente la comparación entre categorías, por lo que evidencian la necesidad de contar con una misma separación entre individuos para así poder establecer comparaciones. Pese a que dicha organización les permite observar la variabilidad de respuestas.

Por su parte, el segundo grupo propone preguntar uno a uno por la emoción que siente frente al retorno a la presencialidad y representar los datos por medio de una tabla de datos. Sin embargo, hacen notar que el organizar la información de dicha manera dificulta el conocer cuál es la emoción que predomina en el curso, por ello, deciden organizar los datos en una tabla de frecuencias (Imagen 6).

Imagen 6. Organización y representación de los datos grupo 2.

Fuente: Elaboración propia.

Si bien es cierto que dicha tabla entrega información menos detallada respecto de la emoción de cada uno, permite obtener descripciones generales respecto del comportamiento del grupo curso, y de este modo dar respuesta a la pregunta de investigación planteada. Incluso una vez que dan respuesta a la pregunta de investigación surge un nuevo interrogante, pues uno de los estudiantes plantea que dado que conocemos las emociones de cada uno se podría confeccionar una nueva tabla de frecuencias que indique las emociones según género (hombre o mujer) lo que permitiría analizar si existen o no diferencias en las emociones de hombres y mujeres del curso.

Mientras que el tercer grupo, decide recolectar los datos a través policubos asociados al color de cada emoción (calma: verde, alegría: amarillo, miedo: negro, rabia: rojo, tristeza: azul y rosado: amor) (Imagen 7).

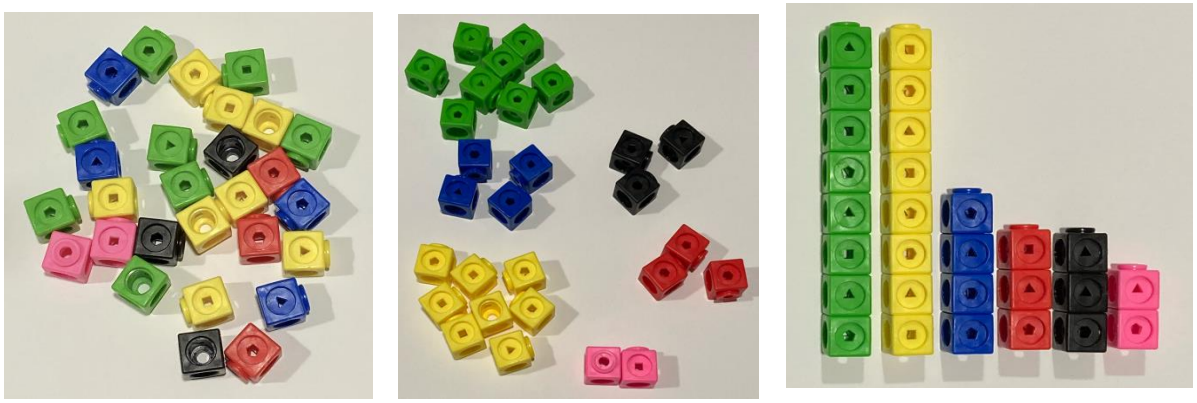


Imagen 7. Organización y representación de los datos grupo 3.

Fuente: Elaboración propia.

Una vez recolectan los datos los organizan en un gráfico concreto que representa la emoción de cada futuro profesor. Al ser estos datos categóricos, se hace notar que las categorías pueden aparecer en cualquier orden. Por otro lado, en este grupo aparece la idea de moda, entendida como el resultado más común o frecuente del conjunto de datos. En este caso se observa que el conjunto de datos es bimodal, ya que hay dos valores “representativos" o "típicos" de la distribución de los datos.

3.4 Interpretando los resultados

En esta fase del ciclo de investigación estadística, se insta a los futuros profesores a responder a la pregunta inicial de la investigación estadística: ¿Qué emoción es la que predomina en nuestro curso? Durante la fase de análisis de los datos, los distintos grupos ya han bosquejado algunas posibles respuestas, indicando que las emociones más presentes en el grupo curso son calma y alegría. Ante este tipo de interpretaciones, se hace notar que es importante tener en consideración la variabilidad de los datos. En consecuencia, es necesario se invita a los futuros profesores a que elaboren una respuesta que vaya más allá e incluya tal variabilidad. Por ejemplo, se podría formular la siguiente respuesta: Ante el regreso a clases presenciales, de un total de 28 futuros profesores, 8 se identifican con la

emoción calma, 8 con la emoción alegría, 4, con la emoción tristeza, 3 con la emoción rabia, 3 con la emoción miedo, mientras que solo 2 se identifican con la emoción amor. Lo que refleja que las emociones más presentes son calma y alegría.

También se hace notar que la mayor parte de los datos recogidos corresponden a un censo del grupo curso. Pero ¿en qué medida los resultados de este grupo curso serán representativos de otros grupos? Esto puede dar origen a generar un nuevo ciclo de investigación estadística, en el cual incluir a otros grupos de futuros profesores.

3.5 Conectado con la sostenibilidad

Por último, es importante volver a los datos y ante lo cual se motiva a los futuros profesores que vayan más allá y reflexionen respecto de ¿para qué sirven estos datos y las conclusiones obtenidas? Como se ha indicado anteriormente, desde el punto de vista de la sostenibilidad, estos resultados pueden usarse para trabajar aspectos vinculados con el ODS 3 sobre salud y bienestar. Más concretamente, se plantean preguntas en relación con las siguientes competencias de sostenibilidad: ¿por qué creen que han predominado tales emociones en el grupo curso? (competencia de pensamiento sistémico), ¿qué consecuencias (impacto) pueden tener tales emociones en nuestra salud? (competencia de anticipación), ¿por qué me siento así? ¿cómo quiero sentirme en términos emocionales? (competencia de autoconciencia), ¿cómo podemos contribuir a desarrollar emociones positivas en nuestro grupo curso? (competencia estratégica). El plantear estos u otros tipos de interrogantes puede contribuir a tomar contacto con las emociones que hemos experimentado durante estos dos años de clases on-line producto de la pandemia, y a describir las sensaciones que estas nos han generado. De manera tal que los estudiantes, reconozcan y expresen sus emociones, con el fin de favorecer el bienestar emocional de la comunidad educativa.

4. Consideraciones finales

Se ha presentado el desarrollo de una experiencia de aprendizaje que busca conectar la estadística con la sostenibilidad a partir del desarrollo de un proyecto estadístico que inicia con la lectura del cuento “El Monstruo de Colores”. Por medio de este proyecto no tan solo se busca que los futuros profesores vivencien las distintas fases del ciclo de investigación estadística (Wild y Pfannkuch, 1999), sino también que puedan reconocer, expresar y compartir sus emociones con el grupo curso. En esta dirección, se muestra cómo abordar la enseñanza de la estadística en conexión con la sostenibilidad, por medio del ODS 3 de salud y bienestar, en que las emociones son aspecto clave. Dado que, las emociones pueden potenciar o disminuir la salud tanto física como mental. A su vez, las personas que gozan de un buen estado de salud tienden a experimentar más emociones positivas y menos negativas que quienes han perdido su bienestar. Así, por medio de esta experiencia además de ejemplificar las distintas fases del ciclo de investigación estadística, se exploran las emociones de los futuros profesores con el retorno a clases presenciales luego de dos años de virtualidad. Por otro lado, con esta experiencia se busca otorgar un ejemplo de experiencia para ayudar a los futuros profesores en el diseño de propuestas auténticas, contextualizadas en sostenibilidad. Pues, si queremos contar con ciudadanos alfabetizados en sostenibilidad se debe desarrollar desde temprana edad en los alumnos la motivación y capacidad para comprender, interpretar, evaluar críticamente, y cuando sea pertinente, expresar opiniones en cuanto a mensajes e información cuantitativa y estadística, a la vez que potenciar argumentos basados en datos, o cuestiones relacionadas con la incertidumbre y el riesgo del mundo real (Gal, 2002); que les lleve a una toma de decisiones conscientes para crear un mundo más sostenible. Más aún si consideramos que gran parte de las competencias para el desarrollo sostenible requieren de una alfabetización estadística para su desarrollo (Vásquez, 2020).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del FONDECYT Nº 1200356 financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

Referencias

Alencar, E., Alves, J., Día, D., y Soares, M. (2021). “Quando nasce um monstro?” Possibilidade do uso de uma história infantil para o ensino de probabilidade. *Brazilian Journal of Development, 7(1), 9807-9816.*

Alsina, Á. (2012). La estadística y la probabilidad en educación infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Didácticas Específicas*, *7*, 4-22.

Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon - Revista de Educación Matemática, 34*(95), 25-48.

Alsina, Á., y Escola Annexa (2021). Estadística en contexto: desarrollando un enfoque escolar común para promover la alfabetización. *Tangram – Revista de Educação Matemática, 4*(1), 71-98.

Alsina, A., y Vásquez, C. (2016). La enseñanza de la probabilidad en Educación Primaria: el currículo versus el libro de texto. 17 jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Actas JAEM 2015. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, FESPM. Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia, SEMRM. Cartagena. ISBN 978-84-606-9748-0 (pp. 1-14).

Alsina, A., Vásquez, C., y Gómez, O. (2021). Contar cuentos para contar datos: vínculos entre la literatura, la estadística y la probabilidad en Educación Infantil. *Revista Educação Matemática em Foco, 10*(1), 1-17.

Bargagliotti, B., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Jhonson, R., Perez, L., y Spangles, D.A. (Eds.) (2020). *Pre-K–12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II).* American Statistical Association. Recuperado de https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEIIPreK-12_Full.pdf

Batanero, C., y Díaz, C. (Eds.). (2011). *Estadística con proyectos*. Departamento de Didáctica de la Matemática.

Columba, L., Kim, C., y Moe, A. (2005). *The power of picture books in teaching math and science: Grades preK-8*. Holcomb Hathaway, Publishers, Inc.

Comisión Mundial del Medio Ambiente y del Desarrollo (1987). CMMAD. *Nuestro Futuro Común*. Madrid: Alianza.

Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25.

Gal, I. (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística*. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

García, M. (2018). *Una propuesta didáctica para trabajar estadística y probabilidad a través del cuento en educación infantil*. Trabajo de fin de grado. Universidad de Sevilla.

Haury, D. (2001). Literature-Based Mathematics in Elementary School. *Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education*, 1, 1-2.

Llenas, A (2012). *El Monstruo de colores*. España: Flamboyant.

Luedtke M., y Sorvaag K. (2018) Using Children's Literature to Enhance Math Instruction in K-8 Classrooms. In: Jao L., Radakovic N. (eds) Transdisciplinarity in Mathematics Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-63624-5_3

Moore, D., y Cobb, G. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *American Mathematical Monthly, 104*, 801-823.

OECD. (2019). *OECD Future of Education and Skills 2030: OECD Learning Compass 2030.* Paris: OECD. Recuperado de http://www.oecd.org/education/2030-project/teaching-and-learning/learning/core-foundations/Core_Foundations_for_2030_concept_note.pdf

Stibbe, A. (2014). *The Handbook of Sustainability Literacy: Skills for a Changing World.* Green Books.

UNESCO. (2017). *Educación para los objetivos de desarrollo sostenible: objetivos de aprendizaje.* Francia: Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura.

Vásquez, C. (2020). Educación estocástica: una herramienta para formar ciudadanos de sostenibilidad. *Matemáticas, Educación y Sociedad 3*(2), 1-20.

Vásquez, C. (2021). Proyectos estocásticos orientados a la acción: una puerta al desarrollo sostenible desde temprana edad. *Revista Venezolana De Investigación En Educación Matemática, 1*(2).

Vásquez, C., y Alsina, A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Revista Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 27-48.

Vásquez, C., y Alsina, A. (2017). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. *Bolema*, *31*(57), 454-478.

Vásquez, C., y Cabrera, G. (en prensa). La estadística y la probabilidad en los currículos de matemáticas de educación infantil y primaria de seis países representativos en el campo. *Revista Educación Matemática*.

Vásquez, C., Hernández, E., y García-García, J. (2022). Representaciones estadísticas a temprana edad: una aproximación desde los libros de texto de Chile y México. *BOLEMA, 36*(72), 116-145.

Vásquez, C., Seckel, M. J., Rojas, F., Errázuriz, C., y Valdivieso, G. (2022). Los proyectos estadísticos: un puente entre la alfabetización estadística y la alfabetización en sostenibilidad. *Revista UNO de Didáctica de las Matemáticas, 95,* 7-13.

Wals, A.E.J. (2015). *Más allá de dudas no razonables. Educación y aprendizaje para la sostenibilidad socioecológica en el Antropoceno*. Wageningen, Universidad de Wageningen.

Wild, C.J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223–248. https://doi.org/ 10.1111/j.1751-5823. 1999.tb00442.x

CoF013 La cátedra de didáctica de las matemáticas M. Antònia Canals y el Gamar: el legado de una maestra de maestros

Ángel Alsina
angel.alsina@udg.edu
Universidad de Girona/Cátedra de Didáctica de las Matemáticas M. Antònia Canals

Ester Bosch
ebosch16@xtec.cat
Col·legi Pompeu Fabra, Anglès/Gabinet de Materials i de Recerca per la Matemàtica a l'Escola –GAMAR

Xavier Fernández
xfernan1@xtec,cat
Co·legi l'Estació, Sant Feliu de Guíxols/Grup Perímetre Girona

Núcleo temático: Formación del profesorado; comunicación y divulgación

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria, Universidad (Grado de Maestro de Infantil; Grado de Maestro de Primaria).

RESUMEN

M. Antònia Canals (1930-2022) ha tenido un importante papel en la Didáctica de las Matemáticas en las primeras edades por sus aportaciones sobre el uso de materiales. A raíz de su reciente pérdida, se presenta la Cátedra de Didáctica de las Matemáticas M. Antònia Canals de la Universidad de Girona y el *Gabinet de Materials i de Recerca per la Matemàtica a l'escola-GAMAR*, integrado dentro de dicha càtedra: después de una breve semblanza de M. Antònia Canals, se describen los principales objetivos de la cátedra y las tareas que se llevan a cabo en el GAMAR para dar continuidad al legado de esta profesora, consolidarlo y ampliarlo, en beneficio del desarrollo profesional del profesorado de matemáticas.

Palabras clave: Formación de Maestros de Matemáticas, Educación Infantil, Educación Primaria.

1. M. Antonia Canals, una vida dedicada a la Didáctica de las Matemáticas

Mª. Antonia Canals nació en Barcelona en 1930, en el seno de una familia muy vinculada al mundo de la educación. Estudió Magisterio y Ciencias Exactas de forma simultánea, en la Escola Normal de Tarragona (1950) y en la Universitat de Barcelona (1953) respectivamente.

Su gran vocación fue ser maestra. Uno de sus primeros contactos con la docencia fue en el Liceo Francés, una escuela de prestigio en la Barcelona de finales de los cincuenta, pero diversas circunstancias la llevaron a emprender una aventura maravillosa en pro de la educación de los más pequeños: primero en Thalita (1956-1962) y después, como directora, en Ton i Guida (1962-1979), una escuela en un barrio barcelonés de emigrantes que fue un ejemplo de lucha contra el modelo represivo de las escuelas franquistas. Durante este periodo, fue una de las fundadoras de la Associació de Mestres Rosa Sensat.

A partir de 1975 inició su trayectoria en la formación de maestras y maestros de infantil y primaria en la Escola de Mestres de la Autònoma de Barcelona; en 1979 en la Escola de Mestres de Vic; y, a partir de 1982, en la Normal de Girona. Mª. A. Canals, pues, vivió de pleno el inicio de la Didáctica de la Matemática como disciplina universitaria diferenciada de las Matemáticas y la creación de departamentos universitarios de Didáctica de las Matemáticas, que se produjo en la década de los ochenta del siglo XX. Por ejemplo, los estudios universitarios de formación del profesorado que tienen que atender alumnado de 0 a 6 años se organizaron, desde el año 1983, en el marco de la Ley de Reforma Universitaria (LRU, 11/1983, de 25 de agosto) alrededor de la Diplomatura de Maestro de Educación Preescolar. El Real Decreto 2360/1894 de 12 de diciembre sobre Departamentos Universitarios promovió, en diferentes universidades del estado español, la creación de departamentos de Didáctica de las Matemáticas.

La implementación de esta disciplina comportó “sangre, esfuerzo, lágrimas y sudor”, usando la expresión de Churchill para comunicar que algo es muy costoso, puesto que una parte considerable del profesorado universitario responsable de la formación del profesorado continuó impartiendo matemática pura en el marco de las asignaturas de Didáctica de las Matemáticas. M. Antònia Canals, junto con otras figuras relevantes de la época como Maria Rubiés, luchó firmamente por la

transformación de este tipo de prácticas, para garantizar que las maestras y los maestros tuvieran una formación sólida en Didáctica de las Matemáticas. A partir de la fuerte inspiración de autores de reconocido prestigio internacional como Maria Montessori, Alexandre Galí, Zoltan P. Dienes, Frédérique Papy, Lucienne Felix o Jean Piaget, fue construyendo progresivamente un cuerpo de conocimientos específico para la educación matemática infantil y primaria en Cataluña, principalmente, a partir del firme convencimiento que la enseñanza pasaba necesariamente para promover la interacción de los niños y niñas con el material manipulativo.

Uno de los documentos que mejor recoge sus planteamientos sobre la educación matemática infantil es su manual de Didáctica de las Matemáticas para el profesorado de Educación Infantil (fotografia de la izquierda de la Imagen 1), escrito en catalán, y que tituló *Per una Didàctica de la Matemàtica a l'Escola. I. Parvulari* (Canals, 1989). En este documento, que recoge varias de las aportaciones de autores como Piaget e Inhelder (1959), Dienes (1969, 1971) y Dienes y Golding (1966), entre otros, organizó los conocimientos matemáticos infantiles en torno a tres tipos de actividades mentales asociadas respectivamente al conocimiento físico (identificar) y el conocimiento matemático (relacionar y operar), con base en los planteamientos piagetianos. Con esto, Canals (1989) quería dejar patente que los niños y niñas, primero, identifican o reconocen por ejemplo las cantidades de elementos en situaciones concretas (con material, dibujos, etc.) y posteriormente, pueden compararlas (a partir de relaciones de equivalencia y orden) y operar con ellas. Extendió este planteamiento sobre los números y el cálculo a los contenidos vinculados a la lógica, las medidas y la geometría, ofreciendo así una visión de conjunto que ponía de manifiesto las conexiones entre contenidos matemáticos de naturaleza aparentemente diferente.

Creó grupos de maestros para divulgar esta manera de entender la Didáctica de las Matemáticas, entre ellos el Grup Perímetre de Girona; y escribió múltiples artículos y libros de divulgación. Los datos de su producción bibliográfica, desde finales de la década de los sesenta del S. XX hasta muy entrado el siglo XXI, han sido recopilados en varias revisiones bibliográficas: por ejemplo, en el libro *M. Antònia*

Canals: El compromís amb la renovació de l'escola (Alsina y Soler, 2005), donde se comenta una por una toda su producción hasta 2004 o, más recientemente, en el marco de la tesis doctoral *Didáctica de las matemáticas y desarrollo profesional de una maestra* (Sotos, 2015).

Ya en la recta final de su carrera, y gracias a la obtención en 2001 del premio Jaume Vicens Vives a la Docencia Universitaria de la Generalitat de Cataluña, ideó y puso en práctica el *Gabinet de Materials i de Recerca per la Matemàtica a la Escola-GAMAR* (Fotografía de la derecha de la Imagen 1). En este espacio educativo recopiló una amplia selección de materiales manipulativos para trabajar las matemáticas en las primeras edades.

Imagen 1. Dos de las producciones de Mª. Antònia Canals: el libro Per una Didàctica de la Matemàtica a l'Escola y el GAMAR. Fuente de la fotografía: https://elpais.com/elpais/2018/07/19/ciencia/1532023630_630635.html

Es este, precisamente, el relevo que quiere recoger la Cátedra de Didáctica de las Matemáticas M. Antònia Canals, continuarlo, consolidarlo y ampliarlo, teniendo en consideración las principales líneas de investigación en educación matemática contemporáneas, que son las que tienen que nutrir una formación sólida del profesorado de matemáticas. Trabajar en esta línea desde la cátedra tiene que servir para contribuir firmemente al desarrollo de la competencia matemática de los niños y niñas en beneficio del país, dado que una sociedad alfabetizada matemáticamente tiene muchos más elementos para poder prosperar.

2. La Cátedra de Didàctica de las Matemáticas M. Antònia Canals

La Cátedra de Didáctica de las Matemáticas M. Antònia Canals de la UdG, como se ha indicado, pretende dar continuidad al legado de esta profesora catalana, consolidarlo y ampliarlo, en beneficio del desarrollo profesional de las maestras y los maestros de matemáticas.

Son objetivos de la Cátedra de Didáctica de las Matemáticas Mª Antònia Canals:

Objetivo 1. Consolidar el GAMAR de la Universitat de Girona, como un centro de referencia de la formación de las maestras y los maestros de matemáticas.

Desde su creación, el GAMAR se ha ido convirtiendo progresivamente en un centro de referencia para muchas maestras y maestros que han querido conocer a fondo las posibilidades que ofrecen los materiales manipulativos para contribuir al desarrollo del pensamiento matemático de los niños y niñas de las primeras edades. Esta actividad formativa se ha organizado, principalmente, alrededor de dos ejes: 1) las sesiones presenciales con profesorado para hacer formación sobre las posibilidades de los materiales manipulativos; 2) el diseño de una página web en la cual se pueden consultar los materiales manipulativos, organizados en varios bloques: cálculo, lógica, medidas, probabilidad, geometría y problemas (https://www2.udg.edu/projectesbiblioteca/gamar/inici/tabid/17145/language/ca-es/default.aspx)

Para consolidar estos dos ejes, por un lado la cátedra promueve el mantenimiento y la actualización de los materiales físicos de los que dispone actualmente el centro y, por otro lado, el mantenimiento y la actualización sistemática de la página web, con el apoyo de los Servicios Técnicos de la Biblioteca de la UdG.

Objetivo 2. Diseñar, con una periodicidad anual, una oferta formativa sólida en Didáctica de las Matemáticas, en colaboración y de acuerdo con las líneas generales de formación del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya.

La cátedra quiere convertirse progresivamente en un referente en torno a la Didáctica de las Matemáticas en las primeras edades. Por esta razón, además de las sesiones abiertas de presentación de materiales para maestras y maestros que

se llevaban a cabo con una periodicidad mensual en el GAMAR, la cátedra impulsa otras acciones formativas, como:

- La organización de un calendario de visitas para atender grupos de futuros maestros, maestros en activo y otros profesionales interesados en la tarea de la cátedra.

- La organización de seminarios temáticos y conferencias sobre temas de actualidad en Didáctica de las Matemáticas en las primeras edades, a cargo de personas expertas en el ámbito.

- La organización, conjuntamente con el Grup Perímetre y ADEMGI, de las *Jornades de Didàctica de les Matemàtiques en les Comarques Gironines*, con un fuerte impacto principalmente en el entorno de Girona, pero abiertas a todo el profesorado interesado.

Estas actividades formativas se llevan a cabo en el propio centro cuando el volumen de asistentes lo permite. Para las acciones formativas que requieren espacios de mayores dimensiones, se cuenta con las instalaciones de la Universitat de Girona o bien, puntualmente y en función de la disponibilidad, con instalaciones del Ayuntamiento de Girona.

Objetivo 3. Diseñar y llevar a cabo investigaciones sobre cuestiones de educación matemática en las primeras edades

Se está trabajando para que la cátedra, además de ser un referente en la formación del profesorado de matemáticas, se convierta también progresivamente en un referente de la investigación aplicada en educación matemática en las primeras edades, una investigación desde la escuela y para la escuela. Para llevar a cabo esta tarea de investigación, se consideran los principales ámbitos y agendas de investigación en educación matemática (Alsina, 2019; Llinares, 2008), poniendo especial énfasis en: 1) el análisis didáctico de contextos de enseñanza y/o recursos didácticos (por ejemplo: ¿cómo afecta el uso de materiales manipulativos en el aprendizaje de las matemáticas?); 2) el desarrollo profesional del profesorado de

matemáticas (por ejemplo: ¿qué elementos favorecen/obstaculizan el uso de materiales manipulativos en la práctica docente del profesorado de matemáticas?).

Estas investigaciones se diseñan en el GAMAR y, prioritariamente, se llevan a cabo en colaboración con el área de Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Didácticas Específicas de la UdG, el Instituto de Investigación Educativa de la UdG y el Programa de Doctorado en Educación de la UdG. Así mismo, se están estableciendo colaboraciones tanto con instituciones y organismos que promueven el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas como con investigadores en educación matemática/grupos de investigación de otras universidades que estén interesados en estas líneas de investigación aplicadas.

Objetivo 4. Crear una red con instituciones y organismos que promueven el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas.

La Didáctica de las Matemáticas cuenta, tanto en el territorio catalán como en el estado español, con un extenso movimiento asociacionista que la cátedra tiene que considerar necesariamente para llevar a cabo sus acciones, tal como ya se deja entrever en los objetivos anteriores. Se asume que tanto la formación de maestras y maestros de matemáticas como la investigación en educación matemática son tareas colectivas y, por este motivo, la cátedra vela para crear red con las diversas instituciones, organismos y asociaciones que promueven la formación del profesorado de matemáticas y la investigación aplicada en educación matemática.

En una primera fase, se han establecido colaboraciones con estas organizaciones:

- Grup Perímetre de l'Institut de Ciències de l'Educació "Josep Pallach" de la Universitat de Girona.
- Associació d'Ensenyants de Matemàtiques de les Comarques Gironines (ADEMGI).
- Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT).
- CESIRE - Centre de Suport a la Innovació i la Recerca Educativa del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya.
- Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA).

- Associació de Mestres Rosa Sensat.
- Societat Balear de Matemàtiques (SBM-XEIX).
- Centre d'Aprenentatge Científicomatemàtic (CentMat).

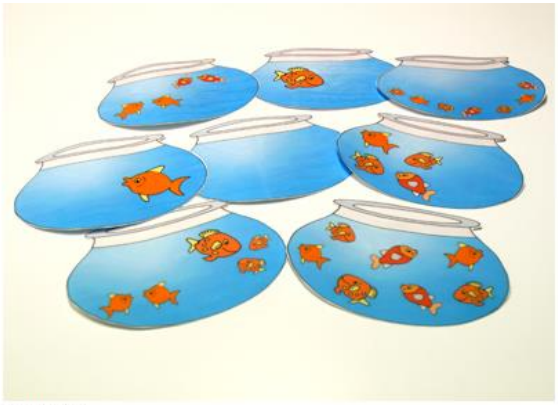
Objetivo 5. Hacer difusión de la obra de la profesora M. Antònia Canals y facilitar el acceso a su producción en el ámbito de la innovación en educación matemática.

Durante el transcurso de su carrera profesional, como se ha indicado, M. Antònia Canals ha producido un elevado número de artículos y libros de divulgación sobre cuestiones de educación matemática en las primeras etapas, junto con libros de texto para niños y niñas. Desde la cátedra se está empezando a trabajar para hacer una recopilación progresiva de esta obra que, como se ha mencionado anteriormente, se inicia en la década de los setenta del siglo XX y acaba muy entrado el siglo XXI. Previa autorización de las revistas y editoriales en las que ha publicado su obra, se va a tratar de digitalizar su producción, con el apoyo del Equipo Técnico de la Biblioteca de la UdG. De este modo, el acceso podrá ser también *online*, a través de la página web de la cátedra, siguiendo de manera rigurosa la legislación en materia de difusión de la obra de terceros.

3. El GAMAR

El GAMAR, como se ha indicado, fue creado a partir de la dotación a M. Antònia Canals del Premio Jaume Vicens Vives a la Docencia Universitaria de la Generalitat de Catalunya, en 2001. Desde el principio, este centro fue reconocido por la UdG y en 2010 se integró como "estructura de investigación" directamente vinculada al Rectorado de la UdG.

M. Antònia Canals dedicó los últimos años a ir recopilando materiales y actividades de procedencia diversa: comercializados, creados por maestras y maestros o por ella misma, etc. Cada material se acompaña de una ficha, en la que se muestra una fotografia y se aportan diversos datos: la referencia (código interno de clasificación), la descripción, la utilidad, el nivel, la procedencia y, en algunos casos, actividades para llevar a cabo con el material (Imagen 2)



Referència: : CL-NO-06
Descripció: Col·leccions de diferents targes on s'hi representen objectes semblants però que es diferencien en la forma, en la posició a l'espai i en el nombre d'elements de cada tarja
Utilitat: Serveixen per treballar la quantitat a partir de la comparació, la classificació i l'ordenació de les targes, reforçada amb l'expressió verbal d'allò que s'ha fet i observat. Aquestes comparacions afavoreixen la construcció del concepte de nombre.
Nivell: Parvulari i cicle inicial de primària.
Procedència: Material de construcció pròpia de mestres del grup PERÍMETRE
Activitats:

Imagen 2. Ejemplo de descripción de un material en la página web del GAMAR

Estos materiales son la principal fuente a partir de la que se ofrece formación al profesorado de matemáticas desde el GAMAR.

Después de dos años de inactividad debido a la avanzada edad de M. Antònia Canals, la reapertura del GAMAR como espacio de reflexión, formación y descubrimiento de materiales a partir del curso 2021-2022, quiere proporcionar un punto de encuentro para mejorar la Didáctica de las Matemáticas en la Educación Infantil y Primaria. Durante este curso escolar, para dinamizar el GAMAR y acercarlo a todos los maestros y las maestras, educadores y estudiantes para maestro, se han ofrecido los siguientes servicios a través de la maestra responsable del centro, que forma parte del Cuerpo de Maestros de la Generalitat de Catalunya y dedica media jornada laboral a estas tareas:

- Visitas libres para descubrir el material del GAMAR.
- Visitas guiadas de profundización.
- Asesoramiento didáctico y organizativo para grupos de maestros y/o Equipos Directivos.
- Búsqueda virtual de los materiales a través de esta página web.
- Exposiciones temporales.

- Sesiones de formación mensuales. Este curso, por ejemplo, se ha ofrecido una formación monográfica sobre el uso de las regletas (Imagen 3)

Imagen 3. Formación mensual del GAMAR durante el curso 2021-2022.

M. Antònia Canals, en uno de sus múltiples escritos, señaló que *"la realidad nos crea un interrogante: ¿cómo aconseguir que los ninos y las niñas también se enamoren de las matemáticas?"* Ni la Cátedra de Didáctica de las Matemáticas M. Antònia Canals ni el GAMAR tenemos la varita mágica para conseguirlo, pero si el compromiso y la ilusión de estar al lado de las maestras y de los maestros y ofrecerles toda la ayuda posible para tratar de conseguirlo juntos.

Referencias

- Alsina, À. (2019). La educación matemática infantil en España: ¿qué falta por hacer? *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 100,* 85-108.

- Alsina, À., y Soler, J. (2005). *M. Antònia Canals: El compromís amb la renovació de l'escola.* Eumo Editorial.

- Canals, M. A. (1989). *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola. I. Parvulari.* Eumo.

- Dienes, Z.P. (1971a). *Estados y operadores. 2: Iniciación al álgebra.* Teide.

- Dienes, Z.P. (1971b). *Estados y operadores. 1: operadores aditivos.* Teide.

- Dienes, Z.P. y Golding, E. (1976). *Los primeros pasos en matemáticas. 1: lógica y juegos lógicos.* Teide.

- Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde "ISI-web of knowledge" y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 25-54). SEIEM.

- Piaget, J., e Inhelder, B. (1959). *La Genèse des structures logiques élémentaires: Classifications et sériations.* Delachaux & Niestlé.

- Sotos, M. (2015). Didáctica de las matemáticas y desarrollo profesional de una maestra. El caso de Maria Antònia Canals i Tolosa. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.

CoD005 Matemáticas y ciencias en la educación escolar en europa

Ana Martín Martínez
ana.martinmartinez@educacion.gob.es
Eurydice España. Instituto Nacional de Evaluación Educativa. MEFP

Jaime Vaquero Jiménez
jaime.vaquero@educacion.gob.es
Eurydice España. Instituto Nacional de Evaluación Educativa. MEFP

Núcleo temático: Comunicación y divulgación. Inclusión

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria

RESUMEN

El informe “Matemáticas y Ciencias en la educación escolar en Europa” de Eurydice analiza cómo los sistemas educativos europeos contribuyen a mejorar las competencias en matemáticas y ciencias. El documento contiene un enfoque específico en los estudiantes con bajo rendimiento en estas dos áreas.

El informe se basa principalmente en datos cualitativos recopilados por la Red Eurydice sobre políticas de alto nivel y medidas en el área de la enseñanza de las matemáticas y las ciencias.

Entre los principales hallazgos del proyecto se encuentra que:

- La mayoría de los sistemas educativos aún necesitan encontrar formas de reducir la proporción de estudiantes de bajo rendimiento.
- El tiempo de instrucción para las matemáticas es más alto en educación primaria que en educación secundaria.
- Las evaluaciones a gran escala en matemáticas están más extendidas que en ciencias.

Palabras clave: Matemáticas, Currículo, Europa, Inclusión, Políticas

El informe se estructura en 7 capítulos.

1. **Logro académico en matemáticas y ciencias**

El capítulo 1 analiza el porcentaje de estudiantes de bajo rendimiento en matemáticas y ciencias en los diferentes sistemas educativos europeos, vinculando dichos porcentajes a la calidad y la inclusión en la educación.

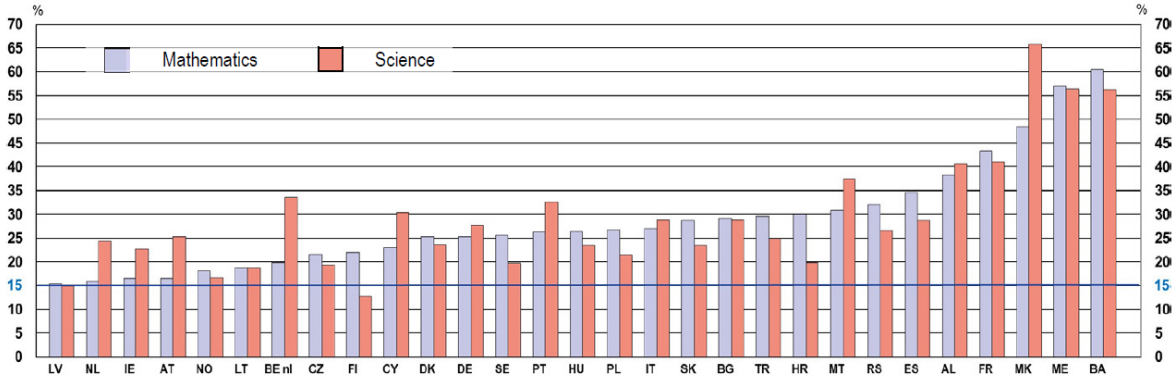
1.1. Porcentaje de alumnado de bajo rendimiento

Este capítulo examina los indicadores de calidad e inclusión en educación. Para ello, se basa en la información del estudio TIMSS (Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias) en estudiantes de 4.º de primaria y en el informe PISA (Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes) para los estudiantes de 15 años. Se analiza el porcentaje de estudiantes de bajo rendimiento en Europa y los factores que determinan el nivel académico del alumnado.

Para alcanzar este doble objetivo de una educación inclusiva y de calidad, la UE se ha fijado el objetivo de que «el porcentaje de jóvenes de 15 años con bajo rendimiento en lectura, matemáticas y ciencias sea inferior al 15 %». Este objetivo forma parte de un conjunto de metas que la Comisión propone alcanzar para 2030 en el marco del Espacio Europeo de Educación.

En matemáticas, los menores porcentajes de alumnado de bajo rendimiento en cuarto curso de educación primaria se dan en Letonia, Países Bajos, Irlanda y Austria. En el otro extremo de la escala, el porcentaje de alumnado de bajo rendimiento en matemáticas supera el 40 % en Francia, Macedonia del Norte y Bosnia y Herzegovina. En este último país, la mayoría del alumnado de cuarto curso (más del 60 %) son considerados de bajo rendimiento en matemáticas.

Figure 1.1: Percentage of low achievers in mathematics and science in the fourth grade, 2019



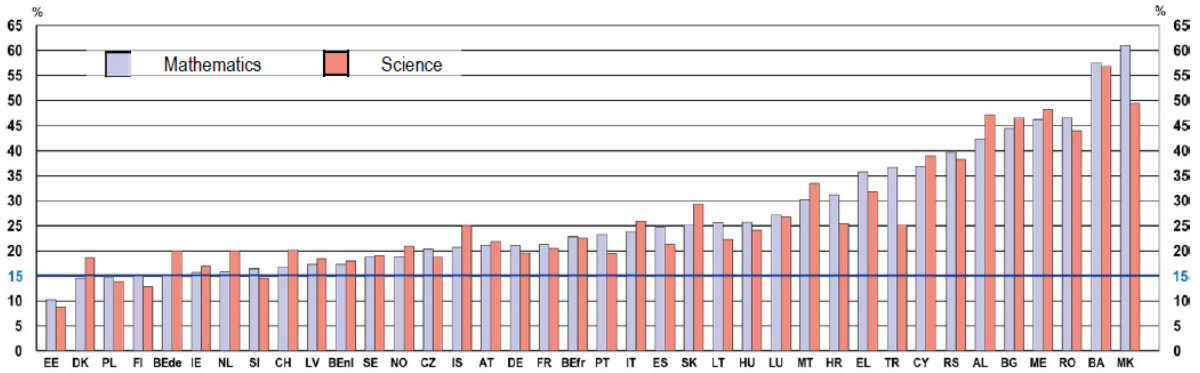
	LV	NL	IE	AT	NO	LT	BE nl	CZ	FI	CY	DK	DE	SE	PT	HU
Mathematics	15.5	15.9	16.4	16.5	18.1	18.6	19.9	21.6	22.0	23.1	25.3	25.4	25.6	26.2	26.4
Science	14.9	24.3	22.6	25.4	16.6	18.6	33.5	19.3	12.7	30.3	23.6	27.6	19.7	32.6	23.5
	PL	IT	SK	BG	TR	HR	MT	RS	ES	AL	FR	MK	ME	BA	
Mathematics	26.8	27.0	28.8	29.1	29.6	30.0	30.9	32.1	34.6	38.2	43.3	48.5	57.0	60.4	
Science	21.5	28.9	23.5	28.8	24.9	19.8	37.5	26.6	28.7	40.6	41.0	65.9	56.4	56.3	

Source: IEA, TIMSS 2019 database.

Gráfico 1. Porcentaje de alumnado de bajo rendimiento en matemáticas y ciencias en cuarto curso de educación primaria, 2019

Como muestra el capítulo, solo un grupo de países europeos han logrado alcanzar el objetivo de tener no más del 15 % de estudiantes de 15 años con bajo rendimiento en las áreas temáticas que representan las habilidades básicas. Solo cuatro sistemas educativos no superan este 15 % en matemáticas (Estonia (10,2 %), Dinamarca (14,6 %), Polonia (14,7 %) y Finlandia (15 %)). La mayoría de los sistemas educativos europeos aún necesitan encontrar formas de reducir la proporción de estudiantes que no pueden resolver problemas matemáticos o científicos más complejos.

Figure 1.2: Percentage of low achievers among 15-year-old students in mathematics and science, 2018



	EE	DK	PL	FI	BE de	IE	NL	SI	CH	LV	BE nl	SE	NO	CZ	IS	AT	DE	FR	BE fr
Mathematics	10.2	14.6	14.7	15.0	15.1	15.7	15.8	16.4	16.8	17.3	17.3	18.8	18.9	20.4	20.7	21.1	21.1	21.3	22.8
Science	8.8	18.7	13.8	12.9	20.0	17.0	20.0	14.6	20.2	18.5	18.0	19.0	20.8	18.8	25.0	21.9	19.6	20.5	22.6
	PT	IT	ES	SK	LT	HU	LU	MT	HR	EL	TR	CY	RS	AL	BG	ME	RO	BA	MK
Mathematics	23.3	23.8	24.7	25.1	25.6	25.6	27.2	30.2	31.2	35.8	36.7	36.9	39.7	42.4	44.4	46.2	46.6	57.6	61.0
Science	19.6	25.9	21.3	29.3	22.2	24.1	26.8	33.5	25.4	31.7	25.2	39.0	38.3	47.0	46.5	48.2	43.9	56.8	49.5

Source: OECD, PISA 2018 database.

Gráfico 2. Porcentaje de estudiantes de 15 años con bajo rendimiento en matemáticas y ciencias, 2018

1.2. Educación de calidad e inclusiva

La correlación entre los porcentajes de alumnado de bajo rendimiento de ambas competencias y niveles de educación es alta. Por lo tanto, dentro de un sistema educativo, es probable que el porcentaje de alumnado de bajo rendimiento sea similar en matemáticas y ciencias, tanto en educación primaria como en secundaria. El análisis muestra también cómo los sistemas educativos con porcentajes relativamente bajos de estudiantes con bajo rendimiento tienden a combinar la calidad y la inclusión en la educación: tienen puntuaciones medias más altas y diferencias más pequeñas entre los estudiantes con alto y bajo rendimiento.

1.3. Determinantes del logro de los estudiantes

El nivel socioeconómico y el entorno de los estudiantes es un factor relevante a la hora de determinar la probabilidad de un estudiante de presentar bajo rendimiento. Las diferencias entre los porcentajes de alumnado de bajo rendimiento de aquellos con entornos socioeconómicos altos y bajos son significativas en todos los países. Además, los estudiantes de entornos socioeconómicos bajos están sobrerrepresentados entre el alumnado de bajo rendimiento. Sin embargo, las brechas entre los dos grupos difieren en los sistemas educativos, lo cual demuestra

que el impacto del entorno socioeconómico en el rendimiento puede reducirse potencialmente si se implementan las políticas y estructuras educativas adecuadas.

El impacto del género en el porcentaje de alumnado de bajo rendimiento es menos claro que el del estatus socioeconómico. En la mayoría de los países, las diferencias de género en el porcentaje bajo rendimiento no son significativas, especialmente en la educación primaria. Además, los patrones de género difieren entre los niveles educativos. En educación primaria, las niñas tienen más dificultades con las matemáticas básicas que los niños. Entre los jóvenes de 15 años, los chicos tienen mayor probabilidad de tener un bajo rendimiento en ciencias en la mayoría de los sistemas educativos; y en unos pocos países, este también es el caso de las matemáticas.

2. Enseñanza y aprendizaje en el contexto de la pandemia de la COVID-19

El capítulo 2 proporciona una breve descripción de los cambios organizativos en la educación escolar durante el año escolar 2020/2021 debido a la pandemia de la COVID-19, así como los ajustes que los sistemas educativos europeos hicieron hacia formas de aprendizaje más digitalizadas. Estos cambios influyeron en los centros y sistemas educativos en su conjunto, pero también son importantes para comprender el contexto de la educación en matemáticas y ciencias en este año específico.

2.1. La organización del curso escolar durante 2020/2021

Casi todos los sistemas educativos tuvieron que hacer algunos ajustes. Solo España, Finlandia, Suiza, Islandia y Liechtenstein mantuvieron los centros abiertos para todos los estudiantes (es decir, para el aprendizaje in situ) durante todo el curso escolar.

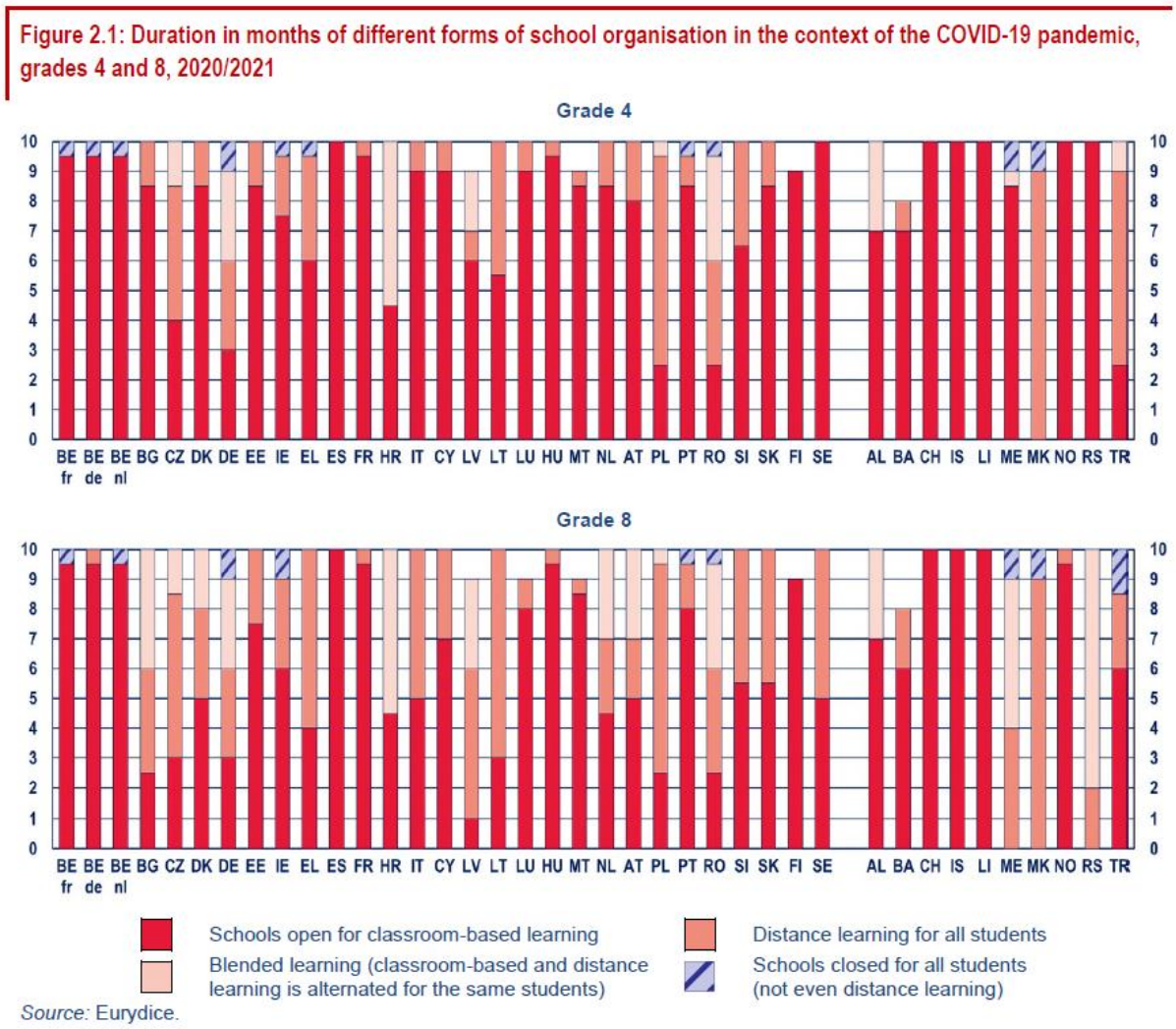


Gráfico 3. Organización de la educación escolar en el contexto de la pandemia de COVID-19, Grados 4 y 8, 2020/2021

Sin embargo, en más de la mitad de los sistemas analizados, los centros educativos adaptaron sus prácticas, cambiando a la educación a distancia durante periodos más o menos cortos. Esta modalidad de aprendizaje se aplicó en mayor medida en los cursos equivalentes a 2.º de la ESO que en los de cuarto curso de educación primaria, especialmente durante los meses de enero a abril de 2021, lo que genera serias preocupaciones para la trayectoria escolar de los estudiantes mayores, su desarrollo social, así como su salud mental y bienestar. Los sistemas educativos que aplicaron el aprendizaje a distancia para todos los estudiantes de cursos equivalentes a cuarto de primaria y/o 2.º de la ESO durante cinco meses o más del año escolar 2020/2021 fueron Chequia, Grecia, Italia, Lituania, Polonia, Suecia, Macedonia del Norte y Turquía.

2.2. Respuestas digitales a la pandemia de COVID-19

Muchos sistemas educativos decidieron adaptar también los contenidos de la enseñanza y el aprendizaje, así como las formas de evaluación a la nueva realidad. Además, muchos países comenzaron a abordar las brechas de aprendizaje emergentes mediante la introducción de nuevas formas u oportunidades de apoyo al aprendizaje.

La crisis de la COVID-19 dio un importante impulso a la aceleración digital en la educación. Algunos los países aprovecharon la oportunidad para avanzar en las reformas ya planificadas, mientras que otros comenzaron a revisar los currículos para fortalecer el aprendizaje digital.

Se distribuyeron muchos recursos adicionales a los centros educativos y solo en seis sistemas educativos europeos (Países Bajos, Eslovenia, Finlandia, Albania, Islandia y Noruega) no hubo cambios en las recomendaciones de alto nivel, la financiación o la formación continua docente con respecto a los recursos digitales desde el comienzo de la pandemia de COVID-19.

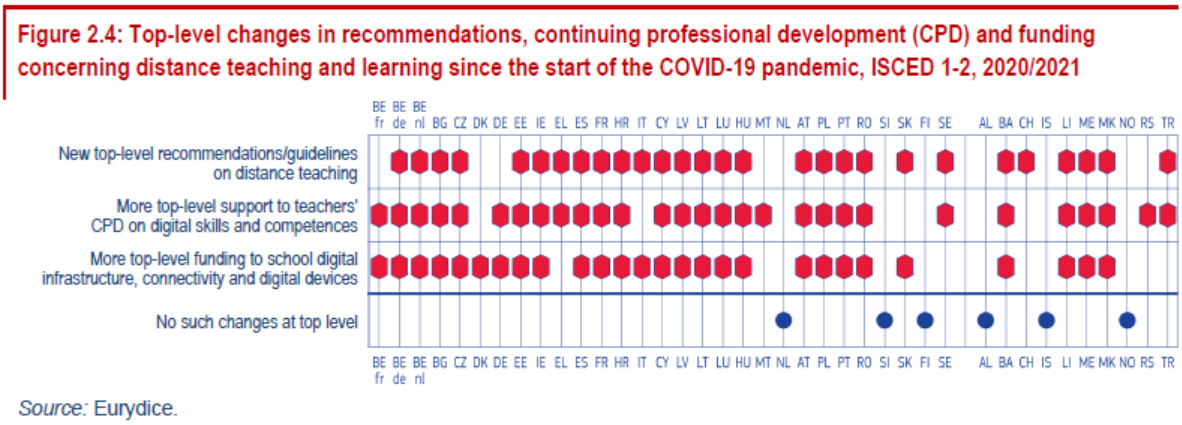


Gráfico 4. Cambios de alto nivel en recomendaciones, financiación o formación continua de los docentes en relación con los recursos digitales desde el inicio de la pandemia de COVID-19, CINE 1-2.

3. Tiempo de instrucción

El capítulo 3 investiga el tiempo de instrucción asignado por los currículos/documentos de orientación en toda Europa para la enseñanza de las matemáticas y las ciencias en las escuelas.

El tiempo de instrucción es una dimensión esencial en cualquier proceso de aprendizaje. Sin embargo, no hay evidencias que definan a una cantidad ideal de tiempo de instrucción para impartir matemáticas o ciencias. Pese a esto, algunos estudios confirman que el tiempo adicional para enseñar matemáticas o ciencias mejora el rendimiento académico de los estudiantes.

3.1. Autonomía de los centros educativos en la asignación del tiempo de instrucción a las materias

Definir el tiempo total de instrucción para todas las materias del currículo es una responsabilidad de las autoridades educativas de alto nivel en todos los países. Sin embargo, en algunos casos, esta responsabilidad se comparte con los centros educativos o las autoridades locales.

En un número importante de países las escuelas/autoridades locales cuentan con cierta autonomía para decidir cómo se debe asignar el tiempo de instrucción a través de los cursos (flexibilidad vertical), entre las materias del currículo (flexibilidad horizontal) o qué materias forman parte del currículo obligatorio (flexibilidad de las materias). Chequia, Estonia, Lituania, Suecia, Islandia y Noruega cuentan con flexibilidad vertical, mientras que la flexibilidad horizontal se da en Bélgica, Dinamarca, Italia, Países Bajos, Polonia y Portugal y en catorce sistemas educativos, entre los que se encuentra España, existe cierta flexibilidad en las materias que se imparten en los centros.

3.2. Tiempo de instrucción en matemáticas

El tiempo de enseñanza de las matemáticas es mayor en educación primaria que en secundaria en la mayoría de los sistemas educativos. En educación primaria, el número de horas dedicadas a la enseñanza de las matemáticas oscila entre 100 y 120 horas por año en aproximadamente la mitad de los sistemas educativos; en la otra mitad es superior a las 120 horas (España, 146). En la educación secundaria inferior, este número varía entre 100 y 120 en unos 20 sistemas educativos; es superior a 120 en una docena de sistemas educativos (España, 135) e inferior a 100 en los países restantes (Irlanda, Grecia, Chipre, Hungría, Malta y Macedonia del

Norte). Dinamarca, España, Francia y Suiza muestran un número particularmente elevado de horas lectivas en ambos niveles educativos. Macedonia del Norte y, en menor medida, Bulgaria, Croacia, Finlandia, Albania y Montenegro se encuentran en el otro extremo de la escala, con una cantidad de tiempo de instrucción relativamente baja en ambos niveles.

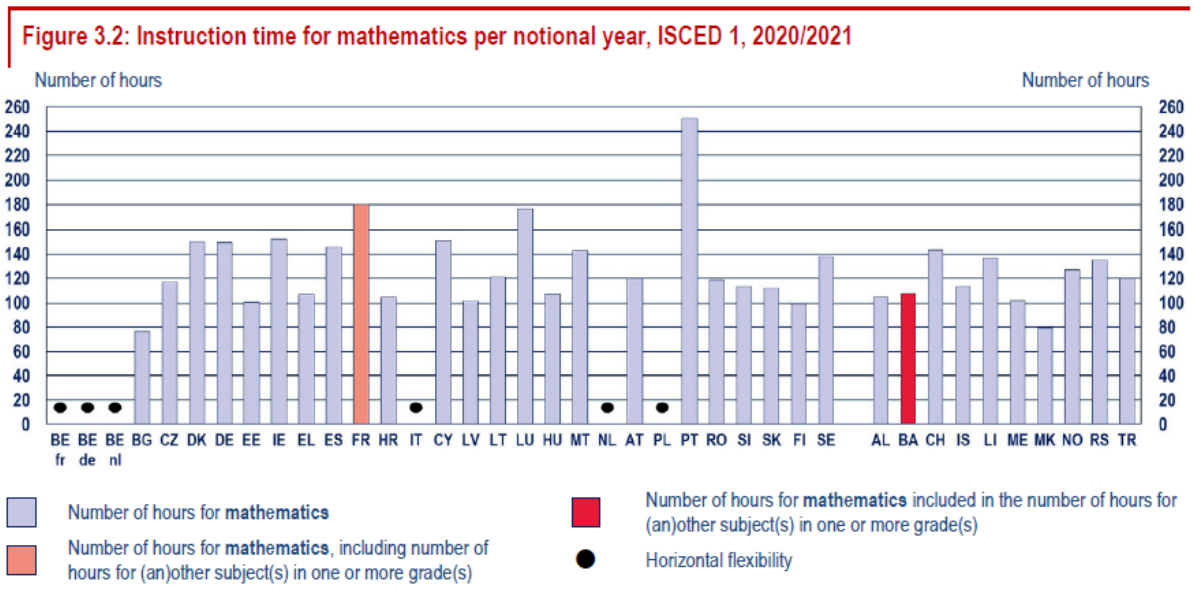


Gráfico 5. Tiempo de instrucción en MATEMÁTICAS por año, CINE 1, 2020/2021

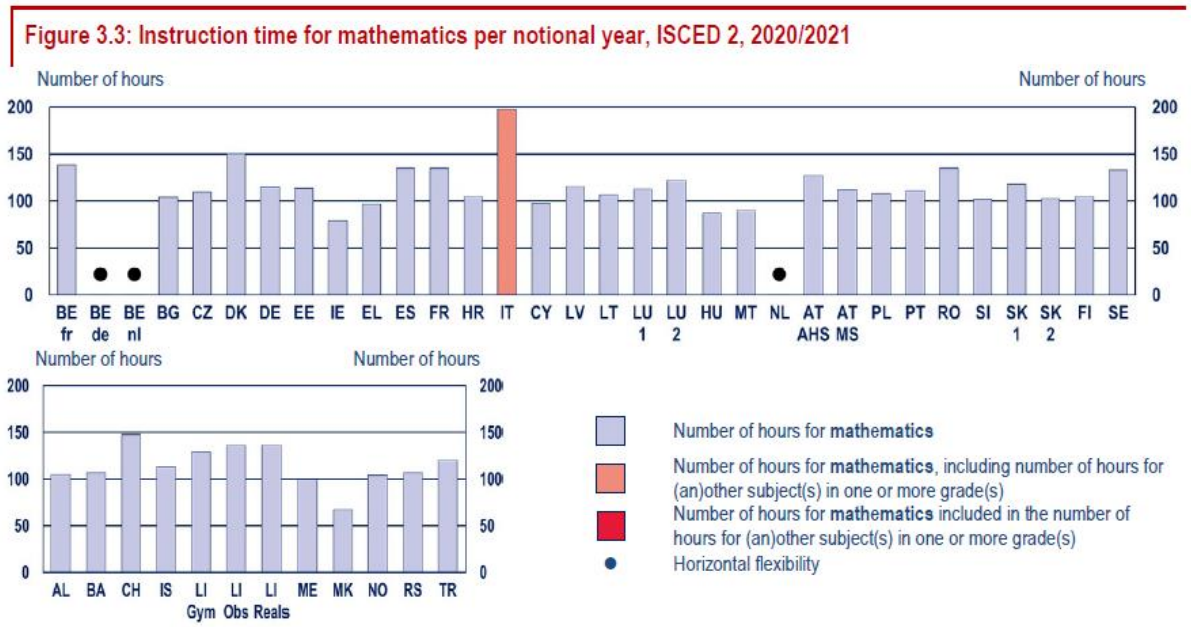


Gráfico 6. Tiempo de instrucción en MATEMÁTICAS por año, CINE 2, 2020/2021

4. Organización del currículo, profesorado y evaluación del alumnado

Este capítulo presenta una descripción general de los currículos de la educación obligatoria en relación con la organización de la enseñanza de las ciencias, el profesorado a cargo de la enseñanza de las matemáticas y las ciencias, y dos tipos específicos de evaluación de los estudiantes (exámenes certificados y pruebas nacionales) en ambas áreas temáticas.

4.1. Profesorado de matemáticas

Los currículos nacionales incluyen pautas sobre los tipos de docentes que deberían enseñar ciencias y matemáticas en los centros educativos. De la comparación entre los sistemas educativos se concluye que, en educación primaria, en casi en todos los países se requiere que el profesorado generalista brinde instrucción tanto en matemáticas como en ciencias. En educación secundaria, los profesores y profesoras especialistas suelen hacerse cargo de la enseñanza de las matemáticas y las ciencias.

Sin embargo, algunos países europeos se desvían de esta tendencia, bien definiendo en sus currículos que los profesores generalistas y/o especialistas pueden impartir estas materias durante varios años, o bien recurriendo a profesores generalistas debido a la escasez de profesores especialistas.

El informe también destaca que, salvo seis países de la UE, el resto declara falta de profesorado de matemáticas y/o ciencias. Además, la falta de profesorado cualificado hace que la necesidad de formación en enseñanza de matemáticas sea alta (más del 60 % del profesorado de España, Malta y Turquía).

4.2. Evaluación de las matemáticas

El análisis de este informe se centra en las pautas proporcionadas en los currículos de los sistemas educativos europeos en relación con dos tipos específicos de evaluación de los estudiantes:

- **Exámenes certificados:** exámenes finales que dan como resultado la concesión de una cualificación tras la finalización de una etapa educativa o

un curso completo, por ejemplo, al final de la educación primaria o secundaria inferior.

- **Pruebas nacionales:** exámenes llevados a cabo bajo la responsabilidad de las autoridades educativas de nivel superior, que pueden implementarse para varios propósitos además de la certificación mencionada anteriormente.

En cuanto a los exámenes certificados y las pruebas nacionales de matemáticas y ciencias, el informe concluye que ambos tipos de evaluación se implementan más ampliamente en educación secundaria inferior que en educación primaria. Además, en toda Europa se pone más énfasis en las matemáticas que en las ciencias como materia para evaluaciones a gran escala en la educación primaria: la mayoría de los sistemas educativos administran pruebas nacionales de matemáticas para todos los estudiantes; sin embargo, ningún sistema ofrece pruebas nacionales en ciencias en educacion primaria.

En educación secundaria, existe un mayor equilibrio entre las evaluaciones en matemáticas y ciencias. Las ciencias como materia integrada se evalúan con más frecuencia en este nivel educativo a través de exámenes certificados y pruebas nacionales. Pese a esto, el tipo de evaluación más común que se lleva a cabo en el primer ciclo de educación secundaria sigue siendo las pruebas nacionales de matemáticas para todo el alumnado.

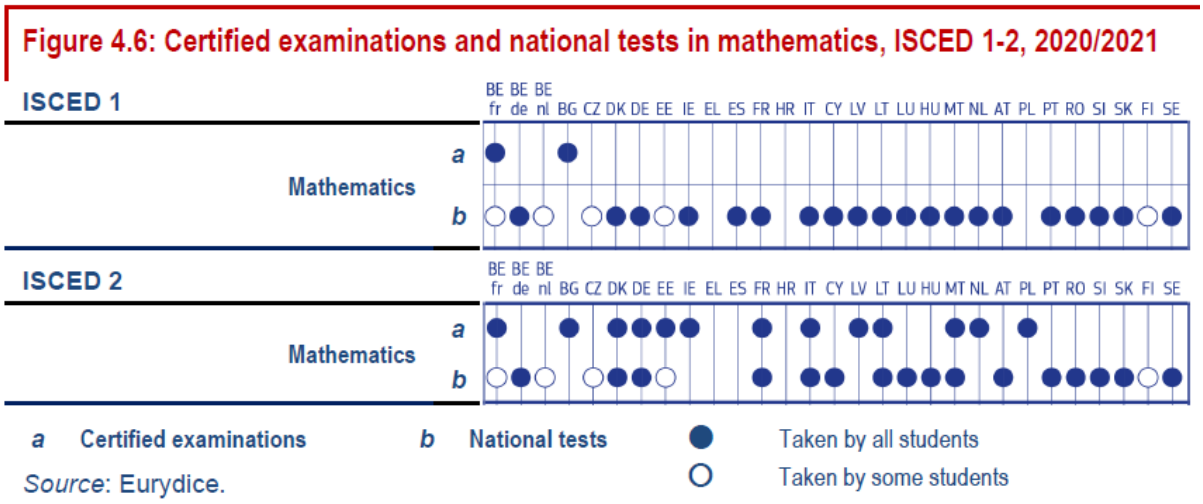


Gráfico 7. Exámenes certificados y pruebas nacionales en matemáticas, CINE 1-2, 2020/2021

Con respecto a los propósitos principales de estos exámenes y pruebas, el objetivo que más frecuentemente declaran los países europeos es monitorear y evaluar las escuelas y/o el sistema educativo. El segundo objetivo de las pruebas nacionales en la educación primaria informado con más frecuencia es identificar las necesidades individuales de aprendizaje. En la educación secundaria, el segundo propósito más ampliamente informado de los exámenes certificados es tomar decisiones sobre los itinerarios de los estudiantes.

Figure 4.7: Main purposes of certified examinations and national tests in mathematics and science, ISCED 1-2, 2020/2021

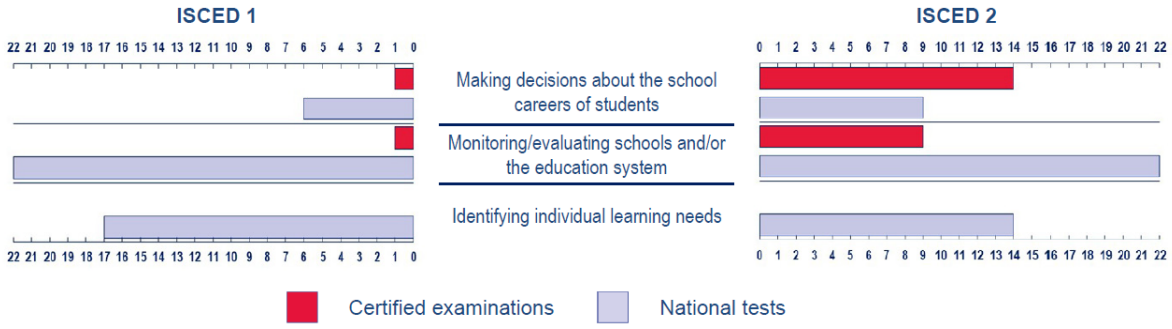


Gráfico 8. Propósitos principales de los exámenes certificados y las pruebas nacionales de matemáticas y ciencias, CINE 1-2, 2020/2021

La pandemia de COVID-19 también afectó a los exámenes de certificación y pruebas nacionales en aproximadamente la mitad de los sistemas educativos europeos en 2020/2021. En muchos de ellos se cancelaron algunos o todos los exámenes y/o pruebas, o se realizaron otros cambios sustanciales en las prácticas habituales de evaluación.

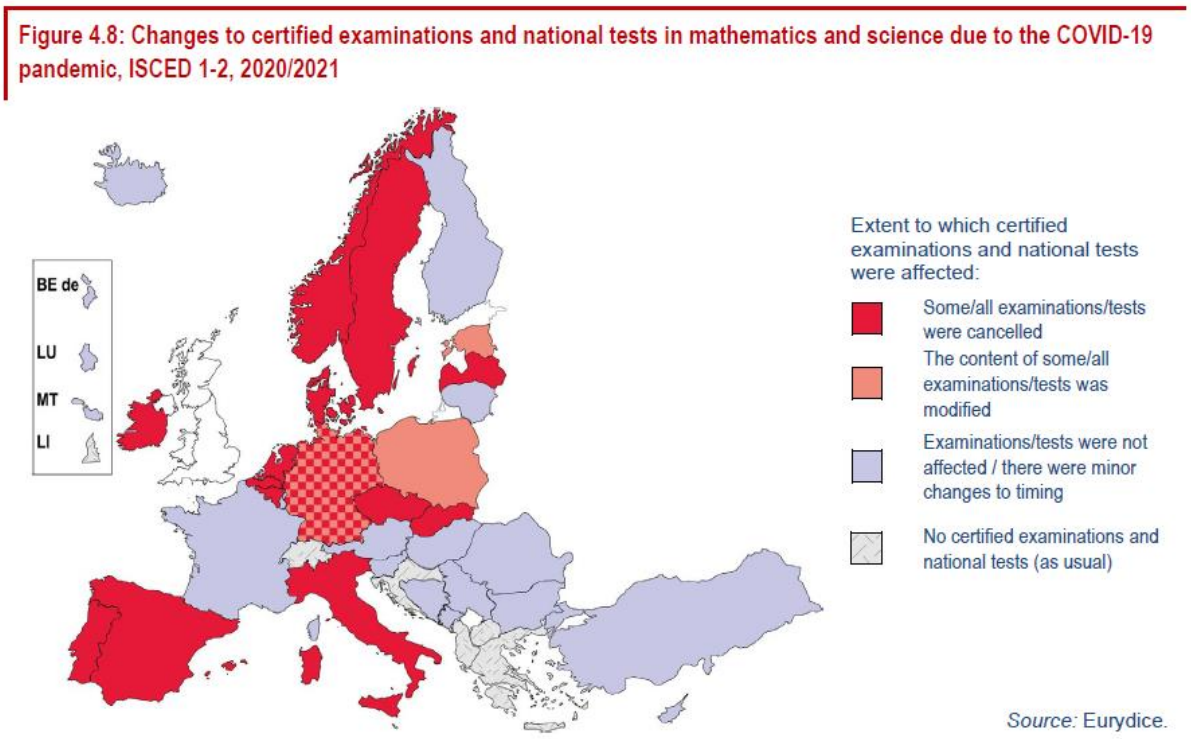


Gráfico 9. Cambios en los exámenes certificados y las pruebas nacionales de matemáticas y ciencias debido a la pandemia de COVID-19, CINE 1-2, 2020/2021

5. Enseñanza y aprendizaje para aumentar la motivación

El capítulo 5 explora varios problemas y contextos de enseñanza y aprendizaje que pueden aumentar el interés de los estudiantes y la comprensión de las matemáticas y las ciencias. También discute las recomendaciones sobre competencias digitales y uso de tecnologías digitales en estas materias.

Este capítulo incluye la aplicación real de las matemáticas en la vida diaria, las iniciativas a gran escala para motivar a los estudiantes a mejorar sus resultados y las competencias digitales en matemáticas y ciencias.

5.1. Aplicación de las matemáticas en la vida real

Para tener una idea de cómo se aborda la aplicación de las matemáticas en la vida real en Europa, se pidió a los expertos de 39 sistemas educativos europeos que indicaran si ciertos ejemplos seleccionados se mencionan explícitamente en sus planes de estudio. Solo se consideraron los indicadores de logro o los resultados del

aprendizaje en los documentos legislativos de alto nivel; no se estudiaron los libros de texto ni las prácticas escolares.

El análisis de los currículos sugiere que las matemáticas a menudo se enseñan con el objetivo explícito de conectarse con las experiencias de la vida real de los estudiantes. La referencia general a las matemáticas en la vida real está incluida en los currículos de 37 sistemas educativos en los cuatro primeros cursos de educación primaria y 38 sistemas educativos en el equivalente de 5.º de Educación Primaria a 2.º de ESO. España cuenta con referencias en ambas etapas educativas.

El informe también enumera ejemplos de algunos contextos seleccionados (educación financiera básica, matemáticas en la cocina o el bricolaje, matemáticas en arquitectura, habilidades básicas para resolver problemas financieros y matemáticas en la vida real: referencia general). De los ejemplos analizados, el contexto más extendido de las matemáticas es el de las habilidades básicas para resolver problemas financieros. Los cálculos y mediciones simples que involucran dinero para calcular el costo total, el cambio, el precio unitario o los porcentajes de compra se abordan explícitamente en 32 sistemas educativos, entre los que se encuentra España. Los ejemplos relacionados con el dinero se usan con la misma frecuencia en los cuatro primeros cursos de educación primaria que en el equivalente de 5.º de Educación Primaria a 2.º de ESO.

En cuanto a las matemáticas en la arquitectura se encuentran en 20 sistemas educativos en los cursos inferiores y 26 sistemas educativos en los cursos superiores analizados. Las actividades de cocina o bricolaje se usan con menos frecuencia para estudiar conceptos matemáticos dentro de la materia de matemáticas, pero estas actividades de resolución de problemas que implican medir y contar a menudo se abordan en otras materias.

Figure 5.1: Frequency of selected real-life applications of mathematical notions mentioned in curricula, 2020/2021

Gráfico 10. Frecuencia de contextos seleccionados de aplicación de las matemáticas en la vida real mencionados explícitamente en los currículos,2020/2021

5.2. Iniciativas a gran escala para motivar a los estudiantes

El capítulo 5 también estudia las estrategias, programas y otras iniciativas nacionales que tienen como objetivo aumentar la motivación de los estudiantes a través de métodos de enseñanza innovadores, que incluyan diferentes herramientas de aprendizaje y/o combinar diferentes entornos para enriquecer la experiencia de aprendizaje, o mediante otras actividades, extracurriculares o durante la jornada escolar, que incluyan la participación de profesionales externos.

En cuanto a la renovación de los métodos de enseñanza, varios sistemas educativos promueven el desarrollo de nuevos estándares educativos y prácticas docentes. Este es el caso de países como Alemania, Finlandia o Eslovenia. Estas prácticas se realizan a menudo en asociación con instituciones de educación superior.

Otros sistemas educativos incluyen actividades extracurriculares o actividades incluidas durante la jornada escolar con la participación de profesionales externos. Esto se puede hacer mediante la promoción de clubes de matemáticas o ciencias (Chequia, España, Portugal), creando oportunidades para que los estudiantes participen activamente en proyectos de investigación o actividades de resolución de problemas (Estonia, Malta, Finlandia) u organizando actividades extracurriculares a gran escala (Croacia, Luxemburgo, Suiza).

5.3. El uso de las tecnologías digitales en matemáticas y ciencias

Finalmente, el capítulo 5 aborda la integración de las tecnologías digitales en las prácticas de enseñanza y aprendizaje.

El informe demuestra que las competencias digitales forman parte del currículo en la gran mayoría de los países analizados. El desarrollo de las competencias digitales se integra en los currículos escolares mediante tres modalidades:

- Como área transversal: las competencias digitales se entienden como transversales y, por lo tanto, se imparten en todas las materias del plan de estudios. Todos los docentes comparten la responsabilidad de desarrollar las competencias digitales.
- Como materia separada: las competencias digitales se enseñan como un área temática discreta similar a otras competencias tradicionales basadas en materias.
- Integradas en otras materias: las competencias digitales se incorporan al currículo de otras materias o áreas de aprendizaje.

La enseñanza de las habilidades digitales como competencia clave es la principal forma de integrar las competencias digitales en los currículos de educación primaria y secundaria inferior. Pese a esto, en la educación primaria, varios países también tienen materias separadas obligatorias. En la educación secundaria inferior, la enseñanza de las competencias digitales como una materia separada y especializada, como la informática o las ciencias de la computación, se generaliza.

Figure 5.7: Digital competences in mathematics and science curricula, grades 1–8, 2020/2021

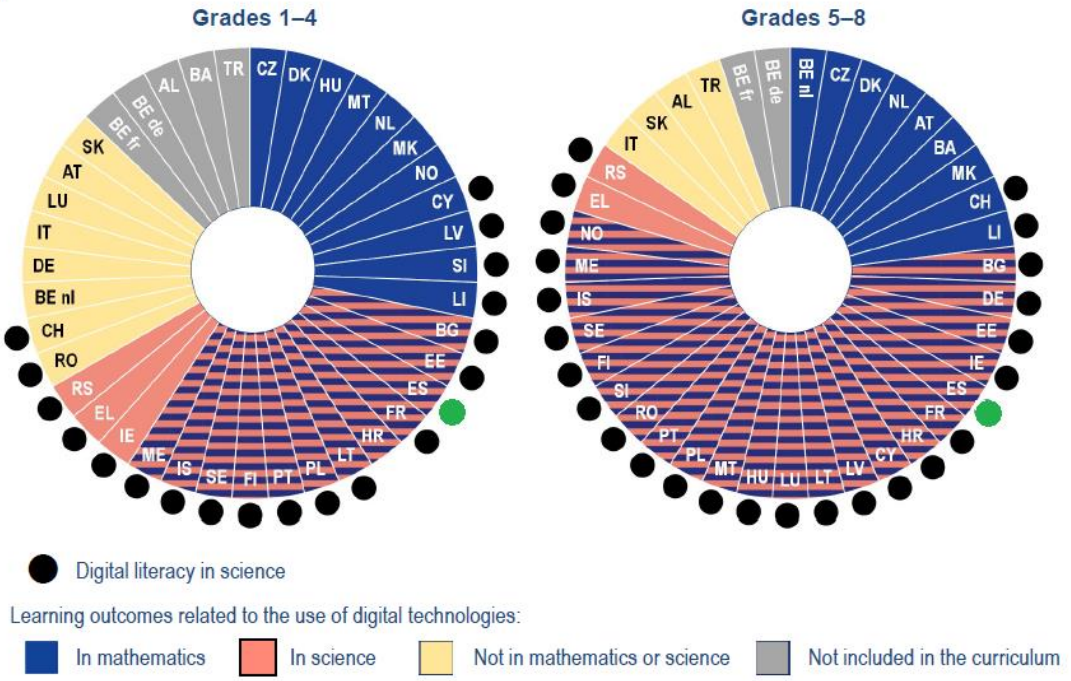


Gráfico 11. La competencia digital en los currículos de ciencias y matemáticas, grados 1 al 8, 2020/2021

5.3.1. Objetivos de aprendizaje vinculados al uso de tecnología digital en los currículos de matemáticas

Los planes de estudio en Europa formulan algunos objetivos de aprendizaje con respecto al uso de la tecnología digital en matemáticas. En los primeros cuatro cursos, 23 sistemas educativos incluyen objetivos de aprendizaje relacionados con el uso de las nuevas tecnologías y, entre los cursos 5 al 8, 31 sistemas recomiendan usar herramientas digitales para estudiar, resolver y comunicar problemas de matemáticas. Algunos países también destacan la importancia de mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos y el pensamiento algorítmico a través de las herramientas digitales (Chipre, Austria…). Por último, la creación de tablas u otras representaciones gráficas con tecnología digital es también común en las clases de matemáticas (Irlanda, España…).

6. Apoyo al alumnado de bajo rendimiento

El capítulo 6 está dedicado a examinar los sistemas y medidas de apoyo a los estudiantes en Europa.

6.1. Identificar las necesidades de aprendizaje

El primer paso para definir las medidas de apoyo a los estudiantes de bajo rendimiento es definir sus características e identificar sus necesidades de aprendizaje.

Los sistemas educativos europeos se basan en diferentes conceptos y definiciones para determinar qué estudiantes necesitan recibir apoyo para el aprendizaje. Estas definiciones rara vez son específicas de la materia, por lo que en su mayoría no están relacionadas directamente con el rendimiento en matemáticas o ciencias.

La forma más habitual de identificar al alumnado con bajo rendimiento es el seguimiento continuo en el aula. Este de los alumnos de bajo rendimiento es el seguimiento continuo en el aula. sistemas educativos europeos. Un segundo mecanismo de evaluación aplicado en los sistemas educativos europeos para identificar las necesidades de apoyo al aprendizaje adopta la forma de pruebas estandarizadas basadas en competencias que tienen como objetivo identificar las necesidades individuales de aprendizaje.

Figure 6.1: Top-level compulsory or recommended tests with the aim of identifying individual learning needs in mathematics and science, ISCED 1-2, 2020/2021

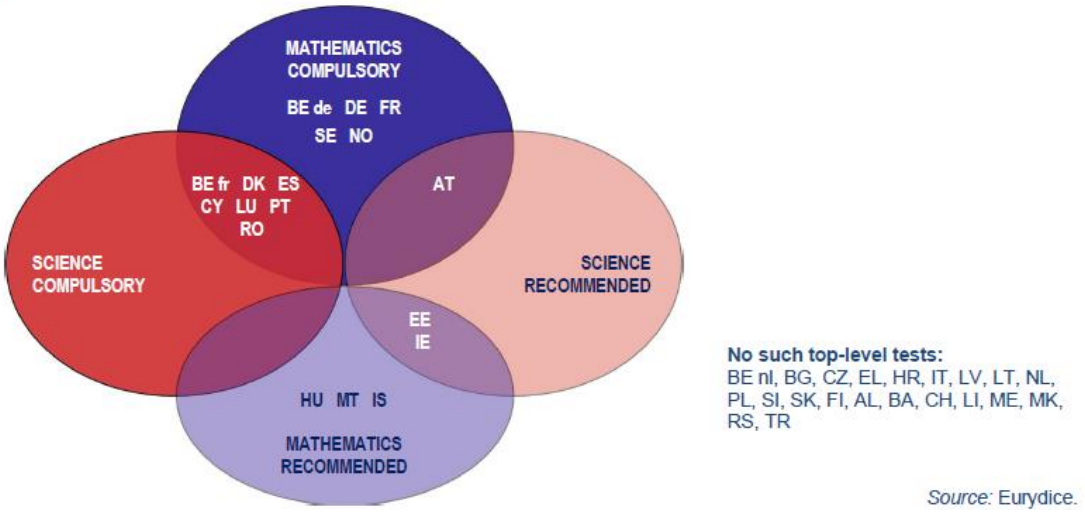


Gráfico 12. Evaluaciones obligatorias o recomendadas con el objetivo de identificar necesidades individuales de aprendizaje en matemáticas o ciencias, CINE 1-2, 2020/2021

6.2. Marcos legislativos de alto nivel que proporcionan apoyo al aprendizaje

A continuación, el capítulo proporciona una descripción general de los principales modelos de apoyo a los estudiantes de bajo rendimiento que existen en Europa.

Estos marcos suelen concretar:

- La obligación de los centros educativos a ofrecer apoyo a los estudiantes que lo necesiten.
- Las medidas de apoyo que pueden o deben aplicarse.
- La inclusión de apoyo específico para la enseñanza de un área concreta.

En términos muy generales, donde existen marcos legislativos de alto nivel, los estudiantes suelen tener derecho a recibir un apoyo de aprendizaje efectivo y las escuelas tienen la obligación de cumplir con este requisito. En segundo lugar, las autoridades de alto nivel también pueden brindar pautas o recomendaciones más o menos detalladas para los centros educativos sobre cómo apoyar a los estudiantes de bajo rendimiento. En un marco más prescriptivo, estas pautas pueden contener los pasos exactos que las escuelas deben seguir para identificar y apoyar a los estudiantes con dificultades de aprendizaje. En tercer lugar, los sistemas educativos

pueden decidir proporcionar disposiciones específicas para determinadas áreas de aprendizaje, especialmente en matemáticas.

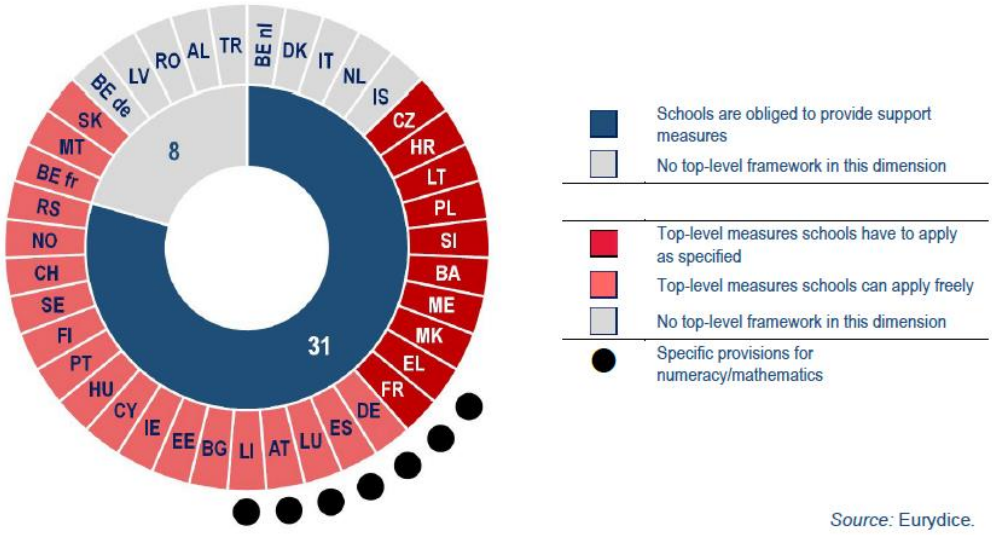


Gráfico 13. Marcos legislativos de alto nivel para brindar apoyo en matemáticas y ciencias, CINE 1-2, 2020/2021

Estos marcos pueden además señalar quién debe dar este apoyo al alumnado con necesidades de aprendizaje: profesores de clase, profesores especializados en apoyo a alumnado de bajo rendimiento o asistentes o auxiliares de enseñanza.

Por último, este informe dedica un capítulo a explicar las diferencias en las tasas de alumnado de bajo rendimiento. Las conclusiones principales son las siguientes:

1. Es importante ofrecer un apoyo eficaz y a tiempo: mejor durante las horas de clase y por profesorado formado y especializado
2. Además del apoyo en cada curso, los estudiantes también pueden beneficiarse de más tiempo de instrucción en matemáticas, sobre todo en los cursos superiores
3. Las pruebas estandarizadas pueden contribuir a la calidad de la educación y ayudar a la detección temprana de las necesidades

Referencias

European Commission/EACEA/Eurydice. (2022). *Mathematics and science education in schools. Eurydice report*. Oficina de Publicaciones de la Unión Europea. Luxemburgo.

CoD007 Calle Matemáticas Sevilla

José Carlos Gámez Pérez
jc.gamez.perez@gmail.com
Colegio Montaigne (Sevilla)

Alberto César Barbero
alcesbar@gmail.com
I.E.S. Joaquín Romero Murube (Los Palacios – Sevilla)

José Luis Ríos Calle
jlrioscalle@gmail.com
I.E.S. Santa Aurelia (Sevilla)

Núcleo temático: Comunicaciones y divulgación, Conexiones.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

RESUMEN

Las competencias clave son la parte del currículum que en muchas ocasiones más nos cuesta contextualizar a los profesores de matemáticas.

El proyecto ‘Calle Matemáticas’, llevado a cabo en un centro de Sevilla y otro de Málaga, pretende abordar el desarrollo de dichas competencias desde un punto de vista atractivo para el alumnado y con un objetivo real y factible: Conseguir una ‘Calle Matemáticas’ en nuestra localidad.

En esta comunicación explicaremos de forma detallada cómo hemos elaborado el proyecto.

Palabras clave: Aprendizaje Basado en Proyectos, Matemáticas, Divulgación.

1. Introducción

Siempre decimos que las matemáticas están en todas partes, pero ¿también están en el callejero de nuestra localidad?

En Sevilla existen la Calle Biología, la Calle Química o la Calle Geología, ¿por qué no va a existir una Calle Matemáticas?

Con esta simple idea nació el proyecto ‘Calle Matemáticas’. El no tener calles con el nombre de Matemáticas en nuestras localidades (Sevilla y Málaga) fue una oportunidad para organizar un proyecto apasionante, bonito y con un objetivo totalmente real.

Pero es que además ha sido un proyecto en el que el alumnado se ha tenido que adentrar en terrenos muy desconocidos para ellos y ellas, pero en los que han sabido solventar sus dificultades. Leer legislación, construir una página web o buscar financiación son algunos de los retos ante los que se han encontrado el alumnado, y que detallaremos a continuación.

Por otro lado, nos hemos embarcado en este proyecto teniendo en mente la gran cantidad de dificultades que nos podíamos encontrar. La creación de un proyecto de estas características requiere una implicación tanto del alumnado como del profesorado de varios centros que ha resultado fructífera. Asimismo incluimos, en la asignatura de matemáticas, competencias que suelen estar más relacionadas con otras asignaturas, promoviendo la transversalidad de las mismas.

2. Creación de un proyecto

Partiendo de la idea de crear un proyecto y de las fases ya propuestas por Dewey (1997) para implementar un Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), buscando la motivación y el gusto por la asignatura, hemos planteado una metodología de trabajo que fomenta la creatividad y la colaboración entre estudiantes.

Más allá, hemos buscado la autonomía del alumnado, trabajando en equipos con tareas concretas como si fueran departamentos de una gran empresa. Además estos departamentos han tenido que trabajar de forma horizontal, apoyándose los unos en los otros para poder sacar adelante las diferentes tareas que ha requerido nuestro proyecto.

Cabe destacar que aunque los proyectos de Sevilla y Málaga han sido independientes, sí ha habido responsables de comunicación con la otra ciudad para compartir ideas y consejos.

3. Proyecto Calle Matemáticas

3.1 Organización

El proyecto se ha realizado de igual forma en ambos centros, siendo en Sevilla un centro de dos líneas y en Málaga solo aplicado a una única línea. Es decir, ha habido que organizar aproximadamente a 90 estudiantes entre ambas ciudades.

Concretamente en el Colegio Montaigne de Sevilla esta actividad se ha realizado en 4º de ESO, mientras que en el Colegio Internacional Torrequebrada de Benalmádena, la actividad se ha realizado con 3º de ESO.

La organización y tarea de los diferentes departamentos es la siguiente:

- Coordinación General: Formado por dos estudiantes que hacen de nexo entre el profesorado y el resto del alumnado. Se han seleccionado para este puesto personas responsables y con capacidad de organización.

- Coordinación entre ciudades: Igualmente formado por dos estudiantes, con la idea de intercambiar ideas, propuestas, resolución de dificultades…

- Community Manager: Grupo dedicado a la creación de redes sociales (Instagram, Facebook y Twitter) y a crear y compartir contenido.

- Web: Este grupo ha sido el encargado de construir una página web y realizar su mantenimiento y mejora.

- Diseño: Han sido los encargados de crear logos y construir una imagen reconocible.

- Merchandising: Responsables de buscar financiación para crear regalos que nos publicitaran. Sus medidas más aplaudidas han sido la fabricación de chapas y de pulseras de tela (Figura 1).

Figura 1. Chapa y pulsera de Calle Matemáticas Sevilla

- Comunicación: Encargados de llevar el correo electrónico y de buscar apoyos para conseguir nuestro propósito. En el apartado 3.3 profundizaremos más en este aspecto.

- Investigación de Calles: Grupo que ha creado una base de datos online con calles tanto de nombre de ciencia, como con nombre de científicos. En este segundo caso además incluye una pequeña biografía.

- Divulgación: Ha sido un grupo dedicado a dar a conocer nuestro proyecto entre todos los cursos del centro escolar, llevando una presentación en la que han contado nuestra forma de trabajar.

- Información Institucional: Todo lo relacionado con la legislación y con la petición formal ante el ayuntamiento.

- Finanzas y Contabilidad: Grupo dedicado a controlar el dinero recaudado con los apoyos y con financiación de nuestras acciones.

- Youtube: Es el grupo más numeroso y se ha separado en cuatro pequeños grupos. Todos ellos debían de crear vídeos para nuestra web y nuestro canal de Youtube, con la idea de dar a conocer nuestras acciones.

Cada grupo además ha tenido un responsable, que ha estado en contacto directo y constante con los coordinadores generales del proyecto.

3.2 Puesta en marcha

Este proyecto fue muy bien recibido por parte del alumnado, estando muy motivados y motivadas desde el principio.

El proyecto comenzó a finales de octubre de 2019, con la idea de acabarlo el día 14 de marzo de 2020, coincidiendo con el Día Internacional de las Matemáticas. Pero como es sabido, apareció la pandemia de covid-19 por lo que el proyecto tuvo que ser interrumpido.

Debido a las dificultades, el proyecto 'Calle Matemáticas' no se pudo retomar hasta septiembre de 2021.

3.3 Apoyos y repercusión

Ambos centros se han volcado con el proyecto 'Calle Matemáticas', por lo que ha sido muy conocido y valorado tanto en el Colegio Montaigne como en el Colegio Internacional Torrequebrada.

A nivel local, el proyecto de Sevilla consiguió oficialmente el apoyo de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, del Instituto de Investigación Matemáticas de la Universidad de Sevilla (IMUS) y de la delegación local de SAEM Thales.

De hecho, la propuesta al Ayuntamiento de Sevilla estuvo firmada por Alfonso Carriazo Rubio como decano de la facultad, Emilio Carrizosa Priego como director del IMUS, José Luis Ríos Calle como delegado de Thales y por José Carlos Gámez Pérez como profesor del Colegio Montaigne.

Dicha petición formal apareció en los periódicos (Figura 2) y fue muy bien acogida por la comunidad matemática sevillana.

Figura 2. Noticia publicada en ABC de Sevilla

A nivel global, las redes sociales han tenido buena acogida, especialmente Twitter entre el profesorado e Instagram entre los alumnos y alumnas.

3.4 Contextualización de los problemas

La puesta en marcha del proyecto, a la vez que convertirse en una tarea transversal dentro del centro, se consideró de utilidad para la contextualización de las preguntas de matemáticas que se realizaban. Así, se planteaban preguntas de contextualización para los diferentes departamentos en los que se había dividido el proyecto; por ejemplo, modelización y estimación del posible impacto en redes sociales de las diferentes acciones llevadas a cabo o cálculo de presupuestos y descuentos para el merchandising generado.

Por concretar, un ejemplo de propuesta que suscitó el proyecto para el contenido de geometría fue el siguiente:

De entre las posibles "Calle Matemáticas" que se están construyendo en el barrio de San Jerónimo, ¿cuál de ellas tiene un mayor número de intersecciones? Aprovechando el mapa disponible de la zona donde se podría ubicar la "Calle Matemáticas", escribid las rectas que representan tanto esta calle como las calles que interseccionan con esta.

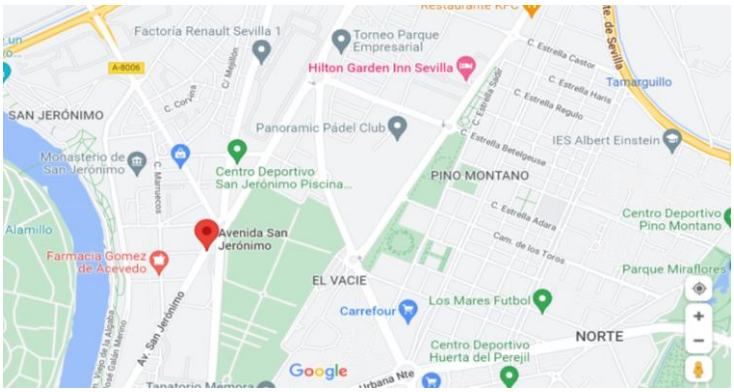


Figura 3. Mapa zona "Calle Matemáticas" en Sevilla

3.5 Evaluación

Para la evaluación se ha utilizado una rúbrica, a fin de medir de la forma más objetiva posible la implicación del alumnado y el desarrollo de sus responsabilidades. Esta rúbrica evaluaba tanto la labor cooperativa que realizaban

los estudiantes en los diferentes grupos de trabajo como los recursos y contenidos generados para la consecución del proyecto. De entre los criterios de evaluación específicos en matemáticas destacan la argumentación a partir de la modelización de las situaciones expuestas, la toma de decisiones en base al análisis de los datos numéricos y la optimización de los recursos.

En el caso de Sevilla, la calificación obtenida en este proyecto corresponde al 10% del total de la nota del curso.

3.5 Acogida por parte del alumnado

La acogida por parte del alumnado fue muy buena, con mucha motivación y ganas. Un gran porcentaje del alumnado (rondando el 75%) ha mantenido esa motivación hasta el final, pero al ser un proyecto prolongado en el tiempo, hay parte del alumnado que se ha dejado llevar y no ha cumplido con su responsabilidad, dejando al resto de su grupo-departamento con más trabajo.

Pero todos los grupos-departamentos han cumplido sus cometidos y han sabido sobreponerse a esta dificultad del paso del tiempo y de posible desmotivación.

4. Dificultades

Aunque el proyecto ha sido realmente bonito y apasionante, han existido dificultades que lo han complicado.

La primera dificultad fue que grupos de alumnos de diferentes provincias trabajaran de forma más o menos coordinada.

Otra de las grandes dificultades encontradas fue que al ser un proyecto muy prolongado, el alumnado se desmotivaba o iba aplazando en muchas ocasiones sus obligaciones.

Por último, la mayor dificultad fue evidentemente la pandemia de covid-19. Este hecho incluso tuvo el proyecto cancelado en Sevilla durante año y medio, y supuso la cancelación definitiva en Málaga, puesto que el profesor responsable cambió de centro educativo.

Todas estas dificultades han conseguido enriquecer nuestro punto de vista docente, y han supuesto un plus de experiencia para poder llevar a cabo proyectos similares en el futuro.

5. Consecución del Proyecto

Finalmente el Ayuntamiento de Sevilla aprobó la Avenida Matemáticas el día 17 de marzo de 2022, con la unanimidad de todos los partidos políticos.

Dicha noticia apareció en la prensa local y en la redes sociales oficiales del ayuntamiento.

Figura 4. Tuit publicado por Ayuntamiento de Sevilla

6. Conclusiones

El proyecto ‘Calle Matemáticas’ ha sido muy positivo. El alumnado ha trabajado las competencias claves de una forma real, con un objetivo tangible y con la motivación de conseguir cambiar cosas del mundo que les rodea.

Además se han enfrentado a retos desconocidos pero que les van a resultar muy útiles en su futura vida laboral. Coordinar un equipo de trabajo, la creación de una web, exponer en público,… son sin duda habilidades fundamentales para los futuros profesionales.

Está claro que no es un proyecto en el que nuestro alumnado haya aprendido a resolver logaritmos o ecuaciones trigonométricas, pero con él se ha cumplido el objetivo de sentirse motivado por la asignatura de matemáticas y además adquiriendo competencias que les ayudarán el día de mañana en sus carreras profesionales.

7. Referencias

John Dewey (1938). *Experience and Education*. Nueva York: Touchstone.

Benítez, M. (01/01/2020). La Universidad de Sevilla pide al Ayuntamiento llamar a una calle Matemáticas. *ABC de Sevilla*. https://sevilla.abc.es/sevilla/sevi-universidad-sevilla-pide-ayuntamiento-llamar-calle-matematicas-201912302045_noticia.html

Benítez, M. (14/03/2022). Sevilla tendrá una avenida de las Matemáticas. *ABC de Sevilla*. https://sevilla.abc.es/sevilla/sevi-sevilla-tendra-avenida-matematicas-202203141235_noticia.html

Europa Press (17/03/2022). El Pleno de Sevilla aprueba por unanimidad la avenida Matemáticas y la rotonda Estadística en el Distrito Norte. *Europa Press Sevilla*. https://www.europapress.es/andalucia/sevilla-00357/noticia-pleno-sevilla-aprueba-unanimidad-avenida-matematicas-rotonda-estadistica-distrito-norte-20220317102714.html

Ayuntamiento de Sevilla (17/03/2022). El Ayuntamiento reconoce a las ciencias de las Matemáticas y la Estadística con la nueva nominación de dos vías en el Distrito Norte *Ayuntamiento de Sevilla*. https://www.sevilla.org/actualidad/noticias/el-ayuntamiento-reconoce-a-las-ciencias-de-las-matematicas-y-la-estadistica-con-la-nueva-nominacion-de-dos-vias-en-el-distrito-norte

CoD009 La comunicación en la enseñanza en línea de las Matemàticas durante el confinamiento por COVID-19

Adoración Medina-Albós
mmedinaa@uda.ad
Doctoranda, Universidad de Andorra

Dra. Núria Rosich Sala
nuriarosich@ub.edu
Universidad de Barcelona

Dra. Yolanda Colom Torrens
ycolom@uda.ad
Universidad de Andorra

Núcleo temático: Comunicación. Inclusión.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (Matemáticas).

RESUMEN

El paso de la enseñanza presencial a la enseñanza virtual de las matemáticas durante el confinamiento de marzo de 2020, al inicio de la pandemia COVID-19, representó una situación inesperada para la que, en general, ni profesores ni estudiantes estaban preparados. Entre las principales dificultades experimentadas en la enseñanza en línea de las matemáticas podemos destacar la vertiente comunicativa. En este trabajo veremos, a través de investigaciones realizadas por diferentes autores, como tales dificultades fueron compartidas por profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos y países, y como sus propuestas de mejora también fueron similares. También comentaremos qué se hizo al respecto en el caso de la Escuela Andorrana de Bachillerato. Finalmente, presentaremos una serie de sugerencias y reflexiones sobre cómo mejorar la dimensión comunicativa en el aula virtual de matemáticas.

Palabras clave: COVID-19, confinamiento, educación matemática, comunicación matemática, enseñanza en línea

1. Introducción

La pandemia COVID-19, con la que convivimos desde hace más de dos años, ha representado a nivel mundial un cambio sin precedentes, en todos los ámbitos de la sociedad actual, incluido el educativo.

La necesidad de la mayoría de los países del mundo de confinar a la población en sus hogares, siguiendo las recomendaciones de la Organización Mundial de la Salud (OMS, 2020) como medida para contener el avance de la pandemia y de cerrar todos los centros educativos, dejó sin enseñanza presencial a más de un millón y medio de estudiantes, de todos los niveles educativos, alrededor del mundo (UNESCO, 2020).

Para garantizar la continuidad del curso académico durante el confinamiento, surgió la necesidad de pasar, en cuestión de días, de la enseñanza presencial a la enseñanza en línea sin que, en general, ni docentes ni discentes estuvieran suficientemente preparados.

La enseñanza en línea representó una alternativa para proseguir con la educación, que, como bien sabemos, se prolongó hasta finales del curso académico 2019-20. Posteriormente, se continuó utilizando de forma híbrida junto con la enseñanza presencial, en función de las necesidades sanitarias ocasionadas por las diferentes oleadas de la pandemia.

Durante los meses de confinamiento fueron muchos los investigadores en educación matemática (y de otros ámbitos educativos) que vieron la oportunidad de comentar las consecuencias de la transición improvisada de la enseñanza presencial a la enseñanza en línea.

En las investigaciones que se llevaron a cabo durante el confinamiento, la figura de los profesores cobró especial importancia, dado que sobre ellos recayó la responsabilidad de continuar con su labor educativa en línea, desde su domicilio

particular, utilizando sus propios recursos y adaptándose simultáneamente a la nueva modalidad educativa.

Una gran parte de los estudios que hemos consultado en el ámbito de la educación matemática, realizados en diferentes países, se centraron en analizar la práctica educativa de los profesores de matemáticas durante el confinamiento (Aldon y otros, 2021; Cassibba y otros, 2021; Dhurumraj y otros, 2020; Mailizar y otros, 2020; Mulenga y Marbán, 2020b).

Pero los docentes no fueron los únicos que debieron adaptarse a la nueva modalidad de enseñanza. Los estudiantes también fueron protagonistas del gran cambio educativo que los alejó del aula, de sus compañeros y de sus profesores, obligándoles a aprender desde la soledad de su hogar, en muchos casos sin tener suficientes dispositivos electrónicos (compartiéndolos con sus hermanos o con sus padres que también estaban confinados) o sin contar con una buena conexión a internet.

Siendo la figura de los estudiantes tan importante para comprender los efectos del cambio de modalidad educativa, otros investigadores se centraron en indagar cómo afectó el confinamiento a los estudiantes de matemáticas (Almarashdi y Jarrah, 2021; Amelia y otros, 2020; Hossein-Mohand y otros, 2021; Lestari y otros, 2020; Marbán y otros, 2021).

Por otro lado, algunos autores se centraron en reflexionar sobre el impacto que tendrán el confinamiento y la pandemia, a corto y a largo plazo, en la propia Educación Matemática (Bakker, Cai y Zenger, 2021; Breda, Farsani y Miarka, 2020; Castro y otros, 2020; Engelbrecht y otros, 2020; Font y Sala, 2020).

Actualmente, se siguen publicando artículos sobre el tema y seguramente, se están llevando a cabo investigaciones más amplias. En nuestro caso, tenemos en marcha una investigación similar en la Escuela Andorrana de Bachillerato.

En primer lugar, presentaremos algunas de las investigaciones que se llevaron a cabo sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas durante el confinamiento y a continuación, expondremos las ideas de diferentes autores sobre

las dificultades que tuvo la comunicación en la enseñanza en línea de las matemáticas y sus diferentes propuestas para paliarlas. Finalmente, comentaremos qué se hizo al respecto en Escuela Andorrana de Bachillerato y presentaremos algunas recomendaciones para mejorar la comunicación virtual en el aula de matemáticas.

2. Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en línea durante el confinamiento

Como hemos mencionado, diversos investigadores se centraron en analizar qué sucedió con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas durante el confinamiento.

En primer lugar, presentamos algunas de las investigaciones referidas a los profesores:

2.1. Investigaciones sobre la práctica docente de los profesores de matemáticas durante el confinamiento

Aldon y otros (2021) realizaron un estudio cualitativo a gran escala, implicando a 684 profesores de matemáticas de Francia, Italia, Alemania e Israel, con la finalidad de determinar cómo los docentes gestionaron la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas durante el confinamiento y cuáles fueron las razones que guiaron cada una de sus decisiones. Clasificaron los retos que tuvieron que enfrentar los docentes en cuatro grandes grupos: *para apoyar el aprendizaje a través de metodologías específicas, para desarrollar la evaluación, para desarrollar la enseñanza inclusiva y para explotar su potencial para fomentar los procesos matemáticos típicos.*

En Italia, Cassibba y otros (2021) analizaron, mediante una metodología de investigación mixta (cuantitativa y cualitativa), cómo afrontaron la enseñanza en línea 27 profesores de matemáticas de las universidades estatales sicilianas durante el segundo semestre del curso 2019-2020. Concretamente, se centraron en averiguar cómo los docentes aprendieron a utilizar nuevos recursos digitales

(*tabletas de escritura, software matemático, plataformas de e-learning, etc.*) con la intención de replicar en las clases en línea sus acciones en el aula presencial.

En el continente africano, Dhurumraj y otros (2020), realizaron un estudio exploratorio para determinar cómo la pandemia transformó la práctica docente de los profesores de las materias STEM[49]. Sus resultados muestran que el proceso de transición a la enseñanza en línea tuvo un profundo impacto en las prácticas pedagógicas de los docentes, que utilizaron metodologías innovadoras, con la intención de ofrecer una educación sostenible, equitativa y sostenible, en un continente marcado por la desigualdad socioeconómica y la consecuente brecha digital.

Por otro lado, los investigadores españoles Mulenga y Marbán (2020b) analizaron al inicio de la pandemia, mediante un análisis de conglomerados[50], las actividades de aprendizaje en línea de 102 profesores de matemáticas en formación de la República de Zambia (África). Su estudio mostró que, en general, los futuros docentes mostraban suficientes habilidades para formarse en línea y que contaban con las herramientas digitales necesarias para ello.

En Indonesia, Mailizar y otros (2020), realizaron una investigación cuantitativa para determinar las diferentes barreras que debieron superar los profesores de matemáticas de educación secundaria para implementar la enseñanza en línea de las matemáticas durante el confinamiento. En su estudio clasificaron tales barreras en cuatro grandes grupos: *profesor, escuela, currículo y estudiante*. Sus hallazgos sugieren que la barrera que más impacto tuvo en la implementación de la enseñanza en línea fue la "barrera estudiante", marcada fundamentalmente por la falta de competencia digital de los estudiantes para adaptarse a la nueva metodología.

Presentamos ahora algunas de las investigaciones que indagaron sobre cómo afectó a los estudiantes el cambio de modalidad educativa.

[49] Acrónimo de los términos ingleses: *Science, Technology, Engineering, Mathematics*

[50] Técnica estadística multivariante que agrupa elementos o variables tratando de lograr la máxima homogeneidad y la mayor diferencia en cada grupo (Alzina, 2004)

2.2. Investigaciones sobre el impacto del confinamiento en el proceso de aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes

Almarashdi y Jarrah (2021), de los Emiratos Árabes Unidos, se centraron en determinar la percepción de los estudiantes sobre el aprendizaje en línea de las matemáticas. Para ello utilizaron una metodología cuantitativa y como instrumento, una encuesta en línea, dirigida a 580 alumnos de educación secundaria. Los estudiantes destacaron fundamentalmente los aspectos negativos de la nueva modalidad de enseñanza (*falta de interacción con profesores y compañeros, cansancio por el exceso de tiempo frente a la pantalla, dificultad para escribir simbología matemática en la pantalla…).*

Por su parte, Amelia y otros (2020), realizaron en Indonesia un estudio cualitativo descriptivo sobre el efecto del confinamiento en la resiliencia matemática de los estudiantes, entendiendo esta como la habilidad de adaptarse a los obstáculos durante el aprendizaje matemático. Para ello utilizaron una muestra de cuatro profesores y seis estudiantes de educación secundaria (a los que administraron un cuestionario para determinar el nivel de resiliencia matemática) y a los que realizaron entrevistas. Sus resultados muestran un nivel alto de resiliencia matemática durante el confinamiento y, al contrario que en el estudio de Almarashdi y Jarrah (2021), una disposición positiva de los estudiantes hacia el aprendizaje en línea de las matemáticas. Sostienen que sus resultados están relacionados con el alto nivel socioeconómico de los alumnos, así como con el apoyo recibido por parte de sus profesores y familiares.

También en Indonesia, Ramadhan y Suhendra (2021), realizaron una investigación ex post facto[51] para determinar qué tipo de metodología (presencial o en línea) es más apropiada para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Compararon los resultados de dos grupos de estudiantes de educación secundaria en los exámenes de fin de semestre de matemáticas: *52 estudiantes de 11ª grado del curso académico 2018-2019* (grupo control: antes de la pandemia, enseñanza presencial) y *59 estudiantes de 11ª grado del curso académico 2019-2020* (grupo

[51] La expresión “ex post facto” significa “después de hecho”. En otras palabras, es un tipo investigación que se realiza una vez han acontecido los hechos investigados, analizando las causas y los efectos a posterior (Bernardo y Caldero, 2000)

experimental: durante el confinamiento, enseñanza en línea). En este caso, sus resultados sugieren que los alumnos obtuvieron mejores resultados durante el curso 2019-2020, cuando aprendieron desde su hogar.

Siguiendo con los estudios realizados en Indonesia, tenemos el de Lestari, Aisah y Nurafifah (2020), dirigido a estudiantes universitarios presenciales. Su objetivo era determinar, mediante una metodología cualitativa descriptiva, si existía alguna relación entre la comprensión matemática (referida a la capacidad para comprender el material matemático diseñado para impartir las clases en línea) y su nivel aprendizaje autorregulado. Para ello tomaron una muestra intencional de 14 estudiantes de matemática discreta a los que realizaron cuestionarios de aprendizaje autorregulado, pruebas de comprensión matemática y entrevistas. Sus resultados apuntan a la existencia de una relación directamente proporcional entre ambas variables.

Entre los estudios realizados en España, tenemos el de Hossein-Mohand y otros (2021). Los autores realizaron una investigación transversal con una muestra de más de dos mil estudiantes de Educación Secundaria de Melilla. Su objetivo era determinar qué factores económicos y familiares inciden en la utilización de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación con fines educativos. Concluyeron que la utilización de las TIC para aprender matemáticas estuvo condicionada por la percepción subjetiva de su utilidad por parte de los alumnos.

Otro estudio fue el realizado por Marbán y otros (2021) en la Franja de Gaza. Su investigación exploratoria pretendía determinar qué tipología de recursos digitales utilizaron los estudiantes para aprender matemáticas durante el confinamiento (correo electrónico, *foros, videos educativos, wikis, blogs, aplicaciones de mensajería, redes sociales…)*. Para ello, realizaron un análisis de conglomerados que clasificó a los estudiantes (en función de la tipología de recursos digitales utilizados y sus características sociodemográficas) en tres grupos con 2001, 824 y 354 alumnos, respectivamente. Sus resultados muestran que no hubo diferencias significativas entres los tres grupos en función del género, la edad y el tipo de escuela. Sin embargo, hallaron diferencias significativas entre los tres conglomerados al considerar el nivel socioeconómico y educativo de sus padres.

Finalmente, presentamos el punto de vista de diversos autores, acerca del impacto que tendrá la pandemia, a corto y a largo plazo, en la propia Educación Matemática.

2.3. Impacto de la pandemia en la Educación Matemática

Breda, Farsani y Miarka (2020), investigadores de España, Brasil y Chile, respectivamente, se reunieron virtualmente durante el confinamiento para reflexionar sobre el impacto de la pandemia en la Educación Matemática en sus respectivos países. Entre los problemas fundamentales detectados mencionan: la escasez de recursos tecnológicos (ligados a condiciones socioeconómicas), la ausencia de consenso político y la falta de preparación para la enseñanza en línea. Consideran que la pandemia ha representado un desafío a corto plazo, pero que a largo plazo representará una oportunidad para actualizar los sistemas educativos a la nueva realidad.

Por su parte, Bakker, Cai y Zenger (2021) sostienen que la pandemia ha hecho más visibles diferentes problemas sociales y educativos, que no se habían considerado anteriormente con suficiente detenimiento. Insisten en la necesidad de repensar el potencial de la “nueva normalidad”.

Font y Sala (2020) consideran que la pandemia incidirá en un aumento de las investigaciones en Educación Matemática relacionadas con el COVID-19. Además, prevén un aumento significativo en la producción de Trabajos de Fin de Máster, de Tesis Doctorales, de proyectos I+D y de artículos de investigación científica.

Por otro lado, Castro y otros (2020) comentan que es necesario revisar las propuestas educativas realizadas durante el confinamiento y aquellas investigaciones educativas realizadas para afrontar situaciones inesperadas.

Finalmente, Engelbrecht y otros (2020) recuerdan cómo la pandemia provocó, en 2020, que se cancelaran diversos congresos y actividades relacionadas con la Educación Matemática. Pese a ese inconveniente, consideran que, a largo plazo, la pandemia y los avances tecnológicos permitirán cambios educativos significativos.

3. La comunicación en el aula de matemáticas virtual durante el confinamiento

3.1. Principales dificultades comunicativas en la enseñanza en línea de las matemáticas

Parece existir un consenso entre los autores considerados sobre el desafío que representó para profesores y estudiantes adaptarse a la enseñanza virtual de las matemáticas. Entre las principales dificultades, relacionadas la comunicación en el aula de matemáticas durante el confinamiento, enumeramos las siguientes:

1. Dificultades para escribir el lenguaje matemático en dispositivos electrónicos: Reproducir en un dispositivo electrónico los cálculos, la simbología y las explicaciones escritas que se pueden realizar en la pizarra o en el cuaderno fue una de las principales dificultades que reportaron los profesores de matemáticas (Cassibba y otros, 2021) y los estudiantes (Almarashdi y Jarrah, 2021).

2. Sensación de soledad y aislamiento: Cambiar el aula presencial por la virtual, representa perder el contexto de socialización de profesores y estudiantes. Según Bakker, Cai y Zenger (2021), un tema preocupante cuando la enseñanza está mediada únicamente por la tecnología es el aislamiento de los estudiantes distanciados socialmente de sus profesores y compañeros.

3. Imposibilidad de analizar el lenguaje no verbal: De acuerdo con Cassibba y otros (2021), la enseñanza en línea implica perder la dimensión corporal del profesor y privarle de su zona de confort para explicar matemáticas: *la pizarra y el aula presencial*. En ese mismo sentido, algunos profesores mencionan la falta de contacto visual y la imposibilidad de expresarse gestualmente durante sus interacciones (Aldon y otros, 2021).

4. Dificultades para interaccionar virtualmente: Entre los obstáculos relacionados con la enseñanza en línea de las matemáticas, está la necesidad intensa de interacción entre profesores y alumnos, dada la abstracción de la materia (Amelia y otros, 2020). Mantenerse en contacto y continuar motivados para aprender y enseñar, sin estar en el mismo espacio físico, interaccionando únicamente a través

de la tecnología, representó un desafío constante para los profesores y los estudiantes durante el confinamiento (Bakker, Cai y Zenger, 2021).

5. Brecha digital: millones de estudiantes que vivían en las áreas rurales no tuvieron acceso a la enseñanza en línea, a causa de la falta de recursos electrónicos o de conexión a internet y tuvieron que continuar su formación con otro tipo de recursos como la radio o la televisión (Bakker, Cai y Zenger, 2021)

3.2. Propuestas de los autores para afrontar las dificultades comunicativas en la enseñanza en línea de las matemáticas

1. Escritura del lenguaje matemático en dispositivos electrónicos: Los profesores tuvieron que aprender a utilizar tabletas táctiles, software matemático y plataformas de e-learning con la intención de replicar su práctica docente en la modalidad presencial y su estatus de "profesor de pizarra", tratando de reproducir la escritura a mano en medios digitales (Cassibba y otros, 2021).

2. Sensación de soledad y aislamiento: Bakker, Cai y Zenger (2021) recalcan la importancia de lograr que los estudiantes sientan que pertenecen a un aula de matemáticas pese a no estar físicamente en ella y la necesidad de mantener el contacto con ellos, para aumentar su motivación y fomentar su participación.

3. Imposibilidad de analizar el lenguaje no verbal: Algunos de los profesores entrevistados por Cassibba y otros (2021) indicaron que preferían que los estudiantes activaran su cámara durante las clases en línea, para poder mantener contacto visual con ellos y crear un ambiente similar al del aula presencial.

4. Dificultades para interaccionar virtualmente: Amelia y otros (2020) sugieren a los profesores que presten atención a las necesidades de los estudiantes, preparando materiales comprensibles, brindándoles ayuda para el aprendizaje en línea y fomentando su motivación. Por su parte, Bakker, Cai y Zenger (2021), recomiendan repensar la interacción social entre profesores y alumnos, además de implicarlos y motivarlos en entornos virtuales de aprendizaje.

5. Brecha digital: Los smartphones y las aplicaciones como WhatsApp y WeChat se utilizaron como recurso para enseñar matemáticas en áreas rurales de diversos continentes, en que no todos los habitantes tenían computadoras personales. También se usaron la radio, los podcasts y la televisión como recurso educativo (Bakker, Cai y Zenger, 2021).

4. La comunicación en la enseñanza en línea de las matemáticas en la Escuela Andorrana de Bachillerato

En este apartado presentamos la investigación que estamos realizando en la Escuela Andorrana de Bachillerato para analizar el proceso de adaptación de los profesores a la enseñanza en línea de las matemáticas durante la pandemia.

Hemos optado por una metodología de investigación mixta, combinando una metodología cuantitativa descriptiva, para determinar el nivel de competencia digital de los profesores antes y durante la pandemia, una metodología cualitativa de estudio de casos, para determinar los cambios metodológicos que representó la enseñanza en línea de las matemáticas durante el confinamiento y una metodología cualitativa descriptiva, para conocer la percepción personal de los profesores

Como instrumentos hemos diseñado dos cuestionarios estructurados, en línea:

- El primer cuestionario, para valorar la evolución en la competencia digital de los profesores de matemáticas del centro desde el inicio de la pandemia hasta el momento actual.
- El segundo cuestionario, para determinar los cambios metodológicos en la práctica docente que representó el paso a una metodología de enseñanza en línea.

Las respuestas a este último cuestionario nos han servido de hilo conductor para realizar una entrevista semiestructurada a los profesores, con intención de ampliar sus respuestas más significativas.

A modo de ejemplo, comentaremos las respuestas al cuestionario y transcribiremos algunas de las respuestas a la entrevista realizada a una de las profesoras del centro.

4.1. Metodología didáctica durante el confinamiento

La profesora indica en el cuestionario que, para impartir sus clases en línea durante el confinamiento, combinó diferentes metodologías didácticas: *la clase magistral, la resolución de problemas y ejercicios, el aprendizaje basado en problemas, el estudio de casos, el aprendizaje por proyectos destacando sobre todo el aprendizaje cooperativo y la clase inversa.*

Como actividades propuestas a los estudiantes durante el confinamiento, y de realización y entrega obligatorias, destaca la resolución de ejercicios y problemas, los trabajos teóricos y de investigación y las presentaciones.

Durante la entrevista le preguntamos sobre la temporización de las clases en línea:

E: *¿Qué estructura horaria utilizó para impartir sus clases en línea?*

Y: "*No hice ninguna modificación en la estructura horaria respecto a las clases presenciales. Mantuve el mismo horario lectivo.*"

4.2. La comunicación en las clases en línea de matemáticas

En su caso, los recursos digitales que utilizó para interaccionar con el grupo-clase fueron la videoconferencia, los grupos de WhatsApp y el correo electrónico. Por otro lado, en la entrevista, nos aclaró algunos puntos relativos a la comunicación en el aula virtual:

E: *¿Cómo se aseguraba de que los estudiantes estuvieran realmente conectados durante la sesión?*

Y: "*Los alumnos tenían la webcam conectada durante toda la sesión y como las actividades prestaban a la interacción, se mantenía un dialogo mediante el micrófono y el chat.*"

E: En caso de haber permitido la intervención de los alumnos mediante el micrófono, ¿cómo gestionaba su utilización para evitar problemas?

Y: *"Los alumnos debían de solicitar el turno de palabra cuando ellos querían intervenir. Y cuando yo realizaba las preguntas ellos debían contestar siempre respetando el turno establecido."*

Además, nos interesaba saber cómo logró que los alumnos trabajaran en equipo durante el confinamiento. Nos comentó que durante las clases proponía grupos de trabajo y les creaba un aula virtual, en Google Classroom, para que pudieran trabajar en equipo. Después todos se conectaban de nuevo para poner en común los resultados obtenidos.

Para finalizar, presentamos algunas sugerencias para mejorar la dimensión comunicativa en el aula virtual de matemáticas, derivadas de las ideas expuestas por los autores aquí mencionados y por nuestra propia experiencia personal.

5. Sugerencias para mejorar la comunicación en el aula virtual de matemáticas

Como hemos visto anteriormente, la dificultad para comunicarse en el aula de matemáticas durante el confinamiento fue compartida por profesores de matemáticas de todos los países del mundo y de todos los niveles educativos.

Seguramente, este tipo de problemática también es debatida en estudios similares de otros ámbitos educativos, pero tal vez en el caso de las matemáticas, materia de por si complicada para los alumnos, la ausencia de la figura presencial del profesor y el contacto directo con sus compañeros aumentó notablemente esa dificultad.

Coincidimos con diversos autores (Aldon y otros, 2021; Cassibba y otros, 2021) en que los profesores sabemos interpretar el lenguaje no verbal de los estudiantes. Sabemos cuándo están atendiendo o cuándo están aburridos, distinguimos la

expresión facial del “no entiendo nada” y podemos adecuar nuestra explicación, en función de la retroalimentación recibida al analizar su lenguaje no verbal.

Explicar a través de una pantalla, aunque los alumnos conecten la cámara no simula la interacción presencial ni permite recibir valiosa información, procedente de interpretar el lenguaje no verbal.

Además, mientras explicamos conceptos o mientras resolvemos ejercicios en directo, solemos compartir nuestra pantalla para mostrar a los alumnos las diapositivas de la presentación, la pizarra virtual o el documento en PDF y al hacerlo, dejamos de visualizar sus rostros.

Todo lo mencionado nos ha llevado a reflexionar y a pensar en algunas ideas, basadas en nuestra propia experiencia durante el confinamiento y en los distintos autores aquí presentados, que podemos implementar para mejorar la dimensión comunicativa en las clases de matemáticas en línea (síncronas):

1. Obligar a los estudiantes a tener la cámara activa durante toda la clase en línea y los micrófonos silenciados para no generar interferencias en la explicación de profesor.

2. Utilizar dos ordenadores distintos para realizar la explicación. En uno de ellos compartiremos la pantalla y expondremos la lección usando los recursos pertinentes, mientras que en el otro veremos a los alumnos que están participando. Aunque es complicado ver a todos los alumnos a la vez, podemos modificar las diferentes opciones de presentación de la aplicación de videoconferencia que utilicemos para poder verlos a todos y para poder interpretar sus reacciones no verbales a nuestra explicación.

3. Alternar la explicación magistral con la participación de los estudiantes mediante metodologías didácticas como el debate, la resolución conjunta de ejercicios, la resolución de dudas, etc. Para evitar problemas, el profesor debe gestionar por turnos el micrófono de cada estudiante, buscando la manera de establecer turnos de palabra.

4. Una idea para fomentar la atención de los estudiantes y evitar que se conviertan en meros sujetos pasivos, es preguntarles aleatoriamente a todos. Si saben que en cualquier momento el profesor les va a preguntar algo sobre lo que se acaba de explicar, estarán atentos para poder responder adecuadamente y para quedar bien delante de sus compañeros.

5. La interacción con imagen y sonido es superior a la interacción escrita a través del chat, pues permite aumentar la sensación de estar en clase y de pertenecer a una comunidad educativa. Sin embargo, el chat puede usarse como una herramienta donde los alumnos preguntan las dudas que les surgen a lo largo de la explicación, dejando constancia de ello, para que el profesor pueda consultarlo y explicarlo globalmente al final. También puede usarse como un recurso para que comenten, lo que sea preciso, entre ellos o para trabajar en equipo.

6. Reflexiones finales

La pandemia no ha acabado, pese a que actualmente se están relajando muchas de las medidas restrictivas (*uso de mascarillas en interiores, apertura de discotecas, ampliación de aforos…*). La experiencia que tenemos a lo largo de estos dos años de pandemia es que, en cualquier momento, puede haber un aumento notable de casos, debido a alguna nueva variante, que nos obligue a retroceder y volver a las restricciones y quién sabe si a un nuevo confinamiento (como está sucediendo en China ahora mismo).

Investigar sobre lo sucedido en el campo educativo es necesario para aprender qué se hizo, cómo se hizo y en qué se puede mejorar. Estamos de acuerdo con los investigadores que consideran esta pandemia como una gran oportunidad de cambio para la enseñanza, en general y para la enseñanza en línea, en particular.

En cuanto a la dimensión comunicativa de las matemáticas en la enseñanza virtual, hemos mostrado algunas sugerencias que pueden ayudar al profesor a crear un ambiente de aula que permita implicar a los estudiantes y aprovechar al máximo la clase virtual.

Nos queda un largo camino por recorrer y para aprender de esta experiencia. Debemos seguir adaptándonos a los obstáculos que nos hacen crecer como profesores. La pandemia ha sido una gran lección para todos nosotros, que nos ha recordado que nada es inmutable ni eterno y que los seres humanos estamos preparados para adaptarnos a cualquier adversidad.

7. Referencias

Aldon, G., Cusi, A., Schacht, F., y Swidan, O. (2021). Teaching mathematics in a context of lockdown: A study focused on teachers' praxeology's. Education Sciences, 11(2), 1–21. https://doi.org/10.3390/educsci11020038

Almarashdi, H., y Jarrah, A.M. (2021). Mathematics distance learning amid the COVID-19 pandemic in the UAE: High school students' perspectives. International Journal of Learning, Teaching and Educational Research, 20(1), 292–307. https://doi.org/10.26803/IJLTER.20.1.16

Alzina, R. B. (2004). *Metodología de la investigación educativa* (Vol. 1). Editorial La Muralla.

Amelia, R., Kadarisma, G., Fitriani, N., y Ahmadi, Y. (2020). The effect of online mathematics learning on junior high school mathematic resilience during COVID-19 pandemic. Journal of Physics: Conference Series, 1657(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1657/1/012011

Bakker, A., Cai, J., y Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: an international survey before and during the pandemic. Educational Studies in Mathematics. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10049-w

Bernardo, J., y Caldero, J. F. (2000). Investigación cuantitativa (4); Métodos no experimentales. *J. Bernardo, y JF Caldero, Aprendo a investigar en educación (77-93). Madrid: RIALP, SA*.

Breda, A., Farsani, D., y Miarka, R. (2020). Political, technical, and pedagogical effects of the COVID-19 Pandemic in Mathematics Education: an overview of Brazil, Chile, and Spain. *INTERMATHS*, *1*(1), 3–19. https://doi.org/10.22481/intermaths.v1i1.7400

Cassibba, R., Ferrarello, D., Mammana, M. F., Musso, P., Pennisi, M., y Taranto, E. (2021). Teaching mathematics at distance: A challenge for universities. Education Sciences, 11(1), 1–20. https://doi.org/10.3390/EDUCSCI11010001

Castro, W. F., Pino-Fan, L. R., Lugo-Armenta, J. G., Toro, J. A., y Retamal, S. (2020). A Mathematics Education Research Agenda in Latin America Motivated by Coronavirus Pandemic. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(12), em1919. https://doi.org/10.29333/EJMSTE/9277

Dhurumraj, T., Ramaila, S., Raban, F., y Ashruf, A. (2020). Broadening educational pathways to stem education through online teaching and learning during covid-19: Teachers' perspectives. Journal of Baltic Science Education, 19(6), 1055–1067. https://doi.org/10.33225/JBSE/20.19.1055

Engelbrecht, J., Borba, M. C., Llinares, Salvador, y Kaiser, G. (2020). Will 2020 be remembered as the year in which education was changed? *1*, 821–824. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01185-3

Font, V., y Sala, G. (2020). 2021. Un año de incertidumbres para la Educación Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *34*(68), i–v. https://doi.org/10.1590/1980-4415V34N68E01

Hossein-Mohand, H., Gómez-García, M., Trujillo-Torres, J.-M., Hossein-Mohand, H., y Boumadan-Hamed, M. (2021). Uses and resources of technologies by mathematics students prior to COVID-19. Sustainability (Switzerland), 13(4), 1–18. https://doi.org/10.3390/su13041630

Lestari, W. D., Aisah, L. S., y Nurafifah, L. (2020). What is the relationship between self-regulated learning and students' mathematical understanding in online lectures

during the covid-19 pandemic? Journal of Physics: Conference Series, 1657(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1657/1/012065

Mailizar, Almanthari, A., Maulina, S., y Bruce, S. (2020). Secondary school mathematics teachers' views on e-learning implementation barriers during the COVID-19 pandemic: The case of Indonesia. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 16(7). https://doi.org/10.29333/EJMSTE/8240

Marbán, J. M., Radwan, E., Radwan, A., y Radwan, W. (2021). Primary and secondary students' usage of digital platforms for mathematics learning during the COVID-19 outbreak: The case of the Gaza strip. *Mathematics*, *9*(2), 1–21. https://doi.org/10.3390/math9020110

Mulenga, E. M., y Marbán, J. M. (2020). Prospective teachers' online learning mathematics activities in the age of COVID-19: A cluster analysis approach. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 16(9). https://doi.org/10.29333/EJMSTE/8345

OMS (2020). *Coronavirus disease (COVID-19) Pandemic. Organización Mundial de la Salud.* https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019

Ramadhan, R., y Suhendra. (2021). The effect of distance learning during Covid-19 pandemics on the mathematical learning results. Journal of Physics: Conference Series, 1806(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1806/1/012096

UNESCO (2020). *COVID-19 educational disruption and response.* UNESCO. https://en.unesco.org/covid19/educationresponse

CoD012 Talleres con Familias. Una experiencia en el área de matemáticas

Ana Rosa Díaz Rodríguez
anarosa3008@gmail.com
Coordinadora Proyecto Matemáticas Newton Canarias
Servicios Centrales Consejería de Educación
María Nila Pérez Francisco
nilacapicua@yahoo.es
Coordinadora Proyecto Matemáticas Newton Canarias
Servicios Centrales Consejería de Educación
José Manuel Vidal González
pepvidalg@gmail.com
Coordinador Proyecto Matemáticas Newton Canarias
Servicios Centrales Consejería de Educación

Núcleo temático: Comunicación y divulgación. Recursos para el aula

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria

RESUMEN

En esta comunicación se presentará la experiencia de talleres para familias llevada a cabo este curso escolar dentro del Proyecto Matemáticas Newton Canarias.

Se ha trabajado con familias de infantil de 5 años, 1º y 2º de primaria, en otros con familias de alumnado de 4º y 5º de primaria y acciones con familias de alumnado de secundaria.

El objetivo de estos talleres era dar a conocer entre las familias algunas de las propuestas metodológicas que se están desarrollando en los centros educativos en el área de matemáticas para que las familias comprendan y puedan colaborar con el centro en una enseñanza de las matemáticas basada en la reflexión y el razonamiento con ayuda de la manipulación de materiales.

Palabras clave: Matemáticas, Familias, Talleres

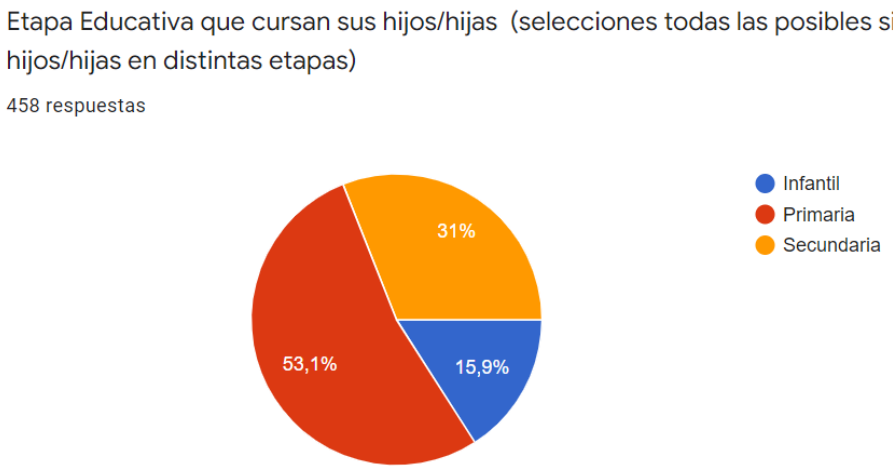
El proyecto Matemáticas Newton Canarias se desarrolla como proyecto de centro en 132 centros educativos de Infantil-primaria y Secundaria de Canarias. Con él se pretende cambiar la metodología tradicional en el área de matemáticas por otra que utilice la reflexión sobre la acción y el razonamiento para la construcción y desarrollo del pensamiento lógico matemático del alumnado con ayuda de la manipulación de materiales. Desde los inicios se constató la necesidad de intervenir en las familias para dar a conocer este cambio, en la creencia de que "familia y escuela no pueden trabajar aisladas" (Alcalá Recuero y otros, 2015).

Una de las primeras acciones que se abordaron fue la grabación de unos vídeos de corta duración que mostraban de manera sencilla la propuesta metodológica del Proyecto. Se grabaron un vídeo inicial de presentación, uno específico de resolución de problemas, uno genérico sobre materiales, y uno de álgebra con manipulación de materiales. Estos vídeos se colgaron en la página de Youtube de la Consejería de Educación de Canarias y se enviaron los enlaces a las familias a través de los aplicativos de los centros educativos. Esta iniciativa fue importante porque muchos centros tenían muy restringida la asistencia presencial y esto nos permitió llegar a las familias. Podremos ver uno de estos vídeos durante la comunicación.

Una segunda iniciativa consistió en hacer llegar a las familias enlaces a acertijos, problemas y retos matemáticos que se resolvían en casa con algún miembro de la familia y después se comentaban las soluciones en clase, del tipo acertijos, enigmas problema como https://www.pinterest.es/pin/523965737896770046/?hcb=1 o del tipo código secreto, balanzas algebraicas, acertijos de operaciones o geométricos como https://www.pinterest.es/pin/587227238895890933/?hcb=1 y http://www.aomatos.com/category/matematicas/acertijos/?hcb=1

La siguiente acción que se desarrolló fue organizar unos talleres formativos. Para ello se preparó un formulario de Google para recoger los intereses de las familias respecto a los contenidos de las matemáticas escolares. Se decidió hacerlo así y no en relación a los procesos cognitivos porque para las familias son más cercanos los contenidos que los procesos.

Respondieron 458 familias y la distribución en porcentaje por etapas educativas fue



Los contenidos propuestos para infantil y primaria fueron:

Estructura aditiva. Relaciones suma resta

Suma y resta. Algoritmos flexibles de cálculo

Multiplicación y división. Algoritmos flexibles de cálculo

Tablas de multiplicar

Razonamiento lógico. Bloques lógicos

Construcción del número

Resolución de problemas (Infantil, Primaria)

Calculadora (Infantil, Primaria)

Geogebra. Iniciación

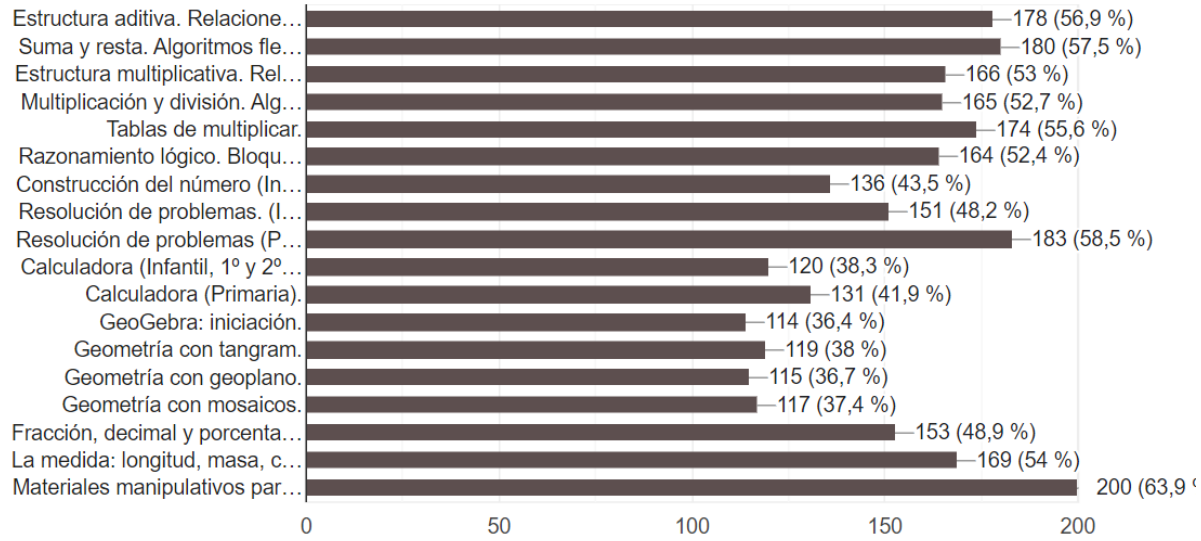
Geometría con Tangram, con geoplano, con mosaicos

Fracción, decimal, porcentaje. Relaciones

La medida: longitud, masa, capacidad, volumen, superficie, tiempo, ángulos...

Materiales manipulativos para el aprendizaje de las matemáticas

Se obtuvieron los siguientes resultados,



Los contenidos propuestos en el formulario de secundaria fueron:

Estructura multiplicativa: relación entre multiplicación y división.

Multiplicación división: algoritmos flexibles

Resolución de problemas

Calculadora

Álgebra manipulativa: ecuaciones y polinomios

Geogebra

Geometría con tangram

Geometría con geoplano

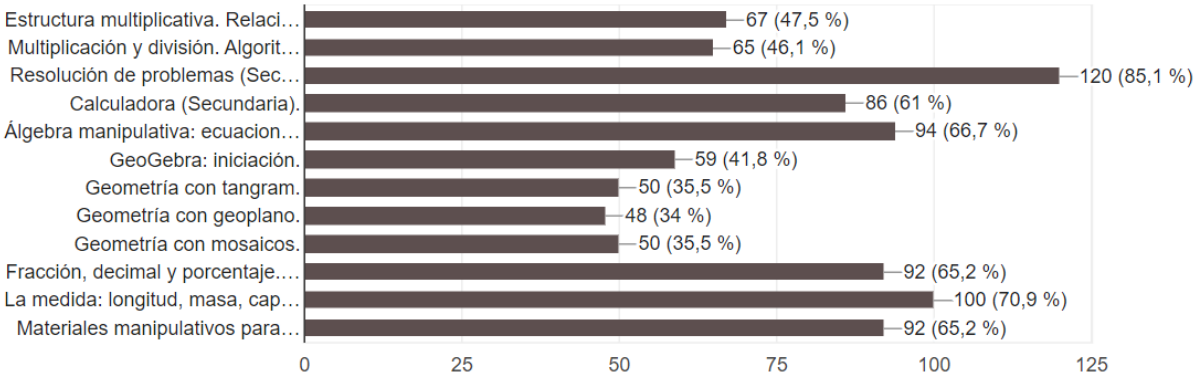
Geometría con mosaicos

Fracción, decimal porcentaje

La medida

Materiales manipulativos para matemáticas

A continuación mostramos los resultados obtenidos del formulario para secundaria



Nos resultó significativo que tanto las familias de infantil y primaria como las de secundaria muestren un interés común en cuanto a la resolución de problemas, aspecto además que ahora se potencia en el nuevo currículo LOMLOE

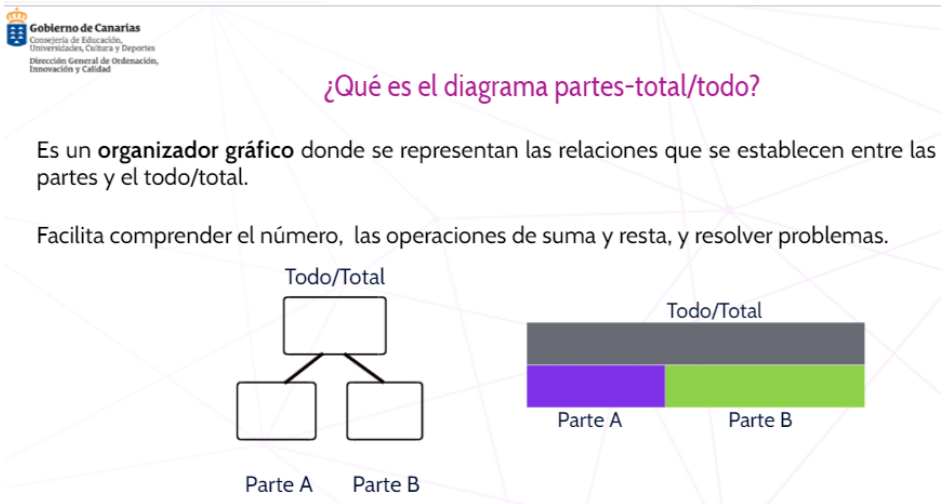
Los primeros talleres se ofrecieron para las familias del alumnado de infantil de 5 años, primero y segundo de primaria. La temática que se trabajó fue la estructura aditiva tanto para la construcción del número como para la resolución de problemas aritméticos. Este taller se hizo coincidir con el momento de trabajo en clase de ese aspecto.

Taller con familias de infantil y primer ciclo de primaria

Veamos una pequeña muestra de las actividades que se realizaron.

Para el número de dos cifras se mostraba el uso de diversos materiales y luego las familias realizaban ese mismo trabajo con regletas de Cuisenaire y tarjetas numéricas.

En algunos momentos se introducían pequeñas píldoras de teoría.

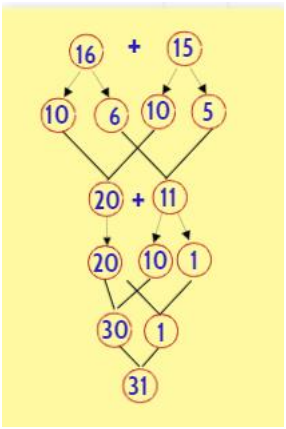


Y se realizaban actividades de su uso.

Para las familias de alumnado de 3º y 5º de primaria se organizó un taller sobre algoritmos flexibles de cálculo Esta experiencia fue muy enriquecedora, incluso alguna de las personas participantes ofrecieron sus propios algoritmos.

Taller con familias de 5º de primaria

En esto cursos se trabajaron estrategias para el cálculo mental como la de sumar mediante descomposición. 25-16



Y en el caso de la resta, restas sucesivas o completar desde el sustraendo al minuendo.

Estas estrategias se trabajan en las clases con números de hasta tres o cuatro cifras.

Para el curso 22-23 abordaremos los talleres presenciales con las familias de secundaria. Tenemos previsto iniciarlos con familias de alumnado de 1º y 2º de la ESO en aquellos centros que participen en el proyecto.

La experiencia nos dice que las familias necesitan, merecen y tiene derecho a participar en el proceso de enseñanza aprendizaje de sus hijos e hijas y que establecer estos cauces contribuye a mejorar el desempeño en el aula y el rendimiento del alumnado.

Referencias

Alcalá Recuero, Jesús y otros *"La participación de las familias en el Sistema Educativo de sus hijos" en Educaweb*

https://www.educaweb.com/noticia/2015/02/09/participacion-familias-sistema-educativo-sus-hijos-8679/

Col001 Actuaciones en el aula de matemáticas con un enfoque inclusivo

Arturo Prieto Pérez
arturoprieto@hotmail.com
IES San Blas, Alicante (03011616)

Núcleo temático: Inclusión. Procesos.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

Se presentan una serie de actuaciones en el aula de matemáticas con enfoque inclusivo. Se realiza un planteamiento principal y se acompaña de alternativas para adaptarse a las necesidades de cada centro. Se pretende optimizar todos los recursos del centro para atender las necesidades educativas del alumnado y reducir las diferencias. Las actuaciones van adaptándose a los distintos niveles de actuación que nos marca la normativa y están centradas en los recursos que se pueden usar en el espacio del aula o del centro. Se presentan recomendaciones metodológicas para la elaboración de tareas.

Palabras clave: Inclusión Educativa, Aprendizaje Competencial, Equidad, Niveles de Respuesta.

1. Introducción

No existe una definición absoluta y aceptada por todos los autores de lo que se considera inclusión educativa, pero sí conocemos los principios que queremos alcanzar y que se concretan en los cuatro elementos que describen Sarrionandía y Ainscow (2011); *"La inclusión es un proceso",* "*La inclusión busca la presencia, la participación y el éxito de todos los estudiantes*", "*La inclusión precisa la identificación y la eliminación de barreras*" y "*La inclusión pone particular énfasis en aquellos grupos de alumnos que podrían estar en riesgo de marginalización, exclusión, o fracaso escolar*".

En esta propuesta se pretende responder con criterios de equidad y justicia al problema de las diferencias en la educación y en el aula de matemáticas en particular. Para conseguirlo, usaremos dos principios referidos a las prácticas educativas. El primero será la máxima reducción posible de la ratio de alumnado por clase y el segundo, destinar todos los recursos humanos de los que disponga el centro educativo a su participación en las actividades que se realicen dentro del aula. De esta forma, conseguiremos que todo el alumnado reciba la máxima atención, en las mejores condiciones posibles. Además, como principio metodológico, usaremos estrategias activas y cooperativas, con las que pretendemos lograr el liderazgo distribuido que precisa este proceso.

La experiencia desarrollada en las Comunidades de Aprendizaje nos ayuda a concretar el diseño de actividades y actuaciones inclusivas en el aula (García y Mallart, 2002) que tendrán como principio la participación de toda la comunidad educativa en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

El trabajo en el aula de matemáticas atendiendo a criterios inclusivos, se ha vuelto una necesidad debido al desarrollo de la normativa, tanto en el ámbito de la Comunidad Valenciana, como en el nacional. Algunas de las medidas que se proponen en el presente artículo, dependen de las decisiones de los distintos órganos de gobierno de los centros y necesitarán de su aprobación. Se pretende motivar hacia la toma de decisiones en este sentido, justificando un uso óptimo y eficiente de los recursos disponibles en cada centro.

2. Condiciones iniciales

Partimos de una propuesta inicial que describe la situación de un centro educativo público de la localidad de Alicante, en el que hay autorizadas cuatro unidades por cada nivel educativo en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y tres unidades autorizadas en cada nivel de Bachillerato. El centro tiene dos colegios adscritos y existe una gran demanda por parte de las familias para que sus hijos e hijas cursen sus estudios en él. En la actualidad existen muchos problemas de espacio y se recurre a distintas aulas de uso específico para cubrir las necesidades. Enmarcamos la propuesta en los siguientes condicionantes iniciales.

- El desarrollo de las actividades que se presentan se centra en los niveles de 1º y 2º ESO ya que es donde más situaciones de desigualdad se generan y, por tanto, más recursos se deben destinar.
- El centro dispone de 120 plazas para el alumnado en cada nivel educativo. Con esta situación inicial, se formarían cuatro grupos de 1º ESO y 2º ESO, teniendo una ratio de 30 alumnos/as por grupo.

Según se determina en el artículo 14 del Decreto 104/2018, de 27 de julio, del Consell, por el que se desarrollan los principios de equidad y de inclusión en el sistema educativo valenciano, las medidas de respuesta educativa para la inclusión se han de implementar desde una perspectiva global, sistémica e interdisciplinaria y se deben organizar en cuatro niveles de concreción de carácter sumatorio y progresivo.

3. Propuestas

Las propuestas de estas respuestas educativas son las siguientes:

1) Actuaciones en el primer nivel de respuesta.

Estas actuaciones estarán enmarcadas en el Plan de Actuación para la Mejora (PAM) y el Proyecto Educativo de Centro (PEC). Consistirán en medidas referidas al proceso de planificación, la gestión general y la organización de los apoyos del centro.

Los grupos de 1º y 2º ESO, se confeccionarán teniendo en cuenta una reducción de la ratio de alumnado por aula. Aunque inicialmente se dispone de cuatro grupos con carácter oficial, se crea un quinto, reduciendo así el número de estudiantes de 30 a 24 por grupo. Esta medida hace que se repartan los recursos del centro a todas las materias y grupos de forma equitativa. Las principales dificultades que nos encontramos son los espacios disponibles ya que no tenemos aulas suficientes y debemos recurrir a lugares con otros usos.

En función de los recursos aprovechables en el instituto, proponemos algunas alternativas posibles de organización. Entre ellas, valoramos la constitución de un grupo de Programa de Mejora del Aprendizaje y Rendimiento (PMAR) en 2º ESO. El diseño de este grupo dependerá de varios factores, como los recursos horarios, el perfil del alumnado o las aulas libres en el centro. Otra de las posibilidades es la

creación de un grupo de refuerzo en aquellas materias en las que se disponga de recursos. Se baraja la posibilidad de plantear esta organización en las materias instrumentales (Lengua Castellana y Literatura, Valencià, Llengua i Literatura y Matemáticas).

Cuando se ha establecido el criterio para la reducción de ratio, se procede a la confección de los grupos. Para los de 1º ESO, se distribuye el alumnado de forma que se garantice la heterogeneidad de cada grupo, e intentando que sean homogéneos entre sí.

Para conseguir este objetivo, se aplican los criterios establecidos por la normativa vigente en la confección de grupos y horarios. Se debe tener en cuenta que:

- De conformidad con la Orden 20/2019, la escolarización en la modalidad ordinaria del alumnado con necesidades de compensación educativa o necesidades educativas especiales en ningún caso puede hacerse conformando grupos específicos y diferenciados de carácter permanente, sino que debe hacerse de manera heterogénea entre todos los grupos de un mismo nivel educativo, y se excluye de la composición cualquier criterio discriminatorio.
- Los grupos deben ser homogéneos en cuanto al número y se excluirá en la composición todo criterio discriminatorio. Por lo tanto, no se podrán hacer agrupaciones en función del nivel de conocimientos del alumnado.
- La escolarización del alumnado con necesidades educativas de apoyo educativo, necesidades educativas especiales o necesidades de compensación de desigualdades en los diferentes grupos de un mismo curso, se llevará a cabo de manera equilibrada y se excluirá en su composición todo criterio discriminatorio.
- El alumnado que permanezca un año más en un curso será también distribuido de manera equilibrada.
- En los centros docentes que impartan Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato y que escolaricen alumnado con necesidades educativas especiales, la reducción de la ratio vendrá determinada por la resolución de la dirección territorial competente en materia de educación.

Para la aplicación de estos criterios, debemos tener toda la información posible del alumnado que llega desde nuestros centros adscritos de Primaria. Para ello, son fundamentales las reuniones que se deben realizar en el seno del Equipo de

Transición (artículo 6 de la Orden 46/2011, de 8 de junio, de transición). El Plan de Transición de la Etapa de Educación Primaria a la de Educación Secundaria Obligatoria se convierte en el primer eslabón de la cadena que nos hará alcanzar el diseño de grupos más inclusivo. Forma parte del PEC y en él, se otorga mucho peso a las actuaciones directas con los estudiantes.

En el seno del Plan de Transición se mantiene una doble línea de trabajo. Se realizan actividades de Convivencia entre el alumnado de los Colegios adscritos y el alumnado del Instituto:

- Los estudiantes de 6º visitan el instituto y conocen algunos detalles sobre el funcionamiento y metodología de trabajo.

Por otro lado, los alumnos y alumnas de 1º de ESO visitan sus respectivos colegios de origen para participar en actividades con los estudiantes que vendrán al Instituto el siguiente curso.

- En cuanto a la Coordinación Pedagógica del profesorado, se organizan actividades conjuntas entre docentes de Colegios e Instituto para unificar y coordinar estrategias metodológicas que faciliten el tránsito de los estudiantes al IES y durante estas reuniones se producen los primeros intercambios de información con el profesorado del alumnado que comenzarán en el Instituto al siguiente curso, así como el seguimiento de los que cursan 1º de ESO.

Una vez finalizado el periodo lectivo, se mantienen las reuniones en las que se detallan las características tanto académicas como familiares del alumnado de los colegios, cosa que nos ayudará a confeccionar los grupos.

En cuanto a los grupos de 2º ESO, se mantiene la estructura general del curso anterior y solo se realizan los cambios necesarios que permitan la mejora del funcionamiento, o por otros motivos como la permanencia del alumnado un curso más en el mismo nivel, traslados, etc.…

También enmarcamos en este nivel, la organización de los apoyos. El trabajo de la persona especialista en Pedagogía Terapéutica (PT), se debe de desarrollar preferentemente dentro del aula. De esta forma, conseguimos que el/la PT, pueda colaborar en distintos ámbitos de trabajo. En el caso de que se constituya un grupo de refuerzo, se puede contemplar la posibilidad de asociar la parte del horario de la persona especialista en PT a la de este grupo.

El diseño de los Ámbitos de Conocimiento en 1º ESO, organizado y desarrollado en el curso 2021/2022 mediante la *RESOLUCIÓN de 27 de mayo de 2021, de la Secretaría Autonómica de Educación y Formación Profesional, por la cual se establecen las directrices generales para la organización curricular de los cursos primero y segundo de Educación Secundaria Obligatoria para el curso 2021-2022,* hace que sea más necesaria la implementación de medidas para poder diseñar actividades que se adapten a las necesidades de todo el alumnado y que den respuesta al objetivo de adquirir el aprendizaje competencial y significativo del trabajo globalizado con el respeto por las diferentes aproximaciones al conocimiento que tienen las diferentes especialidades. La organización del Ámbito Científico pasa por agrupar las materias de Matemáticas y Biología y Geología de 1º ESO. De forma alternativa se puede añadir la materia de Tecnología en ese ámbito.

Una de las medidas contempladas en la organización de los apoyos o refuerzos, es la codocencia o docencia compartida. Para ponerla en marcha, se han propuesto dos alternativas:

a) La primera consiste en asignar al profesorado un grupo determinado y en unas horas concretas, preferentemente de entre los especialistas de la materia que no es la del titular. De esa forma, se pueden preparar actividades para que en esas horas el alumnado trabaje simultáneamente con todos los recursos. Su principal ventaja es la posibilidad de organizar y programar actividades conjuntas.

b) Otra de las formas que se han usado, es la de asignar al profesorado dos grupos (incluso de niveles distintos) que estén conectados en el horario y que alterne la asistencia en colaboración con el profesorado titular. Esta organización tiene como ventaja el hecho de llegar a reforzar más cantidad de grupos, aunque a cada grupo le corresponderá una menor cantidad de tiempo disponible.

2) Actuaciones en el segundo nivel de respuesta:

Estas medidas están referidas a todo el grupo y vendrán desarrolladas en las programaciones didácticas. Pretenden dar respuesta a la diversidad de todo el alumnado.

La principal medida en este nivel es el diseño de subgrupos de alumnos/as atendiendo a estructuras de aprendizaje cooperativo. Para el diseño de los equipos de trabajo, nos centramos en las propuestas que realiza Slavin (2011). En nuestro

caso, partiendo de la situación de 24 alumnos/as por clase, se reparten en 6 grupos de 4 personas cada uno. Esta selección se realiza atendiendo a los siguientes criterios:

- Nivel de competencia matemática.
- Nivel de competencia emocional.
- Nivel de autonomía para el trabajo.

El alumnado se debe repartir de forma que cada equipo sea heterogéneo y se pretende que los distintos grupos sean homogéneos entre sí. Se repartirán distintos roles entre el alumnado para que se responsabilicen de las funciones que conllevan. Los principales roles que uso con los estudiantes son:

Profesor/a ayudante: es la persona con mayor competencia matemática del grupo y tendrá como principal función, la de ayudar a cualquier otro miembro del mismo en la resolución de cualquier duda de carácter técnico.

Portavoz: será una persona con la función de manifestar la opinión del grupo en todo aquello que se pregunte.

Coordinador/a: debe responsabilizarse de que todas las personas del equipo alcancen los objetivos planteados en cada sesión.

Moderador/a: fomentará las buenas relaciones en el seno del grupo. Hará respetar el turno de palabra.

En cada sesión de trabajo, se plantean los objetivos que se pretenden conseguir y se da autonomía a cada equipo para alcanzarlos, haciendo uso de los distintos roles de sus miembros. La dinámica de trabajo en el aula consistirá en el desarrollo simultaneo de correcciones o explicaciones generales para toda la clase, correcciones o explicaciones para cada subgrupo, autocorrecciones individuales para cada alumno/a, realización de actividades propuestas o el uso de herramientas interactivas para la mejora y adquisición de competencias.

Puntualmente se plantean sesiones de grupos interactivos. Para su realización, es necesaria la participación de personas adultas, como familiares del alumnado, personal que realiza las prácticas del máster de profesorado en nuestro centro, otro personal voluntario o profesorado que trabaje en régimen de codocencia con esa clase. En las sesiones se establecen seis estaciones de trabajo, una por cada equipo organizado para el trabajo cooperativo. El diseño de las actividades que

realizarán ese día viene determinado por el desarrollo de los contenidos de la materia y tienen un enfoque eminentemente práctico.

Las actuaciones en las que participan personas voluntarias requieren de la aprobación del Consejo Escolar.

3) Actuaciones en el tercer nivel de respuesta:

Lo constituyen las medidas dirigidas al alumnado que requiere una respuesta diferenciada, individualmente o en grupo, que implican apoyos ordinarios adicionales. Asimismo, se incluyen las actuaciones de acompañamiento y apoyo personalizado para cualquier alumna o alumno que en un momento determinado pueda necesitarlas, incidiendo especialmente en las actuaciones que le impliquen emocionalmente, refuercen su autoestima, el sentido de pertenencia al grupo y al centro, y preparen para interacciones positivas en contextos sociales habituales.

En cuanto a las medidas de acceso, observamos que la distribución del aula para la realización de técnicas de aprendizaje cooperativo debe tener en cuenta la eliminación de barreras que dificulten la proximidad del alumnado con necesidades educativas. Se debe favorecer una disposición de aula en la que el alumnado pueda obtener respuestas directas por parte del profesorado o de cualquier persona a quien pueda recurrir. Otra de las actuaciones en esta dimensión, es la adaptación de las actividades complementarias y extraescolares. Se deben diseñar de forma que pueda participar activamente todo el alumnado, además de procurar que tengan un carácter grupal. Se deben eliminar las actividades que supongan un importante desembolso económico y que condicionen la participación del alumnado. Una solución es obtener alguna fuente de subvención alternativa para quienes no pueden asumirlo, como la colaboración de la AMPA, o la participación de agentes externos.

En cuanto a las medidas de aprendizaje para realizar la programación de cada unidad didáctica, se deben determinar las tareas con las que trabajarán la competencia matemática para que el alumnado recorra los seis niveles propuestos por Rico (2007). Estos niveles van desde uno inicial (*Primer nivel),* en el que el alumnado sabe responder a preguntas planteadas en contextos conocidos, donde está presente toda la información; hasta el último de esos niveles (*Sexto nivel),* en el

que el alumnado sabe formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos.

La metodología debe ser activa y centrada en los estudiantes. Se deben proponer actividades que fomenten la investigación, la indagación o la búsqueda de soluciones alternativas y novedosas. Para el diseño de las tareas, se realizan propuestas metodológicas basadas en algunos estudios e investigaciones y se describen atendiendo a los bloques determinados por el currículo oficial.

En el bloque de procesos, métodos y actitudes en Matemáticas, se hace necesario plantear múltiples formas de representación de la información para que el alumnado pueda relacionarla con contextos reales y facilite su aprendizaje, a la vez que se realicen introducciones que faciliten la comprensión de los conceptos. Se debe trabajar en la línea de la aceptación de distintas formas de expresión, sin descuidar el formalismo que le corresponde a las Matemáticas.

En los bloques de Números y Álgebra, y el de Funciones, se debe trabajar en la capacidad de generalizar y expresar esas generalizaciones; en la comprensión del concepto de variable con sus múltiples usos para mejorar el pensamiento algebraico; el sentido de estructura de la Aritmética, la correcta interpretación de las ecuaciones, sus soluciones y su significado o el proceso de transición entre las distintas formas de representación.

En cuanto al trabajo del bloque de Geometría, se propone el uso de juegos o dibujos para mejorar el razonamiento visual y espacial, el uso del arrastre o deslizamiento en la representación mediante herramientas tecnológicas, la construcción de definiciones inclusivas, la necesidad de la demostración para explicar los fenómenos o el fomento de la participación del alumnado, son algunas herramientas que ayudan a mejorar la comprensión de los conceptos geométricos y permiten la observación de las variaciones de los elementos trabajados.

Y para el bloque de Estadística y Probabilidad, se hace necesaria una aplicación a situaciones reales para mejorar la comprensión y el uso de materiales manipulativos.

Enmarcadas en las medidas de aprendizaje, se plantea la realización de actividades de ampliación o de refuerzo. En función de los recursos del centro, se pueden plantear fuera del horario lectivo. Ejemplos de actuaciones son la resolución de

problemas de olimpiadas matemáticas, dirigida al alumnado que requiere enriquecimiento curricular.

Otros ejemplos de actividades son las propuestas para el refuerzo. Se pueden realizar también fuera del horario lectivo. Estas actuaciones, pretenden compensar las desigualdades que se pueda generar en el alumnado que no dispone de recursos para reforzar los contenidos de la materia; tanto de asimilación de conceptos, como de preparación de tareas. Existe la posibilidad de organizar un Taller de Refuerzo dentro del horario escolar, en el espacio del horario correspondiente a la materia optativa.

Como medidas que se pueden desarrollar para fomentar la participación del alumnado, encontramos la tutorización y seguimiento por parte del alumnado de niveles superiores. La colaboración en sesiones de Grupos Interactivos por parte del alumnado tutor, o el seguimiento individual al alumnado tutorizado, mejora la autoestima y aumenta el sentimiento de pertenencia.

En cuanto a las pruebas e instrumentos de evaluación, se adecuarán a las adaptaciones realizadas en la materia. La evaluación inicial se convierte en fundamental para diagnosticar las necesidades de nuestro alumnado. Para ello necesitamos conocer toda la información de la que dispone el centro y unirla a la observación diaria, además de todas las pruebas que se vayan realizando.

4) Actuaciones en el cuarto nivel de respuesta:

Lo constituyen las medidas dirigidas al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo que requiere una respuesta personalizada e individualizada de carácter extraordinario que implique apoyos especializados adicionales. Las medidas extraordinarias incluyen las adaptaciones curriculares individuales significativas, las adaptaciones de acceso que requieren materiales singulares, personal especializado o medidas organizativas extraordinarias, los programas específicos que requieren adaptaciones significativas del currículo, y los programas singulares para el aprendizaje de habilidades de autorregulación del comportamiento y las emociones o habilidades de comunicación interpersonal y de relación social en los contextos habituales y de futura incorporación.

Una vez que los grupos ya están formados, procedemos a establecer un plan de trabajo con el Departamento de Orientación, diseñando el horario de la persona

especialista en Pedagogía Terapéutica (PT) en función de la cantidad de alumnado con necesidades educativas especiales (NEE). La persona especialista en PT actuará dentro del aula, de forma coordinada con el profesorado titular de la materia. Debido a las limitaciones horarias, es posible que se pueda trabajar en el aula una hora de clase semanal, lo que hace escasa la presencia de la persona especialista en PT dentro del aula.

Para completar este déficit de horas de atención, podemos usar recursos como la codocencia, en la que otro profesor especialista, apoye el trabajo en el aula. Para conseguir esa dedicación horaria, se puede recurrir a los recursos de los que dispone el centro para realizar desdobles, refuerzos y otro tipo de actuaciones.

En cuanto a las medidas de acceso, debemos garantizar el conocimiento de las lenguas oficiales por parte del alumnado, asegurando así la continuidad del Proyecto Lingüístico de Centro.

Las medidas de aprendizaje se centran en el diagnóstico realizado por parte del Departamento de Orientación. En el caso de ser necesaria una adaptación curricular significativa (ACIS), se priorizarán los contenidos que permitan coordinar el trabajo en el aula con el resto del grupo. La secuencialización de contenidos se realizará para que todo el grupo trabaje al mismo tiempo los distintos bloques. Como principio de actuación, el alumnado que requiera de una ACIS permanecerá en el aula y buscaremos la coordinación con el resto de profesionales y de los estudiantes con los que trabaje en su grupo cooperativo para la realización de las actividades. Estas deben estar en su poder para realizar un seguimiento continuado.

Con un planteamiento de las tareas como el descrito en el apartado anterior, se pretende hacer partícipe a toda la clase, y en especial al que requiera de actuaciones de nivel IV, de alcanzar un nivel competencial adecuado. En el caso de que fuera necesario, se recurriría al diseño de un Programa Personalizado para el Aprendizaje de las Matemáticas para conseguir una incorporación progresiva al trabajo del grupo en el aula.

4. Conclusiones

Las medidas propuestas tienen como objetivo alcanzar la plena inclusión de todo el alumnado, pero quienes deben garantizar el diseño y aplicación de cualquier medida

en los Centros Educativos, son los Equipos Directivos y el Claustro. Debemos apostar por la formación en inclusión para tomar las mejores decisiones en función de la tipología de centro y los recursos disponibles.

Los cambios que se han producido a nivel tecnológico en los últimos años, nos permiten incorporar múltiples herramientas al trabajo en el aula, pero se debe reforzar el conocimiento de esas herramientas.

Compartir experiencias, recursos y conocimientos enriquece el bagaje y las posibilidades de todos los profesionales, repercutiendo de forma muy positiva en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas por parte del alumnado.

Referencias bibliográficas:

Conclusiones del Seminario Federal sobre el papel del docente de matemáticas en el siglo XXI. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. 2011.

Decreto 104/2018, de 27 de julio, del Consell, por el que se desarrollan los principios de equidad y de inclusión en el sistema educativo valenciano.

Decreto 51/2018, de 27 de abril, del Consell, por el que se modifica el Decreto 87/2015, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato en la Comunitat Valenciana.

Decreto 87/2015, de 5 de junio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato en la Comunitat Valenciana.

García, J. R. F., & Mallart, L. P. (2002). Las comunidades de aprendizaje: Una apuesta por la igualdad educativa. *REXE: Revista de estudios y experiencias en educación*, *1*(1), 11-20.

García-Oliveros, Gloria, & Romero-Rey, Julio Hernando. (2018). Matemáticas para todos en tiempos de la inclusión como imperativo. Un estudio sobre el programa Todos a Aprender. *Revista Colombiana de Educación*, (74), 289-310.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

Orden 1/2019, de 8 de enero, de la Conselleria de Educación, Investigación, Cultura y Deporte, por la que se estructuran los servicios psicopedagógicos escolares y se desarrolla el Decreto 104/2018, de 27 de julio.

Orden 20/2019, de 30 de abril, de la Conselleria de Educación, Investigación, Cultura y Deporte, por la cual se regula la organización de la respuesta educativa para la inclusión del alumnado en los centros docentes sostenidos con fondos públicos del sistema educativo valenciano.

Orden 46/2011, de 8 de junio, de la Conselleria de Educación, por la que se regula la transición desde la etapa de Educación Primaria a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *1*(2), 47-66.

Roos, H. (2017). Diversity in an inclusive mathematics classroom: A student perspective. In *10th congress of the European society for research in mathematics education, Dublin, (CERME10), February 1-5, 2017)* (pp. 1533-1560). European Society for Research in Mathematics Education.

Sarrionandía, G. E., & Ainscow, M. (2011). La educación inclusiva como derecho.: Marco de referencia y pautas de acción para el desarrollo de una revolución pendiente. *Tejuelo: didáctica de la lengua y la literatura. Educación*, (12), 26-46.

Sinclair, N.; Bartolini Bussi, M.; de Villiers, M.; Jones, K.; Kortenkamp, U.; Leung, A. & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education, 48*, 691-719.

Slavin, R. E. (2011). Instruction based on cooperative learning. *Handbook of research on learning and instruction*, 358-374.

Warren E., Trigueros M., Ursini S. (2016) Research on the Learning and Teaching of Algebra. In: Gutiérrez Á., Leder G.C., Boero P. (eds) The Second Handbook

of Research on the Psychology of Mathematics Education. SensePublishers, Rotterdam.
https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_3

Col002 Diseño y validación de una *checklist* para detectar los síntomas de riesgo de discalculia dirigida al profesorado de educación primaria

Estefanía Espina
estefania.espina@uva.es
José M. Marbán
josemaria.marban@uva.es
Ana Maroto
anaisabel.maroto@uva.es
Universidad de Valladolid

Núcleo temático: Inclusión (dificultades específicas del aprendizaje) y formación del profesorado.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Primaria.

RESUMEN

El diagnóstico tardío de la discalculia o la ausencia del mismo y, en muchas ocasiones, el difícil y lento acceso a su evaluación, han motivado la creación de una *checklist* o lista de cotejo dirigida al profesorado de Educación Primaria para la identificación temprana del riesgo de discalculia en su alumnado. Se presenta el proceso de elaboración de la checklist, mostrando el procedimiento de búsqueda bibliográfico, la recopilación, selección y filtrado de ítems y su correspondiente agrupación en dimensiones. Además, se describe detalladamente el proceso de validación de la checklist a través del juicio de expertos, especificando los criterios de selección de los jueces y los pasos para el análisis de validez de contenido. El resultado obtenido es un instrumento preliminar que, tras la pertinente y futura prueba piloto, pretende servir de ayuda y contribuir a facilitar la detección por parte del profesorado del riesgo de discalculia en su aula.

Palabras clave: Discalculia, Detección Temprana, Checklist, Educación Primaria.

1. Introducción

La manifestación de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas durante el periodo escolar supone un obstáculo para el pleno acceso a una adecuada alfabetización matemática. Estas dificultades pueden ser producidas por diversos factores (enseñanza insatisfactoria, falta de experiencia de éxito, desarrollo cognitivo, factores económicos y sociales, …) y su severidad puede ser leve, moderada o grave (Mundia, 2012). Dentro del grupo de mayor severidad se encuentran los niños que padecen discalculia. La discalculia es un trastorno específico del aprendizaje de origen neurobiológico y, probablemente, también genético y ambiental, que afecta a la correcta adquisición de las habilidades matemáticas. Interfiere significativamente en el rendimiento académico de los niños y en su vida cotidiana y se dice que es una dificultad “inesperada”, ya que se presenta en niños con un nivel de inteligencia normal y una escolaridad apropiada (Butterworth et al., 2011; Junquero, 2019; Sans et al., 2012). A pesar de tener una prevalencia estimada de aproximadamente un 5% entre la población escolar, es un trastorno aún muy desconocido en la sociedad y ha recibido menos atención que otros trastornos o dificultades del aprendizaje, como la dislexia o el TDAH (Arroyo, 2018 y Espina et al., 2022).

Muchos de los niños que padecen discalculia permanecen sin ser reconocidos durante sus años escolares, escondiéndose bajo una escolaridad apropiada, un cociente intelectual normal y un desempeño satisfactorio en el resto de las asignaturas escolares, entre otros factores. Incluso en el caso en el que los profesores sospechan que el estudiante puede tener dificultades con la adquisición de las matemáticas, el acceso a una evaluación y a un diagnóstico completo no suele producirse de forma rápida y directa. Disponer de una lista de cotejo o *checklist* de los síntomas que suelen manifestar los estudiantes con discalculia, puede servir al profesorado como un instrumento útil para una primera y rápida identificación del riesgo de discalculia. Ante esta situación, se ha decidido crear una *checklist* para que el profesorado de Educación Primaria pueda llevar a cabo una identificación inicial de este trastorno en su alumnado. Ahora bien, se ha de tener

presente que esta *checklist* no es un instrumento "científico" de diagnóstico ni pretende sustituir a las pruebas estandarizadas de evaluación de la discalculia disponibles actualmente.

2. Proceso de diseño y elaboración de la *checklist*

Para la elaboración de esta *checklist* se han tomado como referencia las etapas propuestas por Coronado-Hijón (2015) para su construcción, quien plantea cuatro fases: 1) Búsqueda bibliográfica, 2) Proceso de elaboración de los indicadores o ítems, 3) Prueba piloto, y 4) Estudio de campo. A continuación, se va a describir el procedimiento seguido en las dos primeras fases. La tercera y cuarta etapa no se han iniciado en el momento de redacción de este documento, si bien está previsto que se lleven a cabo dentro de la investigación que se está realizando en paralelo sobre el análisis de la prevalencia de la discalculia en la Comunidad Autónoma de Castilla y León.

1) Búsqueda bibliográfica

La primera fase para la creación de la *checklist* ha estado constituida por la búsqueda sistematizada, tanto en las principales bases de datos (Web of Science, Scopus, Scielo, …) como en el buscador general de Google, de las manifestaciones más frecuentes que presentan los niños con discalculia, así como de las *checklist* que ya existen para la identificación inicial de los síntomas de la discalculia.

2) Proceso de elaboración de los indicadores o ítems

Una vez se ha obtenido un enfoque general de la información necesaria para la creación de la *checklist* a través de la búsqueda bibliográfica, se ha procedido a la elaboración y selección de los ítems que van a formar la lista de cotejo.

Así, en primer lugar, se ha creado un gran banco de ítems para cuya elaboración se han combinado cuatro aspectos:

- Los síntomas más característicos y manifestaciones más comunes de las personas que padecen discalculia expuestos en los estudios que se han realizado a lo largo de la historia de la discalculia acerca de este trastorno. Entre ellos se encuentran el de Aguilar (2014, citado en Fonseca et al., 2019), Kucian y von Aster (2015), Pérez

Pérez et al. (2016), Plerou (2014), Roselli y Matute (2011), Sans et al. (2012), Shalev y Gross-Tsur (2001) y Torresi (2018).

- Las características de las diferentes *checklist* para discalculia que ya existen en la actualidad y que pueden consultarse en abierto. Algunas de ellas han sido creadas por organizaciones sin ánimo de lucro, como es el caso de AchieveAbility National Network (2021) y Discalculia.org (Hamilton-Newman, 2021), o por empresas privadas que ofrecen ayuda con el diagnóstico e intervención en personas con discalculia, como Dyscalculia Services (Schreuder, 2018). Otras se ofrecen en plataformas online de aprendizaje sobre la discalculia, como Dyscalculia.me (2021), Chinn (2019) y NumberDyslexia (Singh, 2020), en páginas web de colegios, como Lafayette Parish School System (2020), o en plataformas online de recursos para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, como Mathematics Shed (2021).

- La estructura de los aspectos que se van a evaluar en los niños de la muestra en dos de los instrumentos de recogida de información de la investigación que se está llevando a cabo en paralelo y ya mencionada con anterioridad: el Test de Discalculia de Smartick (Smartick, 2021) y la escala Maths and Me (MAM) de Adelson (2006, citado en Adelson y McCoach, 2011), adaptada al castellano.

- Los contenidos matemáticos recogidos dentro del *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.*

Tras la recopilación de los ítems, y teniendo en consideración los cuatro aspectos mencionados anteriormente, se ha procedido a realizar un proceso de filtrado de los resultados obtenidos, lo que ha desembocado en la selección de 64 ítems, agrupados en 5 dimensiones que, a su vez, dan lugar a 15 subdimensiones. A continuación, se describen estas dimensiones:

Dimensión 1. Sentido numérico

Los ítems de esta dimensión comprenden aspectos relacionados con la estimación, la subitización, el reconocimiento de números, el conteo, las secuencias numéricas, la comparación de números y cantidades, la recta numérica, la lectura y escritura de

números, el valor posicional, el cálculo mental y escrito y la resolución de problemas aritméticos.

Dimensión 2. Recuperación y procesamiento de la información

Los ítems de esta dimensión están relacionados con la memoria a corto y largo plazo de hechos numéricos, de procedimientos, de conceptos, …

Dimensión 3. Medida

Los ítems de esta dimensión están relacionados con la percepción temporal y la medición del tiempo, así como con el sistema monetario.

Dimensión 4. Visoespacial

Los ítems de esta dimensión comprenden aspectos relacionados con el sentido espacial (visualización, representación, orientación, …).

Dimensión 5. Dominio afectivo

Los ítems de esta dimensión responden a los descriptores básicos del dominio afectivo del aprendizaje matemático (creencias, actitudes y emociones).

3. Proceso de validación de la *checklist*

Seleccionados los ítems de la *checklist*, ésta ha sido sometida a un proceso de revisión a través del proceso conocido como *juicio de expertos*. Esta técnica se ha usado como parte del proceso seguido para el análisis de validez de contenido de la *checklist*. El juicio de expertos se puede definir como “una opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados en éste, y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones” (Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez, 2008, p.29). El procedimiento que se ha seguido para llevar a cabo el juicio de expertos está formado por el conjunto de pasos que Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008) señalan para que el proceso sea más eficiente. Entre ellos se encuentran algunos que ya han sido descritos anteriormente como, por ejemplo, definir el objetivo del juicio de expertos o el propósito, dimensiones e ítems de la *checklist*.

a) Selección de los jueces

La elección de los jueces que habrán de formar parte del juicio de expertos se rige por los siguientes criterios:

- Conocimiento sobre el área a investigar. En este caso, los jueces deben ser conocedores de las características de la discalculia en la etapa de Educación Primaria.

- Cercanía al ámbito educativo. Los jueces deben estar vinculados con la realidad del aula.

- Experiencia profesional de, al menos, 10 años.

Existen diversas opiniones sobre la cantidad adecuada de jueces que debe haber en un juicio de expertos (Urrutia Egaña et al., 2014). En esta investigación se han seleccionado 13 expertos, y se ha tomado como referencia la pertenencia de los mismos a los siguientes ámbitos relacionados con la discalculia:

- Ámbito relacionado con la Psicopedagogía.

- Ámbito relacionado con el profesorado de Educación Primaria.

- Ámbito relacionado con el trabajo con familias que tienen hijos con discalculia o que presentan riesgo de padecerla.

- Ámbito relacionado con la Didáctica de la Matemática.

b) Diseño de la plantilla

El diseño de la planilla que se ha entregado a los jueces para llevar a cabo la evaluación de la *checklist* se ha basado en el modelo propuesto por Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008). En él se muestran cuatro categorías para determinar la validez de contenido de los ítems: claridad, coherencia, relevancia y suficiencia. La valoración de las categorías debía efectuarse de acuerdo con cuatro niveles: 1) No cumple el criterio, 2) Nivel bajo, 3) Nivel moderado, y 4) Nivel alto.

c) Cálculo de la concordancia entre los jueces

Hasta la fecha se ha recibido la respuesta de 8 de los 13 jueces, por lo que no se han analizado aún las valoraciones de los jueces expertos a través de ningún procedimiento estadístico. Lo que sí se ha podido ir analizando son sus respuestas y comentarios desde un punto de vista más cualitativo. Cuando se obtengan las respuestas de todos los jueces se utilizará el coeficiente de Kappa de Fleiss (Fleiss, 1971) para medir el grado de acuerdo entre los evaluadores.

d) Conclusiones del juicio de expertos

Las respuestas de los jueces han sido analizadas y se han ido ejecutando o, al menos, planteando algunos cambios pertinentes con base en sus recomendaciones. La mayoría de los comentarios aportados por los jueces tenían que ver con la claridad de los ítems, por lo que se han ido elaborando propuestas de nuevos enunciados alternativos. Las mejoras propuestas se pueden resumir en tres categorías.

a) Adición de ejemplos para la mejor comprensión del ítem. Por ejemplo, en el *Ítem 13* se solicitaba añadir un ejemplo para el concepto de "valor posicional" y en el *Ítem 11* para la "estructura de la recta numérica".

b) Aclaración de algunos términos del enunciado del ítem. Por ejemplo, en el *Ítem 5* se ha añadido "("cuatro" para referirse al 4)" para aclarar el término "número-palabra".

c) Modificación de la redacción del ítem o de parte de él para aumentar su claridad. Por ejemplo, el *Ítem 46* estaba redactado de la siguiente manera: "Mala presentación de los trabajos en papel o en el libro de matemáticas". Se ha modificado para que no se confundiera con una presentación simplemente sucia o poco cuidada.

Los aspectos relacionados con la suficiencia, coherencia y relevancia serán atendidos más adelante, cuando se hayan recibido las valoraciones de todos los jueces. En todo caso, sí podemos decir en este momento que, en lo concerniente a la suficiencia, uno de los jueces ha propuesto la incorporación de un ítem sobre la dificultad con las unidades de medida. Por otra parte, en relación con la coherencia,

algunos jueces han propuesto el cambio de ubicación en dimensiones de algún ítem. Finalmente, en relación con la valoración de relevancia, la mayoría de los ítems han recibido la mayor valoración, es decir, han sido considerados como muy relevantes.

4. Resultados

A continuación, se presenta la *checklist* provisional formada por 64 síntomas agrupados en 5 dimensiones y 15 subdimensiones.

CHECKLIST PARA DETECTAR LOS SÍNTOMAS DE RIESGO DE DISCALCULIA

Dimensión sentido numérico

Estimación y subitización

1. Le resulta complicado estimar el cardinal de una colección, es decir, realizar una aproximación al valor total de elementos de una colección sin recurrir al conteo o a procedimientos de cálculo exacto.

2. Se equivoca con frecuencia a la hora de reconocer de un golpe rápido de vista (subitizar) el cardinal de una colección pequeña de objetos (hasta 5).

3. Le resulta complicado indicar dónde hay más elementos al comparar visualmente dos colecciones diferentes, sin posibilidad de manipular las mismas.

4. Tiene dificultad para posicionar de forma aproximada los números en una recta numérica sin marcas.

Numeración y conteo

5. Tiene problemas para reconocer algunos números cuando se presentan como número-palabra (“cuatro” para referirse al 4), de forma oral o escrita.

6. Tiene dificultad para comparar u ordenar números (identificar el número mayor o menor, ordenar por tamaño, …).

7. Tiene dificultad para cambiar de una representación numérica a otra (de simbólica a verbal, de decimal a fraccionaria, …). Por ejemplo, del 3 (dígito arábigo) a “tres” (palabra numérica verbal).

8. Tiene dificultad para contar objetos con precisión. Por ejemplo, carece de la capacidad de hacer "correspondencia uno a uno", deja algún objeto sin contar, no dice la secuencia numérica en el orden correcto, …

9. No es capaz de contar un conjunto de elementos sin recurrir a los dedos o a movimientos ostensivos de la cabeza.

10. Tiene dificultad para aprender, procesar, memorizar o construir secuencias numéricas (contar hacia atrás, contar de 2 en 2, de 5 en 5…).

11. Tiene dificultad para entender la estructura de la recta numérica, es decir, el posicionamiento de los números, la distancia entre los puntos, …

12. Al escribir, leer y recordar números, comete algunos errores comunes: suma de números, sustituciones, transposiciones, omisiones y reversiones. Por ejemplo: 3 = Ɛ; 6 = 9; 25 = 52; 208 = 280, 16 = 17.

13. Tiene dificultad para entender el valor posicional de los números de forma hablada o escrita. Por ejemplo, escribe el número 1324 de la siguiente forma: 1000300204 o piensa que el número 29 es mayor que 31.

14. Tiene dificultades para componer y descomponer números naturales.

15. Comete frecuentes errores al comparar y usar fracciones en situaciones sencillas como, por ejemplo, identificar que 1/20 es más pequeño que 1/2.

16. Tiene problemas para entender lo que representa un porcentaje.

17. Tiene problemas para leer o escribir números decimales.

Cálculo mental y escrito

18. Tiene poca habilidad para realizar operaciones aritméticas básicas en comparación con los niños de su edad/curso.

19. Tiene dificultad para reconocer y comprender los símbolos matemáticos (>, <, =), en particular los símbolos propios de las operaciones aritméticas (+, -, x, /).

20. Tiene dificultad para aplicar estrategias básicas de cálculo, por ejemplo, utilizar la recta numérica, descomponer los números, comenzar la realización de una suma con la adición desde el número mayor, …

21. Suele utilizar estrategias de cálculo inmaduras. Por ejemplo, persiste en usar los dedos más allá de su uso en los inicios del cálculo.

22. No reconoce las relaciones entre las sumas y las restas. Por ejemplo, la relación inversa, 3 + 7 = 10 y a su vez, 10 - 3 = 7 y 10 - 7 = 3.

23. No reconoce las relaciones entre las multiplicaciones y las divisiones. Por ejemplo, la relación inversa, 2 x 4 = 8 y a su vez, 8 / 2 = 4 y 8 / 4 = 2.

24. No coloca adecuadamente los dígitos de los sumandos o del minuendo y sustraendo cuando realiza sumas y restas en vertical.

25. Tiene dificultad para resolver cálculos mentales cuando alguno de los números tiene 2 o más cifras (15 + 8). Se confunde o es lento/a.

26. Ha tardado más en aprender a realizar operaciones aritméticas básicas que otros niños de su misma edad/curso.

27. Prefiere el cálculo escrito al cálculo mental incluso en situaciones en las que es más natural, rápido o sencillo el segundo. Por ejemplo, en 6 x 19 es más rápido calcular 6 x 20 y restarle 6.

Resolución de problemas aritméticos

28. Tiene dificultad para organizar la información, seleccionar las estrategias y ejecutarlas de forma ordenada al resolver un problema aritmético.

29. Tiene dificultad para traducir un enunciado de un problema aritmético a lenguaje matemático.

Uso de la calculadora

30. Al usar la calculadora tiene dificultad para seleccionar el dígito apropiado o las teclas necesarias para llevar a cabo la operación.

31. Al usar la calculadora tiene dificultad entre la fase de lectura en el papel y la transferencia de los datos a la calculadora.

Dimensión recuperación y procesamiento de la información

Memoria

32. Olvida las instrucciones que se le han dado, dificultando o ralentizando el inicio de la tarea que se le ha encomendado.

33. Olvida la pregunta formulada en ejercicios de cálculo mental (¿Cuáles eran los números? / ¿Me puedes repetir?).

34. “Olvida” las llevadas en operaciones aritméticas en las que hace uso de ellas (¿Cuántas me llevaba?).

35. Tiene dificultad para comprender y recordar conceptos matemáticos, reglas, fórmulas o secuencias (orden de operaciones).

36. Tiene dificultad para memorizar hechos numéricos básicos de suma o de restas pequeñas (8+2 = 10, 3+4 = 7, 10-5, 3-1, …).

37. Tiene dificultad para memorizar hechos numéricos básicos de multiplicación o de división con números pequeños (en particular, las tablas de multiplicar).

38. Se olvida de los procedimientos matemáticos totalmente o parcialmente, especialmente a medida que se vuelven más complejos, como, por ejemplo, los pasos de una división "larga".

39. Tiene dificultad para llevar la puntuación en los juegos o pierde la noción de quién es el turno.

Dimensión medida

Percepción y métrica temporal

40. Se equivoca con frecuencia al ordenar secuencias temporales.

41. Tiene dificultad para leer y entender la hora en los relojes analógicos.

42. Tiene dificultad para leer y entender la hora en los relojes digitales.

43. Tiene dificultad para identificar y distinguir conceptos temporales (horas, días, semanas, meses).

Sistema monetario

44. En el sistema monetario tiene dificultad para comprender el concepto de "vuelta/cambio".

45. Tiene dificultad para manejar el sistema monetario: equivalencias, cambios de unidades, expresiones con unidades y subunidades (ej.: euros y céntimos).

Dimensión visoespacial

Presentación y uso de información

46. Presentación desordenada, caótica o confusa de procedimientos matemáticos en su cuaderno. Por ejemplo, se pierde con el orden de los ejercicios o al escribir desarrollos algebraicos.

47. Tiene dificultad para copiar o redactar instrucciones matemáticas o para dibujar objetos matemáticos.

48. Le resulta difícil pasar de utilizar ayudas concretas (dedos, bloques, objetos) a utilizar sólo números como símbolos.

49. Comprende la información numérica cuando esta es presentada a través de elementos manipulativos o visuales, pero no cuando se presenta de forma oral o escrita.

Formas

50. Tiene dificultad con imágenes espaciales cuando se presentan formas en 3D con representaciones en 2D en comparación con otros niños de su edad/curso.

51. Tiene dificultad para reconocer objetos en 3D desde diferentes perspectivas.

Orientación

52. Manifiesta problemas o dificultades para la orientación espacial en comparación con otros niños de su edad/curso. Por ejemplo, con las nociones espaciales

(delante-detrás, encima-debajo, izquierda-derecha, ...), la percepción del espacio y la distancia, la situación y movimiento en un espacio, el uso de coordenadas, …

53. Manifiesta problemas o dificultades para leer mapas, gráficos y tablas en comparación con otros niños de su edad/curso.

54. Tiene poca capacidad para localizar la ubicación de un objeto a partir de información sobre su posición con respecto a otros objetos o respecto a uno mismo.

Dimensión dominio afectivo

Ansiedad matemática

55. Manifiesta malestar o temor ante las matemáticas escolares.

56. Muestra signos de ansiedad al enfrentar tareas relacionadas con las matemáticas (inquietud, sudoración, respiración agitada, …).

Autoestima y autoconcepto

57. Piensa que no es capaz de resolver problemas o tareas relacionadas con las matemáticas como los otros niños de su edad/curso.

58. Piensa que las matemáticas no son lo suyo.

59. Piensa que las matemáticas son demasiado difíciles para él/ella.

Percepción de utilidad de las matemáticas

60. Piensa que las matemáticas no sirven para nada o son poco útiles.

61. No reconoce la utilidad o presencia de las matemáticas fuera del aula de matemáticas.

Actitudes hacia las matemáticas

62. Muestra una actitud negativa hacia las matemáticas en clase o fuera de ella.

63. Manifiesta que las matemáticas no le gustan o que le parecen aburridas.

64. Evita realizar actividades relacionadas con las matemáticas.

5. Consideraciones finales

Todos los alumnos deben tener la oportunidad de aprender de acuerdo con sus necesidades y habilidades, por lo que es necesario que los niños con riesgo de padecer discalculia sean identificados lo antes posible. La contribución que se pretende realizar con esta investigación responde a la necesidad de poseer dentro del ámbito educativo un instrumento que permita al propio profesorado detectar cuanto antes signos que presentan los niños que puedan apuntar a un posible diagnóstico de discalculia, esto es, identificar posibles riesgos de discalculia. De este modo, el profesor podrá reportar este posible riesgo de sus alumnos a los profesionales que sí pueden proceder con un diagnóstico completo y detallado y comenzar lo antes posible los procesos de intervención educativa, cuando proceda. Desafortunadamente, el conocimiento actual del profesorado sobre este trastorno parece ser escaso o muy limitado, de manera que el uso de una *checklist* como la que se presenta podría facilitar un acercamiento al trastorno además de una herramienta sencilla para una identificación temprana de los posibles síntomas.

La discalculia, además de interferir en el rendimiento académico, también lo hace en las actividades de la vida cotidiana que requieren el uso de las matemáticas. Por este motivo, se ha diseñado también una *checklist* dirigida a los familiares, ya que dentro del ámbito familiar se pueden identificar estos síntomas relacionados con la discalculia en las actividades de la vida diaria. Esta segunda *checklist* se encuentra en proceso de validación y se pretende que pueda servir de complemento a los resultados obtenidos con la *checklist* del profesorado.

En conclusión, el instrumento creado como resultado de la presente investigación, tras la correspondiente futura prueba piloto, pretende servir de ayuda y contribuir a una mayor y más precoz detección por parte del profesorado de Educación Primaria del riesgo de discalculia presente en su aula.

Referencias bibliográficas

AchieveAbility National Network (2021). AchieveAbility Interventions: A Framework for Whole Class Learning drawn from SpLD Work. *Checklist* for signs of SpLD. Recuperado el 2 de febrero de 2021 de https://bit.ly/385ncH6

Adelson, J. L. y McCoach, D. B. (2011). Development and psychometric properties of the math and me survey: Measuring third through sixth graders' attitudes toward mathematics. *Measurement and Evaluation in Counseling and Development*, *44*(4), 225-247. https://doi.org/10.1177/0748175611418522

Butterworth, B., Varma, S. y Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: from brain to education. *Science, 332*, 1049-1053. https://doi.org/10.1126/science.1201536

Chinn, S. (2019). *The dyscalculia checklist*. Recuperado el 8 de febrero de 2021 de https://bit.ly/3uRuXtO

Consejería de Educación. (2016, 25 de julio). *Decreto 26/2016, de 21 de julio, por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León. Boletín Oficial de Castilla y León*, 142, 34184-34746. https://bit.ly/2NW91x6

Coronado-Hijón, A. (2015). Construcción de una lista de cotejo (*checklist*) de dificultades de aprendizaje del cálculo aritmético. *Revista española de pedagogía*, *73*(260) 91-104.

Dyscalculia.me (2021). *Dyscalculia Test - does my child have Dyscalculia?* Recuperado el 2 de febrero de 2021 de https://bit.ly/3kD64xs

Escobar-Pérez, J. y Cuervo-Martínez, Á. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en medición, 6,* 27-36.

Espina, E., Marbán, J.M. y Maroto, A.I. (2022). Una mirada retrospectiva a la investigación en discalculia desde una aproximación bibliométrica. *Revista de Educación, 396*, 205-234. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2022-396-535

Fleiss, J. L. (1971). Measuring nominal scale agreement among many raters. *Psychological Bulletin, 76*(5), 378-382.

Fonseca, F., López, P. Á. y Massagué, L. (2019). La discalculia un trastorno específico del aprendizaje de la matemática. *Roca: Revista Científico-Educaciones de la provincia de Granma, 15*(1), 212-224.

Hamilton-Newman, R. M. (2021). *Dyscalculia Checklist*. Dyscalculia.org. Recuperado el 8 de febrero de 2021 de https://bit.ly/3e12WKx

Junquero, A. B. (2019). Estudi sobre l'origen de la discalcúlia: Reflexions sobre possibles vies de correcció a l'aula. *Temps d'Educació,* (56), 183-205. http://dx.doi.org/10.1344/TE2019.56.11

Kucian, K. y von Aster, M. (2015). Developmental dyscalculia. *European journal of pediatrics, 174*(1), 1-13.

Lafayette Parish School System. (2020). *Dyscalculia checklist*. Recuperado el 4 de febrero de 2021 de https://bit.ly/2NVHWtX

Lawshe, C. H. (1975). A quantitative approach to content validity. *Personnel Psychology, 28*, 563-575.

Mathematics Shed (2021). *Dyscalculia Guidance*. https://bit.ly/3066dQi

Ministerio de Educación y Formación Profesional. Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado,* 2 de marzo de 2022, 52, 24386-24504.

Mundia, L. (2012). The assessment of math learning difficulties in a Primary Grade-4 child with high support needs: mixed methods approach. *International Electronic Journal of Elementary Education, 4*(2), 347-366.

Pérez Pérez, E., Bermúdez López, I., y Dorta Álvarez, N. (2016). La discalculia, como uno de los trastornos específico del aprendizaje. *Revista Conrado, 12*(52), 130-138.

Plerou, A. (2014). Dealing with Dyscalculia over time. *ICICTE*, *2008*, 1-12.

Roselli, M., y Matute, E. (2011). La neuropsicología del desarrollo típico y atípico de las habilidades numéricas. *Revista neuropsicología, neuropsiquiatría y neurociencias, 11*(1), 123-140.

Sans, A., Boix, C., Colomé, R., López-Sala, A., y Sanguinetti, A. (2012). Trastornos del aprendizaje. *Pediatría Integral*, *16*(9), 691-699.

Schreuder, A. (2018). *Dyscalculia Screening Checklist.* Dyscalculia Services. https://bit.ly/3sXh4sz

Shalev, R. S. y Gross-Tsur, V. (2001). Developmental dyscalculia. *Pediatric neurology, 24*(5), 337-342.

Singh, M. (11 de agosto de 2020). Dyscalculia *Checklist*: Signs to look for. *NumberDyslexia*. https://bit.ly/2OmHftG

Smartick (2021). *Test de Discalculia de Smartick.* Recuperado el 24 de febrero de 2021 de https://bit.ly/3rbVikh

Torresi, S. (2018). Discalculia del Desarrollo (DD). *Revista de Psicopedagogía, 35*(108), 348-356.

Urrutia Egaña, M., Barrios Araya, S., Gutiérrez Núñez, M. y Mayorga Camus, M. (2014). Métodos óptimos para determinar validez de contenido. *Educación Médica Superior*, *28*(3), 547-558.

Col003 Matemáticas para todos

Montserrat Torra Bitlloch
mtorra12@xtec.cat
Sílvia Margeli Voelp
smargeli@xtec.cat
Enric Castellá Carlos
ecaste56@xtec.cat
CESIRE

Núcleo temático: Inclusión, Formación del profesorado

Modalidad: Comunicación

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

La comunicación **Matemáticas para todos** aporta información sobre cómo abordar el aprendizaje de las matemáticas de forma que la diversidad de formas de aprender y niveles de razonamiento que conviven en una clase, no sea un problema sinó una riqueza para el conjunto. Partimos de la base que no solo todos pueden aprender matemáticas sinó que *es imprescindible* que todos aprendan matemáticas para ser ciudadanos autónomos y críticos y este ha de ser nuestro objetivo en el periodo de la educación básica. Nos centraremos básicamente en tres propuestas:

1- Valorar las estrategias personales y compartirlas.

2- Diseñar propuestas en las que todos puedan trabajar en el mismo tema y todos aprendan, y

3- Considerar el aprendizaje como una trayectoria entre un nivel y el siguiente en él que se construye conocimiento y se asegura la comprensión.

Mostraremos ejemplos aplicados a distintas edades.

***Palabras clave**: Inclusión, Trayectoria, Conversación*

1. ¿Todos pueden aprender matemáticas?

Aunque el comentario “yo no sirvo para las matemáticas” o “a él no se le dan bien las matemáticas” se escucha con mucha frecuencia, no se han encontrado, hasta el momento, características distintas para aprender matemáticas de la que permiten aprender otras materias.

Por otra parte, saber matemáticas resulta imprescindible para ser un ciudadano autónomo y este, como señala el currículum, es uno de los objetivos de la Educación Básica: “Lograr que todas y todos los jóvenes alcancen su máximo desarrollo integral, en un contexto de igualdad de oportunidades, adquiriendo las competencias que les permitirán desenvolverse con garantías en la sociedad global de las próximas décadas”.

En la gran mayoría de clases encontramos alumnado con distintos niveles de desarrollo y formas de aprender. No todo el mundo construye el conocimiento matemático de la misma forma ni al mismo ritmo y es importante que cada cual lo construya desde su experiencia y su particular forma de procesar y representar la información y las situaciones, para que tenga sentido. A menudo es la forma de enseñar matemáticas la que lleva a una parte del alumnado a pensar que aunque no tenga problemas en otras materias, incluso destaque en algunas, no consiga comprender las matemáticas con facilidad.

Necesitamos conocer mejor cómo ayudar a construir matemáticas a todos, no solo a aquellos que ya tienen una forma rápida de aprender y de procesar el conocimiento y facilidad para la abstracción, sino también a los que recurren a representaciones simbólicas, necesitan utilizar materiales manipulables para razonar o recurren a la representación visual para resolver situaciones. Para atender a los más rápidos y a los más lentos y también a los que en algún momento dejaron de confiar en sus posibilidades.

Con este objetivo hemos seleccionado tres aportaciones de la investigación que ayudan a concretar líneas de intervención que nos acercan a nuestro objetivo y

ofrecen propuestas claras para iniciar este camino y alcanzar el objetivo que todos aprendan.

1.1 Hablar, compartir cómo aprendemos matemáticas.

La primera propuesta consiste en hablar en grupo sobre cómo resolvemos personalmente problemas y situaciones matemáticas. Éste es un tema que desarrolla muy claramente Jo Boaler en la Universidad de Stanford, con el objetivo de reforzar la identidad del alumno como aprendiz con unas características personales valiosas, que pueden contribuir al aprendizaje del grupo.

Conversar para compartir en grupo la forma de resolver una situación matemática tiene un gran impacto en el aprendizaje. En primer lugar, para compartir hay que reflexionar, hacerse consciente de qué se ha pensado, y comunicarlo con el fin de que otros lo comprendan. En muchas ocasiones este paso aporta, en primer lugar, conocimiento sobre las propias formas de pensar y de resolver problemas. Explicar a los demás como se ha resuelto obliga, al mismo tiempo, a ordenar las acciones, a traducir a palabras los hechos, las acciones, los pensamientos, las impresiones… para que los demás comprendan como se llegó a la solución.

Conversar sobre cómo se ha pensado y llegado a una solución tiene pues interés por sí mismo. Sin embargo, no vamos a quedarnos solo con esto. El papel del maestro ayudando a la concreción, valorando las explicaciones y aceptando formas de proceder personales, tiene una gran importancia para quien recibe la ayuda, además de una gran influencia en los compañeros. La aceptación de formas de resolución inéditas envían un mensaje de respeto por las estrategias personales que anima al resto a confiar en las suyas.

Compartir distintas formas de resolver un mismo problema entre compañeros, también contribuye al interés por las aportaciones de los demás, al reconocimiento de formas de proceder que abren nuevas formas de mirar una misma situación y a la valoración de aportaciones que han contribuido a la comprensión y la construcción de conocimientos. Es un momento en el cual se está especialmente

receptivo y en el cual tiene sentido comparar una resolución más visual con otra basada por ejemplo en la composición o descomposición o muy relacionada con el contexto. Probablemente en otras ocasiones tendrán presentes algunas de estas formas de resolución que le ofrecieron sus compañeros.

A través de la conversación se cohesiona el grupo, se aprende a respetar las formas de proceder y de pensar de los demás, se abre un mundo de posibilidades de ver y realizar las cosas de maneras diferentes, se identifican conexiones entre situaciones que parecían independientes y se construye un conocimiento cada vez más sólido.

Es pues un camino en el que transitar, para trabajar con la idea de que todos pueden aprender matemáticas, y que no existe una única forma válida de plantear y resolver los problemas matemáticos

1.2 Trabajar todos con las mismas actividades

Aunque existan diferencias notables de conocimiento entre unos alumnos y otros, es importante, para todos, trabajar en los mismos temas. Esta es la propuesta que realizan desde NRICH en la Universidad de Cambridge.

Se trata de diseñar actividades de aprendizaje en las que todos los alumnos de una clase se puedan incorporar, ya que la dificultad de la actividad les permite incorporarse, y todos encuentren, en algún momento, dificultades. Unos antes y otros después, pero todos deben encontrar dificultades, de lo contrario no se producirá aprendizaje.

Nos encontramos de nuevo ante una propuesta basada en compartir, en aprender unos de otros y en desarrollar el conocimiento de forma no predeterminada, si no en la que decidan individualmente o en grupo.

Diseñar actividades de aprendizaje con estas características implica seleccionar una franja de conocimientos que incluya las características del grupo al que se dirige la propuesta, y realizar una pregunta que puedan abordar los que en el momento de realizar la actividad tienen más dificultades. Probablemente los demás la resolverán

más rápido, por este motivo tendremos preparadas nuevas preguntas sobre el mismo tema para que sigan trabajando en un nivel un poco superior. De esta forma se pueden tener, al poco tiempo, todo el alumnado trabajando en un mismo tema a distintos niveles de dificultad. Finalmente se cerrará la actividad recogiendo las respuestas de todo el mundo cuidando de presentar el resultado como un proceso en él que han trabajado todos y en él que los aprendizajes de todos tienen sentido.

Es importante considerar no tan solo el grado de dificultad sino también, si existen en el grupo distintos grados de capacidad para organizar el trabajo, o distintas maneras de procesar la información o de expresarse. Estas y otras características pueden llevar a distintas resoluciones y ritmos diferentes de ejecución.

¿Qué conseguimos con esta forma de trabajar? En primer lugar mostrar con hechos que todos forman parte del grupo, y que como maestros estamos convencidos que todos pueden aprender. Y lo demostramos asegurando y acompañando la resolución del problema en el nivel más básico y dando confianza y espacio para un trabajo más autónomo a los demás, y ayudando también a los que inicialmente eran autónomos cuando lleguen a un determinado nivel, en el què surja una dificultad,

Por otra parte queremos conseguir que los que tienen más conocimientos y trabajan con más soltura tengan siempre a mano material para manipular, o representar si les puede ayudar a seguir avanzando y que los que están en niveles más iniciales tengan el estímulo de ver dónde podrán llegar trabajando duro y después de algún tiempo.

Es importante que todos tengan el convencimiento de que han trabajado, que han aprendido y que su aportación ha contribuido al conocimiento final.

Podemos encontrar modelos de este tipo de actividades y de cómo gestionarlas en la página web de NRICH, sin embargo para planificar y conducir estas actividades es necesario conocer las trayectorias más habituales de aprendizaje y en esta línea va la siguiente aportación.

1.3 Entender el aprendizaje como una Trayectoria

El currículum señala unos conocimientos a trabajar y unas competencias a alcanzar, y los niños siguen progresiones naturales para desarrollar el aprendizaje. En el transcurso del recorrido se va construyendo nuevo conocimiento a partir del existente y fundamentado en la vivencia y la experiencia personal.

No hay un único recorrido, una trayectoria, igual para todo el mundo, aunque sí unos recorridos más frecuentes que otros. Se pueden seguir distintas trayectorias con un mismo objetivo. Todas ellas parten del nivel de conocimiento aprendido y tienen por objetivo alcanzar el siguiente.

El camino está marcado y en matemáticas sigue siempre la dirección desde lo más concreto hacia lo abstracto, dando los pasos necesarios para no perder la comprensión. Para progresar, es preciso comprender la diferencia entre un estadio y el siguiente y la dificultad que representa para los niños en un momento determinado de su evolución ayudando así a salvar la dificultad y desarrollar la necesaria comprensión.

Resulta de gran ayuda conocer la trayectoria más común para alcanzar un grado de desarrollo, que permita acceder a un nuevo grado de complejidad en un tema determinado. Se trata de ayudar a comprender, a dar sentido a nuevos conocimientos, no solo de repetir hasta mecanizar. El aprendizaje de la numeración por ejemplo, nos ofrece un buen ejemplo, es preciso recorrer un camino, a veces bastante largo para comprender que en el número 11 la primera cifra indica una decena y la segunda una unidad. Simplemente cambia el valor de la cifra al cambiar la posición. Conocer y recorrer estas trayectorias asegura un conocimiento sólido sobre el què se puede continuar construyendo el sistema de numeración decimal.

Existe una propuesta completa de las trayectorias en el aprendizaje de las matemáticas entre 0 y 8 años realizada por Doug Clements y Julie Sarama que después de años de investigación, no solo describen las distintas trayectorias, sinó que además, ofrecen descripciones de actividades y materiales para fomentar el paso entre un nivel de aprendizaje y el siguiente.

El uso de materiales manipulables, la presentación de situaciones en contexto, la experimentación y las conversaciones entre ellos sobre el tema, son de gran ayuda. La concepción del aprendizaje como una trayectoria hacia un conocimiento más abstracto y la importancia que tiene consolidar un aprendizaje para hacer posible la trayectoria es también fundamental.

Referencias

- Doug Clements y Julie Sarama **https://www.learningtrajectories.org/**
- Jo Boaler Universidad Stanford https://www.youcubed.org
- Universidad de Cambridge http://nrich.maths.org

Col005 Actividades manipulativas y figurativas para la comprensión profunda en Educación Primaria

Juan José Santaengracia (1)
juanjosesantaengracia@gmail.com (1)
Universidad de Valladolid (1)
Belén Palop (2)
belen.palop@uva.es (2)
Universidad de Valladolid (2)

Núcleo temático: Inclusión, recursos para el aula.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Primaria.

RESUMEN

En esta comunicación se describen cinco propuestas de aula que nos pueden servir para apoyar la filosofía el diseño universal de aprendizaje, es decir, que pueden llevarse a cabo en cualquier aula pero, de manera específica, buscan favorecer el desarrollo matemático y la inclusión de las personas con dificultades de aprendizaje en matemáticas. Este factor inclusivo, más que las actividades en sí, está fundamentado en la literatura especializada. Así, todas las propuestas se apoyan en el enfoque concreto-pictórico-abstracto, cuyo uso está ampliamente respaldado para personas con las mencionadas dificultades. Las actividades que se proponen han sido puestas a prueba con personas tanto con dificultades como neurotípicas, obteniendo siempre una mejora tanto en su competencia matemática como en su dominio afectivo por las matemáticas.

Palabras clave: Actividades Inclusivas, Dificultades de Aprendizaje en matemáticas, Diseño Universal de Aprendizaje, Competencias Básicas, Enfoque CPA.

1. Introducción

Encontrar alumnado con Dificultades de Aprendizaje en Matemáticas (DAM) en el aula puede suponer un reto para los docentes a la hora de programar actividades

adecuadas. Por una parte, no se quiere señalar a ese tipo de personas preparando actividades que sean exclusivas para ellos, segregándolos respecto al resto de la clase, mientras que, por la otra, no suelen encontrarse propuestas adecuadas para conseguir una inclusión real.

Para resolver este problema, surge de forma natural la necesidad de utilizar un Diseño Universal de Aprendizaje (DUA), es decir, la necesidad de utilizar determinadas actividades que estén adaptadas a las necesidades específicas de las personas con DAM y que, al mismo tiempo, sean beneficiosas para el resto de la clase.

En este trabajo se propone un pequeño conjunto de actividades basadas que, bajo el enfoque concreto-pictórico-abstracto, permiten trabajar, afianzar y reforzar algunos conceptos matemáticos básicos de Educación Primaria. Estas actividades están orientadas de forma específica a atender las necesidades de las personas con DAM, pero también han sido diseñadas con la perspectiva de un DUA, por lo que son adecuadas para trabajar en cualquier aula con todo el alumnado.

2. Marco teórico:

2.1 Dificultades de aprendizaje en matemáticas

El concepto Dificultades de Aprendizaje en Matemáticas (DAM) hace referencia a aquellas situaciones en las que una persona no ha sido capaz de alcanzar el nivel de competencia matemática esperado. Teniendo origen en el término inglés *mathematical disabilities (*discapacidad matemática*),* se ha evolucionado hasta *mathematical learning disabilities* (discapacidad en el aprendizaje de las matemáticas), poniendo el foco no solo en la persona sino también en el proceso (Geary, 1993, 2011).

El constructo de las DAM tiene numerosas definiciones según diferentes autores (véanse los trabajos de Kaufmann et al. (2013) y Temple (1997)), pero en este trabajo utilizaremos los constructos teóricos expuestos por Rubinsten & Henik (2009) y Friz Carrillo et al. (2009) en los que se propone la existencia de DAM

cuando una persona que no tenga un CI bajo ni una escolaridad irregular presenta un bajo rendimiento en el área de matemáticas.

Las DAM se asocian habitualmente al campo de la numeración y se manifiestan en forma de problemas con el conteo, con la representación de datos y con la codificación de la información. También son frecuentes los problemas asociados a déficits visuales, tales como dificultades a la hora de situar en columnas los números, así como los asociados a trastornos del lenguaje, que se manifiestan especialmente a la hora de resolver problemas (García, 2001).

Para abordar estos problemas, se recomienda trabajar de forma individualizada, conociendo las dificultades particulares de cada individuo. Es fundamental dotar a estas personas de herramientas para cumplir con los estándares curriculares, ya que esto no solo logrará un aumento de su competencia matemática, sino que permitirá que ellos mismos se sientan más competentes, mejorando su dominio afectivo hacia las matemáticas (Sans et al., 2012; Serra Grabulosa, 2014).

Según Sans et al. (2017), las competencias a abordar con estas personas deben estar enfocadas, fundamentalmente, en la comprensión del sistema de numeración posicional mediante los conceptos de unidad, decena y centena; la representación y creación de una línea numérica (física y mental) que comience con cifras pequeñas que aumenten poco a poco; la comprensión de las operaciones básicas mediante distintos formatos y el sistema numérico simbólico mediante materiales manipulativos, figurativos y abstractos. Además, estas competencias deben estar enmarcadas dentro de los principios de Ausubel (1968) y Vygotsky (1931), tratando de partir de los conocimientos previos del alumnado y situándolos en su zona de desarrollo próximo.

Metodológicamente, Sanguinetti & Serra Grabulosa (2015), proponen que las adaptaciones para trabajar con personas con DAM deben incluir: Una mayor cantidad de tiempo, uso de materiales para modelizar, trabajo multisensorial, uso de formatos cuadriculados, modelizaciones y esquematizaciones de conceptos y revisión de errores.

A partir de todas estas recomendaciones metodológicas surge la necesidad de encontrar un modelo que nos permita juntarlas y poder ponerlas en práctica: el modelo Concreto-Pictórico-Abstracto (CPA).

2.2 Modelo CPA

El modelo o enfoque CPA surge a partir de las ideas de Bruner, postulando que el docente debe ser el creador de situaciones problema a partir de las cuales se estimule el pensamiento del alumnado y en las que se favorezcan las relaciones entre conceptos matemáticos (Alonso Tello et al., 2013).

Según Espinoza et al. (2016), Este modelo propone una secuencia de trabajo en la que se distinguen 3 fases:

1. Una fase concreta, manipulativa, en la que el alumnado experimenta y reconoce el objeto matemático mediante modelos reales y tangibles que lo representan

2. Una fase pictórica o figurativa en la que se realiza una representación dibujada del propio objeto matemático.

3. Una última fase abstracta en la que se usan los símbolos socialmente asociados a los objetos matemáticos

Esta secuencia tiene como fin estimular el entendimiento y el pensamiento profundo para alcanzar la comprensión de los objetos matemáticos a estudiar, así como de los algoritmos que puedan utilizarse, logrando un aprendizaje significativo de la materia y dejando de lado la memorización y la mecanización (Fonseca et al., 2017; López, 2017).

Este modelo, si bien es válido y útil para cualquier persona, tiene un enorme potencial para las personas con DAM. Como se ha visto anteriormente, las personas con DAM suelen tener dificultades con la abstracción, por lo que un modelo que permite una comprensión profunda del objeto matemático de forma previa puede convertirse en una herramienta metodológica muy eficaz para abordar las competencias necesarias. Además, este enfoque está alineado con las

recomendaciones propuestas por autores como Sanguinetti & Serra Grabulosa (2015).

3. Propuestas

Las 5 propuestas que se presentan están basadas en las recomendaciones metodológicas y didácticas expuestas anteriormente, y hemos podido observar mejoras tanto en el aprendizaje y la afectividad por la materia tanto con alumnos con DAM como con alumnos neurotípicos.

Para cada una de las propuestas se indicará la edad recomendada para alumnos neurotípicos, la forma de implementarla, el análisis de su potencialidad, la forma en la que se atiende a las DAM y algunas recomendaciones.

A continuación, se puede ver una tabla resumen de las 5 actividades que se proponen. Posteriormente se desarrolla cada una de ellas.

Actividad	Contenidos	Momento de uso	Edad recomendada
La carrera	Representaciones estadísticas. Probabilidad. Conteo.	Introducción	A partir de 3º/4º de EP
Presentación de la división	División como reparto División como agrupación Multiplicación Conteo	Introducción	A partir de 2º de EP
Los cuadrados	Multiplicación Área/Superficie Divisores y factores primos	Desarrollo	A partir de 2º de EP
La escoba	Suma de números hasta el	Desarrollo	Toda la etapa de

	15 Subitización Conteo Estrategias de cálculo		EP
El dibujo	Conteo Estrategias de cálculo Multiplicación Representación de datos estadísticos	Desarrollo	Toda la etapa de EP

3.1 Actividades de introducción

Las actividades de introducción buscan crear situaciones motivadoras para el descubrimiento guiado de nuevos contenidos. Se propone arrancar habitualmente este tipo de sesiones con representaciones manipulativas y/o figurativas.

Actividad 1. La carrera

Edad recomendada: A partir de 3º y 4º de Primaria, momento en el que el alumnado es capaz de iniciar con este juego la construcción del concepto de probabilidad en una situación de azar. También se alinea con el currículum en el bloque de Estadística, dado que se trabaja de manera contextualizada la construcción de gráficos de barras.

Competencias

- Utiliza plantillas para anotar y hacer el recuento posterior de los resultados obtenidos, en observaciones sistemáticas.
- Interpreta gráficos sencillos (diagramas de barras).
- Identifica las situaciones de carácter aleatorio como aquellas en las que interviene el azar y realiza estimaciones sobre los resultados de algunos

juegos (monedas, dados, cartas, etcétera).

Desarrollo

Jugadores: 2 o más

Materiales: Dos dados de 6 caras y policubos/ábaco o una hoja cuadriculada.

Si usamos los policubos o el ábaco hemos de asegurarnos de disponer de, al menos, 11 columnas, una para cada número del 2 al 12. En una mesa dispondremos los números del 2 al 12 en orden creciente en el eje horizontal.

Si utilizamos la hoja cuadriculada debemos dibujar dos ejes. En el eje vertical es suficiente con tener de 10 a 20 marcas, mientras que en el horizontal pondremos los números entre el 2 y el 12 (fijar estos números puede darnos una conversación previa muy rica en sí misma, razonando con el alumnado sobre el rango de posibles resultados para la suma de dos dados).

Antes de empezar la partida, cada jugador escoge el “dorsal” de un corredor. El juego consiste en tirar los dados y poner un policubo/pintar un cuadrado en la columna correspondiente a la suma de los dados. El ganador será el primero en rellenar su columna hasta el máximo establecido.

Análisis

Si bien en esta actividad se trabaja la suma de pequeñas cantidades y el conteo, su mayor potencial radica en su conexión con la introducción a la probabilidad y la estadística. Como se puede apreciar en la Figura 1, los resultados de la “carrera” forman un diagrama de barras con la frecuencia con la que ha salido cada número.

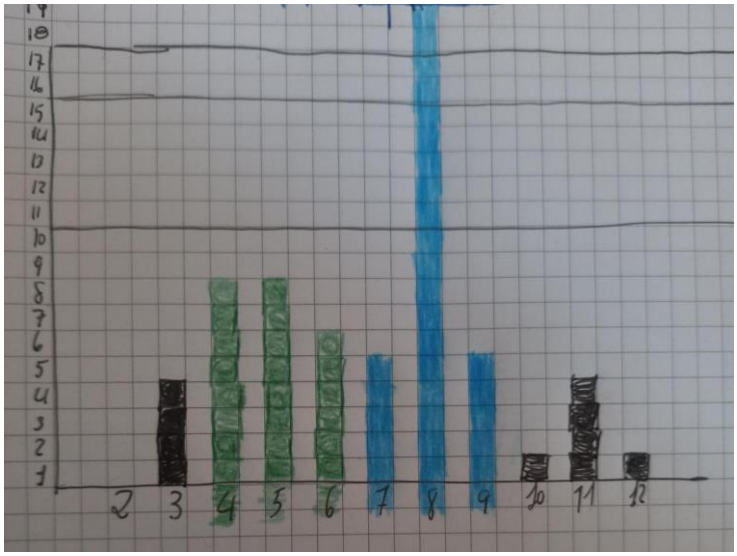


Figura 1. Resultados de la carrera.

De forma complementaria, se puede realizar un esquema como el de la Figura 2, en el que se muestran todas las posibles sumas de los dados, lo que da paso a trabajar las diferencias entre probabilidad teórica y probabilidad experimental.

Resulta una actividad interesante por tener suelo bajo (es suficiente con saber contar a un nivel de primero de primaria) pero techo alto (permite comenzar a interiorizar conceptos propuestos en el currículo para sexto de primaria).

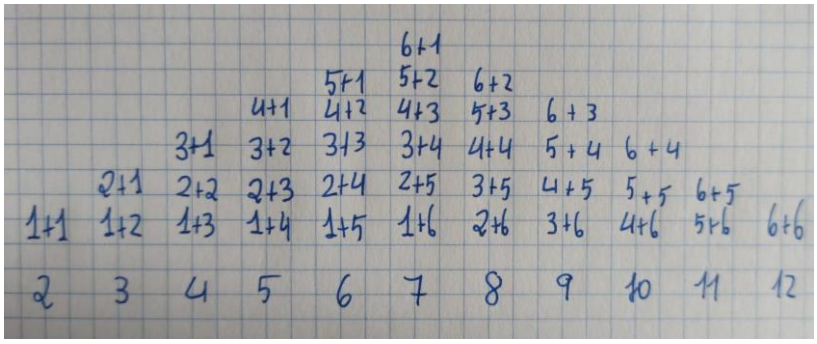


Figura 2. Sumas con dos dados.

Atención a las DAM

Esta actividad, dependiendo del material utilizado, puede trabajar el nivel manipulativo o el figurativo, creando una representación tangible de los datos que favorezca el cambio entre fases del enfoque CPA y ayude a las personas con DAM a comprender los conceptos estadísticos y de azar. Es también recomendable realizarla en un formato cuadriculado, en el que cada cuadrado de la hoja se contabilice como una unidad más o bien cada policubo se sitúe en una casilla determinada (si construimos torres verticalmente se puede poner una cuadrícula de fondo).

El único requerimiento de entrada para realizar este juego es el conteo (ya que incluso la suma de los dados puede realizarse contando los puntitos). A partir de este punto de entrada tan sencillo es posible abordar las competencias relacionadas con la estadística y la probabilidad mediante la creación de representaciones manipulativas y figurativas.

Trucos y sugerencias

Se puede pedir al alumnado elegir dos o tres dorsales por rondas, pidiendo que argumenten los motivos de su elección. Si es la primera vez que trabajan juegos de azar, puede ser conveniente jugar dos partidas para que puedan volver a argumentar sobre sus estimaciones. Dada la aleatoriedad del experimento, si se forman varios grupos, cada uno tendrá un resultado diferente, y el debate puede ser muy rico se hace una puesta en común.

Se aconseja utilizar grupos de trabajo homogéneos en este juego, puesto que la mayor o menor rapidez en la suma de los dados puede generar que solo una persona cuente. En la misma línea, la discusión inicial para la elección de dorsales podría ser monopolizada por la persona con mayor competencia matemática.

Actividad 2: “Presentación de la división”

Edad recomendada: a partir de 2º de EP, cuando aparece en el currículum. El nivel abstracto puede ser algo complejo para ese curso, pero alcanzable para los más avanzados.

Competencias

- Realiza repartos con ayuda de material manipulativo y figurativo.
- Entiende la división como reparto y como agrupación.
- Comprende las relaciones entre las columnas del algoritmo ABN de la división.

Desarrollo

Materiales: Regletas de Cuisenaire y una rejilla u hoja de cuadrícula.

En esta primera fase, se da una cantidad de regletas y se propone realizar un reparto (división partitiva) o un agrupamiento (división cuotativa). Dependiendo de la cantidad de material dado, el alumnado podrá hacer la división en un solo movimiento o en varios, por lo que es aconsejable comenzar con poco material e ir aumentando la cantidad (ver Figura 3).

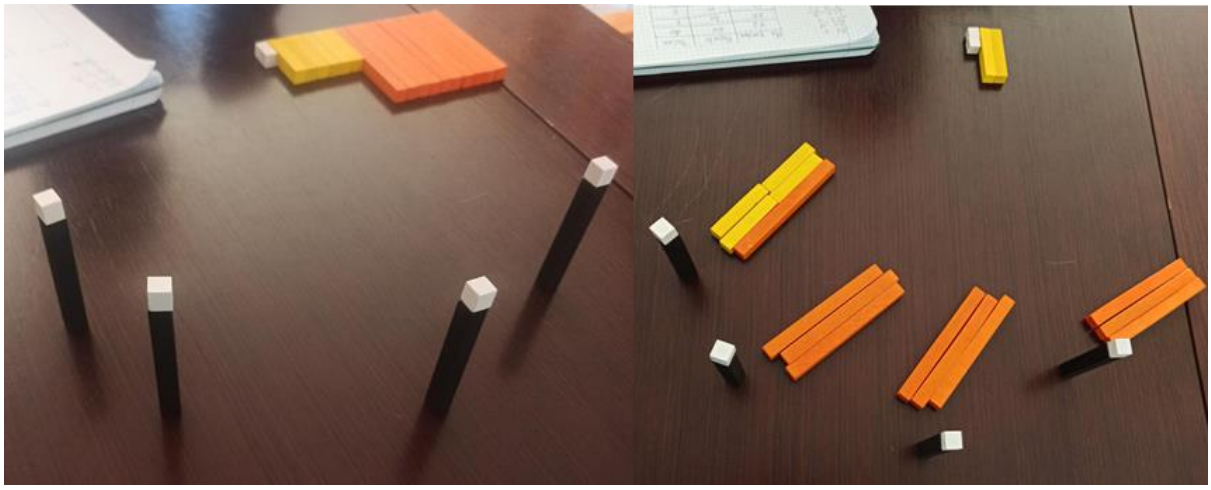


Figura 3. División antes de comenzar (izquierda) y división comenzada (derecha).

Es importante introducir en este paso la tabla del reparto que se usa en el algoritmo ABN para que el alumnado se familiarice con ella (ver Figura 4).

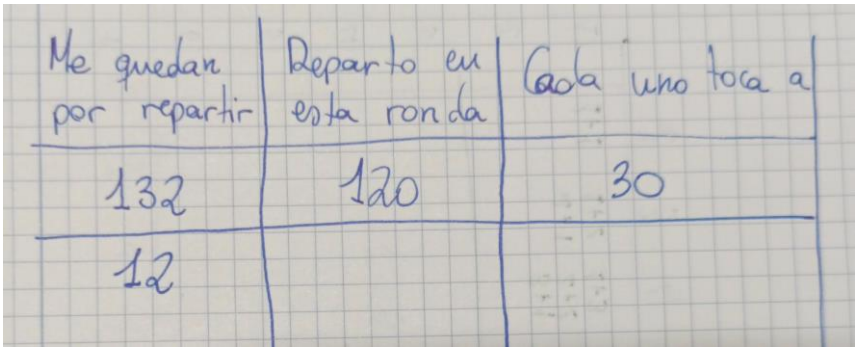


Figura 4. Tabla del algoritmo ABN.

En la segunda fase pasamos del material manipulativo a representar las divisiones figurativamente, usando cuadrados de 10x10 para las centenas, barras de 10x1 para las decenas y cuadrados de 1x1 para las unidades. A la hora de realizar la división, se ha de dividir la cantidad dada en grupos o hacer un reparto con ayuda del dibujo y la tabla.

Finalmente, en la tercera fase, se pasa al nivel abstracto. Una vez comprendidos y asimilados los dos niveles anteriores, se puede presentar una división que se ha de realizar únicamente con la tabla del algoritmo ABN. En este paso, el alumnado debe ser capaz de realizar divisiones de cualquier tipo entre varias cifras.

A partir de esta introducción de la división, una vez se perciba que el alumnado la ha comprendido de forma profunda (sea en la fase que sea), se ha de instar a repartir en base a las centenas, decenas, unidades… De forma que traten de repartir en cada paso del algoritmo el mayor número de cada una. De esta forma conseguiremos hacer un paralelismo entre la división ABN y la división tradicional con caja, que funciona repartiendo el mayor número posible en cada paso.

Análisis

En este caso se presenta una secuencia didáctica de tres fases para la introducción de la división bajo el enfoque CPA.

Es importante dejar claro desde el principio de la secuencia que los pasos no son inmutables, y que se puede avanzar y retroceder en la secuencia cuando se quiera. Esto permite que el alumnado pueda autogestionar su aprendizaje, realizando la división en la fase en la que más cómodo se encuentre.

Esto es especialmente relevante al introducir el último reparto, puesto que puede haber alumnos que necesiten volver a un nivel de abstracción menor para poder visualizar el total de centenas/decenas/unidades que están repartiendo en cada paso.

Atención a las DAM

En este caso se basa en el salto de fases y en la autonomía que permiten. Esto implica que el alumnado puede realizar cada división a su ritmo y en el nivel del modelo CPA que necesite, por lo que se respetan los tiempos y el nivel de uno.

El trabajo de la división mediante esta secuencia está directamente relacionado con la descomposición de números y el sistema de numeración decimal. Si se quieren optimizar las estrategias de reparto, la persona que está haciendo la división tratará de repartir en números que le resulten cómodos (de 5 en 5 o de 10 en 10). Esto puede ser aprovechado para comenzar repartos con números bajos e ir aumentándolos paulatinamente.

Trucos y sugerencias

Desde hace años, las matemáticas Singapur apuestan por un modelo que prioriza la comprensión a la mecanización. Esto implica que no es necesario realizar un número muy grande de divisiones para mecanizar el proceso, sino que es más importante entender lo que se hace. Por ello, se recomienda poner el foco en el proceso, instar a que los niños sean capaces de explicar por qué realizan cada paso, y valorar el resultado como un producto fruto del entendimiento previo.

Resulta importante trabajar tanto la división partitiva (repartos) como la cuotativa (agrupaciones) desde la fase manipulativa para profundizar en el sentido de la

división.

Al realizar el paso del manipulativo al figurativo se recomienda usar diferentes colores, ya sea para repartir o para agrupar. De esta forma, si cada "persona" a la que repartimos tiene un color diferente, es posible realizar razonamientos de reparto de forma más sencilla.

Una vez se haya establecido el paralelismo con la división tradicional en caja se puede proceder a introducirla, dado que, al haberla trabajado de forma profunda con las fases del enfoque CPA, no se percibirá como un mecanismo repetitivo, sino como una forma de reparto lógica en la que en cada paso se reparte el mayor número posible.

3.2 Actividades de desarrollo

Las actividades de desarrollo están pensadas para desarrollar las competencias que se abordan de una forma profunda. Mediante ellas, se pretende que el alumnado con DAM pueda llegar a tener una mejor comprensión de los conceptos trabajados.

Actividad 3: "Los cuadrados"

Edad recomendada: Desde que se empieza a trabajar la multiplicación en 2º de EP. Pueden usarse dados de 6 caras con los niños más pequeños y cambiarlos a los de 10 caras cuando sea necesario.

Competencias:

- Memoriza las tablas de multiplicar.
- Reconoce el área de un rectángulo como multiplicación de sus dos dimensiones.
- Identifica la multiplicación como suma repetida de un sumando.

- Factoriza números compuestos en factores primos.

Desarrollo

Jugadores: dos

Materiales: dos dados (de 6 o 10 caras) y una hoja cuadriculada.

Por turnos, cada jugador lanza los dados y multiplica los números que hayan salido. El número obtenido debe ser representado en forma de rectángulo dentro de la cuadrícula, pero no necesariamente con las dimensiones marcadas por los dados. Es decir, si por ejemplo salieran un 3 y un 4, se podría representar un rectángulo de 3x4=12, uno de 2x6=12 y uno de 12x1=12 (ver ejemplos en la Figura 5). El juego termina cuando uno de los dos participantes completa su cuadrado.

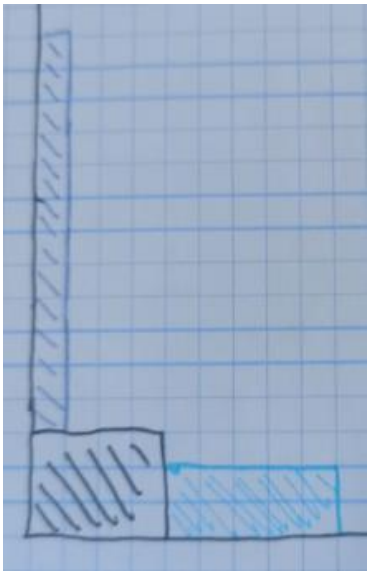


Figura 5. Ejemplo de multiplicación que da 12.

Análisis

Este juego permite introducir de forma lúdica las tablas de multiplicar, especialmente para aquellos niños que tienden a tener problemas con su memorización. Dado que están dibujando rectángulos sobre una cuadrícula, es posible para ellos realizar conteos de dos en dos, de tres en tres…

Implícitamente, se trabaja el concepto de área como multiplicación de dos cantidades, ya que se están representando áreas de forma figurativa en cada tirada. Si se considera oportuno, el docente puede pedir que se explicite esta reflexión.

Atención a las DAM

La barrera de entrada de este juego puede ser muy baja, si se permite mirar las tablas de multiplicar. De esta forma, damos más agilidad por jugada para que las personas con DAM puedan pensar el rectángulo que quieren formar a la vez que evitamos posibles problemas relacionados con la frustración y la ansiedad. Esta ayuda puede ser retirada progresivamente.

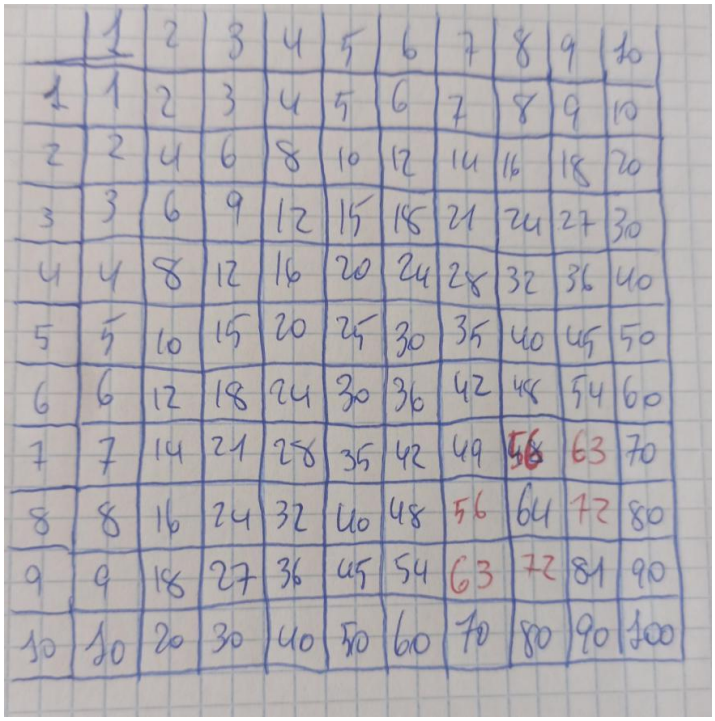
Además de la memorización de los números, resulta importante incidir en que los rectángulos formados son una representación figurativa de la multiplicación. Como añadido, la descomposición de números en factores primos puede ser una competencia a trabajar.

Trucos y sugerencias

Mediante dados de 10 caras y cuadrículas más grandes pueden trabajarse también los divisores de un número y la factorización en números primos. Estos nos informarán sobre todas las posibles combinaciones de rectángulos que podemos realizar.

Una vez se dominen las tablas que se trabajan con dados de 6 caras se puede pasar a usar los de 10, con los que ya entran en juego todas las tablas de multiplicar. Cuando se dé este salto, se recomienda dibujar una cuadrícula con todas las multiplicaciones (como la de la Figura 6), en la que se pondrán con bolígrafo las que se conocen y con lápiz las que no (en la foto se usan bolígrafos

borrables azul y rojo).



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Figura 6. Cuadrícula con las tablas de multiplicar.

Según la persona vaya sabiendo más tablas se sustituye el lápiz por el boli, dando sensación de progreso y viendo el final cada vez más cerca.

Actividad 4: “La escoba”

Edad recomendada: Toda la etapa de Educación Primaria teniendo en cuenta las recomendaciones que se describen posteriormente.

Competencias:

- Suma cantidades bajas.
- Desarrolla estrategias de cálculo mental mediante composición y descomposición de números.

- Subitiza las sumas de dos o más cifras que dan 10 o 15 como resultado.

Desarrollo

Jugadores: entre dos y cuatro.

Materiales: una baraja de cartas.

En un inicio se reparten tres cartas a cada jugador y se ponen boca arriba en la mesa otras cuatro. Por turnos, cada jugador debe tratar de sumar 15 con una de sus cartas y todas las que quiera de la mesa (tradicionalmente el valor de cada carta es similar a su número, excepto en las figuras en las que las puntuaciones son: sota = 8, caballo = 9 y rey = 10). Si no fuera posible sumar 15, el jugador debe dejar una de sus cartas en la mesa. Cuando todos los jugadores se han quedado sin cartas se reparten otras tres a cada uno; este mecanismo se repetirá hasta que se acaben las cartas de la baraja. Si en algún momento algún jugador consigue sumar 15 y hacer que en la mesa no queden cartas, se dice que ha hecho una “escoba” y se ha de anotar.

Cuando todas las cartas se han acabado se reparten los siguientes puntos: uno por cada escoba, un punto a la persona que tenga el 7 de oros, un punto a la persona que tenga más sietes, un punto a la persona que tenga más oros y un punto a la persona que tenga más cartas.

Análisis

Este juego es idóneo para la subitización de cantidades pequeñas. Durante las primeras partidas, es normal que los niños tarden bastante en hacer los cálculos necesarios, especialmente si son pequeños o tienen algún tipo de dificultad. Esto suele cambiar poco a poco.

La principal ventaja de este juego es la posibilidad de trabajar las sumas del número que se quiera. Tradicionalmente se usa el 15, pero se puede modificar para que sea el 10. Esto facilita las estrategias de cálculo mental, lo que agiliza los cálculos y

hace que el alumnado sienta un mayor nivel de competencia.

Atención a las DAM

En esta actividad los grupos homogéneos son relevantes, puesto que la velocidad con la que cada persona realiza las operaciones puede ser frustrante para las que no sigan ese ritmo. Un grupo homogéneo permite dar el tiempo necesario a las personas con DAM.

Es relevante destacar las cartas como un recurso con representaciones figurativas que permiten el conteo, ya que en ellas hay el número de ítems correspondiente al número de la carta.

Trucos y sugerencias

A pesar de que se puede usar una baraja española clásica, resulta mucho más eficaz utilizar una que tenga ochos, nueves y dieces, tanto por las exigencias de memoria numérica (tener que recordar que la sota es el 10 pero vale 8) como por mantener la coherencia figurativa de las cartas.

Actividad 5: "El dibujo con regletas o policubos"

Edad recomendada: La parte relacionada con las regletas se recomienda para los primeros cursos de educación primaria, dado que las competencias abordadas están relacionadas directamente con el currículum de esos cursos. No obstante, puede implementarse también en los últimos cursos a modo de evaluación de estrategias de cálculo.

La parte relacionada con los policubos está orientada especialmente a los cursos de 3º y 4º de EP, aunque también es posible realizarla en los superiores. De nuevo, la actividad se alinea en estos cursos con el currículum.

Competencias:

- Reflexiona acerca de las estrategias de conteo y suma.
- Desarrolla estrategias para contar de forma más ágil.
- Reconoce la multiplicación como suma de sumandos iguales.
- Representa datos estadísticos mediante material manipulativo.

Desarrollo

Participantes: una o dos personas.

Materiales: Regletas de Cuisenaire y/o policubos.

Se pide a los niños que realicen un “dibujo” o una creación artística con el material dado. Dependiendo del material que se utilice la actividad tendrá una finalidad distinta. La creación puede incluir poco o mucho material, dependiendo de lo que el docente considere oportuno (en la Figura 7 se ve un ejemplo con mucho material).

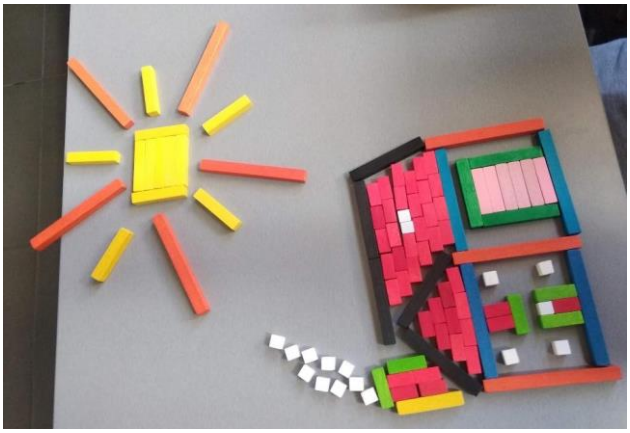


Figura 7. Dibujo con regletas.

Así, tenemos dos posibilidades de uso:

1. Regletas: Una vez se haya construido el “dibujo” con las regletas, se pide al alumno que sume el valor de todas ellas.

2. Policubos: En este caso, usaremos la figura para trabajar el bloque de estadística. Una vez se haya terminado la construcción, se pide que se agrupen los policubos usados por colores, creando de forma natural un gráfico de barras en el que las frecuencias de cada color indican la presencia que este tenía en la figura original.

Análisis

1. Regletas: Para realizar esta suma hay múltiples estrategias y será el docente el encargado de guiar el aprendizaje de los alumnos según la que considere más oportuna.
   Puede resolverse el problema juntando las regletas que tienen el mismo valor y multiplicando, uniendo regletas en grupos de 10 o realizando un conteo simple si la figura fuera muy pequeña. De esta forma, tanto los niños más avanzados como los niños con dificultades pueden seguir estrategias adaptadas a su nivel llegando al mismo fin.

2. Policubos: A partir de la representación estadística manipulativa se pueden trabajar tanto las representaciones mediante gráficos como la parte estadística de frecuencias mediante fracciones de forma una forma manipulativa.

Atención a las DAM

El hecho de poder trabajar con diferentes materiales para crear el dibujo es un estímulo de la multisensorialidad. Se puede seguir el esquema CPA al completo si se modelizan las cantidades utilizadas en la fase manipulativa. Además, al ser una actividad reflexiva y no muy pautada no hay una limitación de tiempo, por lo que los alumnos con DAM pueden contar con mucho tiempo para realizar sus reflexiones.

La competencia en la que más se incide en esta actividad es la composición de números, especialmente del 10.

Trucos y sugerencias

Dependiendo del alumnado con el que se trabaje, el docente puede dar una cantidad de material ilimitada o un material concreto. Si, por ejemplo, se quieren trabajar las sumas del 10, el maestro puede dar regletas que al juntarse den 10. Si quisiera trabajar la multiplicación podría limitar el material a varias regletas iguales de números diferentes.

4. Conclusiones

Como se ha insistido a lo largo de este trabajo, estas propuestas están diseñadas para poder llevarse a cabo en el aula con todo el alumnado, de forma que se trabajen distintos contenidos y competencias matemáticas, a la vez que se favorece la integración y la atención a las personas con DAM atendiendo a las directrices expuestas en el marco teórico.

La puesta en práctica de estas actividades en contextos de apoyo extraescolar en alumnos con DAM ha mejorado tanto el nivel competencial como el dominio afectivo. Al estar planteadas como un reto accesible, sea cual sea el nivel inicial, y tratan de evitar la ansiedad y frustración, que es tan común en personas con DAM, se presentan como una herramienta que respeta el espíritu del DUA en el aula ordinaria.

5. Referencias bibliográficas

Alonso Tello, C., López Barriga, P., & de la Cruz Vicente, O. (2013). Creer tocando. *Tendencias Pedagógicas*, *21*, 249-262.

Ausubel, D. P. (1968). *The Psychology of Meaningful Learning; an Introduction to School Learning*. Grune and Stratton.

Espinoza, L., Matus, C., Barbe, J., Fuentes, J., & Márquez, F. (2016). Qué y cuánto aprenden de matemáticas los estudiantes de básica con el Método Singapur: Evaluación de impacto y de factores incidentes en el aprendizaje, enfatizando en la

brecha de género. *Calidad en la educación*, *45*, 90-131. https://doi.org/10.4067/S0718-45652016000200004

Fonseca, R., Hernández, R. V., & Mariño, L. F. (2017). Enfoque CPA en la resolución de problemas para el aprendizaje de fracciones mediante el uso de software matemático. *Encuentro Internacional en Educación Matemática*, *2*, 78-88. https://ww2.ufps.edu.co/oferta-academica/i-encuentro-internacional-en-educacion-matematica/1109

Friz Carrillo, M., Sanhueza Henríquez, S., & Sánchez Bravo, A. (2009). CONOCIMIENTO QUE POSEEN LOS ESTUDIANTES DE PEDAGOGIA EN DIFICULTADES DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS (DAM). *Estudios pedagógicos*, *35*(1), 47-62. https://doi.org/10.4067/S0718-07052009000100003

García, J. (2001). *Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica.* Ariel.

Geary, D. C. (1993). Mathematical disabilities: Cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological Bulletin*, *114*(2), 345-362. https://doi.org/10.1037/0033-2909.114.2.345

Geary, D. C. (2011). Consequences, characteristics, and causes of mathematical learning disabilities and persistent low achievement in mathematics. *Journal of Developmental and Behavioral Pediatrics: JDBP*, *32*(3), 250-263. https://doi.org/10.1097/DBP.0b013e318209edef

Kaufmann, L., Mazzocco, M., Dowker, A., Aster, M., Göbel, S., Grabner, R., & Rubinsten, O. (2013). Dyscalculia from a differential perspective. *Frontiers in psychology*, *4*, 1-5.

López, I. A. (2017). Utilizando TouchMath para enseñar nociones de Aritmética a un niño con TEA. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *6*(1), 62-74.

Rubinsten, O., & Henik, A. (2009). Developmental dyscalculia: Heterogeneity might not mean different mechanisms. *Trends in Cognitive Sciences*, *13*(2), 92-99. https://doi.org/10.1016/j.tics.2008.11.002

Sanguinetti, A., & Serra Grabulosa, J. M. (2015a). Discalculia. Cuando 2+2 no son 4. En M. Arnedo, J. Bembibre, A. Montes, & M. Triviño (Eds.), *Neuropsicología infantil a través de casos clínicos*. Editorial Médica Panamericana.

Sans, A., Boix, C., Colomé, R., López-Sala, A., & Sanguinetti, A. (2012). Trastornos del aprendizaje. *Pediatría Integral*, *16*(9), 691-699.

Sans, A., Boix, C., Colomé, R., López-Sala, A., & Sanguinetti, A. (2017). Trastornos del aprendizaje. *Pediatría Integral*, *21*(1), 23-31.

Serra Grabulosa, J. M. (2014). La discalculia. En A. Barrachina (Ed.), *Trastorno de aprendizaje de la escritura y las matemáticas* (pp. 185-277). UOC.

Temple, C. M. (1997). *Developmental Cognitive Neuropsychology*. Psychology Press.

Vygotsky, L. (1931). Desarrollo de las funciones mnemónicas y mnemotécnicas. *Lev Vygotsky Obras Escogidas*, *3*, 247-264.

Col006 Paisajes de aprendizaje en Matemáticas.

Maria Rosario Lorenzo Sáez
lorenzosaezrosario@gmail.com
IES Serpis. Valencia.
Maria Luisa Cuadrado Sáez
luisa.cuadrado7@gmail.com
Profesorado de Secundaria, Conselleria de Educación de Comunidad Valenciana.
Edgar Lorenzo-Saez
edlosae@upv.es
Universitat Politècnica de València (UPV)- Instituto ITACA

Núcleo temático: procesos e inclusión.

Modalidad: Comunicación.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

En esta comunicación se pretende acercar los Paisajes de Aprendizaje a las aulas de matemáticas de Educación Secundaria. A través de esta metodología, podemos crear diferentes itinerarios para que los estudiantes puedan aprender en función de sus conocimientos previos, intereses y capacidades cognitivas.

Diseñar un Paisaje de aprendizaje consiste en crear una experiencia educativa dentro de un entorno gamificado. En esa experiencia cada alumno y alumna podrá elegir su camino sin ser etiquetado, ya que elige para cada objetivo a alcanzar que necesita y cómo lo va a hacer. Además, esta metodología integra las inteligencias múltiples, la taxonomía de Bloom, el aprendizaje por objetivos, el aula invertida, el trabajo cooperativo, la gamificación y la evaluación mediante evidencias.

Palabras clave: Paisaje de Aprendizaje, Inclusión, Gamificación.

1. Introducción

En el siglo XXI las aulas se han convertido en un espacio lleno de emociones donde además de aprender, podemos descubrir y transformar el mundo que nos rodea y a

nosotros mismos. Estas aulas son espacios llenos de emociones, diversión y retos. Deben ser entornos de aprendizaje que no confunden repetición y olvido con comprensión, creación y creatividad (Equipo de tutores del Programa Profesores en acción, 2015).

Una propuesta innovadora para conseguir este entorno de aprendizaje exitoso nace de la mano de los Paisajes de Aprendizaje. Según Hernando. A. (2015) al diseñar un Paisaje de Aprendizaje, estamos creando "Una increíble experiencia de aprendizaje integrando contenidos curriculares, con desafíos, insignias y retos, en un gran escenario de aprendizaje donde los alumnos pueden elegir su propio itinerario personalizado".

Esta afirmación es muy motivadora para cualquier docente actual e invita a conocer más al respecto de esta metodología, pero a la vez parece que, si se analiza, plantea muchas dudas. Como hoja de ruta es muy alentador poder personalizar el aprendizaje del alumnado, pero parece difícil en nuestras ratios de hoy en día. Por otro lado, la mayoría de los docentes estamos de acuerdo en el hecho de que nuestro alumnado, por norma general, no está motivado con el aprendizaje. Además, los y las que lo están, sólo se preocupan de sacar buenas calificaciones, pero no les importa qué aprenden. Por tanto, crear una experiencia de aprendizaje que pueda motivar con retos, desafíos e insignias puede ser la solución, sobre todo cuando trabajamos con adolescentes.

2. Marco teórico.

2.1. Paisajes de aprendizaje.

Existen muchas definiciones sobre los paisajes de aprendizaje con diferentes matices según el autor de la definición, pero todas ellas presentas unos elementos comunes.

Un Paisaje de Aprendizaje (a partir de ahora PA) es una herramienta metodológica para crear experiencias de aprendizaje donde cada elemento se pone al servicio de nuestros alumnos y así permite la personalización. Según Hernando. A. (2015) "Es posible diseñar una programación didáctica, variada en actividades, logrando que

los propios alumnos sean quienes eligen y se mueven con autonomía guiados por el asesoramiento del profesor.”

Todo paisaje une la metodología de las inteligencias múltiples con la Taxonomía de Bloom. Por un lado, las inteligencias múltiples aportan un gran abanico de herramientas que nos ofrecen la posibilidad de llegar a todos nuestros alumnos y alumnas, o al menos a la mayoría de ellos, ya que podemos representar los contenidos curriculares de diferentes maneras. Por otro lado, la Taxonomía de Bloom permite alcanzar diferentes niveles de comprensión en función del punto de partida de nuestros estudiantes.

Pero los PA no son solo diferentes herramientas y diferentes niveles de comprensión, además, debemos diseñar un entorno gamificado, donde el estudiantado interactúe con los contenidos, cooperen entre ellos, sean autónomos y se puedan evaluar con evidencias.

Todo esto si lo queremos adaptar a la asignatura de matemáticas, requiere alguna metodología y herramienta más. Nuestra propuesta incluye el aula invertida, la dinámica de Flippado, (Cuadrado. M.L., 2017), y el Aprendizaje basado en el pensamiento (TBL).

2.2. La personalización de los PA.

Uno de los puntos fuertes de los PA es la personalización. Cuando se habla de personalización del aprendizaje en un contexto basado en los PA no se habla de diseñar una unidad didáctica para cada alumno, sino de establecer unos objetivos mínimos y comunes que todos los alumnos deben alcanzar, pero a la vez diseñar diversidad de actividades atendiendo a las diferentes inteligencias de los estudiantes y a su nivel de comprensión.

Al crear un mayor número de actividades, aumenta la posibilidad de generar distintos itinerarios, de este modo, además de la personalización permite a los

alumnos una mayor capacidad de decisión, lo que genera mayor autonomía en el aprendizaje.

Entre las características que definen el aprendizaje personalizado encontramos:

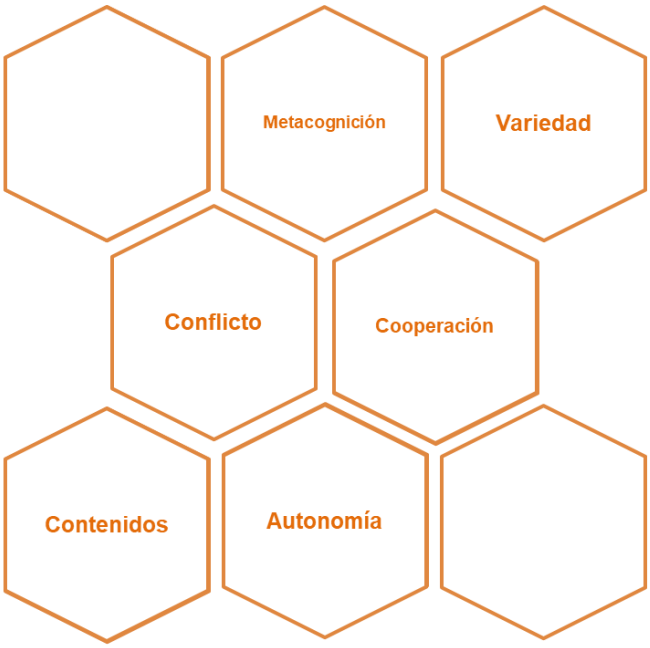


Figura 1: Características de la personalización.

Variedad: Cuando programamos una actividad, es necesario utilizar diferentes métodos, actividades, formas de presentar la información y evaluar la comprensión de los estudiantes.

Metacognición: Es necesario integrar estrategias cognitivas para aprender a aprender reflexionando sobre el aprendizaje y el pensamiento. Esto genera una cultura más consciente y ejecutiva del aprendizaje.

Cooperación: Se debe fomentar esta relación de interdependencia mejora la motivación y el rendimiento de los estudiantes.

Conflicto: El objetivo es crear asombro y este se puede generar mediante enigmas, retos, preguntas, diálogo o desafíos. De este modo se produce la dinamización y construcción activa del conocimiento.

Autonomía: Fomentar que el alumnado tome decisiones sobre su propio proceso de aprendizaje, no sólo eligiendo el itinerario sino también estableciendo sus límites.

Contenidos: La experiencia de aprendizaje debe seguir patrones graduales y estructurados con un orden lógico de los contenidos atendiendo al uso práctico de estos.

2.3. Creación de los PA.

Para diseñar un PA es recomendable seguir los siguientes pasos:

Primero diseñaremos las actividades. Para ello diferenciaremos entre tres tipos de actividades: Actividades obligatorias, actividades opcionales y actividades voluntarias.

Una vez tenemos las actividades diseñadas deberemos programar los diferentes itinerarios. No debemos olvidar que uno de los elementos más importantes de este tipo de metodología es la autonomía del alumno y la capacidad de programar su propio proceso de aprendizaje. Para poder programar estos itinerarios necesitaremos una Matriz de Aprendizaje.

Después de crear los itinerarios, debemos gamificar nuestro Paisaje de Aprendizaje. Para ello se crea una Narrativa para generar el “efecto llamada” y diseñar todos los elementos de la gamificación, puntos, insignias, recompensas y logros.

Por último, creamos el entorno virtual usando una plataforma digital donde se integren todos los elementos. Los PA tienen un componente de Visual Thinking, donde en un entorno virtual se define una imagen o mapa que va a guiar la experiencia educativa de nuestros alumnos. Puede parecer la parte menos importante del paisaje, pero el diseño del entorno digital y visual es el que permite la total inmersión del alumnado. Además, en este entorno, el estudiantado puede ver claramente los tipos de actividades, las recompensas y las insignias. Es en este apartado donde se integran la mayoría de las TAC (Tecnologías del Aprendizaje y la Comunicación).

3. Experiencia de PA en el aula de Matemáticas

3.1. Organización general del curso. La llamada.

El PA que presentamos se corresponde al curso de 4º ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, aunque la estructura de trabajo es perfectamente exportable a cualquier curso. Para gamificar y articular todo nuestro PA de forma integrada empleamos la plataforma Classcraft.

El primer día de curso comenzará con una sesión donde se genera “La llamada”, es decir, la misión principal en la que debe participar el alumnado para alcanzar el objetivo del curso. Además, se les explica que es necesario trabajar en equipo para poder afrontar con éxito esa misión. En la figura 2 podemos observar un paisaje anual propuesto por la plataforma.

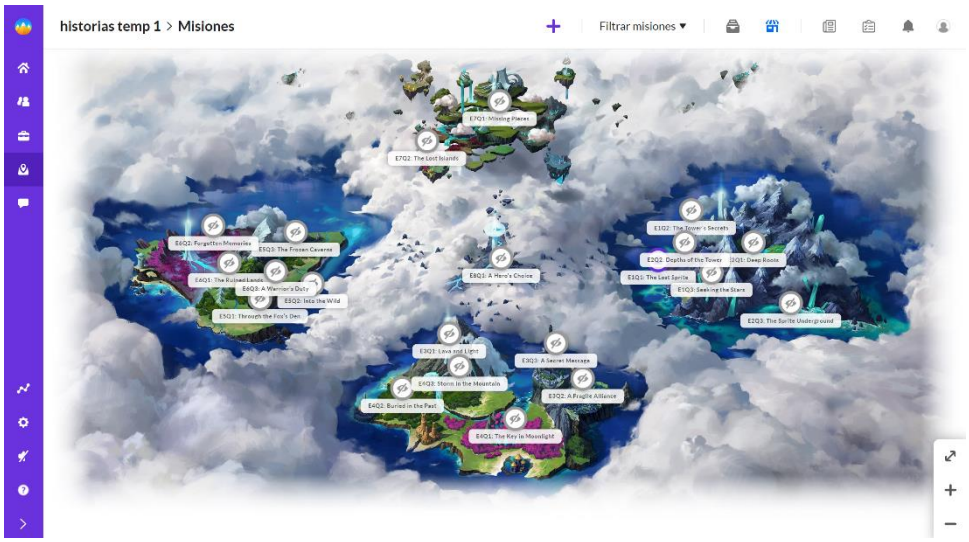


Figura 2: Plataforma Classcraft

En cuanto a la gestión, en esta primera sesión se proporcionará el acceso a la plataforma, se generan los equipos de trabajo y se comienza con la primera técnica cooperativa que es la firma del contrato cooperativo (Cabañete y otros, 2013).

Es una sesión clave para lograr la inmersión en el juego, generar curiosidad y motivar al alumnado.

“La llamada” se divide en tantas misiones como unidades didácticas queramos definir para el curso académico. En nuestro caso decidimos realizar 10. Es el momento de diseñar cada una de estas misiones.

Además, en esta sesión el estudiantado elegirá que tipo de personaje quiere ser: magos, guardianes o sanadores.

Figura 3: Elección del personaje.

Para que los alumnos y alumnas puedan elegir bien el tipo de personaje deben conocer las características de cada uno de ellos ya que no todos tienen los mismos puntos de vida, ni los mismos poderes. Este reparto desigual se debe a dos razones, por un lado, conseguimos que todos los alumnos y alumnas tengan un papel importante dentro del equipo y se garantiza la interdependencia positiva. Por otro lado, al haber diferentes personajes con diferentes características, es más sencillo que cada tipo de avatar se adapte a los perfiles de los estudiantes.

3.2. Organización de la unidad. Las misiones.

Cada una de estas unidades didácticas (misiones) tiene sus propios objetivos y cada uno de estos objetivos, es donde se incluyen las actividades que hemos diseñado, tanto obligatorias, opcionales y voluntarias. En la figura 4 podemos observar el diseño de la misión que corresponde al contenido de polinomios.

Figura 4: Misión Polinomios

En primer lugar, comenzamos estableciendo los objetivos obligatorios. Dichos objetivos se relacionan con las actividades que tendrá que realizar todos los alumnos independientemente del itinerario que elijan. Estas actividades se corresponden con aquellos objetivos y contenidos mínimos establecidos por el currículo del nivel educativo en el que nos encontramos, en nuestro caso 4º ESO.

Una vez establecidos los objetivos obligatorios, pasamos a definir los opcionales que son las actividades en las cuales es el estudiante el que elige que tipo de actividad va a realizar para alcanzar un objetivo o actividades de refuerzo. Estas actividades normalmente se corresponden con tareas diseñadas atendiendo a diferentes Inteligencias Múltiples o diferentes niveles dentro de la taxonomía de Bloom.

Por último, definimos los objetivos voluntarios que son aquellas actividades que el alumno decide voluntariamente si las quiere realizar. Normalmente se corresponde con actividades de ampliación.

En la Figura 5 podemos ver un ejemplo de objetivos de cada tipo. El objetivo 3. “Una relació més complexa” es obligatorio y todos los alumnos pasan al objetivo “Dividint els habitants”. Después se abren varias opciones: “Comencem dividint els més petits” que es el refuerzo y “converteix-te en un expert” que es ampliación.

Figura 5: Tipos de actividades

Nuestros estudiantes no van a visualizar el PA completo, sino que sólo van a poder ver aquella parte que les ha sido desbloqueada por el docente en función de sus necesidades y trabajo. En la Figura 6 podemos observar un fragmento del PA diseñado para la unidad de polinomios.

Figura 6: Fragmento de un PA personalizado

En la Figura 6 vemos el itinerario en concreto que realizaría un alumno o alumna dicho itinerario, concretamente en las operaciones con polinomios, ya que no había alcanzado la comprensión de los contenidos. Para alcanzar dichos contenidos ha tenido que realizar las actividades opcionales que son, suma de polinomios, diferencia de polinomios y producto de monomio y polinomio ha conseguido llegar al siguiente objetivo repasando contenidos de otros cursos.

Figura 7: Detalle del refuerzo.

En cambio, para el objetivo de la división de polinomios, el estudiante no ha tenido problemas en la comprensión y realización de las actividades y por ello se le ha desbloqueado el siguiente objetivo obligatorio y además un objetivo de ampliación que es voluntario.

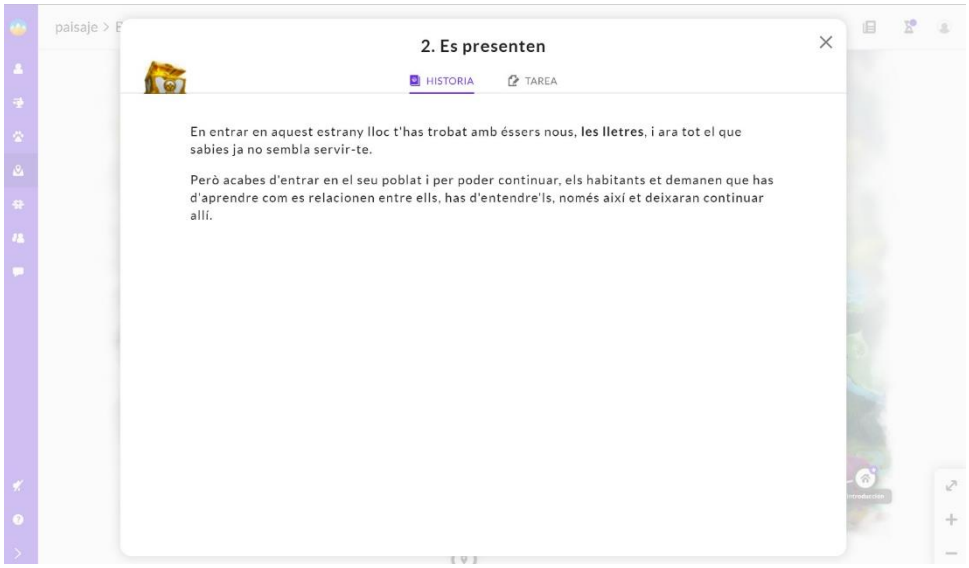


Figura 8: Introducción de objetivo

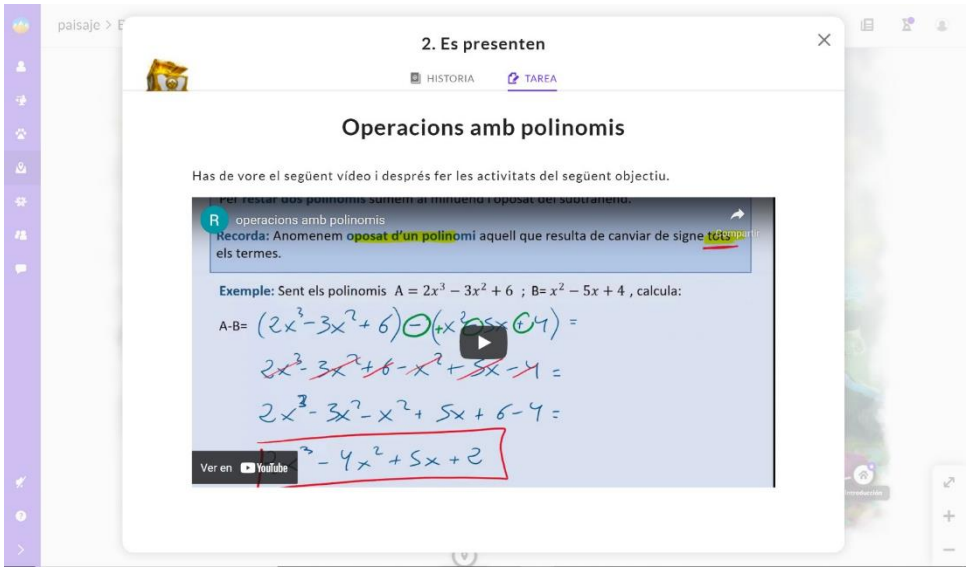


Figura 9: Tarea con vídeo de explicación de contenidos.

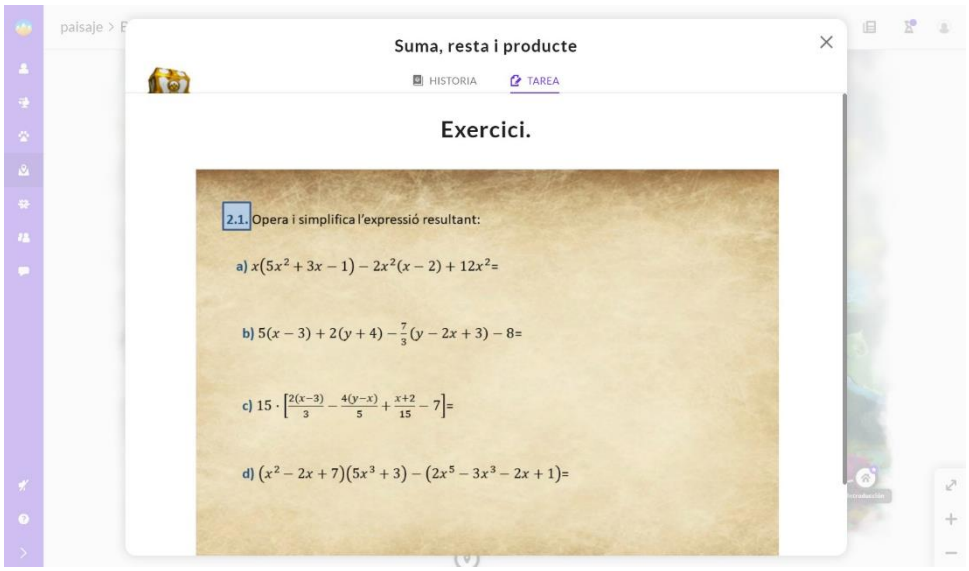


Figura 10: Tarea con actividad para consolidar contenidos.

De esta forma conseguimos fomentar la autonomía del estudiante y evitar las etiquetas de “alumno de refuerzo” o “alumno de ampliación”, ya que para cada objetivo es el estudiante el que decide, junto al docente, que necesita en función de su punto de partida.

La configuración general de los objetivos es la mostrada en la Figura 8, Figura 9, y Figura 10. En función del tipo de actividad se ha empleado un código de colores para que los alumnos puedan diferenciar de una forma más visual si son actividades obligatorias, opcionales o voluntarias. Las actividades obligatorias tienen el vídeo en fondo azul y la actividad se marca con un cuadrado azul, las actividades opcionales tienen el fondo del vídeo de color verde y se marca la actividad con un triángulo verde y las actividades voluntarias tienen el fondo del vídeo en color naranja y se marca la actividad con un círculo naranja.

3.3. Organización de las sesiones.

Una vez definida la estructura de la unidad vamos a definir la organización general de una sesión ordinaria.

Al iniciar la clase lo primero que hacemos dentro del aula es el “evento aleatorio”, que consiste en introducir el factor suerte dentro de la gamificación. Estos eventos pueden ser configurados por el docente o por la plataforma Classcraft de forma

automática. Los eventos aleatorios consisten en una serie de acciones que pueden ser la asignación de puntos al alumno que menos puntos tiene, la pérdida de vida de un tipo de personaje, o acciones más lúdicas como poder escuchar música en clase, etc. La finalidad de estos eventos es introducir la imprevisibilidad dentro de la gamificación.

Una vez realizado el evento aleatorio pasamos aplicar dentro del aula El Flippado, (Cuadrado. M.L., 2017). Para ello los alumnos se ponen en sus equipos y el alumno elegido para ser el Flipado resuelve la actividad planteada para casa en la pizarra y explica los pasos mientras sus compañeros corrigen la suya en la libreta. De este modo el Flippado es el responsable de revisar los deberes de sus compañeros y de asegurarse que todos han entendido la actividad.

Mientras los estudiantes hacen esta dinámica, el docente va pasando por las mesas y va desbloqueando los caminos de cada alumno y alumna habilitando los caminos de refuerzo en el caso que sea necesario. De este modo se consigue centrar el foco en el desarrollo individual del estudiante y no en la clase magistral.

Una vez los alumnos han corregido la actividad de deberes el docente plantea una serie de actividades similares a ésta en la pizarra y los alumnos y alumnas las resuelven. Si algún estudiante tiene dudas intentan resolverla en equipo y si no lo consiguen es el Flippado el que transmite esta duda al docente.

Como parte final de la sesión, el alumnado puede dedicar los últimos 10 minutos de la clase a ver el vídeo del siguiente objetivo, pero tienen que verlo de forma individual ya que la puesta en común y las dudas se trabajan en la siguiente sesión.

Además de estas sesiones, en cada unidad didáctica se incluyen una serie de sesiones especiales:

Taller de problemas: Normalmente se incluyen 2 sesiones de este tipo, donde los alumnos resuelven una serie de problemas tipo PISA y se aplican rutinas de pensamiento para estructurar los razonamientos a seguir.

Sesiones de Aprendizaje Basado en el Juego (GBL): En estas sesiones, a partir de un juego tipo tablero los alumnos practican aquellas habilidades que necesitan repetir muchas veces para dominarlas. Por ejemplo, en esta unidad didáctica los estudiantes presentan dificultades con la Identidades notables, el factor común y la factorización.

Figura 11: Grupo de estudiantes practicando con un GBL.

Sesiones de revisión de contenidos: En este tipo de sesiones no es necesario dedicar la totalidad de la sesión a esta dinámica, sino que se puede combinar con una sesión de consolidación. Para este tipo de clase los alumnos se “enfrentarán “ en equipos a uno de los grandes jefes respondiendo a unas preguntas de respuesta abierta o de elección de respuesta tipo Quizz. La ventaja de esta modalidad de revisión es que “La Batalla de Jefes” es de toda la clase contra el jefe, así que tienen que trabajar juntos y estar atentos todos para poder ganar.

4. Conclusión.

Los PA constituyen una herramienta metodológica que tiene grandes ventajas para la asignatura de matemáticas. Favorece el diseño universal del aprendizaje, permitiéndonos trabajar con alumnado muy variado sin necesidad de etiquetas.

Además, aumenta la motivación, la autonomía, la interdependencia positiva, la reflexión activa y el aprendizaje autónomo.

Permite a cada estudiante aprender a su ritmo.

Referencias

Equipo de tutores del Programa “Profesores en acción”. (2015). *Diseñando oportunidades. La matriz del paisaje de aprendizaje.* Educadores, nº. 256, pp. 26-40. Recuperado 29 de marzo de 2022, de https://www.escuelascatolicas.es/wp-content/uploads/2018/02/Alfredo_Hernando.pdf

Calvo, A. H. (2016). *Viaje a la escuela del siglo XXI.* Fundación Telefónica.

Cañabate, D., Guix, D., Serra, P., & Parramon, C. (2013). *El contrato cooperativo: de la teoría a la práctica en las diferentes etapas educativas. El contrato cooperativo: de la teoría a la práctica en las diferentes etapas educativas*, pp. 157-170.

Cuadrado, M. L. (2017). VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. *Aprendiendo Matemáticas de Manera "Tecnocooperativa".* (p.461–469). Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/21994/1/Cuadrado2017Aprendiendo.pdf

CoE205 “Sliceforms” o Superficies seccionadas

María García Monera
Monera2@uv.es
Universitat de València

Modalidad: Exposición

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (Matemáticas e ingenierías).

RESUMEN

Hace más de 10 años que empezamos a realizar un taller de superficies en la Facultad de Matemáticas de la Universitat de València. Desde entonces, más de 1.000 estudiantes de Secundaria y Bachillerato han pasado por allí y han aprendido conceptos como superficie de revolución o superficie reglada. En este artículo veremos cómo estudiar algunas de superficies a través de sus secciones y también cómo estas secciones nos pueden ayudar a construir un modelo real, actividad en la que está basada el taller.

Palabras clave: Geometría, Matemáticas, Superficies.

Si tuviéramos que elegir una época para cada una de las ramas de las matemáticas, quizá el siglo XIX fue uno de los más gloriosos para la Geometría. Matemáticos como Carl Friedrich Gauss (1777-1855), con sus aportaciones a la geometría diferencial y a otras áreas de las matemáticas, Nikolái Ivánovich Lobachevski (1792-1856) y János Bolyai (1802-1860), con sus descubrimientos sobre geometría hiperbólica, o Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) con su geometría riemanniana entre otras muchas valiosas aportaciones, hicieron que la geometría cambiara tal y como se conocía hasta entonces. Sería imposible para nosotros elegir a alguno de ellos como el mejor matemático de la época, ahora bien, entre todos ellos hubo uno que participó muy activamente en un movimiento dedicado a revolucionar la enseñanza de las matemáticas tal y como se conocía hasta entonces, ése fue Felix Klein (1849-1925).

Klein nació en Düsseldof (Alemania) y después de obtener su graduado en la Universidad de Bonn realizó su tesis doctoral sobre geometría aplicada a la mecánica bajo la dirección de Julius Plücker (1801-1868), uno de los mayores expertos de la época en geometría analítica y física. En 1875 Klein comenzó a trabajar en la Universidad de Múnich y allí coincidió con el profesor Alexander von Brill (1842-1935), quien también era profesor recién llegado. Un año antes de la llegada de Klein, von Brill ya había realizado sus primeros modelos en cartulina de superficies para los cuales se había basado en el trabajo del matemático alemán Olaus Henrici (1840-1918). Henrici, profesor del Bedford College en Londres y años más tarde presidente de la London Mathematical Society, había enviado a un encuentro de matemáticos en Göttingen unos modelos de superficies de segundo orden hechos con cartulina. La idea que Henrici había tenido era bien sencilla, seccionar una superficie de manera que cada corte pudiera servir después como pieza para reproducir el modelo real en cartulina. Uno de los modelos que envió Henrici a aquel encuentro y que sirvió de inspiración a von Brill, fue un paraboloide elíptico hecho con circunferencias. Más tarde, von Brill comercializaría estos modelos.

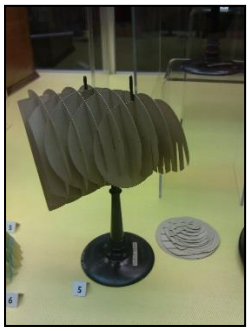


Figura 1. Paraboloide elíptico diseñado por O. Henrici y expuesto en el Museo de Ciencias de Londres

Klein debió quedar maravillado por aquellos modelos y junto a von Brill llevaron a cabo su seminario de Matemáticas en la universidad. Klein pensaba que era esencial tener una imagen mental real de lo que se estaba estudiando así que, en aquel seminario, además de dar clase de Matemáticas, la construcción de modelos reales de superficies pasó a formar parte del trabajo de ambos profesores. Klein y von Brill montaron un laboratorio de matemáticas donde diseñaban y producían modelos de superficies hechos en diferentes materiales, como escayola, papel o alambre. Estos modelos ayudaban a sus alumnos a entender las superficies que se

estaban estudiando y ambos profesores solían animarles a que ellos mismos diseñaran sus propios modelos. Fue uno de ellos, Walther von Dyck (1856-1934), alumno de doctorado de Klein y años más tarde cofundador del Museo de Ciencias Naturales y Tecnología de Múnich, el que diseñó una gran cantidad de estos modelos.

Buscando la manera de comercializar las superficies, von Brill propuso a su hermano mayor Ludwig, quien acababa de empezar a hacerse cargo de la imprenta familiar, vender los modelos que él y sus colegas de la universidad estaban diseñando. Fue así como en poco tiempo la empresa de los Brill y su sucesora Martin Schilling llegaron a vender más de 400 modelos diferentes que se distribuían por todo el mundo. De hecho, hoy en día universidades españolas aún conservan algunos de estos modelos originales. Una de las colecciones más grandes que se conocen se conserva en la Universidad de Zaragoza y fue donada como legado por el profesor Zoel García de Galdeano (1846-1924) después de su muerte (ver enlaces [3] y [4]).

Sin embargo, tal como indica John Sharp en su libro *Surfaces: Explorations with Sliceforms* (ver referencias [4]) el gran periodo de la construcción de superficies acabó durante la Primera Guerra Mundial, debido entre otras razones a la gran crisis que atravesó el continente y al elevado precio de los modelos (entre 300€ y 600€ actuales). Hoy en día el Museo de Ciencias de Londres expone algunos de los modelos originales comercializados por Martin Schilling bajo el título “Strange surfaces”.

Quizá, si en aquella época hubieran existido los ordenadores, la enseñanza y el desarrollo de la Geometría hubiera tomado otro camino, eso es algo que nunca sabremos.

Figura 2. Algunas de las superficies expuestas de la colección "Strange surfaces"

2. "Sliceforms" o superficies seccionadas

Con el paso del tiempo, la construcción de estos modelos de superficies quedó en el olvido, quizá entre otras razones por la aparición de los ordenadores. Si un ordenador ya era capaz en tan sólo unos segundos de mostrarte una superficie, entonces ¿qué necesidad había de construirla?

Fue a finales del siglo pasado cuando la construcción de modelos en cartulina volvió a resurgir. El británico John Sharp, ingeniero de profesión y amante de las matemáticas, comenzó a diseñar modelos (tal y como explica él mismo en [3]) para dar a sus alumnos una conciencia espacial tridimensional. Sharp diseñó una técnica para poder construir cualquier superficie o lo que él mismo llamó una *sliceform.*

Si bien es cierto que la técnica utilizada por Henrici en el siglo XIX dependía de cada modelo de superficie que se quisiera construir, Sharp fue mucho más allá.

Veamos en qué consiste el método de Sharp. Imaginemos que tenemos una superficie cualquiera, por ejemplo, la esfera, que queremos construir. La técnica consiste en intersecar la esfera con dos familias de planos paralelos y perpendiculares entre sí. Simplemente por estética los planos de cada familia están distanciados regularmente, es decir, la distancia entre cada uno y sus contiguos es la misma. Por ejemplo, imaginemos que tenemos la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z \in \mathbb{R}$ y queremos calcular su intersección con las familias de planos de ecuación $x = 0.2k, y = 0.2k,\ k \in \mathbb{N}, k \in [-4,4]$. Calcular la intersección consiste simplemente en resolver los sistemas:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0.2k \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ y = 0.2k. \end{cases}$$

Como es trivial, la solución de estos sistemas nos dará dos familias de circunferencias en función del parámetro k. Más aún, gracias a la simetría de la propia superficie, podemos calcular únicamente la intersección para $k \in [0,4]$. Una vez obtenidas las circunferencias, nos faltan las ranuras o cortes por donde irán encajadas las piezas. En una de las familias los cortes irán de abajo hasta la mitad de la pieza y en la otra familia de la mitad hasta arriba. Veamos una imagen:

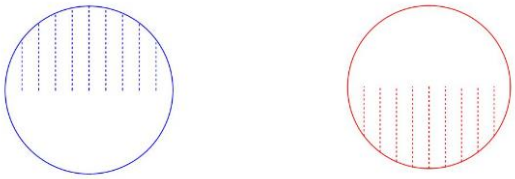


Figura 3. Ejemplo de piezas en la construcción de la esfera

Una vez obtenidas las piezas, el siguiente paso consiste en imprimirlas sobre cartulinas de colores y comenzar a recortar. Veamos una imagen del diseño por ordenador de la esfera y una imagen real del modelo:

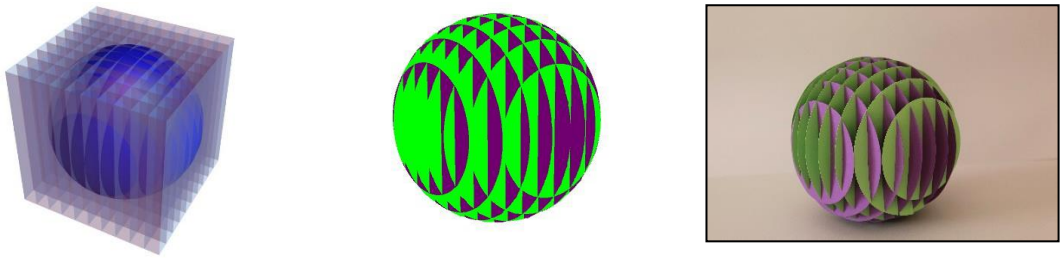


Figura 4. Modelo virtual (izda. y centro) y real (dcha.) de la esfera

Tal y como comentábamos anteriormente, esta técnica permite construir casi cualquier modelo de superficie, pero con algunas restricciones. Por ejemplo, una restricción bastante intuitiva es que debe pasar un plano por cada máximo y mínimo que tenga la superficie. Pensemos en una pirámide o un cono, si no tenemos un plano que pase exactamente por su vértice, al construir el modelo habremos perdido información y no estaremos construyendo un modelo casi exacto de la superficie en

cuestión. Otro de los problemas que nos podemos encontrar a la hora de construir un modelo es que la superficie tenga auto intersecciones, lo que en la mayoría de los casos no nos permitiría reproducirlo.

Veamos algunos modelos que hemos diseñado utilizando esta técnica. Las plantillas para construir estos modelos y el resto de superficies que aparecen a lo largo del capítulo se pueden descargar desde la página web, ver enlaces [5].

a) El corazón

Figura 5. Corazón de ecuación $(x^2+\frac{9}{4}y^2+z^2-1)^3-x^2z^3-\frac{9}{80}y^2z^3=0$

b) El croissant

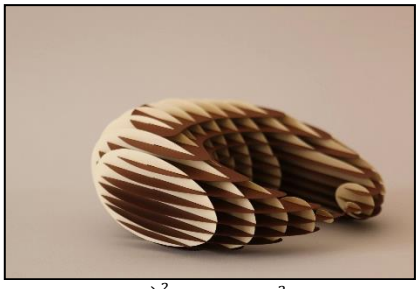
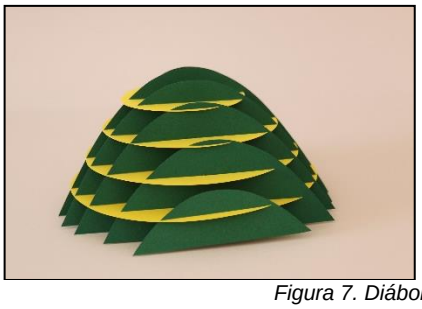


Figura 6. Corazón: $(x^2+y^2+z^2+\frac{7\sqrt{5}}{2}-\frac{11}{2})^2-\left((1+\sqrt{5})x-7+3\sqrt{5}\right)^2-\left(1+\sqrt{5}\right)^2y^2=0$

c) Diábolo



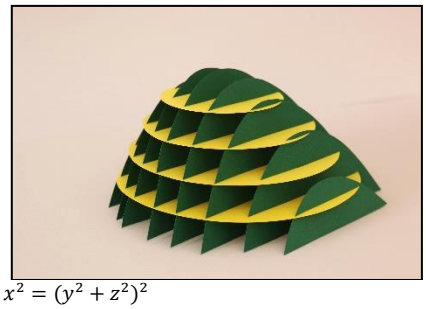


Figura 7. Diábolo de ecuación $x^2=(y^2+z^2)^2$

d) La manzana

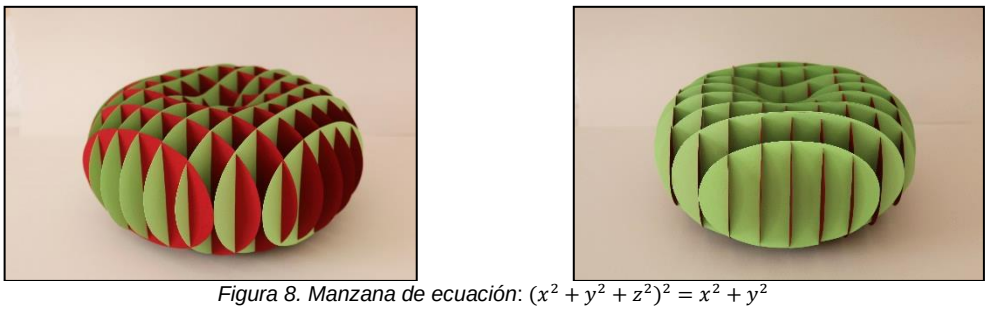


Figura 8. Manzana de ecuación: $(x^2+y^2+z^2)^2 = x^2+y^2$

e) La peonza

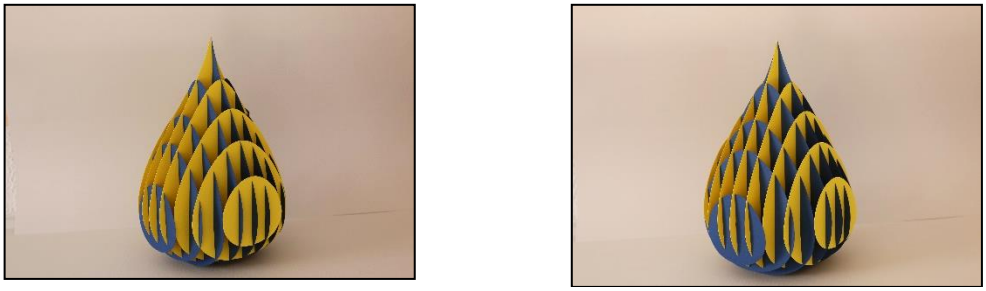


Figura 9. *Peonza de ecuación*: $x^2+y^2 = z^3(1-z)$

La ecuación y nombre de estas superficies son de la exposición Imaginary (ver enlaces [2]).

3. Otros modelos de superficies

Olaus Henrici revolucionó a los matemáticos de su época con aquellos modelos de superficies que presentó en Göttingen y que nadie había construido hasta entonces. Si bien es cierto que su idea no era nada intuitiva (no es trivial ver que el paraboloide elíptico tenga una sección circular), sus modelos utilizaban propiedades características de cada superficie lo que daba un valor añadido a cada figura.

Basándonos en la idea de Henrici nos planteamos si se podrían utilizar estas propiedades en otros modelos de superficies para poder construirlas. Por ejemplo, usando la técnica de Sharp se puede construir un hiperboloide, pero en ningún momento se utiliza el hecho de que sea una superficie reglada o una superficie de revolución.

Así, utilizando la misma idea que Henrici, diseñamos algunos modelos donde, además de calcular las piezas, éstas reflejaran alguna propiedad geométrica de la

superficie en cuestión. En otros casos, se calcula la intersección de la superficie con dos familias de planos no perpendiculares. Veamos algunos de estos modelos:

a) El cilindro

Este modelo del cilindro utiliza la propiedad de ser una superficie de revolución. En este caso, las piezas son medias elipses.

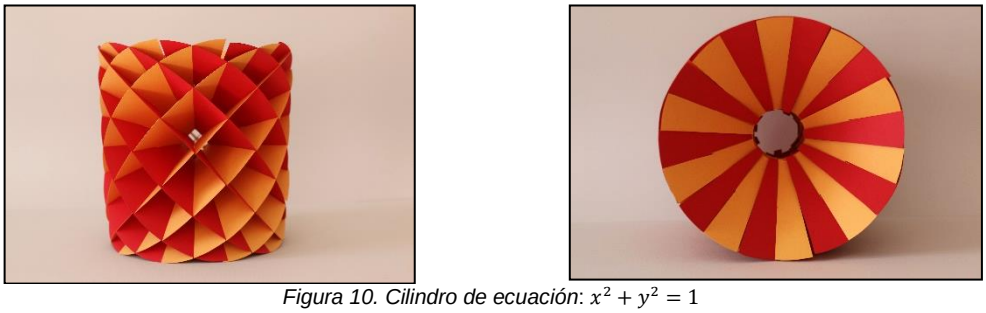


Figura 10. Cilindro de ecuación: $x^2 + y^2 = 1$

b) El cono

Consideramos la base del cono como la sección que nos da una circunferencia. Para la construcción de este modelo hemos ido cambiando la inclinación del plano. Así, cada una de las piezas que aparecen pertenecen a cada una del resto de secciones cónicas que faltan: elipse, hipérbola y parábola.

Figura 11. Cono de ecuación: $x^2 + y^2 = z^2$

c) El elipsoide

Este modelo del elipsoide está realizando utilizando la misma técnica que en el caso anterior.

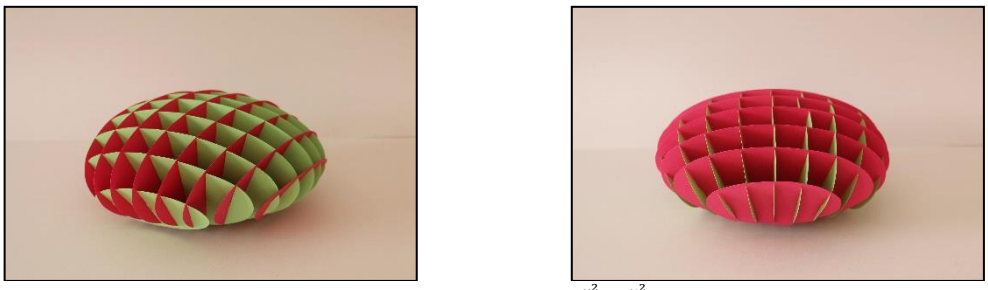


Figura 12. Elipsoide de ecuación: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$

d) La esfera

De la misma forma que hemos diseñado el cono y el elipsoide, podemos construir la esfera. En este caso, el plano que hacemos girar es tangente a la esfera en un punto.

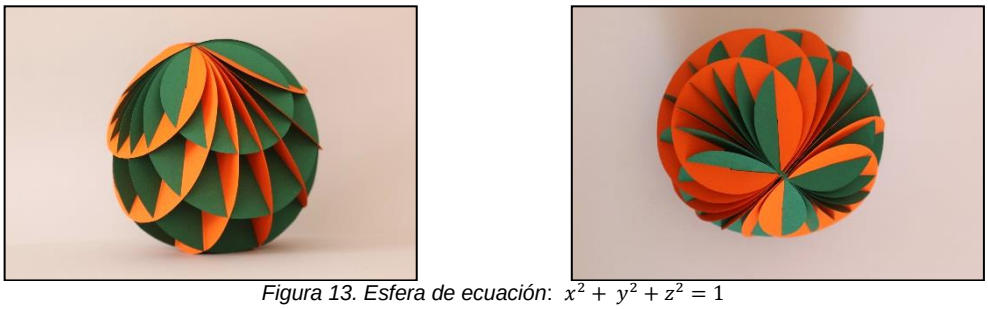


Figura 13. Esfera de ecuación: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

e) El hiperboloide

En este modelo vemos que el hiperboloide es una superficie reglada y de revolución. En este caso, las piezas tienen forma rectangular.

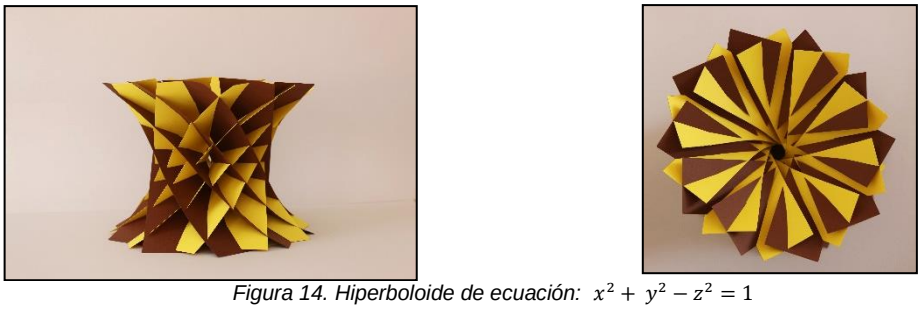


Figura 14. Hiperboloide de ecuación: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

f) El toro

Esta superficie tiene una sección especial que nos da dos circunferencias, conocidas con el nombre de círculos de Villarceau. Estos círculos aparecen cuando

seccionamos el toro con un plano bitangente, es decir, un plano que es tangente a dos puntos al mismo tiempo (ver referencias [1]).

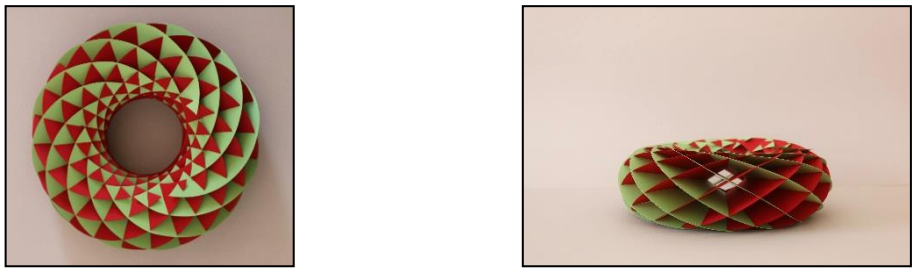


Figura 15. Toro de ecuación: $(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1$

Una generalización del toro es la cíclide de Dupin. La cíclide de Dupin puede definirse como la superficie envolvente a una familia de esferas cuyo radio va variando, es decir, es la superficie tangente a todas estas esferas al mismo tiempo. Si el radio de las esferas fuera constante, esta superficie envolvente sería el toro.

Matemáticamente, también se puede decir que la cíclide se obtiene como transformación de un toro mediante una inversión geométrica, esto es, la aplicación definida por:

$$Inv(x_0, r)(x) = x_0 + \frac{x - x_0}{|x - x_0|^2} \cdot r,$$

donde x_0 y r son el centro y el radio de la inversión, respectivamente. De igual forma que en el caso anterior, también existen planos bitangentes y los círculos de Villarceau correspondientes nos permiten construir la cíclide de Dupin. En este caso, aplicando una inversión de centro (8,0,0) y radio 4 al toro anterior, obtenemos la siguiente cíclide de Dupin:

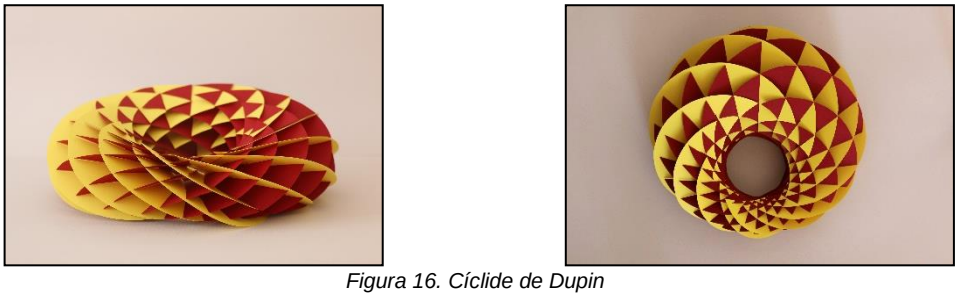


Figura 16. Cíclide de Dupin

3. El taller de superficies

Tal y como comentábamos al principio del capítulo, el taller de superficies que realizamos en la Universitat de València está dirigido principalmente a estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato y su objetivo es ampliar los conocimientos que los alumnos tienen sobre superficies.

El taller comienza con una introducción general sobre secciones de superficies lo que nos permite hablar de campos que, a priori, nada tienen en común como son la medicina, la arquitectura o la medicina.

Posteriormente, les explicamos que antes de construir alguna de las superficies con cartulina, primero hemos de decidir qué superficie queremos construir. Esto nos sirve de introducción para recordar las superficies que ellos ya conocen, que generalmente son el cono, la esfera y el cilindro. ¿Qué tienen en común estas superficies?, los estudiantes aún no lo saben (o quizá no lo recuerdan), pero todas ellas son superficies de revolución. Esto nos permite introducir conceptos como eje de revolución o curva generatriz. Por supuesto, todo ello adaptado a sus niveles. Por ejemplo, si hacemos el taller con estudiantes de primer ciclo de Educación Secundaria nos centramos más en la parte visual, dejando las ecuaciones de $\mathbb{R}^3$ en un segundo plano.

Posteriormente pasamos a hablarles de las secciones cónicas y cómo estas curvas generan las cuádricas de revolución. ¿Existen más superficies de revolución? Por supuesto que sí, de hecho, existen infinitas superficies que podemos construir, algunas de ellas han salido a lo largo de este capítulo. Esto es algo que a los alumnos les queda bastante claro de inmediato.

Después de ver algunos otros ejemplos de superficies de revolución como el corazón o la peonza, finalmente construyen algunas de las superficies que tenemos preparadas.

3. Conclusiones

Uno de los hechos más fascinantes que tiene esta técnica de construcción de superficies es la sencillez de cada uno de los modelos. Como profesores y profesoras hemos explicado en clase infinidad de veces superficies como el cilindro, el cono o la esfera, pero ¿alguna vez nos hemos planteado construirlas? Quizá el caso del cono y el cilindro se haya hecho en más de una ocasión con un folio, pero no la esfera, ya que siempre se recurre a la imaginación y decimos que no se puede porque no es una superficie desarrollable.

Al final, como todo en la vida, incluso los problemas más complicados se pueden reducir hasta convertirlos en algo mucho más sencillo. En nuestro caso, únicamente utilizando tijeras y papel podemos construir con los alumnos y alumnas formas realmente fascinantes y conseguir hacerles disfrutar de una de las más increíbles asignaturas que tienen, las Matemáticas.

4. Agradecimientos

A Juan Monterde, profesor del departamento de Matemáticas de la Universitat de València, quien ha diseñado alguno de estos modelos y me ha ayudado en muchos otros con el Mathematica©.

A Pilar Moreno, profesora de matemáticas, por las fotografías de las superficies que han aparecido.

A la Unidad de Cultura Científica y de la Innovación de la Universitat de València por facilitarme realizar este taller durante tantos años.

Referencias

[1] Monera, M. G. y Monterde, J. (2011). *Building a Torus with Villarceau Sections*. Journal of Geometry and Graphics, 15, 41-47.

[2] Monera, M. G. (2013). *Slicing Surfaces with Mathematica*. En Koninklijke Vlaamse Academie Van Belgie Voor Wetenschappen En Kunsten, Capítulo 7, pp. 49-56. Bruselas.

[3] Sharp, J. (1995). *Sliceforms: Mathematical Models from Paper Sections.* Tarquin Publications.

[4] Sharp, J. (2004). *Surfaces: Explorations with Sliceforms.* Tarquin Publications

Enlaces

[1] Biografía de A. Von Brill: www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brill

[2] Exposición Imaginary: https://imaginary.org/es/exhibition/imaginary-una-mirada-matematica

[3] La colección de modelos matemáticos de la Universidad de Zaragoza: http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1063

[4] La colección de modelos matemáticos de la Universidad de Zaragoza 2: http://patrimoniocultural.unizar.es/sites/default/files/articulos/Fichas%20modelos%20matem%C3%A1ticos%20web.pdf

[5] Página web para descargar las plantillas: http://www.uv.es/monera2

CoE206 Fotografía matemática: Títulos, concurso y exposición itinerante.

Salvador Caballero Rubio
salvador.caballero@gmail.com
Vocal fotografía SEMCV "Al-Khwarizmi".

Modalidad: Exposición de fotografía matemática.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional, Formación de Personas Adultas y Universidad (Grado en Maestro/a en Educación Primaria, Grado en Matemáticas).

RESUMEN

La exposición presenta una selección de fotos del concurso "Fotografía a la vista" que organiza la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana (SEMCV) ininterrumpidamente desde el curso 1993-1994 en sus distintos apartados: "individual" y "series", para estudiantes de la Comunidad Valenciana, y "libre", para cualquiera que quiera presentar su foto según la convocatoria. Se analizará qué define una buena fotografía matemática, la importancia del título, los contenidos del currículo que puede mostrar y cómo lo hace, y la importancia de organizar un concurso que permita presentar y compartir las diferentes formas de captar las ideas matemáticas que se estudian en los distintos niveles educativos. Con todo ello se pretende que estudiantes y profesorado, personas en general, aprendan a ver y disfrutar, ya para toda su vida, las matemáticas del entorno, la belleza de una simetría, una proporción, una espiral… y que sean protagonistas participando en el concurso con su aportación y personalidad.

Palabras clave*: Fotografía Matemática, Concurso, Recursos Didácticos de Matemáticas, Internivel.*

Joan, un joven estudiante de 1º de bachillerato está haciendo una visita turística familiar a un castillo. Hace un día espléndido y lleva una cámara lista para captar imágenes que recordar posteriormente. De pronto, una bandada de palomas con

colores llamativos cruza el cielo cercano y Joan dispara una fotografía. No es una fotografía preparada. Apenas se fija en ella algo le llama la atención, la bandada destaca sobre el fondo del cielo con una forma en la que ve el símbolo de infinito que ha estudiado en clase de matemáticas, y piensa "Vol infinit/Vuelo infinito". Ya tiene una fotografía matemática y la comparte en el concurso (Imagen 1).

Imagen 1. Vol infinit. Joan Borja.

Liliana ya ha participado en algún concurso de fotografía matemática. Tiene el ojo entrenado para apreciar la matemática. Está en la playa en la noche y alguien juega con cohetes a la orilla del mar. Destaca el movimiento rápido del cohete en la oscuridad, y obtiene una fantástica imagen. Sabe que tiene una foto matemática, decide ponerle el título "1 noche…1001 funciones" y presentarla al concurso (Imagen 2).

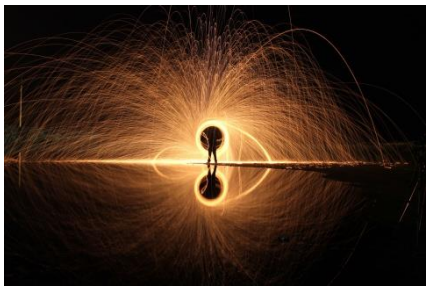


Imagen 2. *1 Noche...1001 Curvas.* Liliana Miñana.

Lluís está de viaje con la familia y por la mañana, muy pronto, observa un racimo de uva con el rocío goteando. Es matemático y en su centro organiza un concurso de fotografía matemática, al que no se presenta, claro está, pero que ya da idea de que puede ver las matemáticas en todo. Tiene a toda la familia esperando y expectante, le lleva tiempo, realiza varias fotografías hasta que queda satisfecho y orgulloso, y presenta una al concurso de la SEMCV (Imagen 3). Su afición se transmite, sus dos hijos también participan en el concurso en otro apartado.

Imagen 3. *"Naix una esfera d'altra esfera"*. Lluís Bonet

José Miguel no es profesor de matemáticas, pero una hija participa en el concurso de fotografía matemática de su centro y decide mostrarle que también ve matemáticas hasta en la comida y presenta una serie de cuatro fotografías al concurso de la SEMCV. Una de ellas es la Imagen 4.

Imagen 4. Serie (1/4). "*Matemáticas alimenticias-1.Inversiones y giros de lubina para hacer… Bonito"*. José Miguel Pareja

Éstas son cuatro de las fotografías que se pueden ver en la exposición, pero todas y cada una de ellas una tiene una historia detrás que la ha hecho posible. Muchas son improvisadas, fruto del azar, otras son buscadas o preparadas para mostrar contenidos matemáticos del currículo.

En el taller veremos y analizaremos varias fotografías y sus títulos, de las que se presentan en la exposición, que paso a describir.

La exposición consta de 10 *rollers* de 1x2 m. (un ejemplo en Imagen 5) y 10 paneles de cartón pluma de 70x100 cm. con una selección de fotografías de las distintas ediciones del concurso "*Matemàtica a la vista*" de la SEMCV.

El concurso se convoca en sus últimas ediciones con premios en tres apartados: dos para estudiantes de la Comunidad Valenciana (fotos individuales y series) y un apartado libre (cualquier persona que no sea estudiante de la CV) (bases en semcv.org).

En general, cada *roller* muestra 15 fotografías de los tres apartados del concurso y presenta fundamentalmente fotografías premiadas en cada apartado. Se han elaborado con fotografías de un solo concurso, de dos concursos o con una selección de varios concursos. En cada uno se detalla el concurso y año, y en las fotos se incluyen datos de autoría, premio -si lo hay-, centro y localidad si las fotos son de estudiantes, o solo el nombre y la localidad en el apartado libre. No debería sorprender que haya más fotos de los últimos concursos, ni que haya pocos de estudiantes de centros de Educación Primaria.

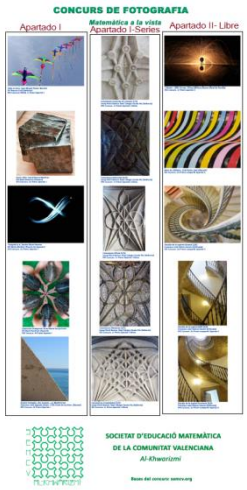


Imagen 5. Uno de los *roller*

El primer concurso “Matemática a la vista” de la SEMCV se realizó en el curso 1993-1994, y desde esa edición lo he coordinado en estos casi 30 años. En un primer momento su convocatoria fue anual, pero pronto se ligó a la realización de las Jornadas de Educación de la SEMCV y pasó a ser bianual. Actualmente la convocatoria es anual. Es digital desde el concurso XVII de 2020 debido a la pandemia de coronavirus.

Anteriormente las fotografías se presentaban en papel, en un formato bastante libre que dejaba mucha iniciativa a los participantes para elegir el tamaño y el fondo sobre el que presentarlas (cartulinas o similares de distintos colores, posibilidad de títulos con letras a mano, enmarques distintos con líneas o el mismo título…).

En la exposición se muestran 10 paneles de cartón pluma 70x100 cm con fotografías presentadas en papel, tal como se recibieron en su momento y que

forman parte de una de las exposiciones itinerantes del concurso, para apreciar la importancia del toque personal en la presentación. No es solo la foto, es cómo se presenta lo que proporciona otra sensación de implicación con el resultado de quien presenta la foto. La presencia y la evolución de las tecnologías favorecen que el concurso digital sea inevitable, pero, quede la muestra para apreciar que no es la única manera de hacerlo. Un detalle más de la evolución de las tecnologías y del concurso es que en los primeros años una gran parte de las fotos que se presentaban lo hacían en blanco y negro.

El concurso y las exposiciones tienen el objetivo fundamental de proporcionar el lugar de encuentro del profesorado y alumnado alrededor de la fotografía matemática. Es muy específico, la matemática está en el centro y es el eje del mismo. Es perfecto para ver y hablar de Matemáticas con mayúscula. Hay fotos con puntos, rectas, paralelas secantes, perpendiculares, intersecciones, círculos, parábolas, elipses, curvas, límites, áreas, números, infinitos geométricos y numéricos, conjuntos, espirales, funciones, fractales, caos, límites, simetrías, mosaicos de todo tipo y muchos más temas. Con unos títulos increíbles.

Con las fotografías matemáticas se ven las matemáticas en los centros, en las aulas, en las casas, en los paseos, en los edificios públicos, en la playa, en el monte, en el campo, en las plantas, en las flores, en lo que comemos y en lo que consumimos, en el arte, en la decoración, en los adornos que llevamos, en la cara y en los ojos con los que miramos, en todo nuestro entorno. En todo lo que nos rodea. Las imágenes muestran el contenido matemático claramente, específicamente, y sugerido muchas veces por el título. Y avivan nuestra imaginación.

La fotografía permite aislar, plasmar, fijar, mostrar y enfatizar ideas matemáticas en imágenes bellas, sugerentes, en detalles a la vista de todos; y no tan a la vista. Con la fotografía matemática cada persona siente que está muy cerca de las matemáticas. Y puede, o no, hacer más matemáticas, plantear o resolver problemas sobre las fotos. En todo caso, se aprende a explorar la realidad con otros ojos, de forma que puede ver matemáticas en todo y siempre. Es una forma más de apreciar, de enriquecer el conocimiento de la realidad que nos rodea y comprenderla mejor, ya que podemos y sabemos utilizar el instrumento de saber

mirar con ojos matemáticos. Se aporta, a lo que ya se conoce y se sabe ver, una nueva forma de ver. Se ha dicho repetidamente que el instrumento era unas gafas para ver las matemáticas que se podían usar en un momento dado. Hoy pretendemos incorporar a los ojos, a la mirada, la capacidad de utilizar un filtro matemático cuando sea necesario.

El título de la fotografía define el carácter matemático de la misma. Es crucial. Puede ser muy directo, simple, claro: “simetría” declara con nitidez qué idea presenta y todos entendemos, y rápidamente sabemos si es lo que esperamos, solo tenemos que comprobar que responde a una simetría y determinar qué tipo de simetría es. Pero también puede ser algo más indirecto, sugerente, de forma que te hace volver la mirada a la foto para buscar el sentido que te indica ese título que llama la atención. Puede ser divertido, de forma que el conocimiento matemático compartido, cómplice, te haga esbozar una sonrisa y se haga inolvidable, o simplemente enfatiza un contenido que ni por asomo se te ocurría buscar. También, ocurre, puede parecer o estar claramente equivocado, y la foto puede ser útil para ver el porqué.

Hay títulos que desde que los ves ya asocias a determinadas fotografías. Y se graban a fuego en la memoria, la fotografía y el título van juntos. A mí me pasa. Son tales que cuando hablas de una exposición como esta te vienen a mente instantáneamente, dominando sobre los demás. Son pocas fotos las que lo consiguen, y lo mejor, es que no son las mismas para cada uno, y además, depende del momento en el que las vemos, si las vemos con o sin prisa, solos o acompañados. Un comentario de alguien puede hacernos repensar la fotografía, cambiar la apreciación que habíamos hecho, fijarnos en un detalle nuevo, plantearnos si está bien o cómo mejorarla, relacionarla con otra, etc. Luego podemos repasar mentalmente estas fotos que nos han impresionado más y por qué, y comentarlas con los demás. Hablar de ellas, conocerlas más y mejor, hace que se aprecien más todavía. Todos tenemos algunas fotos que nos impresionaron y a las que tenemos un cariño especial.

Es normal que los diferentes concursos se hayan producido con distinta cantidad y calidad de fotos, remarcando que cada una tiene un gran valor. Pero siempre hay

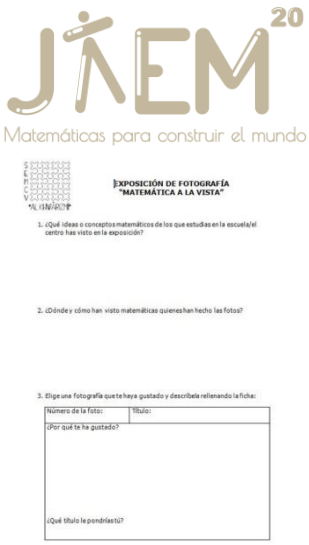
una buena aportación en los temas conocidos, recurrentes, y se incorporan nuevas ideas. Todos aportan fotos únicas y valiosas, y siempre hay que esperar que el siguiente sea excepcional, pensar que las mejores fotos están por hacer y que el jurado tenga la bendita dificultad de decidir los premios.

El concurso de la SEMCV ha permitido la elaboración de un calendario de fotografía matemática, ya con dos ediciones, que se ha enviado a los socios. Y la preparación de exposiciones itinerantes de fotografías del concurso.

La exposición itinerante es una de las actividades de divulgación de las Matemáticas de la SEMCV. En estos momentos hay preparadas tres exposiciones itinerantes para préstamo gratuito a los centros de la Comunidad Valenciana, con 15 paneles de cartón pluma de 70x100 cm. cada una, que se envían en una caja adecuada. El centro paga el desplazamiento. Hay un protocolo de solicitud en la web y un calendario de préstamos. La exposición tiene la doble función importante de dar a conocer fotografías matemáticas del concurso, y animar a participar en él. Da muy buenas ideas –con ejemplos de series, por ejemplo– y extiende el concurso. Algunos centros que la tienen luego organizan su propio concurso y participan en el de la SEMCV.

Introducción de la fotografía matemática y actividades que se hacen relacionadas con la fotografía (ideas para ampliar en el taller).

1. *Visualizar* fotografías matemáticas en clase mediante una proyección, con la visita a una exposición itinerante que se ha solicitado y se expone en el mismo centro o en un centro cercano, o aportando una colección de fotografías plastificadas. Comentarlas, ponerles título, analizarlas o clasificarlas según distintos criterios. Hablar de la geometría que presentan, de cómo y dónde están hechas, ayuda a precisar el vocabulario que las describe, a mejorar la expresión oral… Una hoja para expresar brevemente un comentario sobre la exposición, para rellenar de forma individual o en parejas, podría ser de la forma que se muestra en la Imagen 6.



EXPOSICIÓN DE FOTOGRAFÍA
"MATEMÁTICA A LA VISTA"

1. ¿Qué ideas o conceptos matemáticos de los que estudias en la escuela/el centro has visto en la exposición?

2. ¿Dónde y cómo han visto matemáticas quienes han hecho las fotos?

3. Elige una fotografía que te haya gustado y describela rellenando la ficha:

Número de la foto:	Título:
¿Por qué te ha gustado?	
¿Qué título le pondrías tú?	

Imagen 6. Guía para la exposición de fotografía

Visualizar y hablar de la geometría que hay en fotografías matemáticas está en la esencia de desarrollar el sentido espacial que aparece los currículos de Matemáticas de las diferentes etapas. Se puede hacer al iniciar y al finalizar el trabajo de geometría, para comprobar cómo mejora la precisión de la expresión oral en la clase, si se introducen en las explicaciones, en los razonamientos, términos y conocimientos nuevos; o como motivación para localizar en el entorno contenidos que se están estudiando.

Alguna fotografía con figuras geométricas bien definidas, como la que se muestra en la Imagen 7, permite hacer una actividad de reproducción geométrica. Se proyecta-muestra la imagen un tiempo –2 minutos, depende de imagen y estudiantes- sin que nadie dibuje nada, solo memorizándola, y se pide que se produzca después, y se pasa a comparar los resultados obtenidos.

Imagen 7. *1001 formes*. Carlos López

También se puede pedir una justificación del título cuando no sea evidente qué lo ha sugerido pero parece razonable que se pueda investigar y averiguar. (Imagen 8)

Imagen 8. *109° 28'*. Alberto Martínez

2. *Hacer fotografía matemática*. Quien hace una fotografía matemática no lo olvida nunca, y ya solo hay mejora. Hay que propiciar, proponer, la realización de fotografías matemáticas. Una de las formas es hacer que sea una tarea de clase en la que solo se obtiene algún resultado positivo. Otra, planificar y realizar un recorrido matemático por el centro y el entorno ciudadano (centro escolar, calles, parques, plazas, edificios emblemáticos…) en el que el objetivo, o uno de los objetivos, sea la obtención de fotografías con contenido matemático, para estudiar en clase o para participar en un concurso del centro o externo. Hay bastantes ejemplos que facilitan la preparación de un recorrido adaptado a cada situación (véase la web semcv.org).

La fotografía es una actividad con mucha carga individual, de visión, trabajo y decisiones muy personales. Suele haber alguien que ve y que dispara la foto, y así es en general. Y es a lo que se tiende, que cada estudiante o persona que se acerca a la fotografía matemática haga suya la actividad. Supone una implicación personal que no se olvidará nunca. Pero se puede aceptar que se haga con la participación de más de una persona, con un trabajo conjunto de preparación o de búsqueda y decisión del objetivo a fotografiar. La inmensa mayoría de las fotografías presentadas al concurso son individuales, pero hay fotografías en la exposición realizadas por parejas de estudiantes de la misma clase. El profesorado puede animar a hacer fotografías matemáticas como otra forma de acercarse y entrar en las matemáticas. En muchos casos es una fuente de sorpresas agradables, ya que hay estudiantes que tienen como un don especial para apreciar la belleza y la canalizan en esta actividad, son protagonistas, se sienten valorados y aumentan su interés en la clase. Y no siempre son los que mejor funcionan normalmente.

3. *Organizar un concurso de fotografía matemática* en clase, en el centro, o en varios centros de una localidad coordinando departamentos, en el que participe toda la comunidad educativa, con exposición de trabajos (específicamente, en la semana cultural…) de forma que concedan unos premios y se seleccionen fotos para presentarlas en el concurso de la SEMCV, o de otra Comunidad. Además, es fácil y económico hacer un panel en cartón pluma para recoger los premios y las fotos que se consideren adecuadas para exponerlo en el centro de forma permanente o en una Casa de la Cultura local. Ya hay centros que lo hacen. Por suerte es una actividad muy extendida y es fácil encontrar modelos diferentes de bases para un concurso que ayuden a definir el propio, el que se puede asumir.

En cierta ocasión, la concejalía de cultura del ayuntamiento de una importante localidad valenciana organizó en su monumental Casa de la Cultura una exposición de fotografía matemática para que pudieran pasar por ella los estudiantes de todos los centros de la misma. Se enviaron las tres exposiciones itinerantes para hacer una gran exposición. Se ofrecieron a mejorar la exposición poniendo todas las fotos en el mismo tipo de cartulinas, porque llamaba la atención la variedad de presentaciones. Hay que decir que en ese momento, en el mismo local, había otra exposición de fotografía en la que cada una de ellas se presentaba sola y estaba perfectamente enmarcada. Agradecidamente declinamos la oferta y justo el valor de esa variedad fue uno de los rasgos destacados en el discurso de inauguración. Quién lo iba a decir, hoy se presentan los *rollers* que hacen más limpia y uniforme la presentación de las fotografías.

4. *Incorporar nuevas tecnologías en el estudio de la fotografía matemática*. Continuar con el trabajo sobre una fotografía matemática en la clase, o en trabajos más amplios individuales o en grupo, con programas de geometría dinámica como Geogebra. Hay ejemplos, como los que muestra José Antonio Mora en la web https://www.geogebra.org/m/j6wpqrwh, realizados a partir de las fotos publicadas en el calendario 2019 de fotografía matemática de la SEMCV (véase en semcv.org), o los que aparecen en la web de fotografía matemática de ABEAM: https://fotografiamatematica.cat/. También se podría aplicar conocimientos

matemáticos avanzados que reproduzcan o se ajusten a las formas que aparecen en las fotografías (Borrás, 2002).

Acabaré con el deseo de que pases a ver y disfrutar de la exposición, y con pequeño un desafío fotográfico matemático para cuando la visites. Alguna de las fotografías en los *rollers* y paneles tiene una etiqueta que impide leer directamente el título con el que se presentó al concurso. Ponles título a estas fotos antes de desvelarlo y comprueba cuán cerca está del propuesto en la misma. Os adelanto tres. ¿Qué título les pondríais a estas?

Referencias

Alonso, P. y otros. (2001). *Fotografía matemática IES "Andalán"*. Diputación de Zaragoza. Zaragoza.

Bel-Lloch, A. y otros. (1995). *Fotografía y Matemáticas*. SPPM Emma Castelnuovo. Madrid.

Borrás, E. y otros. (2002). RITMOS. *Matemáticas e imágenes*. NIVOLA. Madrid.

Burgués, C y otros. (2017). *Fotografía matemática*. FESPM Revista SUMA. Monografía 6. Badalona.

Caballero, S. y López, J.F. (2018). *Taller de Fotografía matemática*. XIII Jornades SEMCV. Valencia.

Caballero, S. y otros. (2002). *Rutas matemáticas en Alicante*. SEMCV "Al-Khwarizmi". Alicante.

Ernst, B. (1989). *El espejo mágico de M.C. Escher*. TACO. Berlín.

Moreno, P. (2006). *Anda con ojo*. Factoría K de libros. Vigo.

Nomdedeu, X. (2009). Uno. [Versión electrónica]. Revista Uno 52

CoE207 El Museu Campus Escultòric (MUCAES) de la UPV. La visita guiada como herramienta para la construcción patrimonial y conservación

Antoni Colomina Subiela
ancosu@upv.es
Fondo de Arte y Patrimonio UPV
Beatriz Doménech García
beadomga@bbaa.upv.es
Fondo de Arte y Patrimonio UPV

Modalidad: Visita guiada

Nivel educativo: Bachillerato y Universidad.

RESUMEN

El Museu Campus Escultòric (MUCAES) de la Universitat Politècnica de València, con cerca de ochenta obras monumentales o de gran tamaño, es uno de los mejores y mayores museos de escultura al aire libre de nuestro país. La conservación, valorización y divulgación de esta singular colección son los objetivos fundamentales del Área de Fondo de Arte y Patrimonio, estructura universitaria encargada de su gestión cultural. La visita guiada al MUCAES se convierte en una de las actividades básicas de divulgación, que implica procesos de mediación que construyen lazos identitarios entre las obras y los visitantes, un requisito fundamental para su conocimiento y conservación.

Palabras clave: Museu Campus Escultòric, Universitat Politècnica de València, Escultura, Conservación-Restauración, Visita Guiada.

1. El Museu Campus Escultòric

La Universitat Politècnica de València (UPV) posee un considerable patrimonio artístico, científico, tecnológico e industrial, repartido por los Campus de Vera (Valencia), Alcoi y Gandia. Este patrimonio cultural sirve a distintos propósitos, que

tienen que ver con el estudio, la docencia, la investigación y la difusión de la ciencia, la tecnología, el arte y la cultura en general. El principal objetivo de las estructuras encargadas de su custodia es el de velar por su conservación, gestión y difusión, atendiendo a su diversidad, dispersión y características particulares de los Museos y Colecciones de la UPV.

En particular, el Museu Campus Escultòric (MUCAES) de la Universitat Politècnica de València, reconocido como Museo de la Generalitat Valenciana en noviembre de 2017, aglutina una colección de cerca de 80 obras escultóricas monumentales o de gran tamaño, mayoritariamente expuestas al aire libre, que conviven con el entorno urbano, paisajístico y humano de los Campus que comprenden la UPV. El espacio expositivo del MUCAES se extiende en estas tres sedes que forman parte de la UPV, aunque es el Campus de Vera en Valencia donde se expone la mayor parte de la colección (Imagen 1).

Imagen 1. Vista del Campus de Vera (Valencia), con la escultura Pórtico, de Emilio Escobar, en primer plano.

El conjunto de obras de artistas nacionales e internacionales de relevante prestigio que lo integran (Jorge Oteiza, Manolo Valdés, Susanne Bayer, Ramón de Soto, Nassio Bayarri, Fernanda Fragateiro, Néstor Basterretxea, Eusebio Sempre, Nati Navalón, Javier Mariscal, entre muchos otros), está considerado como una de las mayores y mejores colecciones españolas de escultura al aire libre. La diversidad se

hace evidente en cuanto a estilos artísticos, lenguajes plásticos, técnicas y materiales, de modo que el visitante puede recorrer itinerarios temáticos muy variables, con esculturas que dialogan con los espacios y que han sido creadas en diversos materiales, como el acero, el bronce, el hierro, la piedra o, incluso, el barro, la cerámica, el cristal, el poliéster, la madera y la fibra de vidrio.

Por todo ello, la colección escultórica al aire libre del MUCAES, conjugando arte y hábitat de manera única, permite la toma de contacto directa con las obras, facilitando el alcance del espectador a múltiples parámetros del lenguaje artístico e impresiones sensoriales. Visitar el Museo Campus Escultòric es adentrarse en un círculo sensorial donde la interacción escultura-espectador permite generar diálogos únicos con las obras, las ideas, los conceptos, la forma y los materiales que las componen.

2. Líneas de acción

En la actualidad se trabaja en la implementación progresiva de estrategias que permitan una mejora sustancial en la conservación y restauración de las obras y en la difusión y conocimiento de sus valores patrimoniales. Por una parte, la propia idiosincrasia de la colección hace que deban atenderse las problemáticas propias de un museo al aire libre, con su continua exposición ambiental y siempre expuesta a la interacción con los visitantes. Por otro lado, es importante seguir trabajando en la mejora de su accesibilidad, conocimiento y difusión, abriendo el Campus a la sociedad e impulsando planes de acercamiento y creación de vínculos identitarios.

Por esto, teniendo presente este doble objetivo, el Área de Fondo de Arte y Patrimonio, estructura encargada de la gestión, conservación y difusión del MUCAES, emprende las líneas de acción que se vinculan con la conservación curativa, la restauración y la conservación preventiva (Imagen 2); así como con la valorización y difusión del patrimonio escultórico con el fin de garantizar la conservación escultórica y fomentar su divulgación y conocimiento.

3. La visita guiada como estrategia para la conservación del patrimonio cultural

En la base de la disciplina de la conservación del patrimonio se asienta la necesidad de promover acciones que activen o refuercen los vínculos entre las obras y la sociedad. Es, precisamente, ese momento de reconocimiento de la obra por parte del individuo como elemento fundamental de su identidad el que alienta la construcción del fenómeno cultural.

Teniendo presente esta premisa esencial, se establece como objetivo básico en la gestión del MUCAES el desarrollo de planes que estimulen la interacción entre obra y espectador y, precisamente, potencien en el visitante el sentido de pertenencia, identidad, herencia y transmisión.

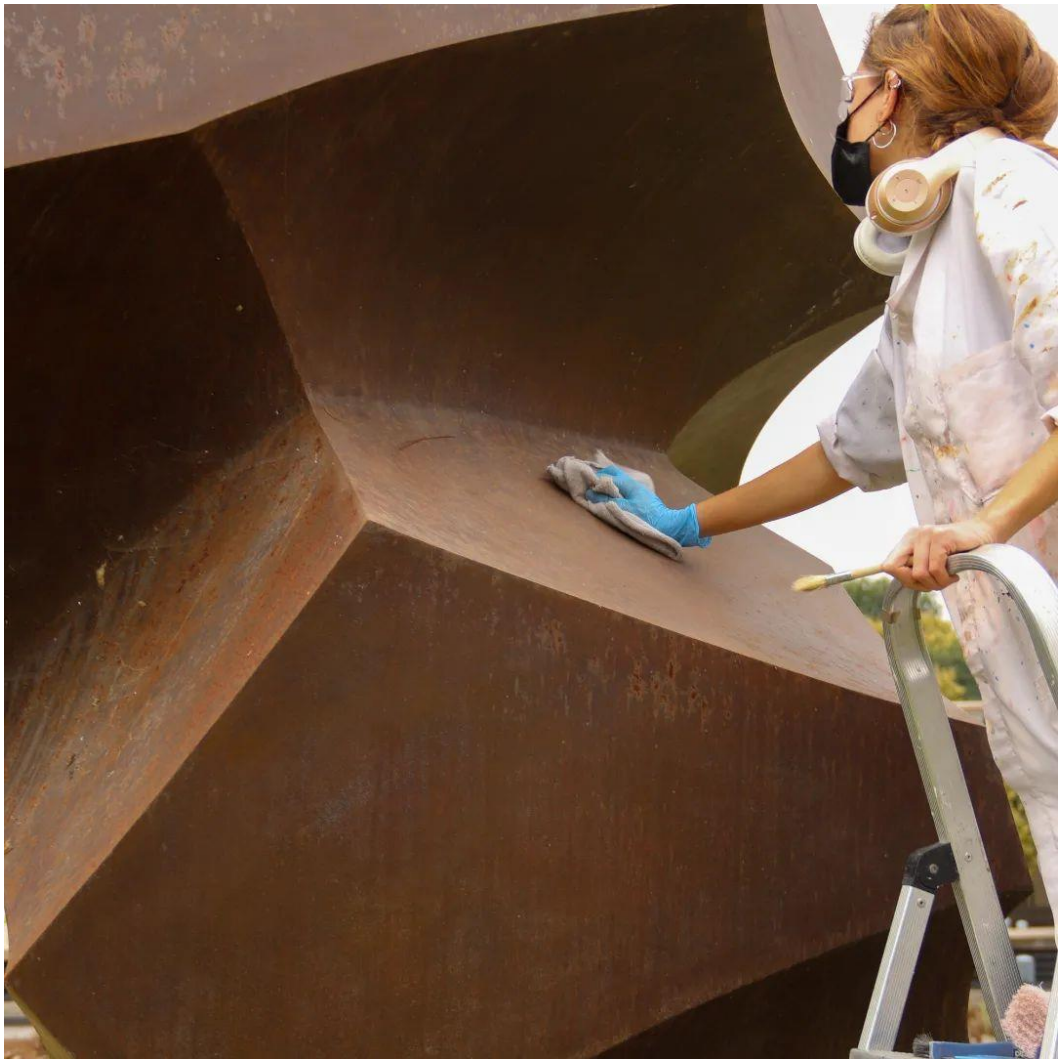


Imagen 2. Procesos de conservación en las esculturas del MUCAES.

Por esto, teniendo en cuenta esa doble vía de acción que considera tan necesaria la disciplina científica de la conservación como la mediación artística, la propuesta de visita guiada al Museu Campus Escultòric (MUCAES) se desarrollará a través de un itinerario que considere una selección de las obras más importantes de la colección, de acuerdo con la significancia de sus significados, materialidad y relevancia artística. Pero también, de manera complementaria, ese discurso será completado con la visita al taller de conservación y restauración del Área de Fondo de Arte y Patrimonio, donde se implementan estrategias para la conservación preventiva de las esculturas y se disponen los procesos adecuados de conservación curativa y restauración para las obras que así lo precisen.

Imagen 3. Visita guiada al Museu Campus Escultòric. Campus de Vera (Valencia).

Referencias

Arnal, J y Navarro, J. (2012). *Memoria de las visitas guiadas al Campus Escultórico de la UPV: Curso 2012-2013*. Universitat Politècnica de València, Fons d'Art. Valencia.

Navarro, G.; Colomina, A. y Martín, S. (coord.) (2018). *Museu Campus Escultòric. Siempre abierto, siempre a tu alcance*. Universitat Politècnica de València. Valencia.

Universitat Politècnica de València (1995). *Fons d'art contemporani*. Universitat Politècnica de València. Valencia.

Universitat Politècnica de València (2001). *Esculturas del Campus de la Universidad Politécnica de Valencia*. Universitat Politècnica de València. Valencia.

CoE208 Visita al Museo de Telecomunicaciones Vicente Miralles

María Carmen Bachiller Martín
museo@etsit.upv.es
Museo de la Telecomunicación Vicente Miralles Segarra

Modalidad: Exposición

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (Telecomunicación, Informática, Física, Comunicación Audiovisual, Conservación y Restauración, Música, Cine).

RESUMEN

Visita guiada al Museo de la Telecomunicación Vicente Miralles Segarra de la UPV. El Museo el museo cuenta con más de setecientas piezas, doscientas cincuenta expuestas, que se reparten en 5 áreas temáticas: telegrafía, telefonía, radiocomunicación, equipos audiovisuales, aparatos para medir e investigar. Están distribuidas en vitrinas en la planta baja y la primera planta del edificio 4D de la Escuela. Además cuenta con la instalación didáctica “Antenas susurrantes” que permite experimentar con la propagación de ondas acústicas. Se puede encontrar amplia información sobre el Museo y sus actividades en la web del Museo.

Palabras clave: Telecomunicación, Telegrafía, Telefonía, Radiocomunicación, Audiovisual.

1. Introducción

Los seres humanos somos los animales más curiosos y sociables del planeta. Estas dos cualidades nos llevan, de una forma natural, a sentir la necesidad de comunicarnos entre nosotros.

El lenguaje oral y escrito proporcionó, desde los albores de la humanidad, la comunicación necesaria en el entorno inmediato. Para llegar a destinos remotos se

utilizaron medios escritos, pero siempre a costa de una cantidad notable de tiempo y esfuerzo.

La necesidad de comunicación a distancia: telecomunicación («tele» es la palabra griega para “lejos”) ha llevado a la humanidad a desarrollar todo tipo de estrategias e inventos.

El telégrafo, el teléfono, la radio, la televisión, los tubos de vacío, el transistor, los ordenadores, las redes de cables submarinos, las estaciones de telefonía móvil, la fibra óptica, las constelaciones de satélites de comunicaciones, el protocolo http, internet, los smartphones ….todos ellos son ejemplos de la creatividad y el genio de las personas para ir más allá de sus limitaciones físicas. La telecomunicación representa un desarrollo colectivo sin precedentes, porque en escasos 200 años la humanidad ha pasado de tener una comunicación limitada y difícil a sistemas que facilitan que podamos comunicarnos de forma global e instantánea.

El Museo de Historia de la Telecomunicación Vicente Miralles pretende ilustrar ese avance a través de los dispositivos que lo hicieron posible. La telegrafía, la telefonía, la radiocomunicación, los equipos audiovisuales, así como los aparatos para medir e investigar se presentan de una forma didáctica al gran público.

En este museo encontrareis una pequeña muestra de una parte fundamental de la historia y el avance de la humanidad; nuestra intención es que lo visitéis y lo disfrutéis, que ahondéis en la tecnología que nos rodea y de la que no somos a veces demasiado conscientes, y, si es posible, despertar en vosotros la misma curiosidad y pasión que guio a los pioneros de la Telecomunicación.

Imagen 1. Equipos del Museo

1.2 La colección

Actualmente, el museo cuenta con más de setecientas piezas, doscientas cincuenta expuestas, que se reparten en 5 áreas temáticas: telegrafía, telefonía, radiocomunicación, equipos audiovisuales, aparatos para medir e investigar. Están distribuidas en vitrinas en la planta baja y la primera planta del edificio 4D de la Escuela. Se puede acceder a la base de datos de catalogación on line.

1.2.1 Equipos Audiovisuales

El Museo cuenta con una amplia colección de aparatos de recepción de radiodifusión y televisión, así como reproductores y grabadores de audio y vídeo, de los siglos XIX, XX y XXI.

Imagen 2. Magnetófono AKAI.

1.2.2 Telegrafía

El Museo de la ETSIT ha logrado reunir una importante muestra de aparatos históricos, que incluye manipuladores, receptores, impresores y acústicos, relevadores, traslatores y otros instrumentos auxiliares utilizados desde el siglo XIX como descargadores (pararrayos), conmutadores, avisadores, miliaperímetros de estación o ruedas envolventes. El Museo cuenta con varias

máquinas, antiguas y modernas, conocidas comúnmente como teletipos, de las marcas Creed, Siemens, Olivetti o Sagem, que se utilizaron en la red telegráfica española desde los años 1930 y también extensamente para comunicaciones punto a punto por los ejércitos, la banca, los periódicos o la industria y el comercio. La red de conmutación automática Télex, que empleaba teletipos de impresión en página se inició en Madrid en 1954 con una central de 100 abonados alcanzando su máximo de unos 43000 hacia 1987, decayendo desde entonces por la competencia de nuevos sistemas como el telefacsimil y el correo electrónico.

Imagen 3. Telégrafo Baudot

1.2.3 Telefonía

El Museo guarda entre sus fondos tanto aparatos telefónicos como centralitas o parte de centrales de conmutación representativas de las distintas épocas de esta técnica. En cuanto a los aparatos telefónicos se cuenta con teléfonos electromagnéticos del siglo XIX, modelo Ader, de alcance muy limitado por no

utilizar pilas ni elementos activos. Teléfonos de batería local y llamada magnética utilizados desde las primeras redes urbanas a partir de 1882, teléfonos de batería central-ya sin pila de micrófono ni magneto de llamada-, teléfonos de campaña utilizados por los ejércitos o los celadores de líneas, y teléfonos automáticos de selección por disco, introducidos fundamentalmente por Telefónica de España hacia 1926. Y por supuesto teléfonos de marcación por teclado introducidos en los años 1970 y que en sucesivas versiones han ido introduciendo numerosas funciones adicionales a la voz, tales como agendas, manos libres, identificación del llamante, etc. También dispone el Museo de interfonos, timbres supletorios, marcadores automáticos, emisores de tonos y otros dispositivos auxiliares. Entre las centralitas telefónicas las hay de batería local tanto militares como civiles, con indicadores de llamada y cordones, de distintas capacidades y modelos, y automáticos con una relativamente moderna Pentomat, electromecánica de barras cruzadas.

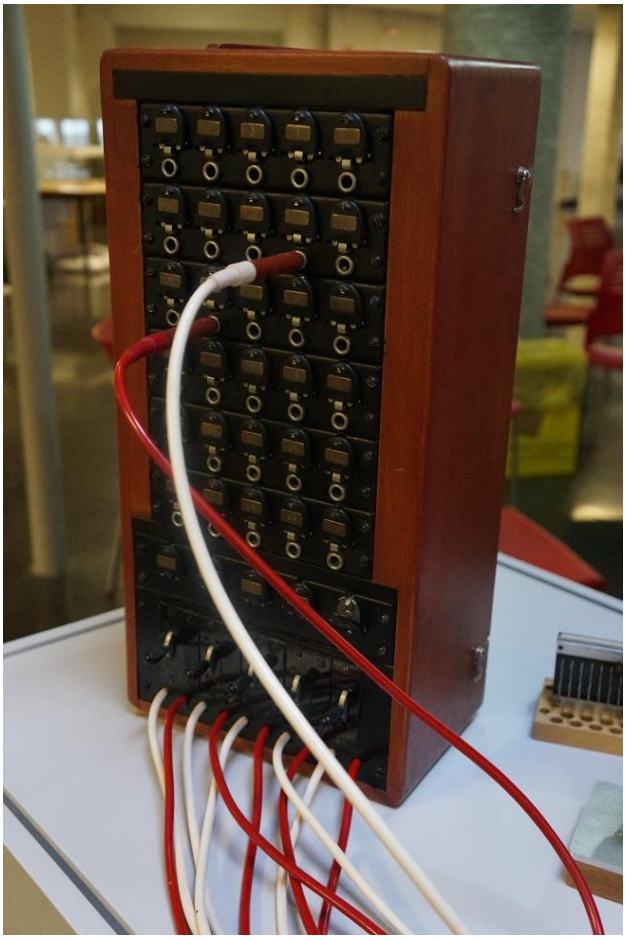


Imagen 4. Centralita telefónica manual.

1.2.4 Radiocomunicaciones

Existen dos formas de uso diferenciadas para la radio. Por un lado, la emisión unidireccional hacia grandes masas de gente, o radiodifusión, y por otro, la comunicación bidireccional entre personas a través de ondas de radio, o radiocomunicaciones. La colección posee unas cuantas piezas de radiocomunicaciones de uso militar de diferentes épocas, destacando un transceptor portátil Marconi de 1949 y los equipos PRC 6 y PRC 10.

Imagen 5. Emisora Radio Onteniente.

1.2.5 Equipos de laboratorio y medida

El Museo ha reunido diversos tipos de voltímetros y amperímetros de corriente continua en su formato clásico en cajas de madera, que se emplearon desde el siglo XIX para las mediciones de las resistencias óhmicas y de aislamiento de las líneas y cables telegráficos, así como de las tensiones de las pilas y baterías o las propiedades de dos materiales utilizados en la técnica telegráfica y telefónica. La instrumentación da un gran salto cuando aparece la electrónica y la radio, de cuya época se conservan válvulas termoiónicas, fuentes de alimentación, elevadores-reductores de tensión, osciladores, atenuadores, medidores de distorsión, osciloscopios, voltímetros a válvula, etc., sin contar los multímetros o

polímetros que son la herramienta indispensable para cualquier intervención. Así mismo el Museo cuenta con instrumentación de radionavegación, como una pantalla (PPI) de radar DECCA, un goniómetro con su medidor de frecuencia, un conversor VOR-LOC o un navegador de avión, entre otros equipos.

Imagen 6. Osciloscopio.

Referencias

Museo de la Telecomunicación Vicente Miralles Segarra (2022) https://museotelecomvlc.webs.upv.es

Colección on line, Museo de la Telecomunicación (2022) https://colteleco.webs.upv.es

CoE210 Visita guiada Museo de Informática

Damián López
direccio.museu@etsinf.upv.es
Museo d'Informàtica ETSINF
Eliseo Marzal
didactica.museu@etsinf.upv.es
Museo d'Informàtica ETSINF

Modalidad: Visita

Nivel educativo: Todos

RESUMEN

La visita guiada es la mejor manera de conocer las instalaciones y fondos del Museo de Informática. La actividad incluye la proyección de un documental sobre la Historia de la Informática y después un recorrido guiado por la exposición permanente del museo. En la visita se podrán contemplar dispositivos de cálculo de todo tipo, los principales hitos de la informática doméstica y también un buen número de sistemas informáticos de gran tamaño. La visita será organizada en cada caso para adaptarla de la mejor manera posible al número de visitantes. Las visitas guiadas están diseñadas para todo tipo de público.

Palabras clave: Visita, Museo, Exposición, Dispositivos.

RuR011 Paseo matemático por Teruel

Felisa Gil Meléndez
fgilmelend@gmail.com fgil@iesvegadelturia.es
IES Vega del Turia de Teruel

Núcleo temático: Recursos para el aula, Procesos

Modalidad: Ruta Matemática.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

Esta ruta se ha diseñado para realizarla el día de las matemáticas en la calle que se celebrará el próximo 14 de mayo de 2022 en Teruel, en su tercera edición. Para ello los alumnos deben tener instalada en el móvil la App Math City Map,

Con ella se pretende que los alumnos aprecien que las matemáticas se encuentran en nuestro entorno habitual. La ruta transcurre por el centro histórico de la ciudad de Teruel

En esta ruta hay seis tareas, cuatro hacen referencia a conceptos de geometría (se necesita cinta métrica, que se proporcionará a los alumnos que acudan) y las otras dos de aritmética (propiedades de los números).

Palabras clave: Geometría, Medida, Número, Aritmética

Aquí se recoge el desarrollo del Trabajo

Ruta matemática – PASEO MATEMÁTICO POR TERUEL

La ruta transcurre por el centro histórico de la ciudad de Teruel, está pensada para los alumnos de los primeros cursos de la ESO.

En ella se repasan conceptos de Geometría y de Aritmética. Consta de seis tareas a realizar. En algunas de ellas es necesario la cinta métrica que se proporcionará a los alumnos que acudan a realizarla el 14 de mayo de 2022 dentro de la III edición de la Matemáticas en la calle de Teruel

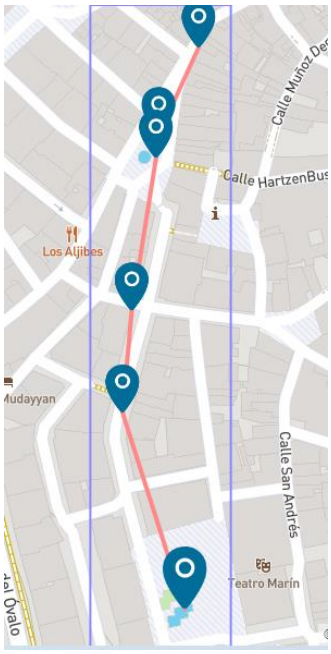


Imagen1-ruta Teruel

Tarea 1: "Cubo" entrada parking de la Plaza de San Juan

Definición de la tarea - Observa el cuerpo geométrico de cristal de la plaza San Juan que da acceso al aparcamiento subterráneo. ¿Qué es? ¿Un cubo? Para averiguarlo vas a calcular el área que ocupa su base, expresa el resultado en metros cuadrados.

Imagen 2-Cubo

Para la solución se ha elegido la modalidad de intervalo

Pista 1 - Averigua cuanto mide los lados de su base.

Pista 2- Recuerda el área de un rectángulo es base por altura y el área de un cuadrado lado por lado

Tarea 2: Maceteros en la calle San Juan

Definición de la tarea- Desde la Plaza San Juan hacia la Plaza del Torico, encontrarás varios maceteros. ¿Qué forma geométrica te sugieren? Calcula su volumen en metros cúbicos. Si en lugar de tener tierra hubiera agua, ¿Cuántos litros de agua cabrían?

Imagen 3- Maceteros

Para la solución se ha elegido la modalidad de intervalo(vector)

Pista 1 - La figura es un ortoedro o paralelepípedo o un prisma de base cuadrangular.

Pista 2 - Recuerda el volumen de la figura es largo por ancho por alto.

Tarea 3: Caseta de la ONCE calle San Juan

Definición de la tarea - Sigue caminando hacia la Plaza del Torico, en las cuatro esquinas te encuentras con el kiosco o la caseta de la ONCE. ¿Qué dos cuerpos geométricos forman dicha caseta?

Imagen 4- caseta Once

Para la solución se ha elegido la modalidad rellenar los espacios en blanco

“Está formado por un _____ de base _____ y la mitad de una _____”

Pista 1 - Dale la vuelta al kiosco y fíjate en sus lados

Pista 2 - Ahora observa la parte superior del kiosco.

Tarea 4: Fuente Plaza del Torico

Definición de la tarea - Soy un toro de bronce que está en lo alto de una columna en una fuente. A mis pies tengo mis cuatro hijos "toricos". Salen chorros de agua por las bocas de mis hijos. Busca encima de uno de mis toricos el año que fue restaurada la fuente, debajo de otro de mis hijos aparece el año que el rey Alfonso II conquistó la ciudad. Resta estos dos números y obtendrás el número que nos interesa, descomponer dicho número en factores primos y escribe el mayor número primo de dicha factorización

Imagen 5- Fuente Plaza el Torico

Para la solución se ha elegido la modalidad de valor exacto

Pista 1 - Mira encima del torico de enfrente del kiosco de prensa y luego la placa que hay debajo del torico que mira hacia la calle Nueva

Pista 2 –Los años son 1969 - 1171 factoriza el número obtenido al hacer esta resta.

Curiosidad - Se llama Plaza del Torico porque en su centro hay una columna en cuya cumbre se encuentra un toro de pequeño tamaño con una estrella. El peso del Torico es de 55 kilos y el dato es realmente sorprendente si tenemos en cuenta que de cola a boca mide 45 centímetros, de la base a los pitones, 37 y de ancho, sólo 2. El peso del Torico de Teruel se debe a que está hecho de bronce puro.

Tarea 5: Casa "El Torico"

Definición de la tarea - Ahora localiza la Casa Torico (casa modernista de color violeta,) en la parte superior aparece el año de su construcción. Recuerda este número. Averigua si este número es abundante, deficiente, perfecto.

Un número DEFICIENTE es un número natural que es mayor que la suma de sus divisores propios exceptuándose a sí mismo. Si la suma de sus divisores propios es mayor, entonces se considera al número como ABUNDANTE. Decimos que un número es PERFECTO, cuando la suma de sus divisores propios es igual a él.

Imagen 6- Casa el Torico

Para la solución se ha elegido la modalidad selección múltiple

A) Es un número abundante

B) Es un número impar

C) Es un número deficiente

D) Es un número perfecto

Pista 1 - Calcula todos los divisores de número (año). Recuerda no tener en cuenta el divisor que es igual al número

Pista 2 - Ejemplos - El número 12 es abundante porque sus divisores, 1, 2, 3, 4 y 6 suman 16 que es mayor que 12.

El número 10 es deficiente porque sus divisores, 1, 2 y 5 suman 8 que es menor que 10

El número 6 es perfecto porque sus divisores, 1, 2 y 3 suman 6 que es igual a 6.

Tarea 6: Estrella mudéjar

Definición de la tarea - En esta alcantarilla del final de la plaza del Torico se aprecian diferentes figuras geométricas: cuadrados, estrellas, rombos, triángulos....son unas alcantarillas muy matemáticas. Nos vamos a fijar en el cuadrado más grande, el borde de la alcantarilla y en la estrella mudéjar mayor, averigua que proporción del cuadrado ocupa la estrella mudéjar más grande.

Imagen 7 -Alcantarilla

Para la solución se ha elegido la modalidad de intervalo

Pista 1- Ver dibujo

Imagen 8- Pista1

Pista 2 - Calcula el área de las dos figuras sombreadas de la pista 1

Curiosidad - ¿Sabes por qué una de las puntas de la estrella de las tapas de alcantarilla del centro de Teruel tiene una punta diferente? Hoy me he enterado por el afamado arquitecto turolense Amador Guillén: Si seguís la dirección que os indican las puntas llegaréis a nuestra Plaza del Torico. Fue una idea de Amador cuando hizo el proyecto de peatonalización del centro a principios del año 2000 con la idea de no necesitar GPS para llegar a la plaza.

TALLERES

TaP002 Materiales manipulativos para resolver problemas a cualquier edad

Francisco Morales Villegas
elarqueropaco@gmail.com

Núcleo temático: procesos, inclusión.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

En los currículos de Matemáticas de Canarias, aparece la resolución de problemas en el primer Criterio de Evaluación. Se prioriza el trabajo en cuatro fases, y las estrategias de resolución.

La modelización es la primera estrategia de resolución que se trabaja en el aula (Educación Infantil), pero al avanzar en la escolaridad, los problemas “serios” solo se apoyan en cálculo o en el álgebra. Trabajar con material manipulativo parece algo de etapas iniciales.

La modelización debe seguir acompañando al alumnado por su capacidad de generar ideas, organizar la información, facilitar la comprensión y ayudar al alumnado con dificultades.

En el taller se propondrán situaciones de diferente dificultad para resolverlos por modelización, convirtiendo la información en una estructura matemática manipulable, creando modelos que permitan reproducir las condiciones del problema y llegar a una solución. Se verán las ventajas para la comprensión, la resolución, la explicación y comprobación de los resultados.

Palabras clave: Modelización, Problemas, Manipulación.

1. Contextualización

En los currículos de Matemáticas de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria de la Comunidad Autónoma de Canarias aparece la resolución de problemas en el primer Criterio de Evaluación. Esto no es fruto de la casualidad, sino de la importancia que se le da a la resolución de problemas en el trabajo de las matemáticas: resolvemos problemas para aprender matemáticas y aprendemos matemáticas para resolver problemas.

Siguiendo el modelo inicial de Polya, con mejoras introducidas Schoenfeld, Miguel de Guzmán y Manuel García Déniz (autor de la concreción curricular para Educación Primaria y Educación Secundaria obligatoria en Canarias), se ha llegado al momento actual en el que se prioriza el trabajo de:

- una organización temporal en 4 fases: comprender, pensar, ejecutar y responder.

- una serie de estrategias de resolución: Básicas (modelización, ensayo-error, organización de la información); auxiliares (simplificar, analogía); y específicas (ir hacia atrás, búsqueda de patrones, eliminar y generalizar).

Por estrategias entendemos los diferentes caminos que utilizamos para llegar a una solución. El alumnado en el aula es diverso, con distintas capacidades de cálculo, de razonamiento, de dominio del lenguaje… y necesitamos dar varias opciones para poder llegar a nuestro objetivo, que es resolver el problema.

De cada estrategia es importante dominar estos aspectos: en qué consiste, por qué la elijo, cómo funciona, qué diagrama o material es mejor para su utilización

- el uso de determinados esquemas y diagramas: diagramas partes todo, tablas simples, tablas de doble entrada, diagramas lineales, diagramas en árbol…

2. Modelización

La modelización es la estrategia de resolución que primero se utiliza. Aparece ya en Educación infantil cuando el alumnado manipula los materiales de aula (fichas, regletas, policubos, piedritas, palitos, garbanzos, bloques lógicos, juguetes, etc),

utilizándolos como mediadores entre la realidad que propone el problema y los recursos de los que dispone.

Un modelo es un objeto o dibujo que sirven como ayuda o apoyo para comprender y resolver un problema matemático o entender un sistema matemático abstracto y sus propiedades.

Es quizás la primera abstracción que se realiza, de manera inconsciente, pero que va a ser el punto de partida para poder utilizar esta estrategia en el futuro.

Cuando el alumnado pasa a primaria, y va avanzando en su escolaridad, hay una creencia generalizada entre el profesorado de que la resolución de problemas "serios" ha de estar basada exclusivamente en la operatoria y el uso de algoritmos, y al llegar a secundaria, el álgebra coge el protagonismo de manera aplastante.

En este momento, alumnado y profesorado coinciden en que la modelización y trabajar con material manipulativo es cosa del pasado y de etapas iniciales.

Pero, contrariamente a esta creencia, la modelización debe seguir acompañando al alumnado debido a su capacidad de generar ideas, organizar la información, facilitar la comprensión y ayudar al alumnado con menores capacidades a poder resolver la situación planteada.

3. Secuencia de aprendizaje

El aprendizaje de la estrategia comenzará en Educación Infantil, enseñando a utilizar recursos dados (regletas, ábacos, geoplanos, policubos, bloques lógicos, fichas, etc) para continuar en Educación Primaria con la elaboración de estos recursos por parte del alumnado (con dibujos, tarjetas, cajas, palillos…). Para ello, es imprescindible proveer de muchas y variadas experiencias a los estudiantes.

De hecho, los conceptos matemáticos deben ser introducidos siempre mediante la secuencia enunciada por Bruner: manipulación → representación → abstracción

4. Actividades propias del taller

En el taller de modelización se hará una breve introducción (8-10 minutos) citando las cuatro fases de resolución del problema y las 9 estrategias, para pasar a la parte práctica.

Se propondrán al profesorado varios problemas de diferente dificultad (Educación Primaria y ESO) para que indiquen la forma en la que se podrían resolver. Un mismo problema puede servir para diferentes niveles educativos en función de la estrategia que se aplique.

A continuación se resolverán utilizando la estrategia de modelización, convirtiendo la información que el problema nos ofrece en una estructura matemática manipulable, creando un modelo que permita reproducir las condiciones del problema para poder llegar a una solución.

Se verán las ventajas de utilizar la estrategia para la comprensión de la situación (en el caso de que el alumnado no llegara a entender lo que el problema propone); para la propia resolución (si hubiera dificultades a la hora de emplear otras estrategias más complejas); y para la explicación final y comprobación de los resultados obtenidos.

5. Problemas para el taller

CLASE DEPORTIVA.

Hay 19 personas en la clase de Juan.

13 practican esquí y 7 la natación. Solamente hay dos que no practican ningún deporte.

¿Cuántos practican a la vez el esquí y la natación?

DIFERENCIA DE EDADES

Hoy Dani triplica la edad de su hermana Sara, pero dentro de 5 años solamente la duplicará. ¿Cuáles son las edades actuales de estos dos hermanos?

LA PARTIDA DE BILLAR

Manolo, Nila y Luis quedan una tarde para jugar al billar. En cada partida juegan dos, y el que pierde, sale. Manolo jugó 17 veces, Nila 15 veces y Luis solo 10. ¿Quién perdió la segunda partida?

LA COLECCIÓN DE CÓMIC

Pedro y Pablo quieren comprar una colección de cómic. Pablo se da cuenta que para comprarla solo le faltan 3 €; Pedro se da cuenta de que con su dinero le faltan 45 €. Poniendo juntos los ahorros de ambos no tendrían bastante dinero para comprar la serie.

¿Cuánto puede costar la colección de cómic?

CHOCOLATES.

Carlos está jugando con 3 amigos y deciden juntar sus ahorros para comprar chocolatinas. Entre todos han juntado 4 € y encargan a Carlos que vaya a comprar las chocolatinas a la tienda del barrio, con el encargo muy claro de que debe gastar todo el dinero reunido y comprar el mayor número posible de chocolatinas. Carlos acepta el encargo, pero se encuentra con que en la tienda sólo hay chocolatinas de 50 céntimos y 30 céntimos. ¿Cuál es el mayor número posible de chocolatinas que puede comprar Carlos?

EL EXAMEN

Bruno está preparando un examen de 20 preguntas a su alumnado.

Si responden bien, obtienen un punto.

Si no contestan, no obtienen puntos.

Si se equivocan, pierden medio punto.

Una alumna obtuvo solamente 6 puntos. ¿De qué tipo fueron sus respuestas?

EL BROTE

En la clase de Ana, hay cuatro chicas más que chicos.

Hoy, debido a un brote de gripe, la mitad de los chicos y la mitad de las chicas no han venido al centro.

En la clase hay 14 personas.

¿Cuántas chicas y cuántos chicos están enfermos?

LOS TULIPANES DE ANA

Ana desea plantar bulbos de tulipán en el centro de su jardín a lo largo de los lados de una figura que consiste en dos cuadrados concéntricos, con los lados paralelos y 30 centímetros de separación. Ana quiere plantar sus bulbos sobre los lados de los dos cuadrados de la siguiente manera:

- un bulbo en los vértices de cada cuadrado...

- el número de bulbos será el mismo en cada cuadrado

- los bulbos se plantarán a una distancia de 20 cm entre sí en el contorno del cuadrado grande y a 15 cm en el contorno del cuadrado pequeño.

¿Cuántos bulbos plantará Ana en total?

DE FIN DE SEMANA

Al salir de casa, Pablo tiene una cierta cantidad de euros en el bolsillo. Ha salido a comprar los billetes de avión, un bono de hotel y un coche de alquiler para pasar un fin de semana con su esposa.

En las oficinas de Binter emplea la mitad de su dinero y todavía otros veinte euros más.

En la agencia de hoteles emplea la mitad del dinero que le queda y todavía otros veinte euros más.

Luego va al alquiler de coches y emplea de nuevo la mitad del dinero que aún tiene y 20 euros más. Se queda así solamente con un euro en el bolsillo.

¿Cuánto dinero tenía Pablo cuando salió de casa?

TaP003 Creatividad y tareas

Guido Angelo Ramellini
guido.ramellini@mmaca.cat
Museu de Matemtiques de Catalunya

Núcleo temático: Procesos; Comunicación y divulgación

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

Tradicionalmente, hemos pensado las actividades para la infancia como adaptaciones (=simplificaciones) de las de los ciclos superiores.

Invertimos la ecuación y miramos qué actitudes, contenidos y competencias desarrolladas en una actividad pensada para la educación infantil pueden ser interesantes para las etapas sucesivas.

Actividad libre: A cada pareja se dan 10 objetos (fichas, bolas, cubos o piezas del Duplo®): 4 rojos, 3 amarillos, 2 verdes y 1 azul, sin dar instrucciones y dejándo el tiempo para hacer "productos" diferentes.
Se discuten las intenciones que han generado los productos y la riqueza de diferentes soluciones. Los materiales no son neutros y los pre-conocimientos determinantes.
Tarea: se distribuye a todo grupo (entre 2 y 4 personas) los 10 Duplos. Reto: Construir una pirámide de forma que bloques del mismo color no se toquen.
Se discuten las estrategias, se amplía el reto y se sugieren otras actividades con el mismo material.

Palabras clave: Creatividad, Tarea, Soluciones, Estrategias.

Creatividad y Tareas: una dialéctica necesaria

Hace tiempo, y bajo los estímulos de realidades muy diferentes y no siempre directamente ligadas al mundo educativo, estamos repensando al aprendizaje de las matemáticas en los niños.

Tradicionalmente, hemos estado pensando las actividades para la infancia como adaptaciones (=simplificaciones) de nuestra propuesta por los ciclos superiores. El resultado, por lo general, era muy decepcionante. Al mismo tiempo, desde otras

áreas (Cain Miller, 2015) y des del profesorado del Primer Ciclo de Educación Infantil, nos llegaban experiencias mucho más interesantes.

Merecía la pena invertir la ecuación y mirar qué actitudes, contenidos y competencias podían ser útiles para las etapas educativas sucesivas.

Para focalizar el tema y antes de pasar a una experiencia concreta de taller, nos parecía necesario dar, todo lo brevemente posible, un cuadro de referencia de los factores en juego:

- Acercamientos claves para renovar la didáctica para la 4ª Revolución Industrial (Fórum Económico Mundial 2020):

a) Lúdico; b) Experiencial; c) basado en la resolución de problemas; d) que utilice el cuerpo; e) que use diferentes lenguajes.

- Definición de educación formal (ciclo escolar), no-formal (educación permanente) e informal (no finalizada)

- Tema competencias, evidenciando unas críticas que se están haciendo y las respuestas más interesantes y abiertas (Hirrt, 2009; Pellerey, 2011; Rogers 2007)

- Tema creatividad (Venckute et al., 2020).

EL TALLER 10

Actividad libre:

En cada pareja se dan 10 objetos (fichas, bolas, cubos, multilinks o piezas del Duplo®): 4 rojos, 3 amarillos, 2 verdes y 1 azul, sin dar ninguna instrucción y dando tiempo para hacer "productos" diferentes, que se pueden fotografiar, si quiere hacerse más de uno.

Ejemplos de diferentes estructuras que se pueden hacer con distintos materiales

Observando los distintos productos:

1) se discuten las intenciones que han generado los productos: clasificación por colores, números del 1 al 4; construcciones libres, decorativas..., que se pueden reagrupar en una mesa;

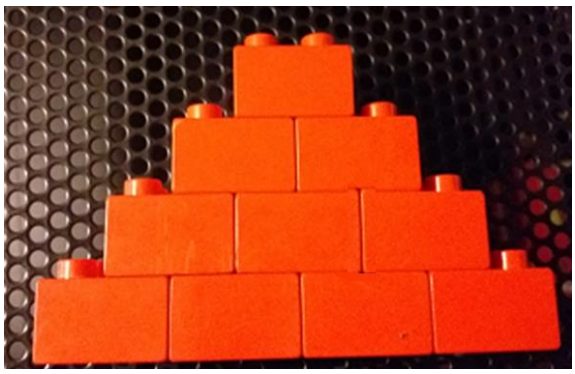
2) se constata la gran riqueza de diferentes soluciones que deja una actividad libre, sin tareas,

3) se constata que los materiales no son neutros y promueven diferentes acercamientos y actividades;

4) la importancia de los pre-conocimientos, evidentes en una propuesta a los adultos, pero que se tiende a subestimar, especialmente en niños pequeños, que tienen una realidad extraescolar muy rica de estímulos.

Tarea:

Se muestra una pirámide hecha con piezas de Duplo® del mismo color y se distribuye a todo grupo (entre 2 y 4 personas) los 10 Duplos® de 4 colores.



La pirámide que se muestra es monocolor, para no sugerir/anticipar productos

De nuevo, observamos los productos, discutimos las intenciones, etc.: ¿Qué conocimientos se privilegian?

Reto:

Construir la pirámide de forma que bloques del mismo color no se toquen.

Una vez resuelto el reto, se puede abrir una discusión sobre:

- ¿Qué estrategia has utilizado?

- ¿Qué contenidos matemáticos podríamos ver?
- ¿Qué observaciones se pueden realizar?

• ¿Hay más de una solución?
• ¿Se podría resolver el reto con menos colores?
• ¿Podemos generar un algoritmo?
• ¿Qué pasa si añadimos un piso (5 piezas)?

¿De qué colores? ¿Nuevo color? ¿Todas de uno de los 4 colores? ¿Tutti-frutti?

• ¿Qué pasa si añadimos más pisos? ¿Infinitos?

Discusión final sobre el taller

Aparte de unas consideraciones generales que hemos introducido en la presentación del taller (acercamientos educativos; ed. Formal, no-formal e informal; competencias…), pensamos que la actividad propuesta podría generar temas como:

- ¿La actividad libre se puede proponer a un alumnado de escuela infantil (3-6 años)? ¿Y antes? ¿Con qué materiales?

¿Tiene sentido por alumnos mayores?

¿El último reto es un buen reto? ¿Por qué sí/Por qué no?

Las conclusiones a las que hemos llegado nosotros, desde la experiencia del MMACA y el debate en la CoP Mat y Ciencias 0-8 años son:

- Siempre es conveniente empezar por una actividad libre, para que el alumnado haga suyo el material, pero aún más para que haya un esfuerzo creativo, que pueda generar nuevas visiones del tema.

Aunque sea muy arriesgado poner todas las fichas sobre la creatividad, hay que intentar no matarla en la cuna.

- El desarrollo de la actividad está basado en un diálogo continuo, en el que el papel fundamental del educador no es el de responder, sino de observar e interpretar lo que hace el alumnado, y pedir que explicite sus razones, para afinar ideas, lenguaje, conceptos.
- Las tareas, aunque abiertas (más de una solución y/o una estrategia) y motivadoras (retos) no sustituyen a las actividades libres en ninguna etapa educativa. Pero, a partir de un determinado grado de comprensión lingüística y autonomía, las tareas complementan y orientan otras actividades libres.

La creatividad es un proceso que se puede construir.

Referencias:

Cain Miller, C. (2015): *Why What You Learned in Preschool Is Crucial at Work.* *https://www.nytimes.com/2015/10/18/upshot/how-the-modern-workplace-has-become-more-like-preschool.html*

Hirrt, N. (2009) *L'École démocratique* – https://www.skolo.org/2009/10/01/lapproche-par-competences-une-mystification-pedagogique/.

Citado por Pellerey, M. en ***L'approccio per competenze: è un pericolo per l'educazione scolastica?*** In Scuola Democratica: https://pellerey.unisal.it/sd_l_approcc__un_pericolo.pdf

Rogers, A. (2007): *Non-Formal Education: Flexible Schooling or Participatory Education?* Springer Science & Business Media

Venckuté, M., Berg Mulvik, I., Lucas, B.: *Creativity – a transversal skill for lifelong learning. An overview of existing concepts and practices.* European Comission. https://publications.jrc.ec.europa.eu/repository/handle/JRC122016

World Economic Forum (2020): *Defining New Models of Education for the fourth Industrial Revolution – Schools of the Future* – https://www.weforum.org/reports/schools-of-the-future-defining-new-models-of-education-for-the-fourth-industrial-revolution

TaP007 Proporcionalidad sin regla de tres

José Manuel Vidal González
pepvidalg@gmail.com
Coordinador Proyecto Matemáticas Newton Canarias. Consejería Educación del Gobierno de Canarias.
María Nila Pérez Francisco
nilacapicua@yahoo.es
Coordinadora Proyecto Matemáticas Newton Canarias. Consejería Educación del Gobierno de Canarias
Ana Rosa Díaz Rodríguez
anarosa3008@gmail.com
Coordinadora Proyecto Matemáticas Newton Canarias. Consejería Educación del Gobierno de Canarias

Núcleo temático: Procesos. Experiencia de aula.

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

El objetivo del taller es mostrar una propuesta para tratar la proporcionalidad de manera compresiva sin tener que recurrir a recetas memorísticas que ocultan la lógica que las sustentan. Se realizará la experiencia de aula con el profesorado asistente como si del alumnado se tratase recorriendo el proceso seguido de forma secuenciada y todo lo abreviada que impone el tiempo disponible. Se hará un recorrido secuenciado de la propuesta didáctica con una dinámica grupal utilizando imágenes proyectadas para provocar la reflexión y el debate.

Palabras clave: Proporcionalidad, Regla de tres,

1. Creencias generales del alumnado

El alumnado generalmente cree que dividir es repartir en partes iguales, asociando la operación a la situación en la que se nos ofrece el total y el número de partes pidiéndonos el valor de cada parte (división partitiva), una minoría lo asocia también a la situación en la que nos ofrece un total y el valor de cada parte y nos piden el número de partes (división cuotativa). Respecto a la multiplicación la creencia generalizada es que nos da la suma total de valores iguales.

2. Base aritmética

Para tratar la proporcionalidad de forma comprensiva se debe enriquecer la multiplicación y la división con nuevos significados que justifican su utilización para aumentar y reducir una cantidad un determinado número de veces no necesariamente enteras y para comparar cantidades.

Para ello debemos:

Instalar el concepto de veces mayor no enteras, por ejemplo, qué quiere decir que una cantidad es 4,7 veces mayor que otra (por ejemplo 282 es 4 veces enteras 60 y y un 70% de 60 más), o 5,3 veces menor (25 es 2.4 veces menor que 60 porque 60 es 2.4 veces mayor que 25).

Reconocer la división como instrumento para comparar obteniendo el porcentaje que una cantidad representa de otra a través de su expresión decimal. Por ejemplo 8:20=0.4 deduciendo que 8 es un 40% de 20.

Reconocer la división como instrumento para comparar obteniendo el número de veces que una cantidad es mayor que otra. Por ejemplo 111:12=9.25 deduciendo que 111 es 9.25 veces mayor que 12 y por tanto 12 es 9.25 veces menor que 111.

Reconocer la multiplicación como instrumento para reducir. Por ejemplo, multiplicar por 0.65 una cantidad reducirla para al 65%.

Reconocer la multiplicación como instrumento para aumentar. Por ejemplo, multiplicar por 3.75 una cantidad aumentarla 3,75 veces.

La comprensión de estos significados se realiza provocando la reflexión a través de la manipulación de materiales y de la observación imágenes apropiadas. El posterior asentamiento se puede fortalecer con rutinas al inicio de las sesiones.

3. Aplicación y consolidación

El contexto ideal en el que aplicar las acciones de comparar aumentar y reducir es la proporcionalidad geométrica donde sus efectos se evidencian en un aumento o disminución real de magnitudes, longitudes primero y áreas a continuación.

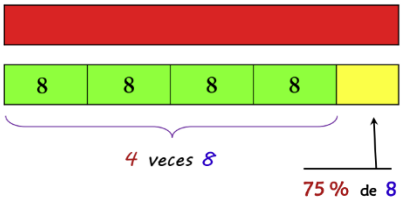
La visión adquirida en estos contextos homotéticos se traslada a continuación de manera natural a situaciones de proporcionalidad aritmética tanto de directa como inversa.

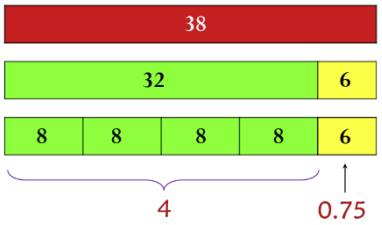
4. Desarrollo del Taller

En el taller se distribuirá al profesorado en grupos preferentemente de 4 personas cada uno. Se hará el recorrido secuenciado de la propuesta didáctica estimando individualmente y consensuando una opinión grupal. A continuación, se ofrecerá información adicional que permitirá a cada grupo comprobar lo acertado de sus estimaciones. Los retos que habrá que estimar y que serán motivo reflexión se proyectarán ordenadamente desvelando la lógica que queremos que apliquen para resolver problemas de proporcionalidad tanto geométrica como aritmética.

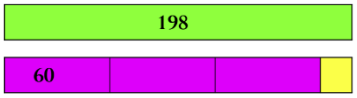
¿Cuánto mide la barra Roja?

La barra roja es 4.75 veces mayor que la verde.



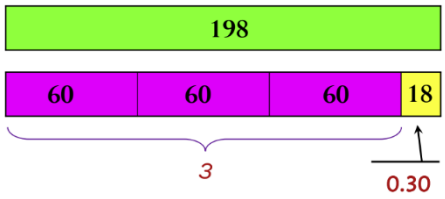


¿Cuántas veces mayor es la barra verde que la fucsia?

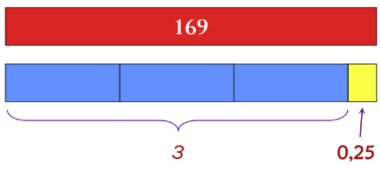


- 198 / 60 = 3.30 veces

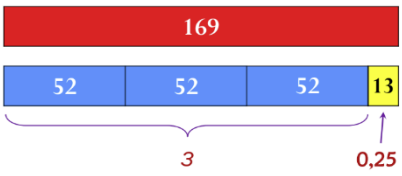
La barra verde es 3.30 veces mayor que la fucsia.



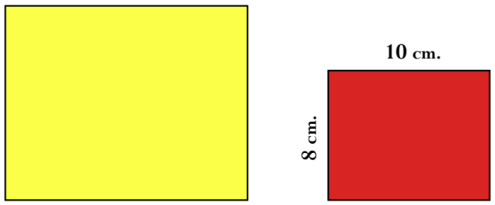
¿Cuánto mide la barra Azul?



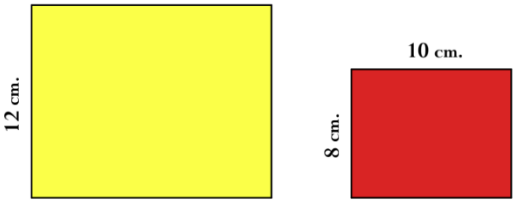
La barra roja es 3.25 veces mayor que la azul.
La barra azul es 3.25 veces menor que la roja.



Los dos rectángulos no sólo aparentan ser semejantes, lo son.
¿Cuánto mide el lado horizontal del mayor de ellos?

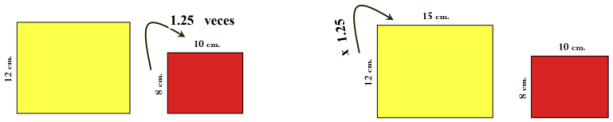


DATOS



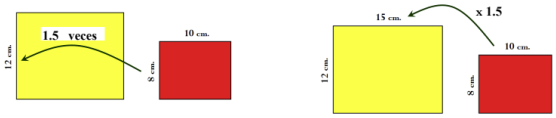
Comparación dentro de las figuras.

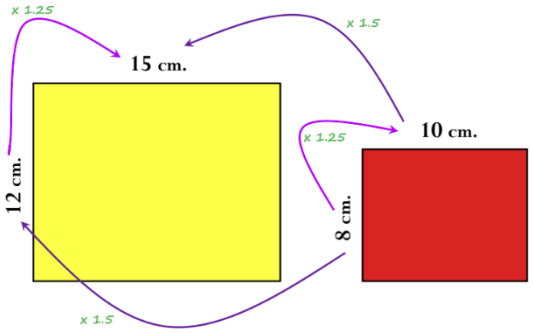
	Acción	Operación	Conclusión
1º	Comparar	Dividir	10 es 1.25 veces mayor que 8
	10 con 8	10 / 8 = 1.25	El lado Horizontal es 1.25 veces mayor que el vertical (***en ambos***)
2º	Aumentar	Multiplicar	15 es 1.25 veces mayor que 12
	1.25 veces 12	1.25 · 12 = 15	El mayor de los lados horizontales mide 15 cm



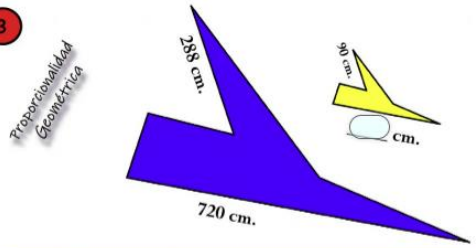
Comparación entre figuras.

	Acción	Operación	Conclusión
1º	Comparar	Dividir	12 es 1.5 veces mayor que 8
	12 con 8	12 / 8 = 1.5	Los lados del grande son 1.5 veces mayores que los del pequeño
2º	Aumentar	Multiplicar	15 es 1.5 veces mayor que 10
	1.5 veces 10	1.5 · 10 = 15	El mayor de los lados horizontales mide 15 cm





3 Proporcionalidad Geométrica



Los dos hexágonos no sólo aparentan ser semejantes, lo son.
¿Cuánto mide el lado inferior del menor de ellos?

COMPARACIÓN DENTRO DE LAS FIGURAS

ACCIÓN	OPERACIÓN	CONCLUSIÓN
COMPARA el lado inferior con el superior en el hexágono azul.	=	
AUMENTA el lado superior del hexágono amarillo.	=	

COMPARACIÓN ENTRE FIGURAS

ACCIÓN	OPERACIÓN	CONCLUSIÓN
COMPARA el lado superior del hexágono azul con el del amarillo.	=	
REDUCE el lado inferior del hexágono azul.	=	

pepvidal

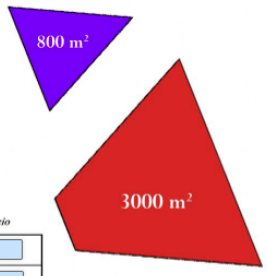
LIVEWORKSHEETS

9 Venta de fincas

Proporcionalidad aritmética

Leonardo que trabaja en una inmobiliaria intenta vender dos fincas a las que ha puesto precio proporcionalmente a su tamaño.
Vende la finca triangular por 5200€.

¿Cuánto cuesta la finca trapezoidal?



	Superficie	*Precio*
Parcela azul		
Parcela roja		

QUÉ	OPERACIÓN	CONCLUSIÓN
Compara el área de la finca roja con la violeta.	=	
Aumenta el precio de la finca violeta.	=	

QUÉ	CÓMO	CONCLUSIÓN
Euros por m²	=	
Precio de la finca roja.	=	

pepvidal

LIVEWORKSHEETS

3 El club de surf

Proporcionalidad aritmética

Un club de surf quiere hacer publicidad para captar socios/as de cara al verano. Carlos, el director del club, hace una propuesta a Carlota y a Malena: Si reparten publicidad durante 5 días recibirán 420€. Las chicas que llevaban tiempo deseando renovar sus tablas y sus trajes de neopreno ven una oportunidad para obtener dinero y comprar el material que necesitan, pero se dan cuenta de que 5 días de trabajo no son suficiente. Hablan con el director y le plantean lo siguiente: necesitamos 2856€.

¿Cuántos días tenemos que trabajar para conseguirlo?

	Días trabajados	*Euros recibidos*
Propuesta que se ofrece		
Propuesta que necesitan		

QUÉ	CÓMO	CONCLUSIÓN
Compara el dinero que necesitan con el que les ofrecen.	=	
Aumenta el número de días trabajados.	=	

QUÉ	CÓMO	CONCLUSIÓN
Euros por día.	=	
Días trabajados.	=	

pepvidal

LIVEWORKSHEETS

6 La perrera

Proporcionalidad aritmética

En la perrera del municipio había pienso almacenado para alimentar a los 16 perros que albergan durante 30 días. De repente se cierra una perrera cercana y ahora hay 60 perros.

¿Cuántos días estimas que se podrá alimentar a todos los perros con el pienso almacenado?

	Días	*Número de perros*
Antes		
Ahora		

QUÉ	CÓMO	CONCLUSIÓN
Compara la cantidad de perros que hay ahora con la que había antes.	=	
Reduce el número de días de alimentación.	=	

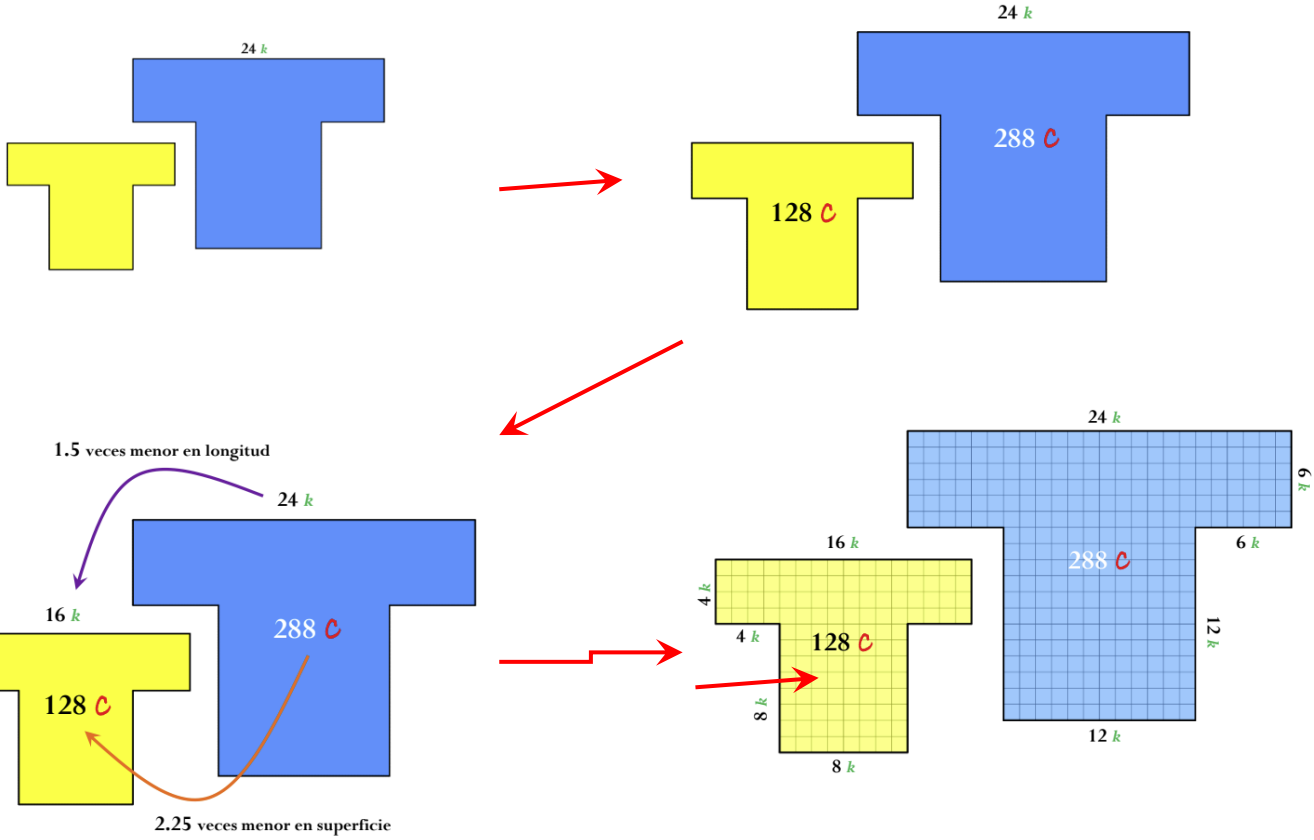
QUÉ	CÓMO	CONCLUSIÓN
Total de raciones para alimentar un perro un día.	=	
Días que se puede alimentar a todos los perros.	=	

pepvidal

LIVEWORKSHEETS

DATOS

¿Cuánto mide el lado mayor del octógono amarillo?



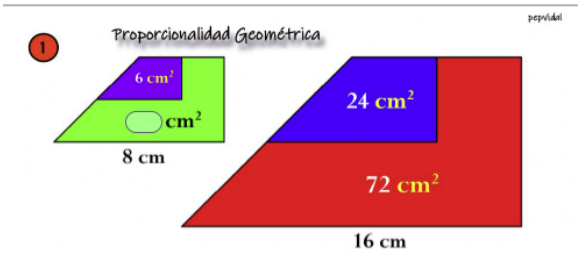
Comparación entre figuras.

	Acción	Operación	Conclusión
1º	Comparar	Dividir	288 es 2.25 veces mayor que 128
	288 con 128	288 / 128 = 2.25	El octógono azul es 2.25 veces mayor que el amarillo en superficie

Relación entre área y longitud

El octógono amarillo es 2.25 veces menor que el azul en superficie, por tanto también es $\sqrt{2.25} = 1.5$ veces menor en longitud

2º	Reducir	Dividir	16 es 1.5 veces menor que 24
	1.5 veces 24	24 / 1.5 = 16	El lado mayor del octógono amarillo tiene una longitud de 16 k



Las figuras son semejantes. **¿Cuál es el área del hexágono verde?**

Compara áreas dentro de las figuras

ACCIÓN	OPERACIÓN	CONCLUSIÓN
COMPARA el área del hexágono rojo con la del trapecio azul.	=	
AUMENTA el área del trapecio violeta.	=	

Compara áreas entre figuras

ACCIÓN	OPERACIÓN	CONCLUSIÓN
COMPARA el área del trapecio violeta con la del trapecio azul.	=	
REDUCE el área del hexágono rojo.	=	

Compara longitudes entre figuras

ACCIÓN	OPERACIÓN	CONCLUSIÓN
COMPARA la base del hexágono rojo con la del verde.	=	
REDUCE el área de hexágono rojo.	=	

LIVEWORKSHEETS

TaP008 La propuesta de razonamiento lógico en el proyecto matemáticas newton canarias en educación infantil

Nisamar Hernández Rodríguez
nisamhg@gmail.com
"Proyecto Newton Canarias"
Ana Rosa Díaz Rodríguez
anarosa3008@gmail.com
"Proyecto Newton Canarias"
Carmen Rosa Mesa González
martestrece.59@gmail.com
"Proyecto Newton Canarias"

Núcleo temático: Procesos

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Infantil

RESUMEN

La finalidad de este taller es concienciar al profesorado de la importancia que tiene el trabajo del Razonamiento lógico desde los primeros niveles como herramienta fundamental para la adquisición de todos los contenidos curriculares. Pondremos en práctica varias actividades donde queden reflejadas las seis acciones básicas para desarrollar en nuestro alumnado su pensamiento analítico y sintético. Por otro lado, mostraremos algunos desafíos lógicos a través de los cuales nuestro alumnado seguirá ejercitándose en la lógica del razonamiento. Durante la sesión, el profesorado practicará con diferentes materiales didácticos y recursos de enseñanza creados para trabajar las cualidades de los objetos y proporcionaremos diferentes retos aptos para los primeros niveles educativos.

Palabras clave: Acciones, Desafíos Lógicos

1.Acciones: Con ayuda de la presentación digital, iremos mostrando las seis acciones fundamentales (identificar, enumerar, establecer semejanzas y diferencias,

clasificar, establecer relaciones de pertenencia y no pertinencia y seriar) ilustrándolas con imágenes reales y vídeos. Para que el profesorado presente pueda experimentar con los recursos que se muestran y sean capaces de ponerlas en práctica, iremos practicando en grupos con cada una de ellas.

Actividades

1.1.Identificar una figura geométrica dada.(Ej.”Coge el triángulo azul grueso pequeño”)

1.2. Enumerar las cualidades. (Ej, “Juego de la diadema”. Adivinar el objeto que tienen pegado en la diadema enumerando las cualidades de los objetos para obtener aquellas que se asocian al objeto de su diadema)

1.3. Establecer semejanzas y diferencias. (Ej, Comparar dos figuras geométricas identificando las cualidades que comparten y las que no)

1.4.Clasificar. (“Cada Huevo a su gallina” donde se tiene que asociar los círculos a las gallinitas del mismo color)

1.5. Relaciones de pertenencia y no pertenencia (Ej, Meter en el conjunto los objetos que pertenecen al mismo o sacar los que no pertenecen)

2 Desafíos lógicos: Continuaremos presentando la parte de los desafíos con ayuda de la herramienta digital, vídeos e imágenes reales y posterior practica en grupo.

2.1.Constantes lógicas (Repartir varios bloques lógicos a cada uno de los participantes y que levanten los que presentan las cualidades dichas, como por ejemplo: “ círculo rojo **Y** azul; cuadrado rojo **O** amarillo.

2.1. Presentar un conjunto de figures geométricas y decir cualidades utilizando la afirmación y la negación. (Ej: SI son rojos, SI son cuadrados, SI son grandes; NO son azules, NO son círculos, NO son pequeñas)

2.3. Presentar un conjunto de figuras geométricas y utilizar los cuantificadores lógicos (Ej. TODAS son amarillas; ALGUNOS son círculos; AL MENOS UNA es pequeña, NINGUNA es roja)

2.4. Presentar una conjunto de figures geométricas y trabajar la implicación y la equipolencia (Ej, SI todas las figuras tienen cuatro lados ENTONCES son cuadriláteros; ES un cuadrado SI Y SOLO SI tiene sus cuatro lados y sus cuatro ángulos iguales)

Referencias

Galán, R. (2014) Educación infantil. Contenidos y objetivos de aprendizaje. Los objetos y sus cualidades.

Galán, R. (2014) Series lógicas. Educación Infantil y Educación primaria.

Galán, R.(2014) Educación Infantil. Forma, color y tamaño

Galán, R.(2014) Educación Infantil. Percepción y razonamiento lógico forma. ¿Qué figura falta?

Galán, R.(2015) El pensamiento lógico matemático y la clasificación.

Galán, R.(2018) Percepción y pensamiento lógico matemático

Galán, R.(2021) Percepción visual y razonamiento lógico

Fernández Bravo, J.A. (2001) Aprender a hacer y conocer: el pensamiento lógico

Fernández Bravo, J.A. (2019) La sonrisa del conocimiento

TaP014 Distancia entre dos puntos: cómo influye el contexto y las condiciones en la resolución de un problema

Xavier Vilella Miró
xvilella@xtec.cat
Grup Vilatzara, ICE-Universitat Autònoma de Barcelona

Núcleo temático: Procesos – Recursos

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

Para desarrollar al máximo nivel las competencias de nuestro alumnado, debemos proponerle retos que faciliten la construcción de conocimiento matemático a partir del que ya poseen. Quiero mostrar una actividad planteada como *breve investigación matemática* (Bishop, 1999) con un contenido más complejo de lo que parece: la distancia entre dos puntos. Para enriquecer la experiencia de aprendizaje del alumnado, analizaremos situaciones-problema en las que el contexto cercano y la experiencia personal de cada alumna/o (el hijo de un taxista, o de un ejecutivo), condiciona la respuesta a esta *simple* pregunta. Además, si ampliamos el ámbito de trabajo a puntos situados en la superficie de diversos cuerpos geométricos (ortoedro, cilindro, cono, esfera…), deberemos afrontar desafíos inesperados, que aparentemente ponen en cuestión postulados euclídeos, como lo que entendemos por *línea recta*.

Palabras clave: Investigación, Razonamiento, Distancia, Recta, Plano

¿Cuál es la distancia más corta entre dos puntos? La respuesta a esta pregunta es, como mínimo, matizable, porque depende de las condiciones, del relieve, de a quién se lo preguntes, incluso de la prisa que tengas.

Desde el punto de vista estrictamente matemático no admite discusión ni matices (Macho, 2016). Ahora bien, desde el punto de vista de las personas que utilizan las herramientas matemáticas en su vida diaria, en su trabajo, en sus desplazamientos, las cosas no están *tan* claras.

Algunos ejemplos podemos encontrarlos en Planas, Vilella, Gorgorió (1999).

P: ¿Cuál es la distancia más corta entre dos puntos?

A_1: La línea recta.

A_2: No, no es la línea recta, depende… no siempre se puede.

P: ¿Depende? ¿No siempre se puede?

A_2: Depende de las calles.

P: ¿De las calles?

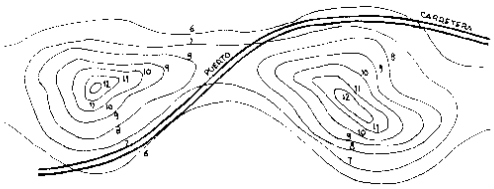
A_2: Si son rectas o torcidas.

P: ¿Si son rectas o torcidas las calles?

A_2: Si las calles son rectas tienes que ir haciendo cuatros.

Resulta evidente que este alumno, hijo de un taxista de Barcelona, contesta la pregunta a partir de su experiencia, del contexto de su cultura familiar.

La distancia entre dos puntos geográficos, A y B, en un relieve *real*, viene dada por el segmento de recta que une dichos puntos. Sí, esto es cierto, pero la distancia que interesa a una persona que debe ir desde A hasta B no es ésa sino la que recorre el camino que une dichos puntos. Por ejemplo, la que sigue una carretera entre ellos. Los/as topógrafos/as saben muy bien de lo que estamos hablando.



Así pues, en el aula podemos prescindir de la consideración de las matemáticas como producto cultural y enseñarlas como un producto final, universal, acabado, totalmente descontextualizado; o bien podemos tener en cuenta que el profesorado educa matemáticamente al alumnado, considerar que enseñar matemáticas requiere tener en cuenta que el alumnado sea capaz de reconstruir el conocimiento matemático en su mente para poder llegar al nivel de complejidad y de abstracción que requiere la Matemática universal. Y en este proceso de reconstrucción, los contextos y los referentes culturales de cada alumno, de cada alumna, condicionan a menudo el aprendizaje.

Incluso en entornos en los que la matematización puede parecer más sencilla nos podemos encontrar con problemas cuando queremos usar la distancia entre dos puntos. En una sala de planta rectangular podemos intuir que dos paredes son paralelas, pero esto hay que probarlo. La medida de la distancia entre ellas puede servir para este fin. Nos plantearemos cómo probar que dos paredes son paralelas.

En el taller responderemos a la pregunta: ¿Cuál es la distancia más corta entre dos puntos, A y B?

Hablaremos de Herón de Alejandría y la relación entre la reflexión de la luz y la distancia más corta entre dos puntos.

Analizaremos el problema en diferentes situaciones:

- la conocida del caballo que tenía sed,
- la del puente sobre un río que separa dos poblaciones,
- la de la mesa de billar

Y afrontaremos el mismo problema en el caso de cuerpos geométricos, situando los puntos A y B en diferentes vértices o en las aristas de un ortoedro, en las bases del cilindro, en distintos puntos de la superficie lateral y de la base del cono, en la superficie de la esfera…

En cada uno de los casos reflexionaremos sobre:

- las herramientas matemáticas que nos ayudan a resolver un problema,
- la intuición,
- la conjetura, y la prueba de su acierto o fracaso,
- la importancia de las condiciones que imponemos en el enunciado de un problema,
- sobre el proceso de generalización,
- sobre la importancia de la imaginación y la creatividad en matemáticas.

Dispondremos de diversos materiales para poder experimentar con ellos.

Referencias

- Bishop, Alan J. (1000): En el sentido que plantea Alan J. Bishop en su libro Enculturación Matemática (editado por Paidós, Barcelona, 1999), pág. 149 a 154
- Hildebrandt, S.; Tromba, A. (1990): Matemática y formas óptimas. Scientific American Books. Prensa Científica SA, Barcelona.
- Macho, M. (2016): “Las mil y una… distancias”. Cuaderno de Cultura científica, 11 de mayo de 2016.

  En él escribe: “En matemáticas, una distancia –o métrica– es una función que asigna a cada par de puntos a y b en un conjunto un número no negativo cumpliendo ciertas propiedades adicionales: la distancia entre a y b es nula si y sólo si los puntos son iguales, cumple la propiedad simétrica (la distancia entre a y b es la misma que entre b y a) y verifica la desigualdad triangular (si tenemos tres puntos, a, b y c, la distancia entre a y c es menor o igual que la suma de las distancias entre a y b y entre b y c)”

  Planas, N.; Vilella, X.; Gorgorió, N. (1999): “¿Cómo afrontar las diversidades en la clase de matemáticas?” En Actas de las JAEM de Lugo, editadas por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

TaP015 Medida del TIEMPO de los 3 a los 16 años: sugerencias para una secuencia didáctica coherente

Margarita Fuentes Cabezas
mar.fc92@gmail.com
Esther Vargas Ibáñez
esthervargasiba@gmail.com
José Gallegos Fernández
jgallegos@colegiovirgendegracia.org
Seminario de Matemáticas del CEP de Granada

Núcleo temático: Procesos, conexiones

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

Sabemos que pasa el tiempo porque algo cambia: la posición de las manecillas del reloj, la altura de una vela, la cantidad de agua que fluye, el movimiento de las sombras, la posición relativa del Sol… Un análisis de nuestra práctica de aula en las diferentes etapas de la enseñanza obligatoria nos muestra que habitualmente, se trabaja poco la comprensión de la magnitud Tiempo y se pasa demasiado rápido a las unidades, las operaciones y los cambios de unidades de tiempo. Deberíamos dedicar más tiempo a la comprensión del tiempo: ¿qué medimos cuando decimos que medimos el tiempo? En el taller sugerimos actividades que pueden servir para preparar unas líneas verticales que parten de Infantil y llegan a Secundaria, en torno a rutinas y horarios, líneas temporales personales, familiares, históricas, geológicas, unidades e instrumentos de medida del tiempo, control de variables como el crecimiento de plantas, animales, personas, virus y bacterias, etc.

Palabras clave: Medida, Tiempo

El tiempo es una magnitud diferente de otras muchas como la longitud, el área, el volumen, la capacidad, la masa, etc.

El Seminario de Educación Matemática del CEP de Granada (coordinado por Sandra Gallardo y Belén Cobo, del CEP de Granada, asesorado por Xavier Vilella y formado por 23 miembros más) ha destinado 3 cursos a estudiar la didáctica de la Medida, y el último de estos 3 cursos lo ha destinado a la Medida del Tiempo.

El análisis de la práctica de aula sobre este tema nos llevó a una conclusión: habitualmente, se trabaja poco la comprensión de la magnitud Tiempo y se pasa demasiado rápido a las unidades, las operaciones y los cambios de unidades de tiempo.

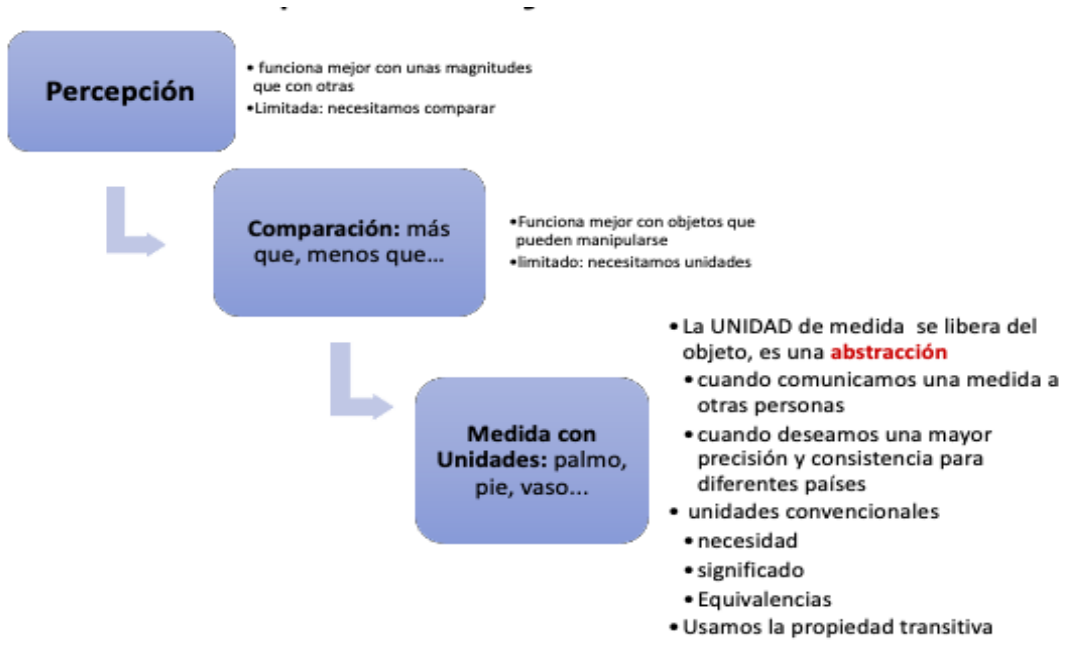
Pero incluso cuando se trabajan las unidades de tiempo, se acostumbra a perder la oportunidad de evidenciar el uso de sistemas de medida de bases diferentes. La cotidianidad en su uso en eventos deportivos, en la vida diaria, en el calendario, provoca que no se preste atención a los cambios de base de numeración según la escala en la que trabajemos. Por ejemplo, en periodos cortos de tiempo usamos horas, minutos y segundos (base 60), pero por debajo de los segundos, en carreras de velocidad de todo tipo, pasamos a décimas, centésimas, milésimas de segundo (base decimal). Por no hablar de unidades usadas para medir períodos de tiempo mayores que las horas, dado que nos encontramos días de 24 horas, semanas de 7 días, meses de 28, 29, 30, 31 días, años de 365 o 366 días; lustros, decenios y siglos (otra vez base decimal), etc.

Desde el Seminario recomendamos dedicar más tiempo a la comprensión del concepto de Tiempo, de sus peculiaridades, y lo podemos hacer poniendo el foco en **qué es lo que realmente medimos cuando decimos que medimos el Tiempo**: siempre lo hacemos a partir de un ***CAMBIO***, ya sea el cambio en el ángulo de las manecillas del reloj analógico, en el cambio en la altura de una vela encendida, en el cambio en el volumen de agua que va llenando (o vaciando) un recipiente, en el cambio en la sombra de un estilete o gnomon que se corresponde con el cambio aparente de la posición del Sol…

Evidentemente, la relación entre la Medida del Tiempo y el Cambio nos permite establecer conexiones con el bloque de contenidos de Funciones y gráficas de una forma natural.

Planteando la Medida del Tiempo en diferentes contextos y para diferentes finalidades, también podemos conectarla con Estadística, con Ciencias, con Sociales, con Tecnología, con Arte… y, por ello, nos puede ayudar en la preparación de proyectos STEM o STEAM.

El Seminario ya había establecido una secuencia de aprendizaje de la Medida que comprende 3 pasos (siguiendo a Inskeep, 1976):



En las JAEM de A Coruña el Seminario ya realizó un taller en el que se mostró esta secuencia y se presentaron ejemplos de cada paso para Infantil, para Primaria y para Secundaria.

En las JAEM de Valencia realizaremos un taller en el que se presentarán algunas sugerencias de actividades que podrían formar parte de una línea vertical desde los 3 a los 16 años en relación a la Medida del Tiempo, aplicando la secuencia de la imagen anterior.

Estas líneas parten siempre de Infantil y se van desarrollando en Primaria y la ESO, aumentando en complejidad y abstracción:

- rutinas, horarios de comidas según latitud, cambios de hora verano/invierno, husos horarios;

- cumpleaños, el nuestro y el de nuestros progenitores, árbol genealógico (nos va llevando a las líneas temporales de mayor escala)
- unidades de medida: movimiento del Sol, salidas del Sol y repeticiones de la misma fase de la Luna, unidades antropomórficas, unidades arbitrarias no decimales, unidades de base no decimal, unidades del Sistema Métrico Decimal (como punto final de una secuencia desarrollada durante siglos)
- instrumentos de medida del tiempo: vela, clepsidra, reloj analógico y digital, engranajes, péndulo…
- líneas temporales: familia, histórica (con algunas referencias a la historia de las matemáticas), geológica…
- crecimiento de las plantas, de las personas, de poblaciones, crecimiento de virus y bacterias…

Dado que el tiempo es limitado, planteamos la realización de algunas de las actividades sugeridas.

Referencias:

- Fuentes, M.; Gallegos, J.; Martín, J.J. (2019): Medida de los 3 a los 16 años: bases para una secuencia didáctica coherente. En Actas de las 19 JAEM de A Coruña (2019), editadas por la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM). Este es el taller del Seminario de Matemáticas del CEP de Granada.
- Inskeep, J. E. (1976), Teaching measurement to elementary school children. Yearbook, Measurement in school mathematics, NCTM, Reston.

TaP017 Desarrollo del pensamiento geométrico a partir de la Visualización del Espacio y las Formas que nos rodean

Mònica Rodríguez Pedragosa
monica.prof@inscanperiquet.cat,
Roser Garcia Ferrer
roser70@gmail.com
Berta Mas Pons
bmas4@xtec.cat
Marta Goitia Bigorda
mgoitia@xtec.cat
Grup Vilatzara
ICE - Universitat Autònoma de Barcelona (UAB)

Núcleo temático: Procesos, conexiones

Modalidad: Taller con Ruta Matemática

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

Este taller, presentado por cuatro de los miembros del Grup Vilatzara, desarrollado por todo el seminario, pretende seguir compartiendo (empezamos a hacerlo en las XIX JAEM de A Coruña) el trabajo sobre Geometría que viene realizando en los últimos cursos el Grup Vilatzara para establecer una línea vertical en la ESO que parte de la Visualización para llegar a la Modelización. El taller tendrá tres partes: la primera “Dentro de la caja”, en el aula; la segunda, “Una caja mucho menos limitada”, una ruta por el exterior del edificio; la tercera, “Procesos y competencias en las actividades de Geometría”. Asimismo, presentaremos una secuencia de aprendizaje para la Geometría basada en los procesos, que empieza por la Visualización y la Representación (exigiendo constantemente el Razonamiento y la prueba) que lleva a la Comunicación, sigue con la Generalización y la Resolución de problemas, y conduce a la Modelización, todo ello estableciendo Conexiones entre bloques de contenidos matemáticos y con otras asignaturas. Intentaremos identificar estos procesos en las actividades que realicemos.

Palabras clave: Geometría, Procesos, Visualización, Razonamiento, Prueba

Ya en las JAEM de A Coruña presentamos los primeros trabajos del Grup Vilatzara sobre el establecimiento de una línea vertical de Geometría en la ESO que incorpore la Visualización como punto de partida. También propusimos cambiar el punto de vista del observador, colocándolo en el interior de la *caja* (del ortoedro, la caja de zapatos que a menudo menciona el alumnado). En las actas de aquel congreso presentamos algunas de nuestras referencias teóricas que justifican, a nuestro entender, la propuesta que seguimos desarrollando en este taller, 3 años y una pandemia después.

Ahora podemos profundizar aún más en las propuestas de actividades ricas en desarrollo competencial, y en el análisis de los procesos que se desarrollan con dichas actividades.

Por este motivo, nos vamos a centrar en una secuencia de aprendizaje basada en la visualización, que lleva a la representación y a la comunicación de ideas geométricas.

Dentro de la caja

En este primer paso, se exige constantemente al alumnado que lance conjeturas sobre lo que ve, lo que intuye:

- ¿Dónde estamos, ¿qué forma tiene?
- ¿qué objetos geométricos vemos (sus características y propiedades)?
- ¿qué relaciones hay entre unos y otros objetos geométricos?

Ahora bien, cada conjetura, cada supuesto que se comparta con los demás, debe ser justificado y, seguidamente, apoyado en pruebas que avalen lo conjeturado. Por ejemplo, si una alumna/o advierte el paralelismo entre dos paredes del aula, debe argumentar su conjetura y probar que realmente son paralelas. O bien, si afirma que la forma de la planta del aula es un rectángulo, debe aportarnos pruebas de que realmente es un rectángulo. Así con cada objeto y cada relación entre objetos: cilindros, ortoedros, dos prismas con las bases en vertical, etc.

Cambio de escala

En el segundo paso saldremos del aula para ir a un espacio más abierto: un patio grande sin cubrir, una plaza delante del edificio. Hemos cambiado la escala del espacio que nos rodea. Ahora volvemos a preguntarnos: ¿dónde estamos?, ¿qué forma tiene este nuevo espacio? Evidentemente, la dificultad aumenta (y mucho), dado que ahora la caja *dentro* de la que estamos no tiene techo, quizás incluso le falte parte de una de las caras laterales, su forma probablemente no sea parecida a un ortoedro, las *paredes laterales* se encuentran a gran distancia, el círculo del parterre, si lo hay, es enorme (¿es un círculo o una elipse? ¿Cómo lo probamos?). Nuevamente vamos a pedir justificación y prueba de las afirmaciones que nos lance cada alumna/o. Necesitaremos de instrumentos de medida, y de mucha creatividad e imaginación, para establecer la certeza de lo que intuimos.

Continuaremos realizando una ruta con diversas paradas en las que trabajaremos los contenidos previamente determinados: puede ser la inclinación y la pendiente, las formas geométricas y la razón de su utilización en ese lugar, las regularidades y los patrones en elementos arquitectónicos y en elementos estéticos de las fachadas o en un parque, etc.

Análisis de procesos y competencias

Una vez de vuelta al aula, analizaremos qué procesos y competencias hemos desarrollado en cada parada de la ruta -sobre qué contenidos-, y en qué acciones del alumnado nos hemos fijado para saberlo.

El marco teórico para este análisis es la matematización (OCDE, 2004), que abre una vía hacia la modelización: partimos del problema en el mundo real, identificamos variables y conceptos involucrados en la situación y lo preparamos para poder resolverlo en el mundo matemático (mediante simplificación, generalización, formalización; representándolo, estableciendo relaciones entre el lenguaje del problema y el lenguaje simbólico, encontrando regularidades y patrones, y aplicando un modelo matemático adecuado. En este camino hacia la solución es donde el alumnado puede aplicar lo que sabe, lo que conoce, sus habilidades y valores: su capacidad para resolver problemas, para establecer conexiones, para representar y comunicar, para razonar y probar lo que afirma. Es

decir, su competencia matemática. Finalmente, el resultado matemático obtenido se traduce a un lenguaje que permita la vuelta al mundo real, y allí hacemos una reflexión sobre si la solución es completa y ajustada al problema inicial planteado.

En las propuestas que presentamos en el taller, intentamos identificar los procesos y competencias que desarrolla el alumnado y, relacionado con la evaluación competencial: qué acciones nos muestran dicho desarrollo durante la realización de cada actividad.

Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52, 215-241.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester, (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publising.

Castelnuovo, E.: La Geometria. Ketrés editors, Barcelona, 1981.

Ministerio de Fomento. Secretaría de Estado de Infraestructuras, Transporte y Vivienda. Secretaría General de vivienda. Dirección General de Arquitectura, vivienda y Suelo: Documento Básico SUA (Seguridad de Utilización y Accesibilidad) https://www.codigotecnico.org/pdf/Documentos/SUA/DBSUA.pdf

Johnston-Wilder, S. y Mason, J. (2005): Developing Thinking in Geometry. The Open University y Paul Chapman Plubishing.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics (Trad. Castellana, Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003).

OCDE (2004): Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana. Santillana Educación.

Vilella, X.; Giménez, J.; Rodríguez, M. (2019): Geometría para la ESO: experiencias para conocer el espacio y para el desarrollo del pensamiento geométrico. En Actas de las XIX JAEM de A Coruña. FESPM.

TaP019 El uso de diagramas en la resolución de problemas. Matemáticas Newton Canarias.

Bruno Manuel Rivero Pérez
brivperx@canariaseducacion.es
IES Antonio González González
Ana Rosa Díaz Rodríguez
anarosa3008@gmail.com
Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias.
José Manuel Vidal González
jvidgonf@gmail.com
Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias.

Núcleo temático: Procesos, formación del profesorado.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

Este taller está orientado al uso de diagramas en la resolución de problemas.

Dentro de los procesos de resolución de problemas, los diagramas se presentan como una poderosa herramienta para organizar la información y hallar las soluciones. El uso y el conocimiento de estos diagramas favorece la selección adecuada a cada problema y poder abordarlos desde distintas estrategias. Se mostrará cómo se diseñan los diagramas y cómo funcionan y se propondrán diversos problemas para poner en práctica la utilización de los diagramas mostrados.

Conocer una amplia gama de diagramas es fundamental a la hora de resolver problemas. Como docentes, debemos orientar y guiar al alumnado, enseñándoles el uso de los diferentes diagramas, poniendo de manifiesto que no existe una única forma de abordar la resolución de problemas.

Palabras clave: Resolución de Problemas, Diagramas, Formación.

DESARROLLO DEL TRABAJO

Los diagramas son potentes herramientas que facilitan la resolución de problemas, permiten organizar y representar la información que aparece en los enunciados de los problemas y a la vez nos permite llegar a la solución del mismo.

Hay que enseñar a elaborar y utilizar diagramas a nuestro alumnado y proveer variadas experiencias en las que su uso facilite su uso y aplicación.

Tres aspectos son fundamentales sobre lo que el alumnado debe saber de los diagramas:

- ¿Cómo se diseñan?
- ¿Por qué se elige un determinado diagrama?
- ¿Cómo funcionan?

y sobre todo, qué estrategia es la que pide su utilización.

Los diagramas vienen dados en algunos problemas, en otros casos está determinado por su estructura y en otros casos por la estrategia elegida.

ACTIVIDADES PROPIAS DEL TALLER

operadores encadenados, tablas de proporcionalidad.

Por cada ejemplo mostrado se propondrá al profesorado varios problemas de diferente dificultad para ser resueltos haciendo uso de los diagramas mostrados. Se dará tiempo para su resolución y puesta en común, aportando sus soluciones, ya que la construcción de los diagramas puede ser variada.

Se verán las ventajas de utilizar diagramas para resolver problemas, para organizar la información, comprender la situación y obtener una solución, así como la adaptación a la diversidad del alumnado a quien van dirigido en última instancia estas herramientas.

Breve introducción sobre los diagramas y tipos de diagramas.

Ejemplificación de los siguientes tipos de diagramas: tabla simple, diferentes tipos de diagramas partes-todo, tabla de doble entrada, diagrama de flechas para

EJEMPLOS DE ACTIVIDADES: Durante el taller se propondrán problemas con el foco puesto en la construcción del diagrama o diagramas asociados a las estrategias. Un mismo problema puede abordarse con diferentes diagramas.

Ejemplo 1

Bruno está preparando un examen de 20 preguntas a su alumnado.

Si responden bien, obtienen un punto.

Si no contestan, no obtienen puntos.

Si se equivocan, pierden medio punto.

Una alumna obtuvo solamente 6 puntos.

¿De qué tipo fueron sus preguntas?

Diagrama 1

6																			
+1	+1	+1	+1	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Por cada respuesta positiva que añadimos, se necesitan 2 respuestas erróneas.

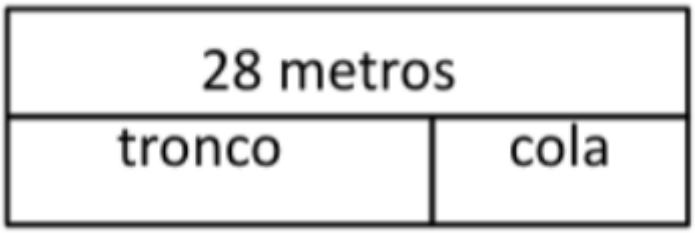
6																			
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	-0,5
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0	0	0	0	0	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5
+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0	0	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5

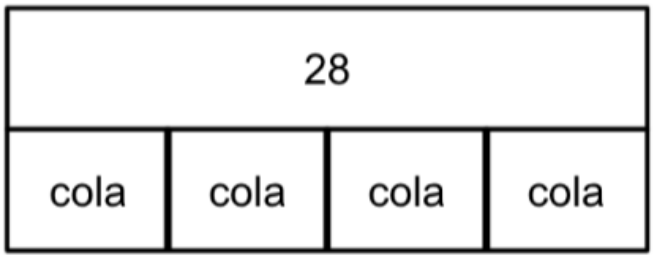
Diagrama 2

z	0	2	4	6	8
y	14	11	8	5	2
x	6	7	8	9	10

Ejemplo 2

El cuerpo de un dragón está dividido en tronco y cola. El tronco mide el triple que la cola. El cuerpo del dragón mide en total 28 metros. ¿Cuánto mide el tronco?





cola	tronco (triple)	total (28)	control
2	6	8	poca longitud
5	15	20	poca longitud
7	21	28	correcto
8	24	32	demasiado

Represento con dos trozos de papel, siendo el tronco más o menos triple que la cola

Cojo 28 fichas y las voy colocando de la siguiente manera: 1 en la cola y 3 en el tronco

Continúo hasta emplear las 28 fichas

Cuento las que hay en el tronco: 21 fichas.

Ejemplo 3

Tres comerciantes, un suizo, un italiano y un francés, viven en la misma calle en estas tres casas que son de diferentes colores. El carnicero vive en la casa de color amarillo, que se encuentra junto a la roja, pero no junto a la verde. El charcutero, que no es suizo, vive al lado del francés. El italiano vive en el número 21 y su casa no es de color amarillo. ¿Cuál es la nacionalidad del farmacéutico y de qué color es su casa? Explica tu razonamiento.

Número	21	23	25
Nacionalidad	ITALIANO SUIZO FRANCÉS	ITALIANO SUIZO FRANCÉS	ITALIANO SUIZO FRANCÉS
Profesión	CHARCUTERO CARNICERO FARMACÉUTICO	CHARCUTERO CARNICERO FARMACÉUTICO	CHARCUTERO CARNICERO FARMACÉUTICO
Color de la casa	AMARILLO ROJO VERDE	AMARILLO ROJO VERDE	AMARILLO ROJO VERDE

Ejemplo 4

Pedro hace sus compras en dos tiendas. En cada una de ellas se gasta la mitad de la suma que tenía al entrar en esa tienda más 10 euros. Al salir de la segunda tienda ya no le queda nada. ¿Qué cantidad tenía antes de entrar en la primera tienda?

TaP021 La estructura multiplicativa

José Manuel Vidal González
pepvidalg@gmail.com
Servicios centrales Consejería de Educación del Gobierno de Canarias.
Acompañamiento a centros

María Nila Pérez Francisco
nilacapicua@yahoo.es
Servicios centrales. Consejería de educación Gobierno de Canarias
Acompañamiento a centros

Núcleo temático: Procesos Recursos para el aula.

Modalidad: Taller

Nivel educativo: 2º y 3er ciclo de Educación Primaria y 1º de la ESO

RESUMEN

Entre las dificultades que nos encontramos en segundo y tercer ciclo de primaria y 1º de la ESO está la comprensión de las situaciones de multiplicación y división, y su aplicación a la resolución de problemas.

Creemos, como afirma Alcalá (2002), que “el aprendizaje matemático es una construcción del aprendiz...realizada a través de mediadores simbólicos: los signos que, progresivamente, van formando organizaciones estructuradas”. Esto hace necesario la construcción de las relaciones multiplicativas y los elementos que intervienen en la multiplicación y división como una estructura.

Los números implicados en la estructura multiplicativa son “de naturaleza distinta” (Castro y otros,2004) e implican una relación entre ellos: número de partes, valor de la parte y total. Es necesario identificar y situar en un diagrama todos estos elementos para tener un criterio matemático que me permita elegir la operación adecuada en cada situación.

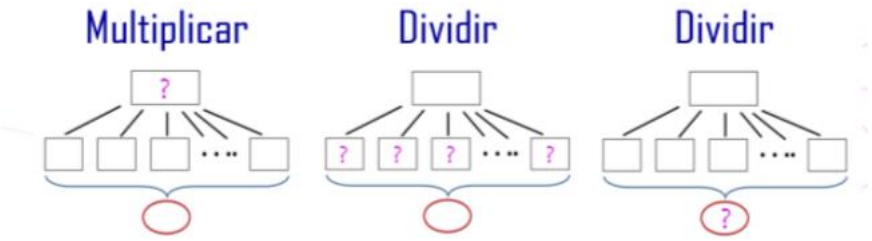
En este taller presentaremos y trabajaremos ejemplos de cómo lograr esta percepción de la estructura, identificación de los datos y su colocación en un diagrama que permite saber la operación necesaria para resolver situaciones significativas contextualizadas y trasladar después su uso de forma más simbólica.

Palabras clave: Operaciones, Multiplicación, División, Diagrama, Relación.

Durante este taller llevaremos a cabo una muestra de actividades con manipulación de materiales que permiten al alumnado comprender las relaciones que se dan en las operaciones de multiplicación y división (división como reparto y división como agrupamiento).

Los elementos que vamos a identificar son número de partes, valor de la parte y total. Es importante reseñar que, como dice Fernández Bravo (2017), en la multiplicación y la división, a diferencia de las relaciones aditivas, “los números representan dos universos diferentes y una relación constante” entre ellos.

La segunda parte de nuestra propuesta será cómo saber colocar esa información en un diagrama que nos permita tomar una decisión razonada matemáticamente sobre qué operación resuelve una determinada situación.



Las situaciones que se pueden dar quedan resumidas en los diagramas. O busco el total y entonces la operación es la multiplicación, o busco saber el número de partes y la operación será una división (reparto), o necesito saber el valor de cada parte y la operación será una división (agrupamiento). Por lo tanto las relaciones multiplicativas que nos ocupan suponen en todos los casos una multiplicación y dos divisiones.

Veamos algunos de ejemplos de actividades que realizaríamos durante el taller y que serían las que se proponen al alumnado.

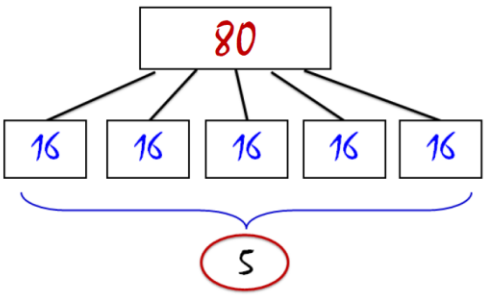
Para la comprensión del carácter diferenciado que tiene los números implicados en la multiplicación es importante trabajar primero acciones no ligadas aún al lenguaje matemático. El alumnado en este momento dispone de vasos pequeños, un vaso grande y piedras/fichas/contables, se dan las siguientes instrucciones.

- Coge 5 vasos pequeños.
- Pon 16 piedras en cada vaso.
- Coge un vaso grande
- Pon las piedras de los vasos pequeños en el vaso grande.
- **¿Cuántas piedras hay en el vaso grande?**

Y el alumnado realiza las acciones.

Estas acciones y la respuesta a la pregunta se recogen en un diagrama multiplicativo

Hay 80 piedras en total en el vaso grande



El alumnado sabe que los cuadros pequeños del diagrama se corresponden con los vasos pequeños en la realidad, el cuadro grande con el vaso grande, donde está el total de las piedras, el círculo inferior me dice el número de vasos pequeños (partes) que tengo y dentro de cada uno está la cantidad de piedras que puse (valor de cada parte). El diagrama y la realidad coinciden.

Para enlazar estas acciones y diagrama con las matemáticas se plantea la pregunta:

¿Puede una mente matemática saber cuántas piedras hoy en total sin tener que contarlas?

Una mente matemática sabe que si conozco el número de partes y el valor de cada parte, la multiplicación me permitirá averiguar el total sin tener que contar.

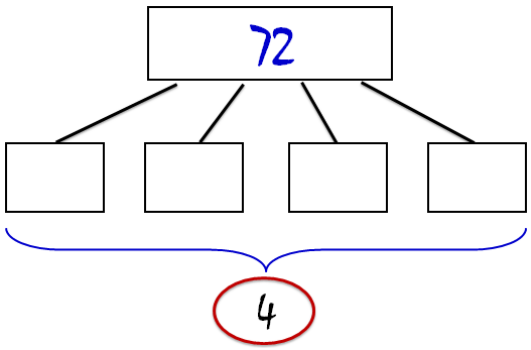
$$5 \times 16 = 80$$

Se les propone que lo comprueben con la calculadora.

El alumnado resuelve varios retos de este tipo para afianzar la relación acciones-matemáticas.

Después se le plantean retos como el siguiente

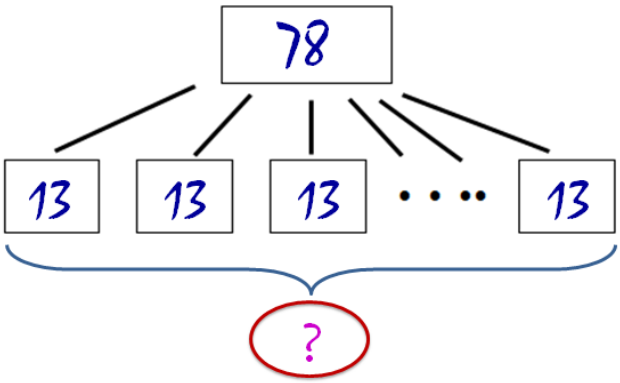
Este diagrama te está pidiendo que hagas algo. ¿Qué crees que tienes que hacer?



En esta ocasión el alumnado se enfrenta a la acción de reparto, que se resulve en matemáticas con una división.

Se da también la otra situación.

Este diagrama te está pidiendo que hagas algo. ¿Qué crees que tienes que hacer?



¿Qué significan los puntos suspensivos?

En este caso el alumnado debe interpretar que el diagrama pide agrupar para saber cuántos vasos (partes/grupos) son necesarios para ese total. Esto también se resuelve con una división pero la situación es diferente al caso anterior. Es muy importante que el alumnado viva experiencias de este tipo por cuanto la división como agrupamiento es esencial en la medida.

Este tipo de retos se trabajan para que el alumnado afiance la relación acciones-operaciones matemáticas y comprenda su significado.

También se plantean preguntas para descubrir la relación entre multiplicación y división, por ejemplo, si se ha trabajado la acción de llenar 7 vasos con12 piedras cada vaso y sé que el total es 84, es decir, se representa matemáticamente 7x12= 84

Se plantea el siguiente reto:

Si tengo 84 piedras y quiero repartir entre 7 amigos, ¿Alguien me podría decir cuántas le tocarán a cada uno sin hacer cálculos?

El alumnado contesta rápidamente que 12. Se le invita a comprobar con la calculadora (a pesar de ser casi obvio).

En la misma línea se le dice que se tiene 84 piedras y se quieren hacer grupos con 12 piedras en cada grupo, ¿Alguien me podría decir cuántos grupos se podrán formar si hacer ningún cálculo? La respuesta tampoco se suele hacer esperar, 7 grupos. De nuevo proponemos comprobación con la calculadora. Ante esto, se pregunta: ¿Cómo se ha contestado tan rápido? El alumnado sin dudarlo establece por sí mismo la relaciones que se resumen a continuación:

Sí $7 \times 12 = 84$

$84 \div 7 = 12$

$84 \div 12 = 7$

Entonces

De nuevo se les puede retar preguntando si esto será siempre así o sucede solo con estos números y se les pide que con la calculadora lo demuestren para otros casos, incluso decimales.

Este trabajo de acciones y su correspondencia con operaciones matemáticas se aplica en la resolución de problemas aritméticos de estructura multiplicativa. Podremos comprobar cómo la comprensión de la estructura permite resolverlos con una toma de decisiones basada en un criterio matemático. Veamos un ejemplo de los que trabajaremos en el taller.

Cecilia repartió esta mañana 252 pasteles en cajas de 12 pasteles cada una. ¿Cuántas cajas repartió?

En este tipo de problemas el alumnado debe hacerse tres preguntas.

¿Qué tres cosas se relacionan?

¿Qué operación resuelve el problema?

¿Por qué?

Una vez que sabe qué tres cosas se relacionan:

Número total de pasteles

Pasteles en cada caja

Número de cajas

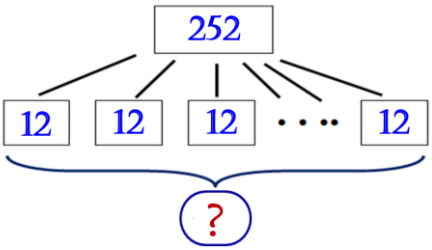
Pondrá la información numérica de la que se disponga.

Número total de pasteles 252

Pasteles en cada caja 12

Número de cajas ?

Ahora ya puede situar esa información en un diagrama.



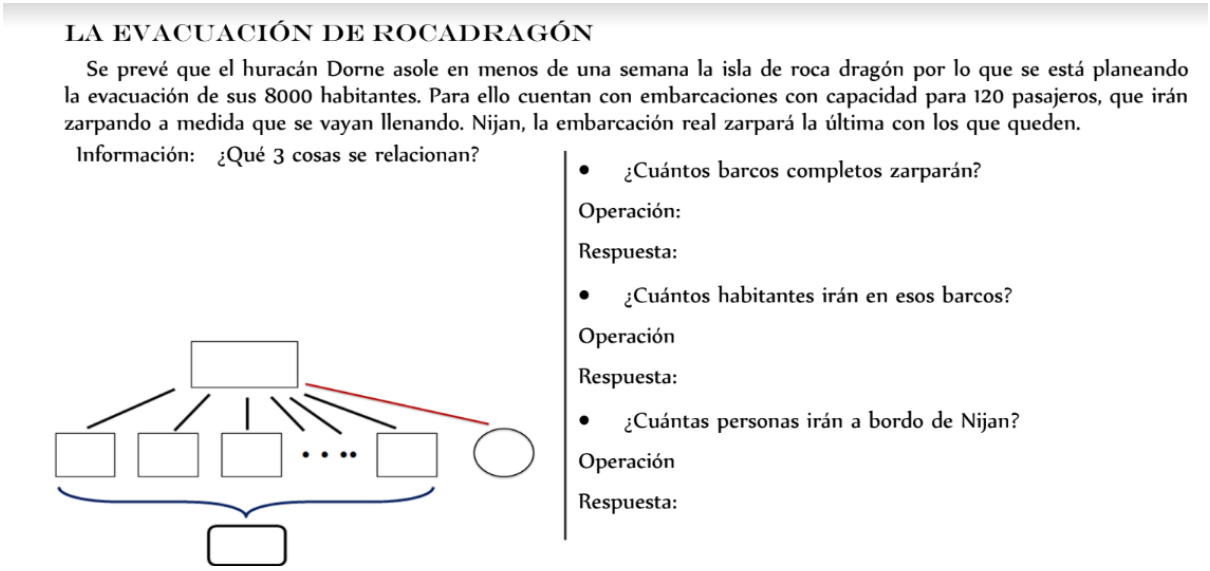
Y con la experiencia vivida en el trabajo de la estructura multiplicativa, sabe que esta situación se resuelve con una división y además puede justificarlo, porque si conozco el total, 252, y el valor de cada parte, 12, la división es la operación que me dirá el número de partes.

En otras ocasiones las situaciones planteadas requieren de más de un diagrama, como en el siguiente ejemplo.

Esta semana nuestra compañía aérea ha estrenado nuevas aeronaves con 31 filas de 6 pasajeros.

Hemos traído a las islas 2790 pasajeros. Todos nuestros vuelos estaban llenos. ¿Cuántos vuelos realizamos?

Se puede ofrecer al alumnado un material con la información y el diagrama vacío para que coloque la información. En este ejemplo el círculo del diagrama nos indica una estructura multiplicativa con resto, de la cual también veremos un ejemplo en el taller.



LA EVACUACIÓN DE ROCADRAGÓN

Se prevé que el huracán Dorne asole en menos de una semana la isla de roca dragón por lo que se está planeando la evacuación de sus 8000 habitantes. Para ello cuentan con embarcaciones con capacidad para 120 pasajeros, que irán zarpando a medida que se vayan llenando. Nijan, la embarcación real zarpará la última con los que queden.

Información: ¿Qué 3 cosas se relacionan?

- ¿Cuántos barcos completos zarparán?

Operación:

Respuesta:

- ¿Cuántos habitantes irán en esos barcos?

Operación

Respuesta:

- ¿Cuántas personas irán a bordo de Nijan?

Operación

Respuesta:

Para los problemas de tipo aritmético, se establecen cuatro fases: comprender/organizar la información, pensar/elegir la operación, calcular y responder, que incluye la comprobación.

En resumen, este taller plantea una propuesta para lograr que el alumnado se enfrente a las situaciones que implican una estructura multiplicativa (multiplicación, división) y las resuelva con criterio matemático.

Referencias

Alcalá, Manuel *La construcción del lenguaje matemático.* Editorial Grao Barcelona 2002

Bermejo, Vicente y otros. *Como enseñar matemáticas para aprender mejor.* Editorial CCS. Madrid 2004

Fernández Bravo, J. A. *La numeración y las cuatro operaciones matemáticas*. Editorial CCS. Madrid 2017

TaP023 Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas

Abraham de la Fuente (1)
abraham@gmail.com (1)
Universitat Autònoma de Barcelona (1)
Paula López-Serentill (2)
paula.lopez@udg.edu(2)
Universitat de Girona (2)

Núcleo temático: Procesos, Recursos para el aula.

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

Propondremos una secuencia de problemas para que los alumnos aprendan a utilizar el lenguaje algebraico en un ambiente de resolución de problemas donde se le de sentido a los símbolos y a las letras. No hay una única secuencia para conseguirlo, pero es importante tener en cuenta las características que debería tener y cómo deberíamos integrar la evaluación en el aprendizaje. En este taller propondremos una posible secuencia de problemas que podría servir como ejemplo para introducir el lenguaje algebraico, atendiendo a las conexiones entre representaciones que deberíamos promover entre los alumnos para que este aprendizaje se pueda dar de manera significativa.

Palabras clave: Resolución de problemas, Álgebra, Conexiones entre representaciones

1. Introducción

Una confusión común en educación matemática es asumir que la mejor manera, y quizá la única, de poseer un conocimiento es conseguir soltura a través de la práctica hasta la perfección. Ciertamente ganar soltura reduce esfuerzos y simplifica la atención requerida sobre las estructuras y, efectivamente, si se tiene que escoger una herramienta de trabajo los profesionales elegirán aquella que les resulte más

familiar. Pero sabemos que practicar hasta la maestría es insuficiente: muchas técnicas que se aplican hasta la perfección fallan en el momento en que se tienen que aplicar para resolver problemas, mientras que otras técnicas se aprenden sin realmente practicarlas tanto (Mason y Spence 1999, p. 156).

Por eso es importante construir el lenguaje algebraico a partir de contextos ricos que fomenten la comprensión matemática. Estos contextos constituyen un precursor importante del estudio más formalizado del álgebra. Por ello debemos promover que los alumnos tengan oportunidades de identificar y construir patrones numéricos y geométricos y también de describirlos ya sea expresándolos verbalmente o representándolos con tablas o gráficos (NCTM, 2000). En el inicio de esta construcción los alumnos pueden utilizar notaciones inventadas para expresar un patrón y las conexiones entre representaciones que puedan establecer los profesores serán clave para el avance hacia la formalización de este lenguaje (de la Fuente y Deulofeu, 2022).

El enfoque del aprendizaje a través de la resolución de problemas nos permite avanzar en esta línea. De acuerdo con Abrantes (1996), que en clase haya un ambiente de resolución de problemas implica que los problemas no sean afrontados como factor de motivación externa, ni únicamente como aplicación de conocimientos adquiridos, ni que se lleven al aula únicamente para la introducción de nuevos temas. La secuencia de problemas que propondremos en el taller se caracterizará por construir situaciones en las que sea necesario explorar, que despierten varias formas de razonamiento y que requieran el uso de procesos como experimentar, discutir, conjeturar, argumentar o justificar. Todos estos procesos servirán para favorecer la construcción del lenguaje algebraico de manera significativa y competencial.

2. Categorizar el lenguaje algebraico

Muchos autores (Usiskin 1988, Kieran 1992, NCTM 2000, Kaput 2000 y Kaput 2008) han dado diferentes versiones sobre lo que debería ser el álgebra escolar. A pesar de los diferentes enfoques y la diversidad de modelos, lo que todas ellas tienen en común es que afirman que hay diversas formas de razonamiento algebraico y que

todas ellas se tienen que desarrollar para que nuestros alumnos aprendan a utilizar el lenguaje algebraico de manera significativa (de la Fuente, 2016).

Debido a que nuestro enfoque de la enseñanza es la construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas, hemos caracterizado las dimensiones de este lenguaje en términos de capacidades, atendiendo así a un lenguaje que nos ayude también a mostrar el enfoque competencial del aprendizaje. La categorización de álgebra la basaremos pues en aquellas que mejor se adaptan a estas necesidades: Kaput (2000) y NCTM (2000).

Así pues, a partir de ahora nos referiremos a las dimensiones del álgebra escolar de la siguiente forma: el álgebra escolar es un lenguaje simbólico que tiene que servir para:

Generalizar y formalizar

Representar estructuras abstractas y hacer cálculos con ellas

Estudiar relaciones y funciones

Modelizar

Nuestra elección de estas dimensiones se basa en la idea de que para poder construir el conocimiento necesario para desarrollar las habilidades de la siguiente dimensión será necesaria una cierta habilidad en los procesos implicados en las anteriores dimensiones.

Ahora bien, es importante tener en cuenta que estas cinco formas de razonamiento algebraico, tal y como es de esperar y desear, se interrelacionan y se superponen entre ellas hasta el punto en que en algunos problemas es difícil su distinción.

2.1 Generalizar y formalizar

El **álgebra como generalización y formalización de patrones y restricciones** es la más general de las cuatro formas que estamos considerando. Esto quiere decir que en el modelo que estamos utilizando para caracterizar el álgebra escolar, el

resto de las dimensiones acabarán convergiendo a esta primera. Generalizar y formalizar es una actividad intrínseca del pensamiento matemático. Necesitamos generalizar, por ejemplo, para poder relacionar situaciones que no están ligadas por el mismo contexto. Identificar patrones, seguir procesos, analizar estructuras y encontrar las relaciones entre ellas son ejemplos de esta misma forma de razonamiento.

Es importante tener en cuenta que las primeras generalizaciones que normalmente hará un alumno delante de un profesor las hará en un lenguaje que no es propio de ninguno de los dos: ni del que enseña ni del que aprende. Es decir, que el alumno todavía está construyendo su propia manera de comunicar y el profesor ya tiene adquirido como propio el lenguaje matemático (algebraico en este caso) necesario para comunicar, junto con todos los formalismos asociados. Por ejemplo, la primera vez que un alumno quiere expresar un número impar cualquiera, hasta que llegue a la conclusión de que puede escribir $2n+1$, la comunicación tendrá lugar usando un lenguaje que no es propio del álgebra formal. En estos momentos el profesor tiene que ser capaz de escuchar con cuidado al alumno y ser capaz de generar una serie de diálogos que acerquen al alumno a la construcción del lenguaje algebraico.

Podemos distinguir dos fuentes de generalización: las que sirven para comunicar y razonar cuestiones propias de las matemáticas, que usualmente comienzan con la aritmética, y las que se basan en situaciones fuera de las matemáticas pero que son susceptibles de ser matematizadas. En consecuencia, hay que tener en cuenta que en un aula donde se promueva la comprensión como vehículo de aprendizaje, los estudiantes se sentirán más atraídos por la generalización si esta se hace a través de experiencias con significado que puedan derivar en sus propias formalizaciones.

2.1 Representar estructuras abstractas y hacer cálculos con ellas

Aquí nos referimos al uso de formalismos sin hacer incidencia en su significado, coincidiendo con la idea del metanivel del aprendizaje de Kieran (1992). Como decía Bertrand Rusell, "*(formal) algebra allows the user to think less and less about more and more*" (Kaput (2000), p. 11). Desafortunadamente el problema es que la enseñanza tradicional del álgebra hace mucho más hincapié en este "less and less".

Aquellos alumnos que aprenden a usar el álgebra a través de su sintaxis creen que entender el álgebra quiere decir recordar qué reglas se tienen que aplicar a cada cadena de símbolos. Pero entender el álgebra está muy lejos de esto: el objetivo es ser capaz de conectar el conocimiento de los procedimientos y técnicas (sintaxis) con el conocimiento de los conceptos (semántica). Nosotros proponemos trabajar la sintaxis usando conceptos lejanos a la aritmética generalizada, que es la que nos encamina hacia la resolución de ecuaciones. De esta manera no haremos que nuestros alumnos caigan en la trampa de cometer errores de los que luego será difícil desprenderse.

Este tipo de razonamiento algebraico que tiene que ver con la automatización y la mecanización de algunos procesos es necesario. Pero, en cambio, también creemos que no es un tipo de razonamiento que nos interese construir de forma separada al resto. Cualquier proceso que consideremos puramente mecánico creemos que no es necesario construirlo si no tenemos detrás algún contexto (y por contexto también entendemos los contextos puramente matemáticos) que haga necesario su uso. A partir de tener diversos contextos que necesiten de estas mecánicas, la automatización surgirá de forma natural, a diferentes velocidades y profundidades para diferentes alumnos.

2.3 Estudiar relaciones y funciones

Para **estudiar funciones y relaciones** la notación tradicional usa el álgebra simbólica como herramienta habitual de comunicación. Sin embargo, está claro que no solo el álgebra nos ha de servir para hacer razonamientos en este sentido. Gráficas y tablas de valores son recursos habituales para transmitir informaciones referentes a estos conceptos. Por eso este proceso también involucra la **generalización**: nos podemos preguntar qué es lo que tienen en común todas estas formas de expresar la misma información. Por otro lado, se considera que los gráficos de funciones son también un sistema de símbolos que hay que interpretar.

El estudio de funciones que implican cambios son los que generan el estudio de las funciones. Como ya hemos dicho, este estudio se puede expresar usando diferentes representaciones. Y es esta variedad de representaciones forma parte de la riqueza

qua nos interesa resaltar. Esta interrelación entre los diferentes lenguajes nos tiene que servir para dotar de un significado más al lenguaje algebraico, que es el que nos ocupa. Por eso es muy importante trabajar las conexiones entre representaciones. Pero hay que tener en cuenta que esta relación entre representaciones nos servirá también recíprocamente, para dotar de significado al resto de lenguajes y formas de representación.

También queremos remarcar que para que la propuesta de tareas que más adelante explicaremos sea lo más útil posible, es importante que los alumnos hayan vivido experiencias previas con gráficas de funciones, tablas, etc. El hecho de trabajar con gráficas de funciones y no necesariamente con las expresiones algebraicas de las mismas, nos permitirá poder trabajar con una amplia variedad de funciones, sin necesidad de limitarnos a aquellas que tengan una expresión algebraica sencilla y adecuada a lo que saben hacer los alumnos utilizando el lenguaje algebraico.

2.3 Modelizar

El último de los aspectos que trata Kaput (2000) sobre el razonamiento algebraico es el **álgebra como lenguaje de modelización.** De hecho, insiste en que, en realidad, modelar situaciones es la primera de las razones por las cuales es necesario estudiar álgebra. En la modelización nuestro objetivo es estudiar un fenómeno para conseguir matematizarlo. En este sentido, las nuevas tecnologías nos permiten hacer este proceso de manera ágil. Pero se ha de tener en cuenta que, si bien los entornos virtuales son cuantitativamente muy ricos, son pobres en cuanto a su manipulación. En cambio, los modelos físicos en que los alumnos pueden experimentar con sus propias herramientas tendrán mucha riqueza manipulativa pero poca precisión numérica y siempre el número de experimentos será limitado. Es por eso por lo que Kaput nos recomienda trabajar con los dos tipos de experimentos de forma muy ligada.

Esta dimensión del lenguaje algebraico debe incluir ser capaz de construir significado a partir de diferentes representaciones (gráficos, tablas, fórmulas, etc.) de un mismo fenómeno y ser capaz de transformar diferentes representaciones en otras equivalentes para comprenderlas y extraer conclusiones. De acuerdo con

Azcárate y Deulofeu (1998) debemos “considerar el papel esencial del estudio de funciones en las Matemáticas, a partir del siglo XVIII, como fuente de modelos e instrumentos que permiten describir e interpretar tanto el mundo físico como los fenómenos y las relaciones sociales”, cosa que nos relaciona claramente la dimensión anterior con la modelización.

Esto no es contradictorio con que debamos tener una dimensión separada para la modelización. Por ejemplo, podríamos decir que cuando un alumno traduce del lenguaje verbal un problema en un contexto y escribe una ecuación que servirá para resolverlo también está modelizando. Generalizando, y de acuerdo con Solar, Deulofeu y Azcárate (2015) la modelización será el conjunto de fases necesarias para resolver un problema proveniente de una situación real por medio de un modelo matemático. El proceso de modelización se inicia generalmente con una situación extramatemática, se simplifica a un modelo real y se matematiza para obtener un modelo matemático; se resuelve dentro del modelo y se evalúa si responde con una situación original. Así, podemos identificar una necesidad esencialmente diferente al respecto del uso del lenguaje algebraico del resto de dimensiones en los procesos de matematizar e interpretar (imagen 1).

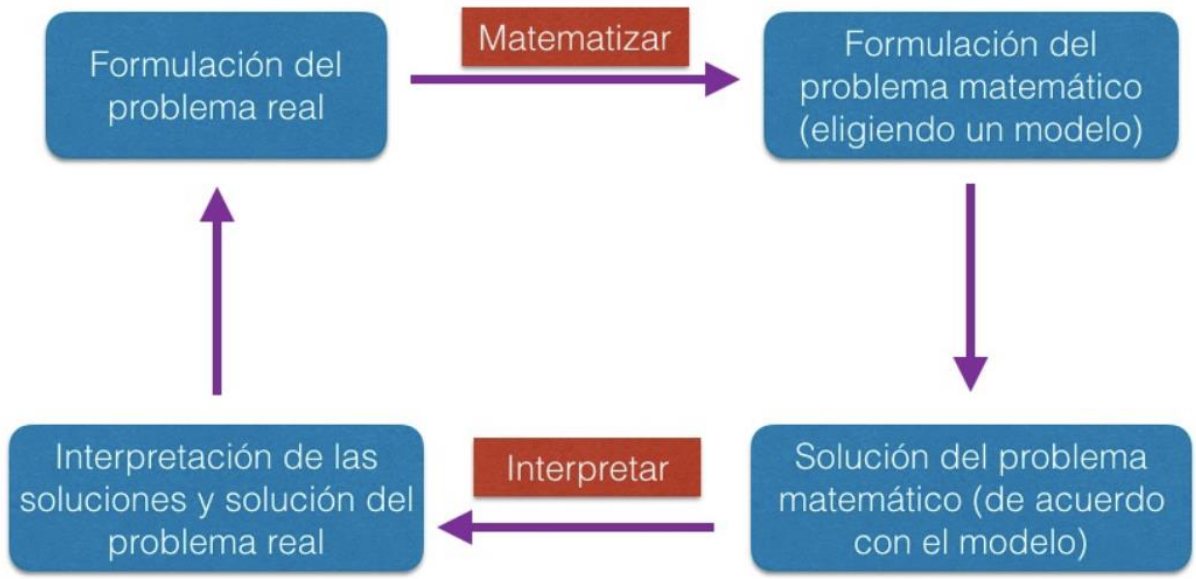


Imagen 1: El proceso de modelización

En el siguiente apartado veremos algunos ejemplos de problemas dentro de cada una de estas dimensiones en que hemos dividido el aprendizaje escolar del lenguaje algebraico.

3. Una propuesta de secuencia de problemas

Nuestra concepción del conocimiento del profesor incluye saber qué enseñar y porqué (Rowland y otros 2009) y cómo diseñar tareas de aprendizaje (de la Fuente, Rowland y Deulofeu 2016, p.26). Por eso ha sido importante en el apartado anterior el hecho de caracterizar el lenguaje algebraico y ahora lo será tener claras las características de la secuencia de problemas que se propondrán a continuación, ya que esta secuencia ni pretende ser única ni pretende ser la mejor: es una propuesta.

Las características que se han tenido en cuenta en la secuencia de problemas que proponemos y que esperamos que alguien que quiera diseñar una secuencia diferente tenga en cuenta son las propuestas por Kieran (2004):

Las tareas que demandan los problemas deben implicar los procesos que están conectados con el pensamiento algebraico, es decir, generalización, argumentación y justificación, predicciones y demostraciones.

Los problemas deberían implicar el uso de representaciones variadas de conceptos matemáticos, es decir, de expresiones verbales, diagramas, dibujos o gráficos, etc.

Los símbolos algebraicos no tienen por qué ser los protagonistas en el momento de plantear los problemas y no necesariamente tienen por qué ser la única forma de resolverlos.

A continuación veremos algunos ejemplos de estos problemas y analizaremos las características del lenguaje algebraico que se pueden desarrollar a partir del trabajo con ellos. Eso sí, no resolveremos los problemas, eso quedará como entretenimiento para el taller y para el lector.

3.1 Generalizar y formalizar

Como ya hemos dicho anteriormente, creemos que el lenguaje algebraico se debe comenzar a construir como un conjunto de tareas de generalización. Este lenguaje surge en el momento en que se tiene la necesidad de comunicar patrones, ya sean numéricos o algebraicos, o cuando intentamos expresar las leyes que gobiernan las relaciones numéricas. Es por eso que las tareas que proponemos en clase deben animar a los alumnos a interaccionar entre ellos, a exponer los resultados en pequeños grupos y después con todo el grupo-clase. De esta manera podremos conseguir que para comunicarse tengan la necesidad de tener un lenguaje prealgebraico o algebraico común. Esta emergencia del lenguaje, seguramente se dará las primeras veces en la fase sincopada de este lenguaje.

Por ejemplo, un problema en que los alumnos tengan que referirse al conjunto de los números impares de manera general y tengan que hacer una demostración y comunicarla, invitará a los alumnos a representarlos de formas diversas. Como profesores, seguramente la primera representación generalizada que se nos ocurre es “2n+1”. Pero para los alumnos esta no será la forma preferida. Por ejemplo, dirán frases como “el siguiente de un número par”, o quizá pueden elegir una representación icónica como la de la imagen 2. Vemos como un alumno quiere demostrar que la suma de dos números consecutivos siempre tiene como resultado un número impar. En la primera línea, vemos cómo lo escribe algebraicamente, pero cuando no convence a sus compañeros del argumento, lo hace utilizando unos iconos que representan un número y su consecutivo, y posteriormente la suma de los dos. La forma del número indica si se trata de un número par o impar.

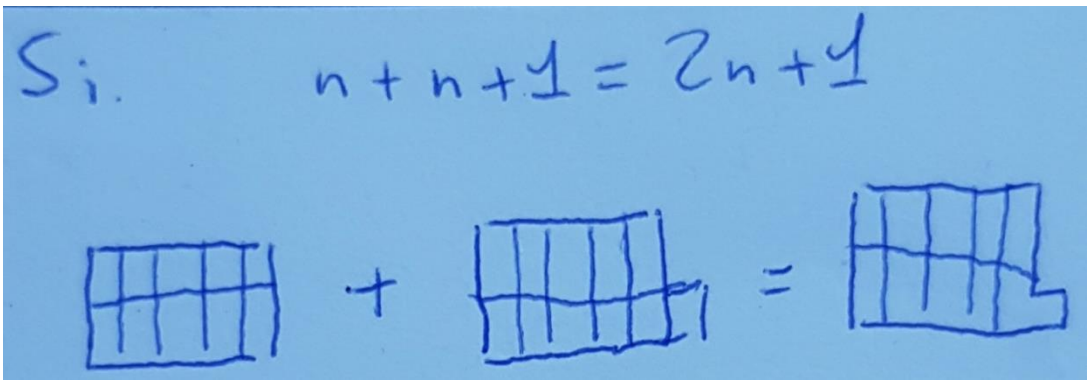


Imagen 2: representaciones de números pares e impares

En realidad esta argumentación proviene de plantear un problema clásico (Mason, Burton y Stacey, 1992), que consiste en el siguiente reto:

Algunos números se pueden expresar como suma de una sucesión de números positivos consecutivos. ¿Exactamente qué números tienen esta propiedad?

Este tipo de problemas, en que hay que buscar una solución y después demostrarla, ayudarán mucho a desarrollar el lenguaje algebraico y a formalizarlo, por la necesidad de comunicarse.

Una situación en la que se pedirá más explícitamente a los alumnos que generalicen una situación, podría ser la siguiente:

Explica cuáles son las estrategias que utilizas para responder a las siguientes preguntas:

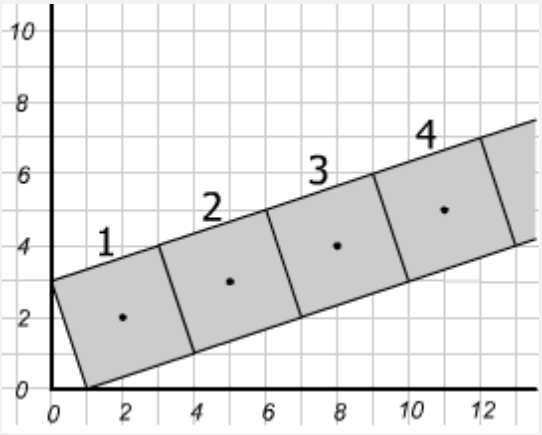


Imagen 3: Cuadrados numerados

a. ¿Cuáles son las coordenadas del centro del 20-ésimo cuadrado?

b. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice inferior izquierdo del cuadrado número 34?

c. Imagina que la secuencia de cuadrados se estiende hacia la izquierda: …-2,-1,0,1,2,3,… ¿Cuáles son las coordenadas del cuadrado -15?

En este problema es muy importante promover que los alumnos utilicen diversas estrategias para responder la misma pregunta y que las tengan que comunicar entre ellos. Está claro que una opción para resolver este problema sería continuar el dibujo para responder a las preguntas, pero también podríamos utilizar tablas de valores para intentar encontrar el patrón. Algunos alumnos pueden intentar probar el

diseño de fórmulas que sirvan para responder a las preguntas. Es tarea del profesor ayudar a los alumnos a conectar sus argumentaciones y sus representaciones.

3.2 Representar estructuras abstractas y hacer cálculos con ellas

De acuerdo con Schoenfeld y Arcavi (1988), el significado que tienen los objetos matemáticos se encuentra determinado más por los contextos en los que se usan que no por las reglas formales con los que se utilizan. En consecuencia, como nuestro objetivo debe ser que la construcción del lenguaje algebraico sea significativa, tenemos que conseguir que nuestros alumnos tengan muchas experiencias usándolas como lenguaje para representar objetos matemáticos en una amplia variedad de contextos.

En el siguiente problema, por ejemplo, podremos promover que los alumnos hagan cálculos con símbolos algebraicos, teniendo en cuenta el significado de estos.

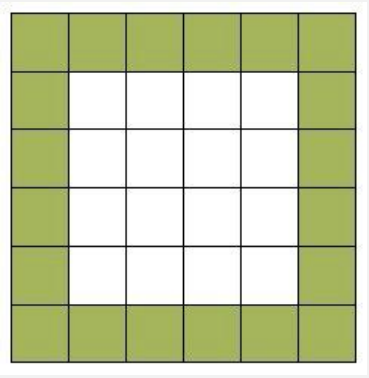


Imagen 4: Contar cuadraditos

¿Cuántos cuadraditos tendría en su zona perimetral la figura análoga que tiene 37 cuadraditos de lado? Escribe en forma de operación combinada los cálculos que has necesitado y argumenta la respuesta.

Propón una fórmula que sirva para calcular el número de cuadraditos de la zona perimetral en cualquier figura como esta.

Las dos primeras preguntas del problema son casos particulares que servirán para asegurar que los alumnos son capaces de realizar un cálculo concreto y de particularizar el problema en un caso mayor. Es muy importante pedir que representen la estrategia que han usado para hacer el cálculo (imagen 5).

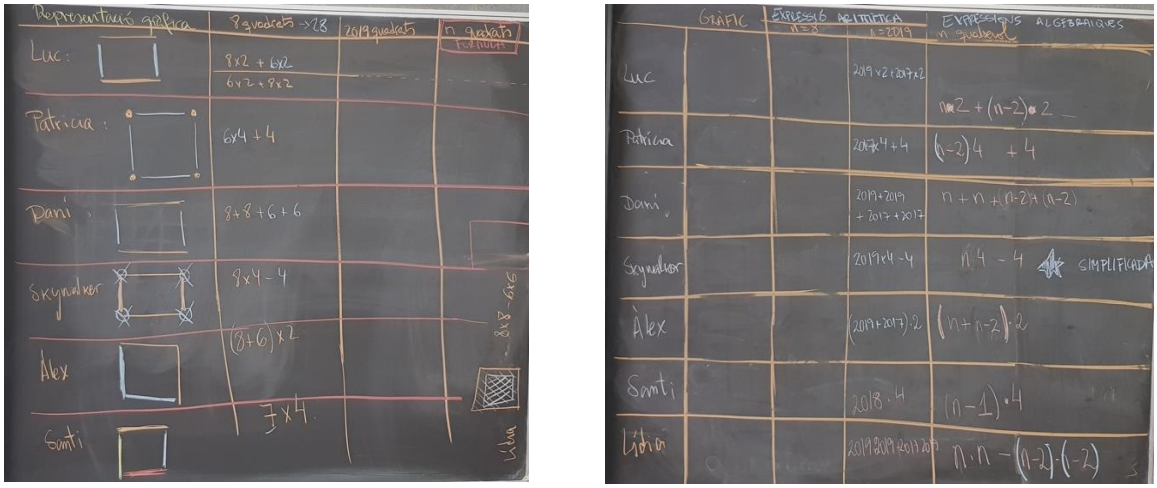


Imagen 5: Diversas representaciones de la solución del problema “Contar cuadraditos”

En el momento de realizar la generalización y proponer fórmulas como las que vemos en la parte derecha de la Imagen 5, es muy probable que los alumnos utilicen argumentaciones retóricas. Estas generalizaciones podríamos considerar que están en la dimensión anterior, pero podremos entrar en el cálculo con expresiones abstractas en el momento en que queramos ver que, en realidad, todas las expresiones algebraicas son equivalentes. Y lo podremos hacer manteniendo vivo el significado de los símbolos durante mucha parte del proceso. Todavía hay una contribución más al lenguaje algebraico de la resolución de este problema: las letras representan variables, cosa que nos permite conectarlo con la siguiente dimensión de este lenguaje: el estudio de relaciones y funciones.

Pero antes de pasar a ver ejemplos de problemas que nos situarán en las relaciones y las funciones, veamos cómo podemos introducir la resolución de ecuaciones de manera significativa a través de la resolución de problemas:

Con la información que tienes disponible, ¿puedes saber el precio de una pizza? ¿y de una bebida? ¿lo puedes saber de más de una manera?

Imagen 6: Representación icónica de los precios de dos conjuntos diferentes de pizzas y bebidas

En principio se espera que los alumnos puedan resolver este problema manipulando los iconos, sin recurrir al uso del lenguaje algebraico, tal y como vemos en los tres ejemplos de la imagen 7.

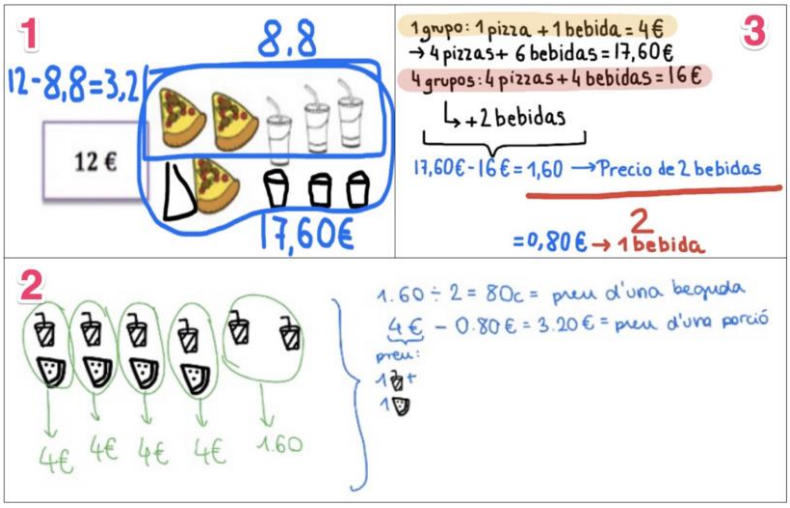


Imagen 7: Producciones de alumnos que resuelven el problema de las pizzas y las bebidas

En conclusión, este problema y, en particular, su formulación icónica, permite a los alumnos desarrollar estrategias de resolución de modo que, por el hecho de tener que explicar la resolución con detalle, empiezan a utilizar lenguajes similares al lenguaje algebraico. Para el profesor de matemáticas, lo que están haciendo estos alumnos es resolver sistemas de ecuaciones y realmente es lo que los alumnos hacen, pero no lo están haciendo mediante el uso del lenguaje algebraico, sino mediante razonamientos aritméticos.

3.3 Estudiar relaciones y funciones

Para trabajar desde la dimensión del estudio de la **relación entre dos o más variables**, la geometría puede proporcionarnos contextos significativos. Por ejemplo, mientras estudiamos las fórmulas de las áreas de las figuras planas:

Seguramente ya sabes que el área del trapecio es: $A = (B + b) \cdot h / 2$. Deduce esta fórmula suponiendo que solo sabes las fórmulas del área del rectángulo, el triángulo y el paralelogramo. Hazlo almenos de tres maneras diferentes.

En la imagen 8 se puede ver como una alumna de 1º de ESO resuelve el problema manipulando símbolos (y así vemos cómo este problema también conecta con la anterior dimensión).

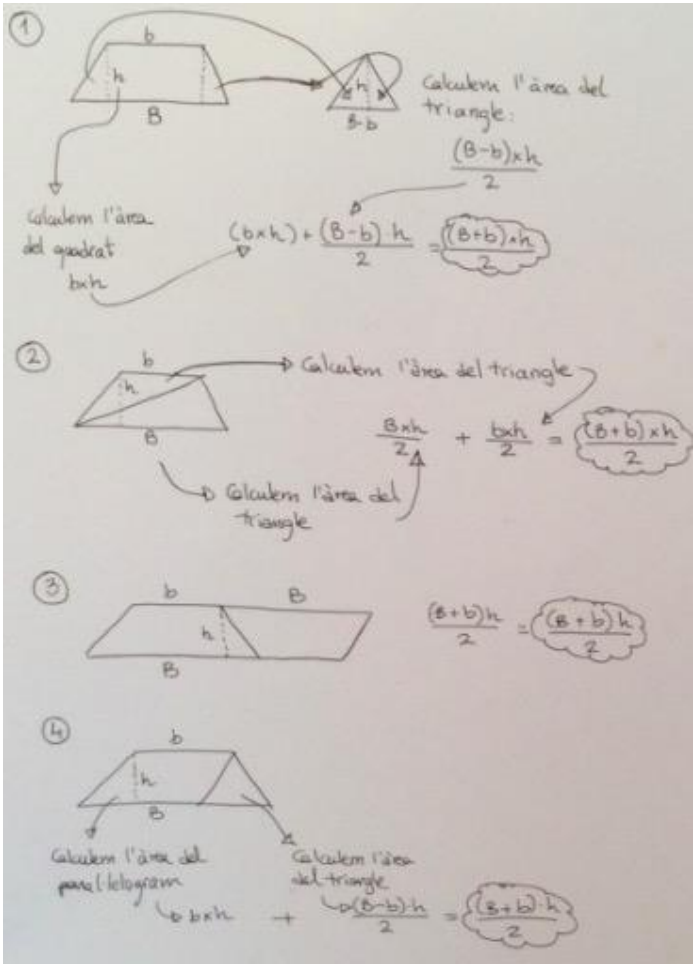


Imagen 8: Área del trapecio

Otro contexto dentro de esta dimensión es el estudio de fenómenos que implican cambios y por tanto el estudio de funciones. Nos interesa que nuestras alumnas conozcan todos los lenguajes útiles para referirse a las funciones y la interrelación entre esto. El siguiente problema es un ejemplo de cómo hacer que esta interrelación sea el objeto de resolución del reto.

Los ahorros de Helena, Xavier, Andrea y Joan han cambiado durante el último año tal y como está descrito bajo estas líneas. Los números indican las cantidades de dinero en euros y al final de cada semana.

Helena: La tabla muestra cuánto dinero ha ahorrado al final de cada semana. La tabla continúa de la misma forma durante todo el año.

Semana	1	2	3	4	5	6 ...
Ahorro	7	14	21	28	35	42 ...

Xavier: Durante todo el año ha tenido ahorrados 300€.

Andrea: El gráfico describe sus ahorros durante las primeras veinte semanas. El gráfico continúa de la misma manera durante el resto del año.

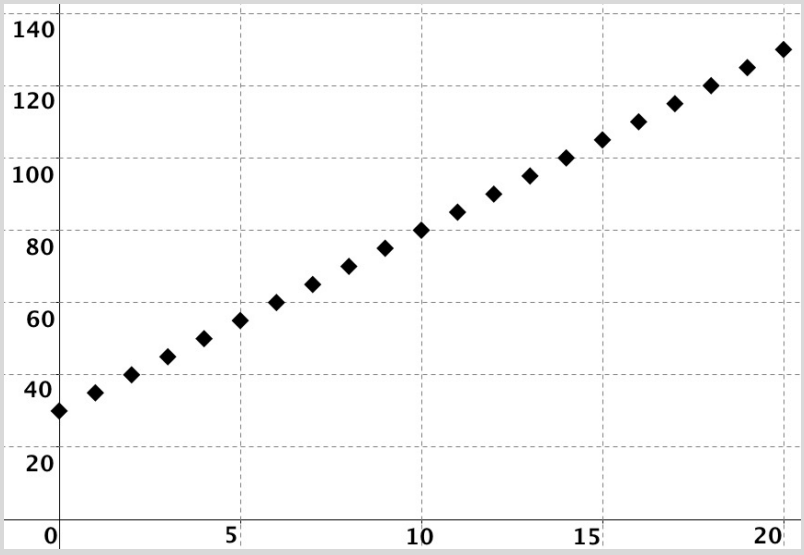


Imagen 9: Gráfica que describe los ahorros de Andrea

Joan: Los ahorros de Joan se pueden describir mediante la siguiente expresión algebraica:

y=300-5x,

siendo *x* el número de semanas e *y* los ahorros en euros.

El problema que proponemos a partir de estos datos es que el alumno tenga que escoger su representación preferida de los ahorros y tenga que traducir todo el resto a este lenguaje. Es decir, que cambie la representación de los datos. Una vez hecho esto, querremos que compare los diferentes ahorros entre las cuatro personas.

3.4 Modelizar

Para trabajar las diferentes fases del proceso de modelización podemos estudiar la relación existente entre la frecuencia del sonido obtenido tocando una cuerda de una guitarra y la longitud de la misma. La relación entre estas dos variables es de proporcionalidad inversa y, concretamente, si llamamos *L* a la longitud de la cuerda, y *F* a la frecuencia, tenemos que

F=K/L

siendo *K* una constante que depende de la cuerda particular. Podemos usar esta idea en el aula midiendo la frecuencia con cualquier medidor digital (por ejemplo, usando una aplicación para teléfono móvil) y viendo cómo varía la frecuencia en función de dónde estemos pulsando la cuerda de la guitarra. Así los alumnos podrán acabar encontrando la relación anterior con una cuerda concreta. Luego les podríamos pedir que, ya sin usar el medidor de frecuencias digitales, hagan el mismo proceso con otra cuerda y que representen la información que relaciona frecuencia y longitud de forma verbal, gráficamente, en una tabla de valores y también a través de una expresión algebraica. Solo habrá que darles un dato, por

ejemplo, la frecuencia que corresponde a la cuerda de la guitarra al sonar suelta. En la imagen 10 podemos ver el resultado de esta tarea planteada en una clase de 2º de ESO. Es en esta parte del experimento donde el profesor tiene la oportunidad de convencer a los alumnos del interés que tiene el uso de este modelo matemático, en el momento en que gracias a las matemáticas podemos estudiar el fenómeno sin tener que repetir el experimento.

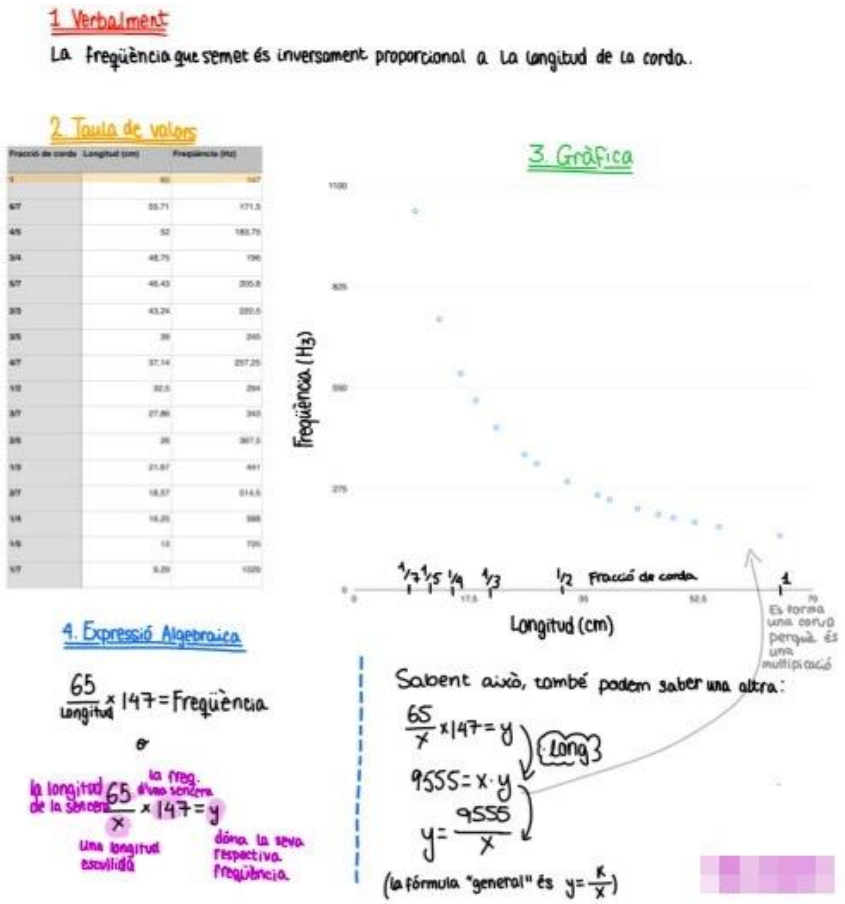


Imagen 10: Diferentes representaciones de la relación entre la longitud de una cuerda de una guitarra y la frecuencia que emite al tocarla

Si consideramos ahora la familia de rectángulos que tienen área K cm^2 (rectángulos equivalentes) podemos estudiar la relación entre la base (*b*) y la altura (*a*) de estos rectángulos. Obtenemos así la siguiente relación:

$a=K/b$

En la imagen 11 vemos la representación gráfica que se hizo implementando esta actividad en la misma aula de 2º de ESO en la que se demandó el trabajo que hemos mostrado anteriormente, siendo el área 36 cm^2.

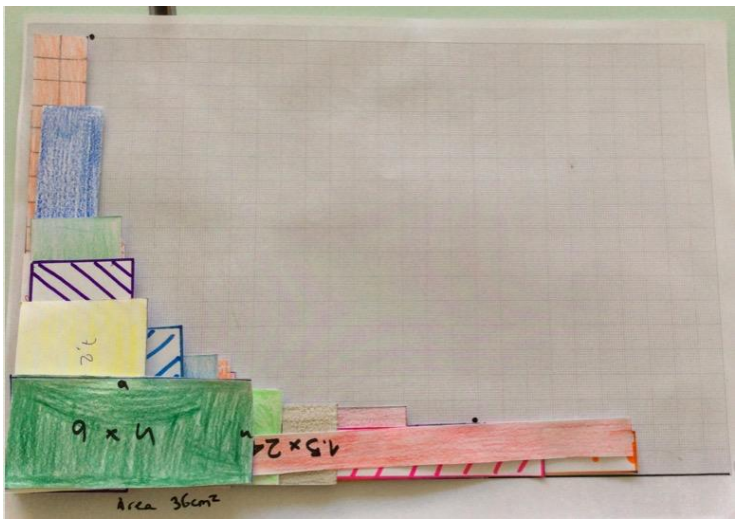


Imagen 11: Rectángulos equivalentes

Por último, dentro de un contexto tradicional de una clase de Tecnología (o en la propia aula de Matemáticas) se podría hablar de la ley de Ohm:

$V=I\cdot R$

dónde *I* es la intesidad de la corriente (cantidad de electrones que circulan en un punto por unidad de tiempo), *R* es la resistencia de los materiales que forman parte del circuito y *V* es el voltaje que proporciona la fuente de energía. Nótese que, manteniendo constante el voltaje V, las variables I y R son inversamente proporcionales. Entonces, si en un enchufe que proporciona un voltaje constante de 220V, ¿qué pasará si metemos los dedos? Resulta que nuestro cuerpo no ofrece casi ninguna resistencia al circuito, por lo que, si la resistencia tiende a cero, la intensidad tenderá a infinito, produciendo el consecuente chispazo en el cable debido al elevado número de electrones que intentan pasar a través del mismo. De nuevo el estudio de la función de proporcionalidad inversa nos ofrece un buen modelo matemático para hacer este estudio.

Seguro que la gran mayoría de los profesores están convencidos de que el estudio la función de proporcionalidad inversa ($y = k/x$) es importante en clase de

matemáticas, pero todo este recorrido por el proceso de modelización es lo que en realidad dotará de razones a los alumnos para que ellos también crean que es importante estudiar este modelo matemático y permanecer en la abstracción estudiando cómo varía la función según los diferentes valores del parámetro *k* de este modelo funcional.

Conclusiones

En resumen, hemos presentado una propuesta de secuencia de problemas que permiten construir el lenguaje algebraico de manera significativa. Cabe decir que la secuencia no pretende ser única, es una propuesta que cumple una serie de características que también hemos analizado.

Si conseguimos que nuestros alumnos no ignoren el significado de los símbolos que utilizan, conseguiremos también que puedan utilizar este lenguaje como una herramienta apta para comprender y para expresar generalizaciones, captar conexiones estructurales y para argumentar en matemáticas.

En este sentido, lo que queremos es conseguir un equilibrio entre las diferentes concepciones de los símbolos que vayan interiorizando a través de situaciones significativas variadas que ayuden a los alumnos a comprender la pertenencia del lenguaje algebraico, su estructura y el significado de los conceptos fundamentales con el objetivo de que sean capaces de movilizar el conocimiento sobre este lenguaje para resolver problemas.

Referencias

Abrantes, P. (1996). El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, nº 8, 7-18.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1998). *Matemáticas ESO. Guías Praxis para el profesorado.* Praxis, Barcelona.

de la Fuente, A. (2016). *Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas: el rol del conocimiento del profesor*. Tesis Doctoral, UAB.

de la Fuente, A. (2022). Aprender a usar el álgebra en secundaria mediante la resolución de problemas. *Suma,* nº 99.

de la Fuente, A. y Deulofeu, J. (2022). Uso de las conexiones entre representaciones por parte del profesor en la construcción del lenguaje algebraico. Bolema, 72.

de la Fuente, A.; Deulofeu, J., y Rowland, T. (2016). Conectar lenguajes para resolver ecuaciones. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, nº 74, 68-73.

de la Fuente, A.; Rowland, T. y Deulofeu, J. (2016). Developing algebraic language in a problem solving environment: the role of teacher knowledge. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics.* Volume 36 Number 1, Manchester.

Kaput, J. (2000). *Teaching and learning a new algebra with understanding.* University of Massachussets-Dartmouth.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? En Kaput, J.; Carraher, D.W. y Blanton, M.L. (2008), *Algebra in the Early Grades (pp.5-18).* Lawrence Erlbaum Associates: New York.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grows (Ed.), *Handbook of Investigation on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: what is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), pp. 139-151.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. *Reston, Va.* NCTM. Traducción: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Principios y estándares para la Educación Matemática (2003). Traductor: Manuel Fernández Reyes.

Mason, J. y Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: the importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics*, 38, pp. 135-161. Kluwer Academic Publishers.

Rowland, T.; Turner, F.; Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching: reflecting on practice with the Knowledge Quartet.* SAGE Publications Ltd, Singapure.

Schoenfeld, A.H. y Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher.* Septembre 1988, pp. 420-427.

Solar, H.; Deulofeu, J. y Azcárate, C. (2015). Competencia de modelización en interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las ciencias,* 33.2, pp. 191-210.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. In A.F. Coxford y A.P. Shulte (Eds.). *The ideas of algebra, K-12* (1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

TaP026 Pensamiento computacional con SNAP!

Enric Castellà Carlos
ecaste56@xtec.cat
CESIRE
Raül Fernández Hernández
rferna63@xtec.cat
Institut Vidreres

Arnau Sánchez Farreras
asanch92@xtec.cat
Institut Caterina Albert

Núcleo temático: Procesos y Conexiones

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

Con la entrada de los nuevos currículums, vemos que el pensamiento computacional jugará un gran papel en la educación matemática. En este taller pretendemos mostrar una parte de este pensamiento computacional, en particular trabajaremos la programación por bloques en unos ejemplos válidos desde los últimos cursos de primaria como en toda la educación secundaria. Se empezará con unos ejemplos básicos, tanto para presentar la plataforma, como para familiarizarse con los bloques de programación, para acabar con algunos retos a nivel de secundaria e incluso a nivel de bachillerato.

Palabras clave: Pensamiento Computacional, Programación por Bloques, Snap!

1. Actividad inicial - Construcción de polígonos regulares

Objetivos matemáticos: Hacer un estudio exhaustivo de los polígonos regulares.

Objetivos de programación:

- Uso de las herramientas de dibujo

- Introducción al uso de variables
- Depuración y optimización: Iterados
- Entrada de datos por parte del usuario

1.2 Descripción de la práctica

El programa final pedirá al usuario que introduzca de cuantos lados quiere que dibuje el polígono regular. A continuación, el programa dibuja (usando el máximo tamaño de pantalla posible) el polígono pedido. A continuación, dará algunas características importantes de ese polígono. Esta actividad está ubicada al final de 1º de ESO, y pensada no como complemento del tema de los polígonos regulares, la intención es que aprendan los polígonos a través de la actividad, sin necesidad de dar una clase “teórica” previa.

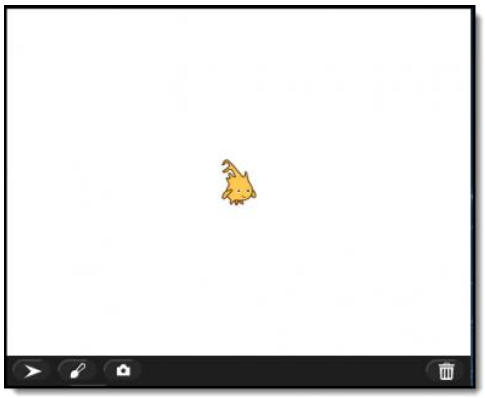
1.3 Objeto principal

Podríamos usar el objeto por defecto, la *tortuga*, pero un personaje no simétrico nos será útil más adelante. Por ejemplo usaremos este personaje, que es el personaje insignia del programa Snap!.

Para importar un disfraz en Snap!:menú de fichero→Disfraces

Como este vestido es demasiado grande, lo redimensionaremos, por ejemplo, al 40%

Los bloques se pueden ejecutar directamente, desde el cajón de bloques (con doble clic), o bien se puede arrastrar hasta el área de programación del objeto. Para tener controlados todos los cambios que vayamos haciendo, lo mejor es arrastrarlos en el área correspondiente. Una vez arrastrado, podemos hacer doble-clic para ver el resultado.



1.4 Herramientas de dibujo

Os presentamos las herramientas de dibujo. Todas ellas están clasificadas en el mismo cajón y representadas con el mismo color de fondo. Para empezar, usaremos estas tres más básicas.

- **borrar:** Limpia el escenario y cualquier rastro que haya dejado el lápiz antes.
- **bajar lápiz:** En el momento en el que bajamos el lápiz, siempre que el objeto se mueva, dejará impreso en el escenario el rastro por dónde pasa.
- **subir lápiz:** Ahora ya no deja el rastro por donde pasa.

1.5 Dibuja un cuadrado

Una vez los alumnos ya están acostumbrados al uso de los bloques de movimiento (por ensayo y error), les decimos que usando únicamente estos dos tipos de bloques (y los de dibujo), tienen que dibujar un cuadrado.

Inicialmente no daremos más pistas, como mucho podemos escenificar y hacer ver que nosotros somos el personaje, y nos iremos moviendo por el aula dibujando un cuadrado en el suelo, marcando los movimientos al más puro estilo robótico. Después de algunos intentos de ensayo y encierro, la mayoría debería llegar a un código parecido a éste:

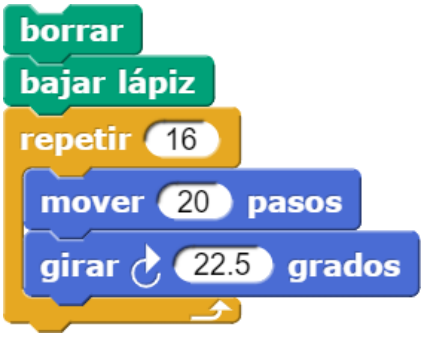
De momento, no nos preocuparemos del tamaño del cuadrado. Nos estamos refiriendo a estos *100 pasos.* Recordemos que nuestro objetivo es dibujar los

polígonos más grandes que quepan en el escenario. 100 es un buen número de partida.

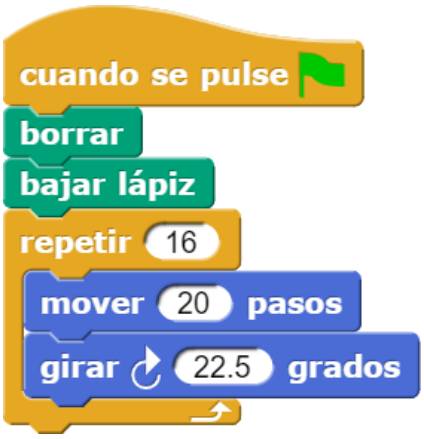
1.6 Mejoramos el código

Si bien el código es correcto, también diremos que es mejorable, no tanto en la velocidad de ejecución, sino en que podemos hacer el código más entendible. Por ejemplo, si pedimos qué hace este código:

¿Y este? Mucho mejor, ¿no?



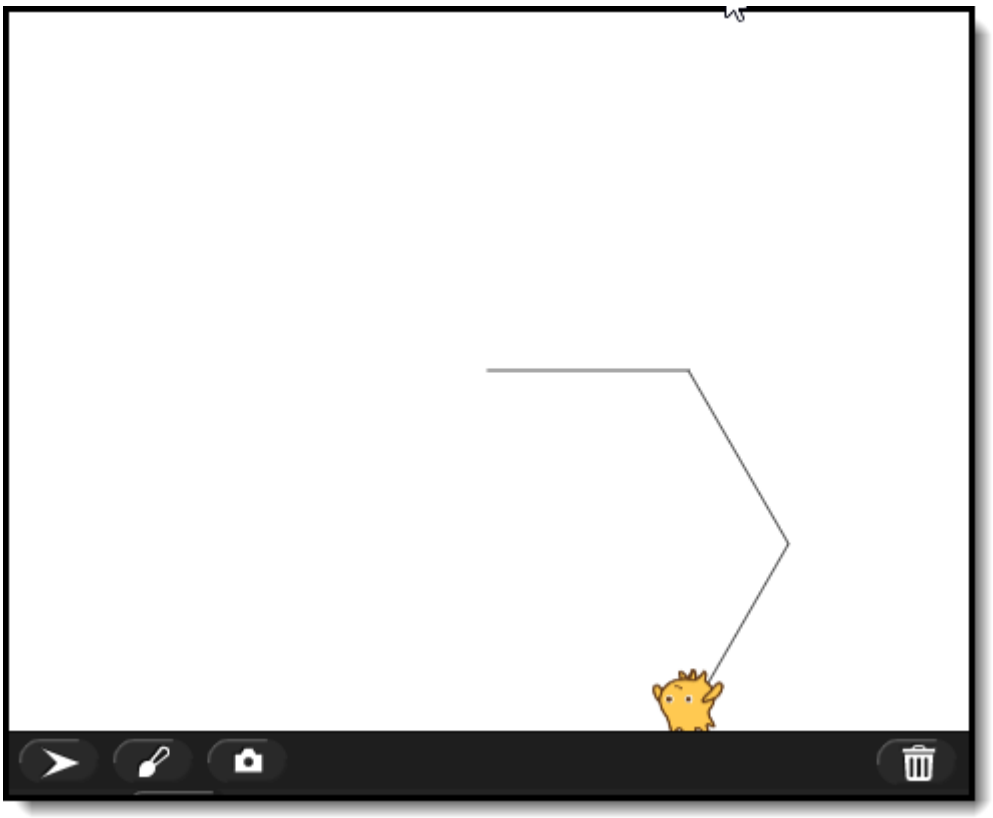
En este momento podemos introducir algunos bloques iterativos, que se encuentran en el cajón de Control. Aprovechamos para añadir el bloque inicial “cuando se pulse bandera verde”, para que así se pueda ejecutar el código “desde fuera”. El código revisado para el cuadrado quedaría así:



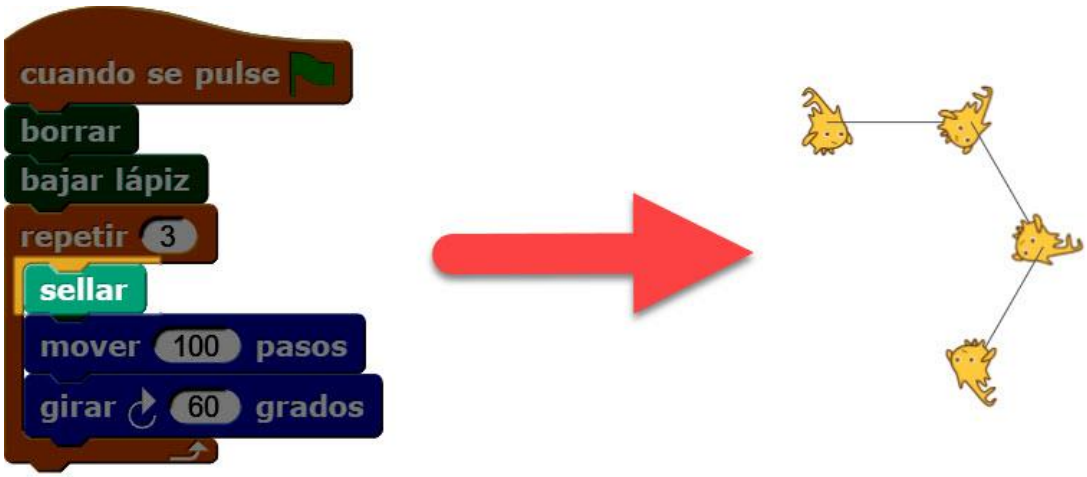
1.7 Dibujamos otros polígonos

¿Puede que os hayáis preguntado por qué hemos empezado por el cuadrado y no por el triángulo? La respuesta en breve, sólo tenéis que pedir a los alumnos que ahora dibujen un triángulo (equilátero, claro). Lo más seguro es que hagan esto:

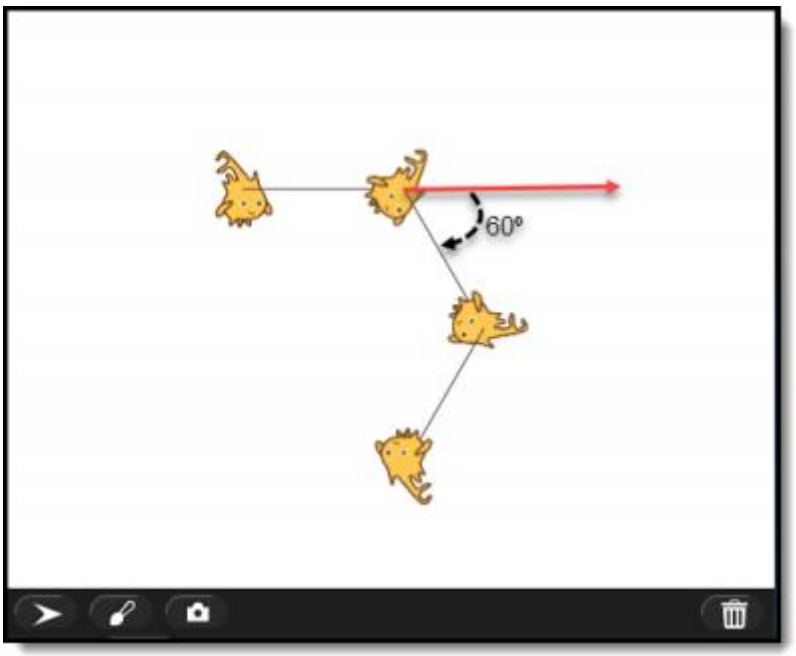
La gracia de “resolver” problemas con Snap! es que no hace falta que le digamos al alumno si está bien o mal, tan solo tienen que ejecutarlo para que vean que tiene un error, y con un poco de suerte, encuentren la solución correcta.



¿Cuál es el error? Para ver más detenidamente qué está pasando, pondremos un bloque “sellar” antes de moverse los 100 pasos



Por si aún no ven dónde están esos 60º…



Ara que ya tenemos claro que el ángulo de giro coincide con el ángulo exterior del polígono, queda claro que tenemos que usar el suplementario de 60º, es decir, 120º

1.8 Generalizamos

Ahora ya estamos en condiciones de dibujar cualquier polígono de n lados.

NOTA: Esta variable “n” se tiene que introducir con cuidado. Recordemos que estamos en 1º de la ESO y probablemente, el concepto de “variable” o generalización de patrones puede que no esté asumido. En cualquier caso, una buena manera de introducir el concepto de variable, es haciéndolo a través de la programación.

En este punto podemos pedir, de manera secuencial los polígonos de 5, 6, 7 o más lados. De manera que vean que no es práctico tener que cambiar el número en todos los sitios donde aparece, es decir, se le crea la necesidad de usar alguna cosa como una variable.

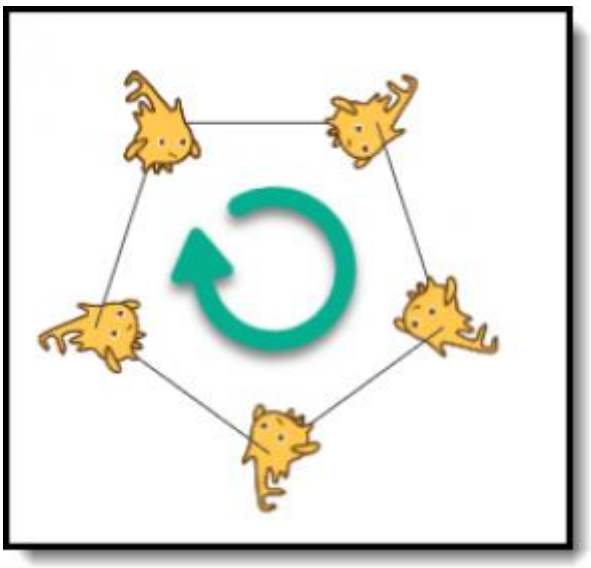
Las variables y sus funciones relacionadas las tenemos en el cajón “variables”. Creamos una nueva variable llamada “lados”:

Y ahora modificaremos el código convenientemente para que, inicialmente, asignemos un valor a la variable, y luego tome esa variable en los diferentes sitios dónde se usa.

Aquí surge un mini-reto: ¿Qué ángulo ponemos? Hasta ahora hemos estado calculando el ángulo de giro con la calculadora (o a mano) ...Se pueden buscar diferentes estrategias, basándonos en los ángulos internos, subdividiendo en (n-2) triángulos los ángulos de los cuales suman 180º…

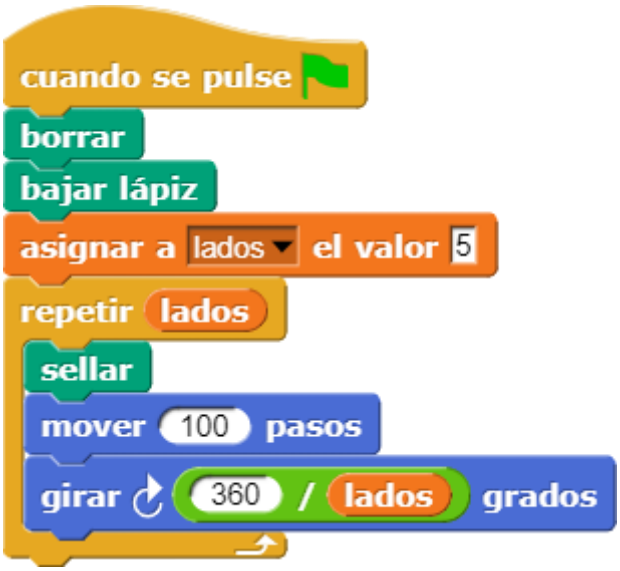
Aprovechando la simulación que nos brinda el entorno de programación y usando el bloque “sello”, proponemos otra solución:

Se hacemos un seguimiento de todo el recorrido que hace nuestro amigo Alonzo, vemos que desde que sale hasta que vuelve al inicio, acaba haciendo un giro de 360º sobre sí mismo, y este giro lo hace en **n** tramos, así deducimos que en cada tramo (**n**) tiene que girar 360º/n.



¡Pero esperad! No tenemos que hacer el cálculo cada vez, estamos en un entorno de programación, que hace los cálculos por nosotros.

Vamos al cajón de operadores (en verde) y elegimos los adecuados para hacer la operación requerida:

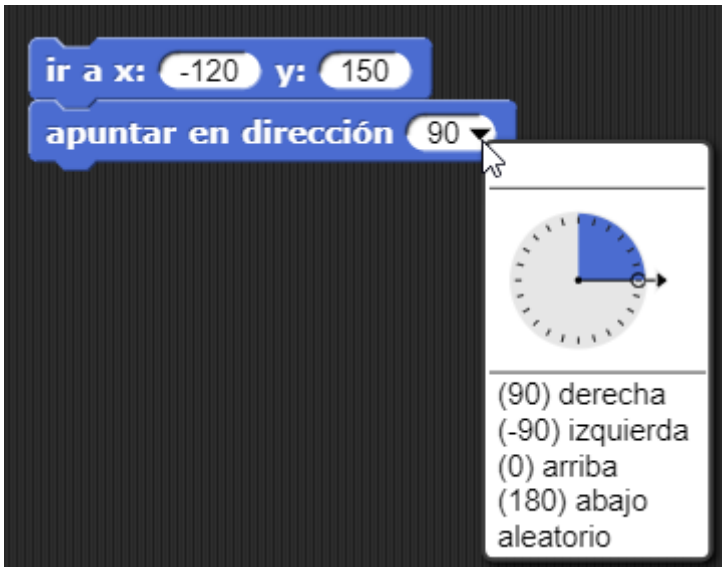


1.9 Últimos retoques

Ahora lo que queremos es dibujar los polígonos usando el máximo espacio posible que nos permita el escenario, que por defecto es de 480x360 píxeles. Para hacernos una idea, cada “paso” que hace el objeto equivale a un píxel.

NOTA: Snap! permite cambiar las medidas del escenario, por si en algún momento se quiere hacer algún tipo de programa que requiera de más precisión de dibujo.

Lo primero que haremos será posicionar el personaje en unas coordenadas que nos permita aprovechar el escenario. Snap! sitúa el origen de coordenadas en el centro del escenario. Así, el dominio del escenario por defecto será [240,240] x [-180,180]. Por ejemplo, situaremos el personaje en el punto (x,y)=(-120,150), esto se hace mediante los bloques:



De paso, haremos que mire hacia la derecha (90º).

El mini-reto es buscar una expresión, que dependa de **n**, de manera que cuando aumente n, la distancia a moverse disminuya. Después de varios intentos, "deducen" que la distancia a recorrer es inversamente proporcional al número de lados.

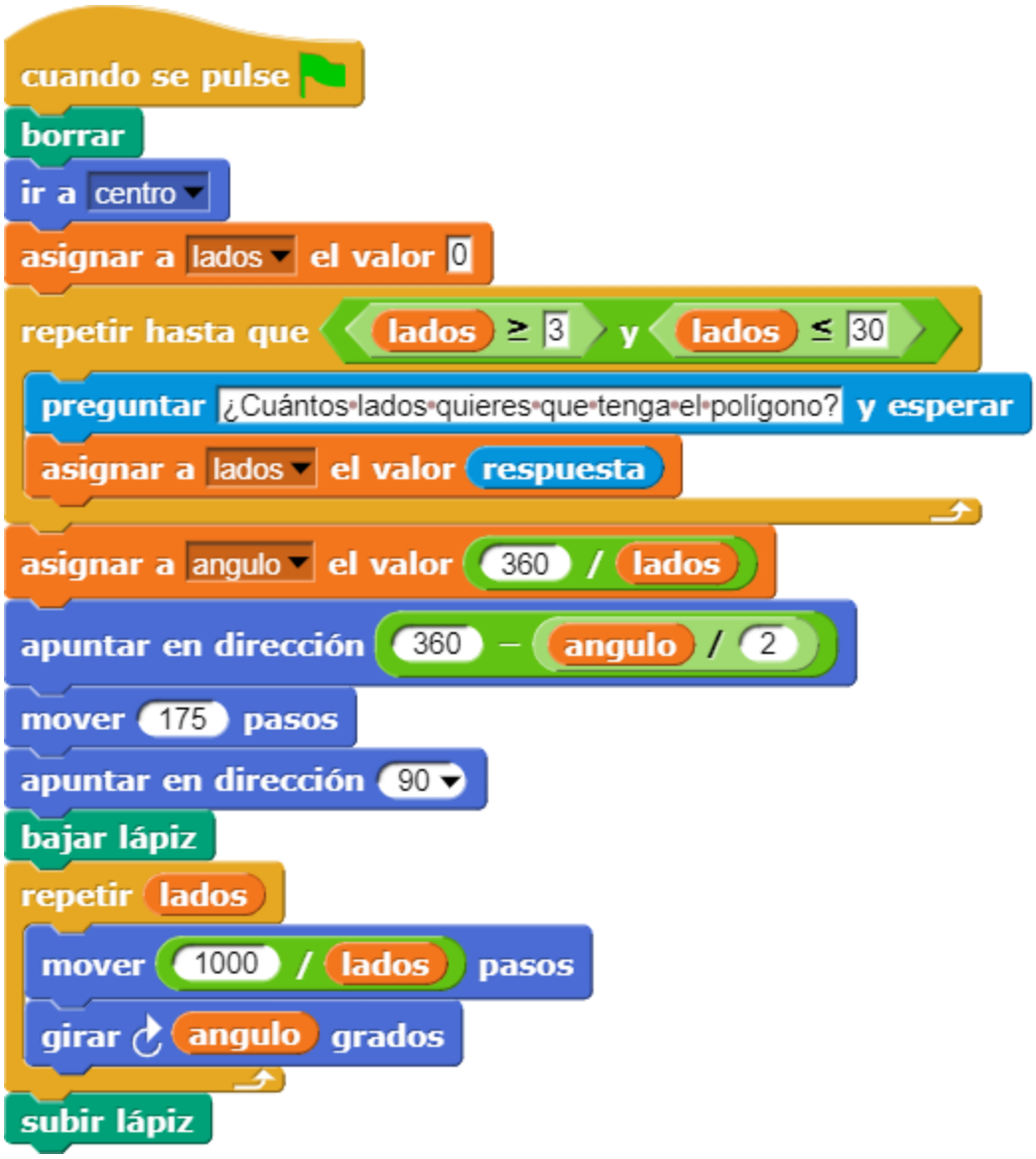
Como cuando dibujamos el cuadrado con 100 pasos ya era una medida bastante acertada, proponemos usar la fórmula: 800/n. Luego, por ensayo y error, podemos afinar la función poniendo 1000/n.

NOTA: Como propuesta de techo alto, podemos mejorar este cálculo, que pasa por calcular el radio de cada polígono (en función de n), y centrando el polígono en el origen, haríamos que r<180.

1.10 propuestas de mejora y ampliaciones

- Pedir al usuario que introduzca, por teclado, el número de lados que quiere dibujar el polígono. También se puede verificar que lo que introduce el usuario sea un número y que esté entre 3 y 20, por ejemplo.
- Que una vez calculado el polígono escriba en pantalla (o muestre una variable) algunas características del polígono, como por ejemplo los ángulos internos, el número de triángulos en los que se puede dividir, incluso alguna cosa relacionada con sus medidas.
- Otros tipos de construcciones basándose en el programa inicial:
    - Dibujar espirales siguiendo un polígono, cambiando de color, incluso de polígono.
    - Dibujar polígonos estrellados (Buen contenido matemático)
    - Hacer mandalas, dibujando polígonos de colores alrededor de una circunferencia….

El código final podría ser una cosa parecida a ésta:



2. Retos numéricos

Como actividad extra, por si alguno de los presentes al taller acaba antes, o ya conoce la práctica inicial, proponemos algunos retos numéricos, extraídos de la web ProjectEuler.net

La web es simple, tienes que registrarte pero no pide correo ni nada, solo usuario y una contraseña. Una vez hecho el login, tienes la opción de probar una colusión, y te dirá si es correcta o no.

2.1 Suma de los múltiplos de 3 o de 5

Empecemos por el primer reto de la web: Problem 1

If we list all the natural numbers below 10 that are multiples of 3 or 5, we get 3, 5, 6 and 9. The sum of these multiples is 23. Find the sum of all the multiples of 3 or 5 below 1000.

Por lo tanto, nos piden que dado un número cualquiera, hagamos un listado de todos los números menores que el dado, que sean o bien divisibles por 3 o bien divisibles por 5. Una vez hecho esto, nos piden que los sumemos (Esta última operación la piden para poder hacer una comprobación rápida de que lo hemos hecho bien).

SOLUCIÓN:

https://snap.berkeley.edu/snap/snap.html#present:Username=creamat&ProjectName=PE_Multiples3o5&editMode&noRun

2.2 Suma de los números de Fibonacci pares

El segundo reto dice:

Each new term in the Fibonacci sequence is generated by adding the previous two terms. By starting with 1 and 2, the first 10 terms will be:

1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,...

By considering the terms in the Fibonacci sequence whose values do not exceed four million, find the sum of the even-valued terms.

En este reto, nos definen la sucesión de Fibonacci. El reto pide que sumemos todos los términos pares (múltiplos de 2) más pequeños que 4 millones.

SOLUCIÓN:

https://snap.berkeley.edu/snap/snap.html#present:Username=creamat&ProjectName=PE_FibonacciSuma&editMode&noRun

2.3 Factor primo mayor

El tercer reto dice:

The prime factors of 13195 are 5, 7, 13 and 29. What is the largest prime factor of the number 600851475143 ?

Aquí nos piden que encontremos el factor primo más grande de un número dado. Por ejemplo, si nos dieran el número **13195=5·7·7·13·29** la respuesta sería **29.**

Pues bien, nos piden que hagamos eso con el número **600851475143**.

SOLUCIÓN:

https://snap.berkeley.edu/snap/snap.html#present:Username=creamat&ProjectName=PE_FactorsPrimers&editMode&noRun

2.4 Palíndromos

Acabaremos esta sección con la cuarta propuesta de la web:

A palindromic number reads the same both ways. The largest palindrome made from the product of two 2-digit numbers is 9009 = 91 × 99. Find the largest palindrome made from the product of two 3-digit numbers.

Es decir, nos muestran que el número capicúa más grande que podemos encontrar multiplicando dos números de 2 cifras es 9009=91 x 99

Ahora el reto consiste en hacer esto mismo multiplicando dos números de 3 cifras.

SOLUCIÓN:

https://snap.berkeley.edu/snap/snap.html#present:Username=creamat&ProjectName=PE_Palindrom&editMode&noRun

Referencias

Harvey, B y Mönig,J. (29 de abril de 2022) *Snap!* https://snap.berkeley.edu/

Harvey, B y Mönig,J.(2022) *SNAP! Reference Manual* [Archivo PDF] https://snap.berkeley.edu/snap/help/SnapManual.pdf

Project Euler (29 de abril de 2022) https://projecteuler.net/

TaP035 El aprendizaje basado en juegos (ABJ) en el aula de Matemáticas

Mª de los Reyes Gallardo Gutiérrez
reyesgallardo@yahoo.es
IES Antonio Domínguez Ortiz (Sevilla)
Ana María Martín Carballo
ammarcar@upo.es
Universidad Pablo de Olavide (Sevilla)

Núcleo temático: procesos, conexiones, recursos para el aula, formación del profesorado

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (MAES).

RESUMEN

Es una realidad que el uso del juego en el aula no solo es estimulante para el alumnado, sino que permite desarrollar aprendizajes muy diversos según la finalidad con la que se seleccionen. El objetivo de este taller es presentar una serie de juegos que pueden ser útiles en la enseñanza de las matemáticas, por el análisis de sus algoritmos, por sus componentes o el simple juego en sí mismo por el diseño de origen. Además se propondrán diferentes metodologías de incorporación de los mismos así como formas de evaluar su uso acorde al currículo de matemáticas, y las dificultades encontradas en el empleo de los mismos y cómo subsanarlas.

Palabras clave: Aprendizaje Basado en Juegos, Matemáticas. Juegos

1. Introducción y justificación

En el contexto educativo actual de uso por parte del alumnado de multitud de aplicaciones que proponen retos compartidos, intercambios de experiencias simultáneas y juegos en red, el sistema tradicional de clase se debe plantear cómo

provocar el “engagement” necesario para producir un aprendizaje significativo a la vez que atractivo.

Es como respuesta a este reto cuando se potencia el uso de la gamificación, el aprendizaje basado en juegos y el uso de “serious games” en el aula. Existe como apuntan Albertazzi y otros (2018) una relación directa entre la motivación y el éxito en el aprendizaje.

La introducción de esta metodología puede cambiar las reglas estrictas de una escuela tradicional, afectando a las experiencias emocionales de los estudiantes, su sentido de identidad y su posicionamiento social (Lee&Hammer, 2009). En definitiva, el empleo de juegos en el aula de secundaria y bachillerato se presenta como una propuesta en la que el docente guía y suministra herramientas, frente al alumno/a que consigue desarrollarse a través del compromiso consiguiendo lo mejor de sí mismos en la búsqueda de aprendizajes. Existen evidencias que han mostrado un impacto positivo en la educación pero tal y como indican Lee&Hammer (2009) y aunque se han mejorado sus posibilidades, la selección de juegos, el diseño de las sesiones, la evaluación, etc debe ser cuidadosa para que respondan a retos reales. Retos que a su vez cubran el currículo y permitan el desarrollo de las funciones ejecutivas, las competencias clave y los bloques de contenidos.

Para que las sesiones de aprendizaje basado en juegos sean efectivas debemos tener en cuenta, como proponen Lee&Hammer (2011) para la gamificación, tres áreas importantes: cognitiva, emocional y social.

En estas sesiones el alumnado tomará un papel activo con una dinámica clara en la que existen tareas a desarrollar, recompensas a corto, medio y largo plazo.

El uso de juegos por tanto mantiene al alumnado comprometido con su proceso de aprendizaje que se gradúa en dificultad hasta alcanzar el objetivo final (Kooster, 2004). Los juegos permiten a los jugadores mostrar diferentes habilidades y roles que en un sistema tradicional pueden quedar ocultos tras la metodología pasiva del alumnado en el aula. (Squire, 2006; Gee, 2008). Es por ello que la introducción de juegos en el aula puede romper con la idea del alumnado inadaptado al sistema educativo, el cual percibe habitualmente que no puede“hacer

escuela" (Pope, 2003). Es decir, la introducción del juego permite desarrollar el potencial del alumnado mejorando su autoconcepto con lo que ello supone a nivel académico y personal (Lee & Hammer, 2011).

Bajo esta necesidad de adaptar las escuelas,es sobre la que hemos trabajado para introducir un conjunto de juegos vinculados con las matemáticas que desarrollan diferentes capacidades en el alumnado además del propio currículo.

2. Tipologías de juegos y sus usos.

Dentro del ABJ podemos diferenciar los juegos según el uso que hagamos de los mismos. Nos encontraremos por tanto con tres posibilidades: podremos usar y hacer un análisis del algoritmo del juego, jugaremos el juego en sí mismo para extraer un aprendizaje, o jugaremos a los denominados "serious games".

Según la finalidad con la que empleemos el juego en el aula. Estos podrán emplearse en el aula como un sistema de detección de ideas previas, durante el desarrollo de contenidos o como cierre o conclusión de una unidad.

La gran versatilidad de juegos nos permitirá seleccionar el adecuado, aunque se recomienda tener en cuenta una serie de criterios como pueden ser:

-Funciones ejecutivas que se quieran desarrollar

-Competencias a desarrollar

-Contenidos del currículo

-Que posea reglas sencillas y adaptables

-Que integre todos los perfiles de jugadores o simultanearse con juegos que presenten otros perfiles de jugadores.

-Que no sean predecibles los resultados para mantener la motivación.

-Presenten una duración adecuada a la finalidad para la que se emplean.

3. ¿A qué jugaremos?

Existe una gran diversidad de juegos que se pueden emplear en el aula, pero nos centraremos en aquellos que por su contenido en matemáticas, durabilidad y versatilidad pueden ser jugados en pocas sesiones.

Estos serán:

Dobble (Editorial Asmodee): Juego de cartas de corta duración, en el que deshacerse de cartas o conseguirlas son dos de las muchas posibilidades que tiene el juego. Esconde una intersección de espacios que permite su uso en niveles superiores de bachillerato.

Código 13+4 (Editorial HABA) Es un juego de tablero con reglas sencillas con el que trabajar las operaciones con números naturales, al que se le pueden añadir tantas modificaciones como sean necesarias para aumentar su complejidad simplemente modificando los dados base.

Fanstasma Blitz (Editorial Devir): Juego de cartas y figuras en el que la rapidez visual así como el concepto de conjunto vacío son claves para ganar.

SET (Devir): Juego de cartas de rapidez visual, intersección y unión de conjuntos.

Swish (Editorial Thinkfun): Juego de cartas de rapidez visual en el que los lugares geométricos y sus coincidencias y complementariedad permiten analizar los tipos de simetrías, las matrices, etc…

4. ¿Qué haremos con los juegos?

Desarrollaremos y analizaremos las potencialidades de cada uno de los juegos, jugando a los mismo e intercambiando experiencias.

El análisis se realizará tanto desde el punto de vista de su integración en el aula, sus posibles modificaciones y fundamentalmente su potencial matemático. Sin pasar por alto las diversas funciones ejecutivas que desarrolla, competencias y contenidos. Para ello contaremos con una ficha de análisis.

La evaluación es necesaria en el empleo de esta metodología, se emplearán propuestas de evaluación mediante fichas, rúbricas, y otros instrumentos de evaluación aplicados a los diversos juegos a partir de los estándares que marca la legislación educativa actual.

5. Conclusión

Tras el uso del ABJ se identifica la mejora del aprendizaje debido a la combinación de diversión y objetivos de aprendizaje, mayor actividad y mejores resultados del alumnado, un feedback instantáneo, un mejor ambiente de aprendizaje y su capacidad para favorecer los cambios de conducta.

Pueden presentarse dificultades debidas al cambio metodológico, a las diferencias en el sistema de evaluación o en la desmotivación derivada del error en el uso del juego.

Referencias

Albertazzi, D., Ferreira, M. G. G., y Forcellini, F. A. (2018). *A Wide View on Gamification.* Technology, Knowledge and Learning, (July). https://doi.org/10.1007/s10758-018-9374-z

Koster (2004). *A theory of fun. Paraglyph Press*. New York, NY.

Lee, J. J. y Hammer, J. (2009). *Gamification in Education: What, How, Why Bother?* Encyclopedia of Library and Information Sciences, Third Edition, 15(2), 2797–2803. https://doi.org/10.1081/E-ELIS3-120043942

TaP036 Matemáticas en el tablero

María Alicia Hernández Fernández
mariaalicia.hernandez@murciaeduca.es

Núcleo temático: procesos y recursos para el aula

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria

RESUMEN

El presente taller consiste en una serie de juegos inspirados en el ajedrez que pretenden trabajar los contenidos del currículo del área de Matemáticas en el tablero de ajedrez.

Los diferentes juegos de invención propia hacen uso de diferentes recursos manipulativos propiamente utilizados en el área de Matemáticas, debido a la importancia de la manipulación en el área para la comprensión de los contenidos matemáticos.

El objetivo principal de los juegos es el desarrollo de las competencias básicas por parte del alumnado y la comprensión y puesta en práctica de los contenidos matemáticos. Todo ello, buscando el carácter lúdico de la enseñanza para aumentar la motivación de nuestro alumnado de Educación Primaria.

Palabras clave: Matemáticas, Manipulación, Ajedrez, Juegos

1. INTRODUCCIÓN

El presente taller muestra una serie de juegos de elaboración propia que relacionan el ajedrez con los distintos contenidos matemáticos del currículo. A su vez, cada juego utiliza una serie de recursos manipulativos propios del área de Matemáticas.

Con estos juegos se pretende que el alumnado adquiera los contenidos del currículo de una forma lúdica, utilizando el ajedrez como recurso estrella.

A continuación expongo los recursos necesarios para la realización del taller.

2. RECURSOS

Los recursos son de dos tipos diferenciados. Por un lado, se necesitarán recursos específicos para el ajedrez como son los tableros y las piezas y el reloj.

Por otro lado, se necesitan recursos manipulativos propios del área de Matemáticas porque como indica Albarracín (2018), sirven para que el alumnado disponga de "imágenes mentales" de los conceptos matemáticos, siendo necesaria su variedad para la abstracción.

Los recursos utilizados en los juegos matemáticos en el tablero son los que se presentan a continuación:

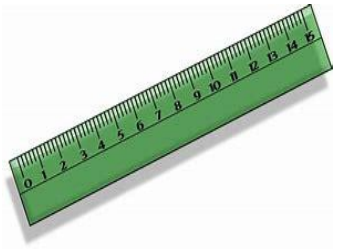
RECURSOS MATEMÁTICOS
 Imagen 1: regla
Imagen 2: Mapas y planos

Imagen 3: círculo de fracciones

Imagen 4: fichas de parchís

Imagen 5: monedas y billetes

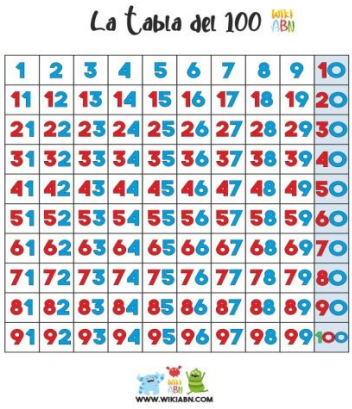


Imagen 6: la tabla del 100

Imagen 7: tabla pitagórica de la multiplicación

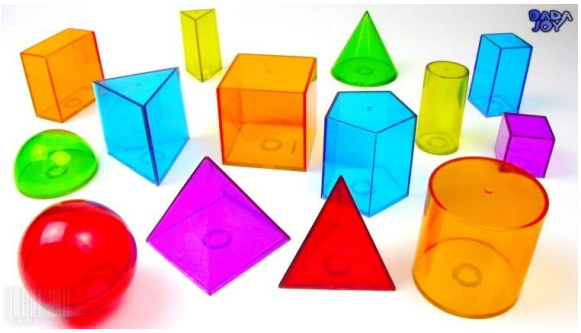


Imagen 8: figuras en 3D

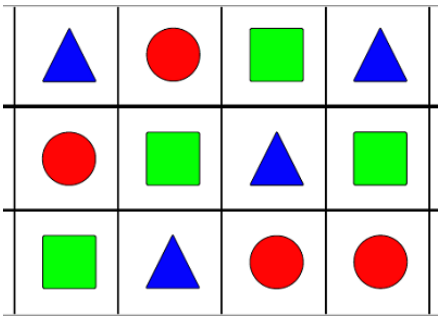


Imagen 9: figuras planas

Una vez explicados los recursos procederé a explicar los diferentes juegos propuestos.

3. JUEGOS EN EL TABLERO

Los diferentes juegos están inspirados en los juegos basados en el ajedrez de Sonia Gil, campeona de España de Ajedrez y como fuente para el aprendizaje del ajedrez he consultado el libro de Gil y Sánchez (2022).

Los juegos elaborados son los que muestro en las próximas tablas expositivas.

LEO LEO
Este juego está basado en “Los ratones contra el gato” de Sonia Gil. La diferencia entre ambos es el tablero, debido a que el mismo contendrá diferentes números en sus casillas. Cada vez que una pieza se sitúe en una casilla donde aparece un número, el alumno deberá leerlo correctamente. En casa contrario, deberá volver a la casilla del principio.
RECURSOS: juego de ajedrez, tabla del 100 y/o tablero con números. **CONTENIDOS:** Lectura de números
ADAPTACIÓN: Se puede utilizar un tablero con la tabla del 100 para primero de primaria o un tablero creado con otros números superiores, en función del nivel. Incluso para infantil se podrá incluir los números hasta el 10 o posteriores.

SUMA Y RESTA. BLANCA Y NEGRA
El juego consiste en realizar una carrera de peones o una partida completa de ajedrez. Partiendo de un número dado por el profesor, el alumnado por cada ficha capturada debe de ir sumando o restando una secuencia numérica establecida. Gana el jugador que primero consiga llegar a un número determinado por el profesor.

RECURSOS: juego de ajedrez

CONTENIDOS:

- cálculo mental

- secuencias numéricas ascendentes y descendentes

- suma y resta

ADAPTACIÓN:

En el caso de la carrera de peones, hay que considerar que hay 16 piezas en el tablero para poder dar las instrucciones adecuadamente. Las secuencias numéricas irán aumentando de complejidad según los cursos. En el primer curso de primaria empezaríamos con secuencias de 2 en 2, de 10 en 10, etc. En niveles superiores podríamos trabajarlas de 100 en 100, de 50 en 50, etc.

Ahora bien, en el caso de ser una partida de ajedrez completa podríamos aumentar la complejidad dando diferentes valores a cada pieza. Por ejemplo, la captura del caballo podría valer 100 puntos y la captura de la torre 50.

LOS SUMOS

Este juego utiliza las multiplicaciones modelo área. El profesor indica la multiplicación y el alumnado debe realizar el cuadrado correspondiente para jugar a los sumos. El ganador debe conseguir que su rey saque del cuadrado al rey del otro oponente, sin llegar a estar nunca los dos reyes juntos.

RECURSOS: juego de ajedrez

CONTENIDOS:

-Las tablas de multiplicar

- Cálculo mental

ADAPTACIÓN:

Es importante recordar que el tablero de ajedrez es de 8x8, por lo tanto, las multiplicaciones propuestas deberán tener un resultado inferior a 49.

No obstante, se pueden utilizar tableros alternativos de 10x10 para poder repasar todas las tablas de multiplicar.

CAMINO MINADO

Los dos reyes se sitúan en esquinas opuestas. Cada rey debe superar el camino sin caer en casillas ocupadas por otras piezas. Para ello, cada jugador deberá desplazarse siguiendo las instrucciones de otro compañero, hasta conseguir llegar a la casilla de salida del otro rey oponente. Gana la pareja que primero consiga llegar a la casilla de salida del otro rey.

RECURSOS: juego de ajedrez

CONTENIDOS:

- Itinerarios y croquis

-Coordenadas

ADAPTACIÓN:

Este juego se puede modificar utilizando un plano cuadriculado para la realización de la actividad. Otra variante consiste en jugar indicando coordenadas para avanzar por el tablero.

RATONES CONTRA EL GATO

Un jugador contará con un peón que deberá llegar al lado opuesto del tablero, mientras el otro jugador con tres peones debe intentar cazarlo antes de conseguir su objetivo. A su vez, en el tablero habrá casillas con fichas de parchís. Cuando un peón caiga en una ficha deberá responder adecuadamente a una de las cartas del color de la ficha. En caso de no

acertar deberá volver a llevar su pieza al punto de inicio.

RECURSOS: juego de ajedrez, dados, fichas de parchís y cartas de colores.

CONTENIDOS:

-Lectura de números

-Multiplicaciones

- Divisiones

-Resolución de problemas

ADAPTACIÓN:

Este juego se puede adaptar de muchas formas. Las cartas se corresponderán con los contenidos que interesa trabajar en cada momento. De esta forma, las cartas elaboradas por el profesor pueden responder a problemas, divisiones, multiplicaciones, etc.

MATEDIBUJO

La únicas piezas de este juego son los dos reyes, que tendrán que vagar por el tablero, el cual estará completado con las figuras planas estudiadas en el aula. Para poder ganar, cada jugador deberá conseguir las figuras necesarias para realizar el mismo dibujo-patrón proporcionado por el profesor. Gana el primer rey que consiga todas las figuras necesarias para realizar el dibujo final solicitado.

RECURSOS: juego de ajedrez y figuras planas.

CONTENIDOS:

-Geometría en el plano: triángulo, círculo, circunferencia, cuadrado, rombo, etc.

-Coordenadas

ADAPTACIÓN:

Las figuras utilizadas dependerán de las figuras trabajadas en clase en función del nivel educativo del alumnado.

EL REY EN LA COLINA

Se colocan figuras tridimensionales en el tablero y ambos jugadores deben intentar llegar a la figura determinada por el profesor. Gana el jugador que consiga llegar primero a la figura con su rey.

RECURSOS: juego de ajedrez y figuras 3D

CONTENIDOS:

-Geometría en el espacio: cubo, cono, esfera, prisma, etc.

ADAPTACIÓN:

En función de los conocimientos sobre ajedrez del alumnado este juego se puede realizar con la carrera de peones y rey o todas las piezas de ajedrez. Una variante sería realizar el mismo juego con figuras en el plano.

CUADRADO DE DISTANCIA

La partida comienza dejando una casilla vacía entre pieza y pieza. En el caso de utilizarse todos los tipos de piezas del ajedrez, el alumnado puede elegir las piezas que va a colocar. La regla es que siempre deberán dejar un cuadrado de distancia entre todos y cada una de las piezas. Si algún jugador no respeta

las normas pierde.
RECURSOS: juego de ajedrez y regla **CONTENIDOS:** -Sistema métrico decimal -Medidas arbitrarias
ADAPTACIÓN: El juego varía en función del contenido, si se quiere trabajar el sistema métrico decimal las casillas serán previamente medidas y la distancia a guardar entre piezas quedará determinada en centímetros.

A TODA VELOCIDAD
Consiste en jugar una partida al revés…gana el jugador que antes pierda sus piezas en el menor tiempo posible.

RECURSOS: juego de ajedrez y relojes de ajedrez

CONTENIDOS:

-Lectura de relojes analógicos y digitales

- Conocer y utilizar las unidades de medida del tiempo

ADAPTACIÓN:

Como variante se puede establecer un tiempo breve determinado y cuando se agote el tiempo el jugador que más piezas haya perdido es el ganador.

PARTIDA INCOMPLETA

Jugar una partida con todas las piezas o una carrera de peones donde cada tipo de las piezas utilizadas supongan una fracción del total indicada previamente por el profesor.

RECURSOS: juegos de ajedrez

CONTENIDOS:

-Lectura y representación de fracciones.

ADAPTACIÓN:

En lugar de utilizar las fracciones indicadas por el profesor se les puede facilitar al alumnado tarjetas de fracciones que le indiquen las fracciones a utilizar para cada tipo de pieza, a excepción del rey.

TABLERO MILLONARIO

El tablero se encuentra lleno de monedas y billetes que el alumnado deberá ir consiguiendo durante la partida. Al final, gana el jugador que más dinero ha conseguido.

RECURSOS: juegos de ajedrez, monedas y billetes

CONTENIDOS:

-El dinero, monedas y billetes

-Los números decimales

-Cálculo mental

ADAPTACIÓN:

Este juego se puede realizar con carrera de peones o una partida completa de ajedrez. También se puede jugar por equipos y ganará el equipo que más dinero sume en total.

LA TARTA

El tablero se encuentra lleno tarjetas que indican fracciones. Cada vez que el jugador se sitúe en una casilla con fracción, gana la pieza del juego de

fracciones que se corresponde con el fracción. El objetivo es conseguir completar un círculo de fracciones. El primer jugador que lo consiga será el ganador.
RECURSOS: juegos de ajedrez, círculos de fracciones y reloj (opcional) **CONTENIDOS:** -Lectura y representación de fracciones -Suma de fracciones
ADAPTACIÓN: Este juego se puede realizar con carrera de peones o una partida completa de ajedrez. También se puede jugar por equipos y ganará el equipo que más tartas consiga.

Una vez expuestos los diferentes juegos de la colección, es necesario finalizar destacando la bibliografía que ha hecho posible la elaboración del taller.

4. BIBLIOGRAFÍA

Albarracín, L. (coord.) (2018). *Aprender a enseñar matemáticas en la Educación Primaria.* Síntesis

Gili, S. y Sánchez, E. (2022). *Ajedrez en el aula de Primaria.* Servicio de Publicaciones de la Consejería de Educación de la Región de Murcia

TaP101 Experimentar el aprendizaje - hacer un viaje matemático

Charlie Gilderdale
cfg21@cam.ac.uk
University of Cambridge
NRICH Mathematics Project
Centre for Mathematical Sciences

Núcleo temático: Procesos, Recursos para el aula.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

RESUMEN

En “How Children Fail” (Cómo fracasan los niños), John Holt sugiere que todos los profesores deberían ponerse regularmente en la posición de los alumnos, para poder comprender mejor la perspectiva de sus estudiantes. Con esto en mente, Charlie Gilderdale, de NRICH https://nrich.maths.org, le invitará a emprender un viaje matemático en el que tendrá la oportunidad de explorar, explicar, justificar y convencer. Este taller será ideal para los profesores que quieran poner a los alumnos en el camino de trabajar y pensar como matemáticos.

Antes de la conferencia, algunos asistentes podrán ver a Charlie trabajando con un grupo de estudiantes en *Tilted Squares (https://nrich.maths.org/11248)*

Palabras clave: Pensamiento Matemático, Resolución de Problemas, Problemas Ricos, Situaciones de Aprendizaje.

TaP102 Aquí tenemos más cuentos que calleja

Martí Pons, M. Magdalena
magdalenmarti@gmail.com
CEIP Marian Aguiló, Palma

Morell Torrens, M Susanna
susannamorell@gmail.com
Centre d'Aprenentatge Científico Matemàtic (CENTMAT), Palma

Portilla Rueda, Maria Àngels
manangels@gmail.com
CEIP Son Anglada, Palma

Núcleo temático: Procesos; Recursos para el aula

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria

RESUMEN

En este taller no vas a encontrar cuentos matemáticos, sino que vas a ponerte las gafas para buscar matemáticas en los cuentos. Tres historias serán la excusa para trabajar los sentidos matemáticos en todos los niveles de primaria. A través de la manipulación con diferentes materiales, tanto estructurados como no estructurados, el diálogo y la comunicación entre los asistentes y la representación de posibles soluciones en diversos formatos, daremos respuesta a los problemas que nuestros personajes encuentran a lo largo de sus aventuras. ¡Todo es posible si te lo puedes imaginar! Si quieres viajar a través de las matemáticas, estás en el lugar ideal.

Palabras clave: Cuentos, Sentidos Matemáticos, Materiales, Procesos Matemáticos

En este taller no vas a encontrar cuentos matemáticos, sino que vas a ponerte las gafas para buscar matemáticas en los cuentos. Tres historias serán las protagonistas:

- "Sapo y Sepo son amigos. Un botón perdido" de Arnold Lobel.
- "Caps for sale" de Esphyr Slobodkina.
- "El tresor de Barbamec" de Ricardo Alcántara.

La manipulación, la comunicación y la representación darán respuesta a los problemas con los que se encuentran nuestros personajes.

Imagen 1. Nuestras historias protagonistas.

1. ¿Por qué trabajar con cuentos?

Contar historias forma parte de todas las culturas desde tiempos. Tanto es así, que por temporadas repetimos y repetimos el mismo cuento. Por todos es sabido el poder que tienen para imaginar, soñar, inventar, crear… En definitiva, dar rienda suelta a nuestra imaginación. Si es un elemento motivador tan potente, ¿por qué solamente se asocia contar cuentos con la etapa de educación infantil y primer ciclo de primaria?

¿Por qué no introducir el cuento como un elemento habitual para favorecer la enseñanza de sentidos matemáticos en todas las edades?

2. ¿Cómo cuenta cuentos Calleja?

2.1. Buscando el problema

Iniciamos contando el cuento dinamizado sin llegar al final de la historia. La idea es llegar hasta el momento en que se expone el problema al cual se enfrenta el personaje o personajes principales de la historia.

En pequeños grupos se analiza el conflicto, buscamos qué sabemos y qué necesitamos saber para poder dar solución al problema. A continuación, se hace una puesta en común y se formula una pregunta generalista.

2.2. Sentido o sentidos matemáticos

Una vez que descubrimos qué necesitamos saber, nos queda el camino de cómo llegar a la solución. El primer punto será analizar qué sentido o sentidos matemáticos trabajaremos.

2.3. La importancia de las preguntas

Aquí nos interesa especialmente remarcar la importancia de la necesidad de formular preguntas que abran debate, que generen interés y ganas de buscar soluciones diferentes.

Presentaremos los puntos de libro, “PUNTOS DE PISTAS”, que nos ofrecen diferentes ideas para iniciar la búsqueda de soluciones.

3. Propuestas matemáticas para cuentos no matemáticos

3.1. “Sapo y Sepo: el botón perdido”

Sapo y Sepo son amigos, cada día salen a pasear juntos. Hoy, al volver a casa, Sapo se da cuenta que ha perdido un botón de su chaqueta, tiene un gran disgusto y Sepo le ayuda a encontrarlo.

Imagen 2. ¿Cuál es el botón de Sepo?

A partir de aquí, algunas de las propuestas que podemos llevar al aula son:

3.1.1. Clasificaciones

Repartimos a cada grupo de trabajo un conjunto de unos 50 botones. Les pedimos que los clasifiquen según un criterio, recordando que hay que conseguir que todos

los botones estén incluidos. Ponemos en común las diferentes clasificaciones y extraemos las palabras clave para cada uno de los conjuntos: material, número de agujeros, grosor, color, tamaño, forma…

3.1.2. Diseño de un botón

Diseñamos un botón a partir de las palabras clave. Cada alumno diseña su botón teniendo en cuenta las características dadas, los comparamos y vemos que, aunque tengan las mismas palabras clave, las opciones son muy diversas. Cabe resaltar la importancia de las negaciones como parte de las definiciones.

3.1.3. ¿Quién es quién?

Elaboramos con los alumnos el juego de *¿Quién es Quién?* Aprovechamos los diseños de los botones (actividad anterior) y los duplicamos para usarlos en nuestro juego. Puede resultar interesante confeccionar un "cuaderno de preguntas" a modo de facilitador para aquellos alumnos que lo necesiten. En grupo podemos valorar qué preguntas son más eficientes y coherentes con la propuesta del juego.

3.1.4. ¿Qué botón estoy pensando?

Uno de los alumnos se fija en uno de los botones que tenemos expuestos en la mesa, escribe en una tarjeta cada una de las palabras clave trabajadas anteriormente y los demás deben adivinar en qué botón está pensando.

Podemos trabajarlo también a partir de tarjetas lógicas que hemos elaborado previamente entre todos, como se muestra en el ejemplo.

Imagen 3. Tarjetas lógicas.

3.1.5. ¿Cómo podemos coser un botón?

Proponemos a los alumnos de cuántas maneras podemos unir los 4 agujeros de un botón, añadiendo condicionantes como: sin levantar el lápiz, sin poder pasar dos veces por el mismo agujero, pudiendo repetir agujero…

3.2. "Caps for sale"

Un vendedor ambulante vende gorras por los pueblos, las lleva apiladas sobre su cabeza. Cansado después de mucho caminar y de no haber vendido ni una gorra, decide dormir la siesta debajo de un árbol. Al despertar todas las gorras han desaparecido.

3.2.1. Construimos gorras

Presentamos en la clase telas de fieltro de los mismos colores que los del cuento. Cada alumno/a fabrica sus gorras siguiendo las siguientes instrucciones:

- Cortar dos círculos de 8 cm del mismo color.
- Pasar un hilo a medio centímetro del borde.
- Fruncir dando forma de boina.
- Rematar.

La elección del tamaño de las gorritas no es banal, la mayoría de los botes de lápices tienen esta medida, y es un objeto muy común en el aula, pero evidentemente se puede cambiar por otra medida. Ya surgen un montón de preguntas: ¿Cuántas gorras debe confeccionar cada alumno/a? ¿Deberíamos hacer gorras de diferentes tamaños? ¿Cómo se mide el tamaño de las gorras? ¿Cuánto mide nuestra cabeza al nacer?

3.2.2. Posible, seguro, imposible

Cada alumno/a guarda sus gorritas en una bolsa opaca y vamos proponiendo preguntas y comentando entre todos. Si metes la mano en tu bolsa y sacas una gorra ¿Es seguro que será de cuadros? ¿Es posible sacar una gorra verde?... También podemos pedirles que formulen preguntas en que la respuesta sea POSIBLE, IMPOSIBLE O SEGURO. Es imprescindible dedicar un tiempo a comentar los diferentes resultados.

3.2.3. Confeccionar un gráfico

Juntamos las gorras que han elaborado todos los alumnos y confeccionamos el gráfico conjuntamente. Previamente, podemos hacer predicciones sobre qué color pensamos que será el más o menos abundante. Se pueden añadir nuevos diseños de gorras y cantidades diferentes y ver cómo los resultados y los gráficos cambian.

3.2.4. ¿Cómo llevar 12 gorras en la cabeza?

¿Por qué hablamos de 12 gorras? Si miramos las imágenes del libro podemos comprobar que en realidad lleva 17 gorras, una de cuadros y 4 de cada uno de los colores. Pero en cambio en la portada del libro aparecen solamente 12 gorras. ¿Por qué solo tenía una de cuadros? ¿Era la suya y no quería venderla? ¿Por qué seguían ese orden? ¿Sería mejor llevar los colores de manera alterna?

A partir de esta actividad se nos abre un proyecto interesante de investigación a partir de fotografías donde se observa gente cargando un montón de objetos sobre sus cabezas.

Imagen 4. ¿Podríamos transportar estos objetos en nuestras cabezas?

Imagen 5. El orden de nuestras gorras.

3.2.5. Trabajamos con cubos encajables

Presentamos en cada mesa un bote, con policubos de 12 colores (rojo, naranja, amarillo, verde claro, verde oscuro, morado, rosa, gris, marrón, negro, blanco y azul). Hacemos un poco de “trampa” y llenamos los botes un poco más o un poco menos de la capacidad que marca la etiqueta. A continuación, vertemos el contenido del bote en medio de la mesa, procurando que quede un poco amontonado, y trabajamos en grupos de 4/ 5 alumnos/as.

A continuación, les hacemos las siguientes preguntas: ¿Cuántos colores hay? ¿De qué color hay más… menos…? ¿Cuántos hay en total? En un primer momento trabajamos la estimación, ya que no pueden tocar, y anotamos las estimaciones de cada grupo. El siguiente paso será manipulando, dónde cada grupo debe representar con los policubos las soluciones de las preguntas de tal manera que los otros compañeros puedan entender la representación y responder las preguntas con solo un vistazo.

Imagen 6. ¿Cuántos colores hay? ¿De qué hay más/menos colores? ¿Cuántos hay en total?

3.3. "El tesoro de Barbamec"

Barbamec es un capitán pirata divertido, alegre y con muchas aficiones, pero de vez en cuando se vuelve taciturno y triste. Y es que Barbamec tiene un secreto. ¿Cuál será?

En esta ocasión aprovecharemos los viajes de Barbamec para trabajar itinerarios, recorridos, cruces… a través de un juego de cartas: "Triteringa". Triteringa es un juego que consta de 48 cartas. Cada una de ellas presenta 3 líneas, cada una de un color diferente: rojo, azul y amarillo. Las posibilidades son muy amplias y diversas. Aquí dejamos algunas de las propuestas.

Imagen 7. Triteringa

3.3.1. Reconocimiento de cartas

Cada grupo de trabajo tendrá un juego de cartas completo y, sin ninguna explicación, les pedimos que "jueguen". Por la composición del juego, 3 colores y 3

líneas, los alumnos suelen iniciar un juego de conexiones. Pasado un rato, ponemos en común lo que han observado y posibles hipótesis.

3.3.2. Agrupaciones por familias

Clasificamos todas las cartas del Triteringa en familias según su diseño. Consideramos una familia como el conjunto de cartas que tienen todas las líneas superponibles. A continuación, preguntamos ¿Cuántos miembros tiene cada familia? ¿Tienen algo en común estos números? También proponemos buscar las cartas simétricas de algunas elegidas al azar. ¿Tienen todas las cartas su simétrica? ¿Por qué?

3.3.3. Juego de las cruces

Proponemos hacer todas las cruces posibles, compuestas por 5 cartas, con 1 juego completo. En este caso sobrarán 3 cartas. A continuación, intentamos enlazar los cruces. ¿De cuántas maneras podemos hacerlo? ¿Cuál sería la más fácil? ¿Podemos enlazar todas las cruces?

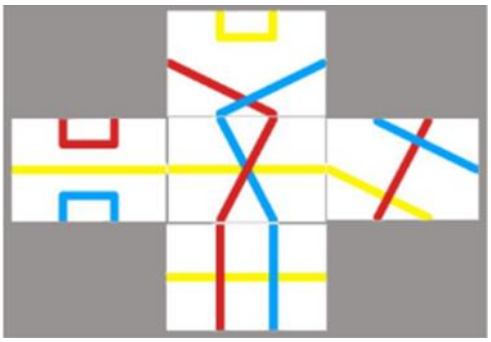


Imagen 8. Jugamos a las cruces.

3.3.4. Juego de los anillos

Ahora, en vez de proponer cruces, proponemos hacer todos los anillos posibles de 8 cartas intentando agotar todas las cartas. Una vez hechos algunos anillos, tienen que intentar imaginarse cuál sería la carta central y analizar los diferentes casos que

podemos encontrar. Podemos aumentar el nivel de dificultad partiendo del anillo inicial y añadiendo anillos concéntricos.

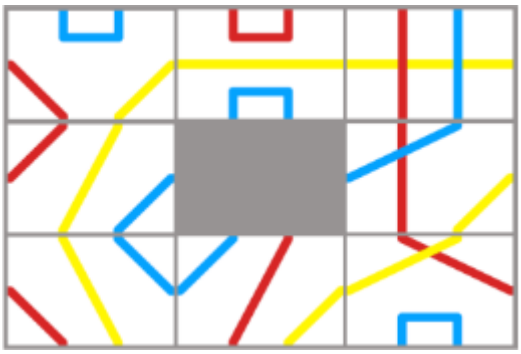


Imagen 9. Jugamos a los anillos.

3.3.5. Buscar polígonos

Proponemos buscar todos los polígonos posibles combinando cuatro cartas. ¿Podríamos ponerles nombre? ¿Y si la propuesta es con seis cartas? ¿Podríamos ponerles nombre? Una vez experimentado la búsqueda de polígonos hay que intentar diseñar un juego de creación de polígonos con puntuación según la dificultad de este.

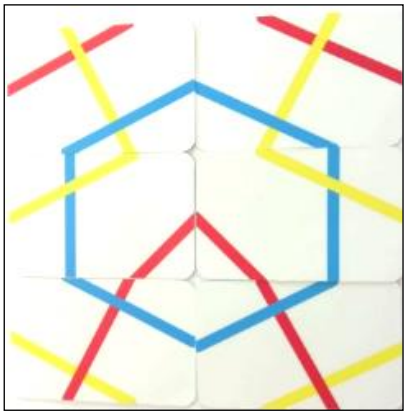


Imagen 10. Buscando polígonos.

4. Conclusiones

Las aventuras de nuestros personajes nos han dado la oportunidad de ver matemáticas donde, en un principio, no las hay. Es por ello que os animamos que, a partir de ahora, no dejéis vuestras gafas matemáticas en el bolsillo, sino que os las

pongáis y busquéis matemáticas a la hora de contar cuentos para crear un buen contexto de situación de aprendizaje.

¡Todo es posible si te lo puedes imaginar!

5. Para ampliar

En la sección “Diario de Experiencias Matemáticas” de la revista SUMA de la FESPM, en el número 97, podréis encontrar otro ejemplo de cómo aprovechar un cuento para trabajar la competencia matemática.

http://www.xeix.org/activitats-sbm-xeix/seccio-revista-suma-diario-de-experiencias-matematicas/article/article-revista-suma-mejor-te-lo-cuento

También podréis encontrar más ejemplos con propuestas en la web del CentMat, Centre d’Aprenentatge Científico Matemàtic.

http://www.xeix.org/Centre-Aprenentatge-Cientificomatematic/oferta-educativa/activitats-a-centres/article/contacontes-matematics

Y en el siguiente enlace, recurso presentado en las II Jornadas sobre materiales para el aula de matemáticas en primaria, organizadas por la FESPM (2021), encontraréis un recopilatorio de cuentos para trabajar en el aula de matemáticas.

https://drive.google.com/file/d/1QsNPJJ-4Z0zxAJGbA-vhgJRes3C9CJ6d/view?usp=sharing

¡Os animamos a consultarlos!

Referencias

Alcántara, R. (2000). *El tresor de Barbamec*. Editorial La Galera.

Centre d’Aprenentatge Científico Matemàtic, Centmat (11 de septiembre de 2020). *Triteringa*.

http://www.xeix.org/Centre-Aprenentatge-Cientificomatematic/recursos/materials/article/triteringa

González, A.M., Morell, S. y Portilla, MA. *Mejor te lo cuento*. Revista SUMA, número 97, 69-80. Sección “Diario de experiencias matemáticas”. Ediciones FESPM.

http://www.xeix.org/activitats-sbm-xeix/seccio-revista-suma-diario-de-experiencias-matematicas/article/article-revista-suma-mejor-te-lo-cuento

Lobel, A. (2017). *Sapo y Sepo son amigos*. Proyecto Loqueleo. Editorial Santillana.

Slobodkina, E. (1940). *Caps for sale*. Editorial Harper Collins.

TaC007 FotoGebra: explorando imágenes con GeoGebra

Karina Amalia Rizzo
karinarizzo71@gmail.com
Instituto Superior de Formación Docente y Técnica Nº 24, Bernal. Instituto Nuestra Señora del Perpetuo Socorro, Quilmes. Instituto Sagrada Familia, Quilmes. Argentina

Núcleo temático: Conexiones. Procesos.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (Formación de Profesores).

RESUMEN

El propósito de este taller es descubrir el potencial de GeoGebra para la modelización de imágenes y mostrar como esta estrategia es utilizada en un concurso denominado FotoGebra (www.fotogebra.org).

Cabe señalar que, dicho certamen, invita a los participantes a tomar fotografías y superponer conceptos matemáticos sobre esta, mediante las diversas herramientas que ofrece GeoGebra, para dar respuesta a sus propias preguntas.

Durante el desarrollo del taller, luego de realizar una breve presentación del concurso, se brindarán múltiples ejemplos del trabajo que se puede realizar con imágenes, incluyendo algunos presentados por los concursantes en ediciones anteriores (https://www.geogebra.org/u/fotogebra).

Finalmente, se animará a los participantes a diseñar y resolver una situación problemática, inspirada en una fotografía. En ésta ocasión, además de asistirlos de manera presencial, se podrá observar el progreso actualizado de las construcciones e interactuar con los asistentes, mediante el seguimiento de las tareas en GeoGebra Classroom (GeoGebra Team, 2020).

Palabras clave: GeoGebra, Modelización, FotoGrafía, Matemática, Concurso.

DESARROLLO

FotoGebra es un concurso que invita a descubrir la matemática en contextos reales y a explorar el potencial de GeoGebra, al mismo tiempo que fomenta la creatividad. Esta propuesta, reta a estudiantes de Educación Secundaria y Formación Docente, a crear un problema a partir de una fotografía de su autoría, utilizando para su resolución dicho software. El dinamismo del programa, favorece estudiar la situación creada, elaborar conjeturas, ponerlas a prueba, revisarlas y reelaborarlas, propiciando el aprendizaje mediante la investigación y el trabajo colaborativo (Rizzo, 2016, 2019 y 2020; Rizzo y Costa,2020).

GeoGebra (www.geogebra.org) es un software libre, en constante evolución (continuamente está incorporando nuevas características y herramientas, en línea con los últimos avances tecnológicos), de gran popularidad en las últimas décadas, en el ámbito de la enseñanza de las ciencias y en particular de la Matemática. Asimismo, diversos autores como Carrillo (2012) y Hohenwarter (2014) destacan el potencial de GeoGebra, para influir positivamente en el aprendizaje de los estudiantes.

Es por ello que, el taller comenzará invitando a los participantes a explorar los comandos y herramientas del software, mientras se exponen las características básicas del programa e indica cómo crear un perfil en GeoGebra. Luego, se compartirán diversos ejemplos de fácil implementación, que permitirán advertir el potencial del programa como recurso didáctico en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

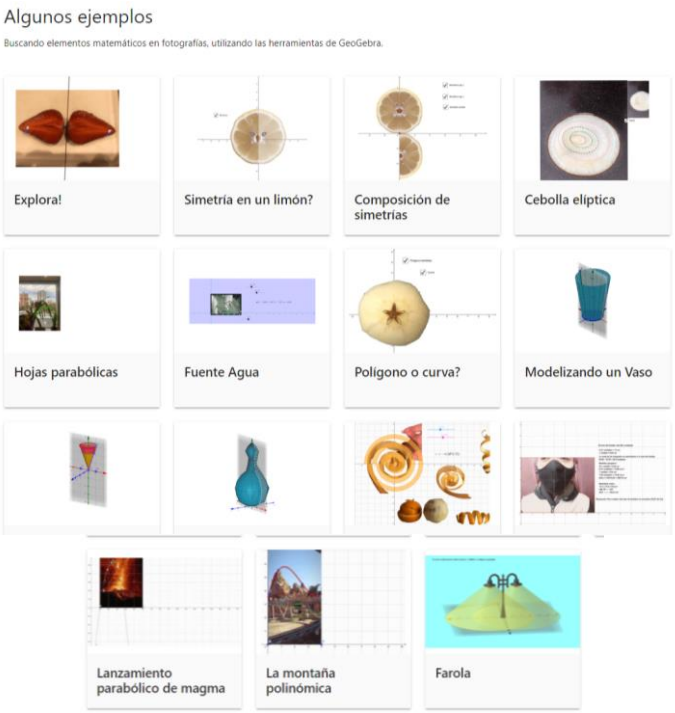


Imagen 1. Algunos ejemplos. https://www.geogebra.org/m/mwafabb6#chapter/792962

Seguidamente, se propondrá una actividad práctica, mediante Google Classroom, donde los participantes explorarán con GeoGebra imágenes tomadas de la realidad, para la construcción de modelos y se discutirá nuevamente, acerca del potencial didáctico de dicha propuesta y de las dificultades surgidas.

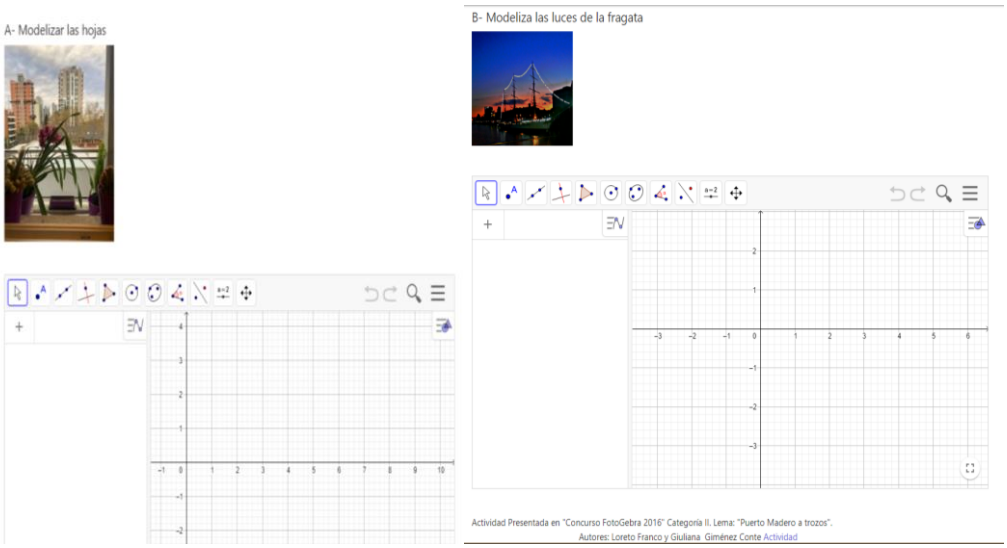


Imagen 2. Hojas y luces de la fragata. https://www.geogebra.org/m/t98byvhx

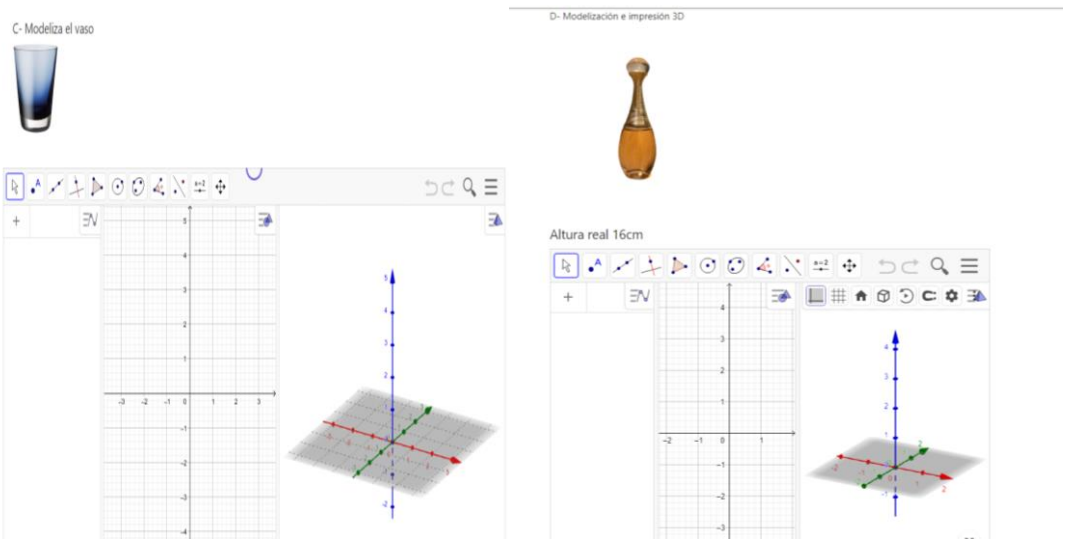


Imagen 3. Vaso y perfume. https://www.geogebra.org/m/t98byvhx

Por último, se mostrará cómo esta estrategia, es utilizada en el marco del concurso FotoGebra (www.fotogebra.org), invitándolos a llevar a cabo esta u otras experiencias similares que permiten a los estudiantes desarrollar competencias digitales, matemáticas, de trabajo en equipo y artísticas, entre otras..

Referencias

Carrillo, A. (2012). El dinamismo de GeoGebra. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, nº29, 9-22

GeoGebra Team (2020) *Aprende GeoGebra Classroom*. https://www.geogebra.org/m/fstbrmvt

Hohenwarter, M. (2014). Múltiples representaciones y entornos de aprendizaje basados en GeoGebra. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, nº 39, 11-18.

Rizzo, K (2016). *Concurso Matemática, Fotografía y GeoGebra: Una propuesta para mejorar la imagen de la matemática*. IBERCIENCIA Comunidad de educadores para la Cultura Científica. https://www.researchgate.net/publication/353131964_Concurso-Matematica-Fotografia-y-GeoGebra-Una-propuestapara-mejorar-la-imagen-de-la-matematica

Rizzo, K. (2019). FotoGebra y competencias digitales: análisis de un caso. *Revista Épsilon*, nº103. 35-44. https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon103_3.pdf

Rizzo, K. y Costa, V. (2020). ¿Cuáles competencias digitales favorece desarrollar el concurso FotoGebra?, X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas 20, 21 y 22 de febrero de 2020. PUCP Lima Perú. http://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/171568

Rizzo, K (2020). Concurso Fotogebra = Matemática + Fotografía + GeoGebra. Reflexión Académica en Diseño & Comunicación. Año XXI. Vol 44. Noviembre 2020. Bs As. Argentina. https://fido.palermo.edu/servicios_dyc/publicacionesdc/archivos/821_libro.pdf

TaC008 Matemáticas y literatura, una oportunidad

Xavi Roca Martínez
jroca237@xtec.cat
Institut Ramon Berenguer IV, Cambrils

Núcleo temático: Conexiones, recursos para el aula.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (cualquier titulación).

RESUMEN

La conexión entre matemáticas y literatura es una magnífica oportunidad para enriquecer la experiencia de aprendizaje de nuestro alumnado. Existen distintos niveles de conexión y se pueden llevar al aula una gran variedad de actividades relacionadas. En la primera parte del taller se justificará de un modo breve su interés, y se probarán algunas de ellas. Después los asistentes experimentarán la fase inicial de la actividad central que se les propone llevar al aula: la creación de un relato matemático por parte del alumnado.

Palabras clave: Literatura, Relatos Matemáticos, Conexiones.

Desarrollo del trabajo

No será esta la primera -ni seguramente tampoco la última- ocasión en que se explore la conexión entre las matemáticas y la literatura. Cuando uno analiza los distintos niveles de conexión, sin embargo, se observa que el foco suele colocarse o bien en el ámbito de las matemáticas (y se las presenta entonces de un modo literario, como es el caso de algunas obras o fragmentos o como lo es, en cierto modo, la divulgación científica), o bien el foco se sitúa casi enteramente en el ámbito literario, de manera que las matemáticas tan solo juegan un papel invitado o

testimonial, casi como una curiosidad en medio del resto de la obra. El taller propuesto -la creación de un relato matemático- pretende colocar la conexión en un punto más intermedio entre los dos ámbitos, de manera que las matemáticas estén en el núcleo de la creación literaria, y ambas disciplinas dialoguen de un modo más estrecho y profundo.

1. Justificación de la adecuación e interés de la actividad

Seguramente no estarán todos en esta lista, pero los motivos por los que, en general, la conexión con la literatura -y, en particular, la actividad de creación de un relato matemático- resulta positiva para el aprendizaje de las matemáticas pueden resumirse -no necesariamente ordenados en importancia o dificultad- en:

- Valoración y mejora del lenguaje matemático. Gracias a su aplicación literaria surge de modo natural la necesidad de corrección y precisión en el uso del lenguaje matemático, y por lo tanto se incide en su mejoría.

- Aprendizaje profundo e individualizado. Cuando acompañamos a un/a alumno/a en la elaboración de un relato matemático que trata un determinado contenido matemático, tenemos la oportunidad de profundizar en el aprendizaje de ese contenido concreto con ese/a alumno/a concreto/a, de manera que el aprendizaje puede ser tan profundo como individual.

- Establecimiento de conexiones de amplio recorrido. Es conocida la importancia pedagógica de establecer conexiones dentro de una misma materia. El fomento de conexiones con un ámbito tan aparentemente alejado al de las matemáticas como la literatura es una buena forma de contribuir a esta capacidad. Resulta, por otra parte, una buena oportunidad para trabajar de un modo transversal con las asignaturas de lengua.

- Estimulación de la creatividad, contribución a la resolución de problemas. Cuando trabajamos en un ambiente de resolución de problemas solemos echar en falta estímulos que fomenten la creatividad en la búsqueda de estrategias de resolución de problemas de nuestros/as alumnos/as. Aunque no estemos en ese momento resolviendo explícitamente problemas, la actividad de creación de un relato matemático puede contribuir indirectamente a lograr este objetivo. Las lecturas matemáticas pueden, por su parte, representar puntos de partida de situaciones matemáticas interesantes, presentados de un modo no habitual y por lo tanto enriquecedor.

- Cuestiones sociales o de clichés. Es habitual hablar de si somos "de letras" o "de ciencias", un cliché que encasilla el conocimiento y que merece la pena poner en duda. Por otra parte, es también sabido que las mujeres son tradicionalmente más lectoras que los hombres, de modo que el literario puede ser un buen acercamiento para ese sector de alumnado femenino que rechaza, en general, las ciencias. Por último, es importante mantener una mirada ético-humanista sobre el conocimiento científico, y la literatura es una buena oportunidad para potenciar esa sensibilidad.

- La imagen pública de las matemáticas. La conexión con la literatura brinda una oportunidad magnífica de divulgar matemáticas y de mejorar la imagen que se tiene de ellas, tanto a nivel social como en el ámbito de la escuela, de las familias y, sobretodo, en la mentalidad del alumnado.

- Ampliar registros en el aula, variar, sorprender. Condimentar nuestras clases habituales con actividades como esta repercute positivamente en la motivación e implicación de nuestro alumnado.

2. Experiencias previas del autor

Si propongo este taller en concreto es porque yo mismo soy aficionado a escribir relatos matemáticos. Pronto vi que la actividad de profundizar en un concepto

matemático -a través de su conexión con personajes e historias y reflexiones literarias- tenía un gran potencial, no solo para que mis alumnos/as leyeran y analizasen los relatos que yo -u otros autores- escribieran, sino para que los escribieran ellos mismos. Decidí entonces poner a prueba la actividad, y desde entonces he efectuado distintos talleres con alumnado de 4o de la ESO en el proyecto "Vamos x + matemáticas" de la FESPM -en su adaptación catalana con la FEEMCAT- y con mis alumnos/as en el aula ordinaria. Paralelamente también he dirigido clubs de lectura de novelas matemáticas como *Los crímenes de Oxford*, *Los crímenes de Alicia*, *El curioso incidente del perro a medianoche* y *El asesinato de Pitágoras*. Después de estas experiencias tengo la certeza de que la literatura contribuye de manera positiva al enriquecimiento de la experiencia de aprendizaje -no solo de las matemáticas- de nuestro alumnado, y es por eso que me he animado a compartir la actividad concreta de creación de relatos matemáticos.

3. Estructura detallada del taller

3.1. Introducción – justificación

En esta parte se introduce el taller y se recogen los motivos -expuestos en el apartado 1- por los cuales es adecuado e interesante llevar al aula actividades de conexión entre las matemáticas y la literatura.

3.2. Explicación de los distintos niveles

También de modo breve se mostrarán las distintas conexiones que existen en la actualidad:

- Fragmentos donde aparecen matemáticas interesantes, un análisis basado, principalmente, en el trabajo de Marta Macho de la Universidad de Bilbao.

- Un pequeño y rápido repaso al habitual catálogo de novelas matemáticas o de divulgación.

- Una mención muy breve a otras conexiones como el análisis estadístico de elementos literarios, los experimentos como los del grupo OULIPO, los pi-poemas y algún otro recurso puntual.

- Una sugerencia del lugar intermedio que se pretende ocupar mediante la creación de relatos matemáticos.

3.3. Actividades preliminares

Antes de entrar en la creación del relato matemático se mostrarán algunas actividades introductorias.

Las imágenes. Los asistentes se pondrán por parejas, uno de ellos mirando a la pantalla y el otro de espaldas. En la pantalla habrá proyectada una imagen intencionadamente compleja o curiosa. La persona que puede ver la imagen se la describirá a la persona que no puede verla, sin poder usar ningún gesto con las manos o la boca o el cuerpo. Después podrán ver los dos la imagen y compartirán las sensaciones y dificultades experimentadas.

- Algunos fragmentos. Se mostrarán algunos fragmentos matemáticos que aparecen en obras literarias, y se comentará el interés de provocar un debate en el aula entorno a ellos.

- Un vídeo. Se visionará un ejemplo más actual y motivador: un vídeo del estilo spoken-word sobre números que participó en el concurso Got talent.

- Un ejercicio de relacionar. Una práctica muy sencilla en que se muestran dos textos matemáticos y dos fragmentos literarios de Jorge Luis Borges, y se trata de conectar cuál va con cuál.

- El Aleph de Borges. Esta es una muestra de conexión “de alto nivel”. Se muestra una imagen matemática que representa una biyección entre el intervalo [0,1] y el [0,2] y se pregunta qué demuestra esa imagen. La respuesta que buscamos es que hay el mismo número de puntos, a pesar de que uno de los dos intervalos tiene el doble de tamaño que el otro. Después mostramos intervalos cada vez más grandes hasta la recta real completa y también cada vez más pequeños, sugiriendo que todos los intervalos de la recta real tienen el mismo número -infinito- de puntos). Finalmente se observará cómo Jorge Luis Borges expresa esta idea de una manera sublime en un fragmento de su relato El Aleph, en un claro homenaje a los infinitos de Cantor.

3.4. Creación de un relato matemático

La principal actividad propuesta es la de creación de un relato matemático. La escritura, sin embargo, es un acto íntimo y solitario, de manera que el contexto de una clase con muchos participantes es el lugar idóneo para trabajar tan solo el guion del relato. En primer lugar los asistentes dispondrán de unos minutos para pensar sus propias conexiones entre elementos matemáticos y personajes o situaciones o reflexiones literarias. Después de unas pocas indicaciones de índole literaria, estas ideas se compartirán en parejas, y se desarrollarán los elementos clave del futuro relato matemático. Más tarde se compartirán y comentarán las ideas entre todo el grupo. El objetivo es que cada asistente o cada pareja o grupo de asistentes tenga un esbozo claro del relato, y que ya esté listo para empezarse a escribir. Finalmente, se mostrarán ejemplos y se darán indicaciones sobre cómo acompañar a los alumnos hasta la compleción del relato matemático.

4. Duración del taller

3.1	Justificación	10’	Exposición teórica	15’
3.2	Distintos niveles	5’		
3.3	Actividad imágenes	10’	Parte práctica	75’
	Fragmentos, relaciones	15’		
	Un ejemplo más actual	5’		
	Borges	15’		
3.4	Elaboración del guion del relato	25’		
3.5	Acompañamiento y cierre	5’		
	Total	90’		

TaC009 El mágico legado de John Conway

Pedro Alegría Ezquerra
Pedro.alegria@ehu.eus
Departamento de Matemática. Universidad del País Vasco.
José Muñoz Santonja
josemunozsantonja@gmail.com
IES Macarena (Sevilla)

Núcleo temático: Conexiones, Comunicación y divulgación.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: *Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.*

RESUMEN

El matemático John Conway es conocido, por los aficionados a las matemáticas, principalmente por ser el creador del conocido como "Juego de la vida", pero fue un matemático que abarcó multitud de aspectos de las matemáticas, mostrando una verdadera pasión por la divulgación de dicha disciplina y por conectarla con aspectos externos al propio mundo matemático.

En este taller presentaremos algunos de sus Trabajos, por ejemplo, en teoría de nudos o en combinatoria utilizando cartas y haremos referencia a algunos de los juegos que inventó o estudio. También interactuaremos con algunas actividades que han surgido a partir de sus trabajos y propondremos investigar variaciones y versiones personales de los asistentes a partir del Trabajo de Conway.

Palabras clave: Conway, Divulgación, Magia, Cartas, Nudos

.

1. John Conway: un genio polifacético.

El escritor británico y divulgador matemático Alex Bellos, publicó en 2010 en el diario *The Guardian*[1], una lista personal de sus 10 mejores matemáticos de la historia. Entre ellos aparecía el también británico John Horton Conway (1937 - 2020).

[1] https://www.theguardian.com/culture/2010/apr/11/the-10-best-mathematicians

Imagen 1. John Horton Conway. Imagen de Wikimedia Commons.

Pensamos que para algunas personas puede resultar raro encontrarse entre personajes de la talla de Pitágoras, Euler o Gauss a un personaje no tan conocido, no sólo del gran público, sino incluso de muchos matemáticos, especialmente en el mundo no universitario. Por ello, pensamos que puede ser un gran descubrimiento para muchas de las personas que asistan al taller.

El matemático británico de ascendencia libanesa Michael Atiyah, Medalla Fields en 1996 y premio Abel en 2004, consideraba a Conway como el "*matemático más mágico del mundo entero*".

Hacer una semblanza de los múltiples intereses de este matemático daría lugar a varios talleres, por lo que sólo vamos a señalar algunos aspectos llamativos para ver la gran variedad de áreas matemáticas en las que profundizó aportando resultados importantes.

Comenzó sus estudios universitarios en Cambridge, concretamente en el Gonville and Caius College, donde estudió Stephen Hawking y, según la literatura, Sherlock Holmes. Desde el principio tuvo multitud de intereses profundizando no solo en la matemática académica, sino también en la recreativa. Según el mago y matemático estadounidense Persi Diaconis, especialista en estudiar la aleatoriedad en lanzamientos de monedas o juegos de cartas, "John Conway es un genio, capaz de pensar sobre cualquier tema, con un verdadero sentido de la fantasía".

Los campos que abordó en las matemáticas fueron muy diversos, comenzando con la Teoría Algebraica de Números, pasando por la Lógica Matemática, volviendo a la teoría de Grupos y muchos más campos.

Además, siempre profundizaba en los campos no olvidando la perspectiva de la matemática recreativa. Durante una temporada dedicó sus intereses a la Inteligencia Artificial, especialmente en el campo de Autónomas Celulares, investigando problemas planteados por John Von Neumann. Esta investigación dio pie a la creación del llamado “Juego de la vida”. Este juego fue popularizado por Martin Gardner, de quien fue gran amigo Conway, a través de su sección de la revista de Investigación y Ciencia, donde mostró varios resultados más en otros artículos. Los dos matemáticos publicaron en 1976 el libro “On Numbers and Games”.

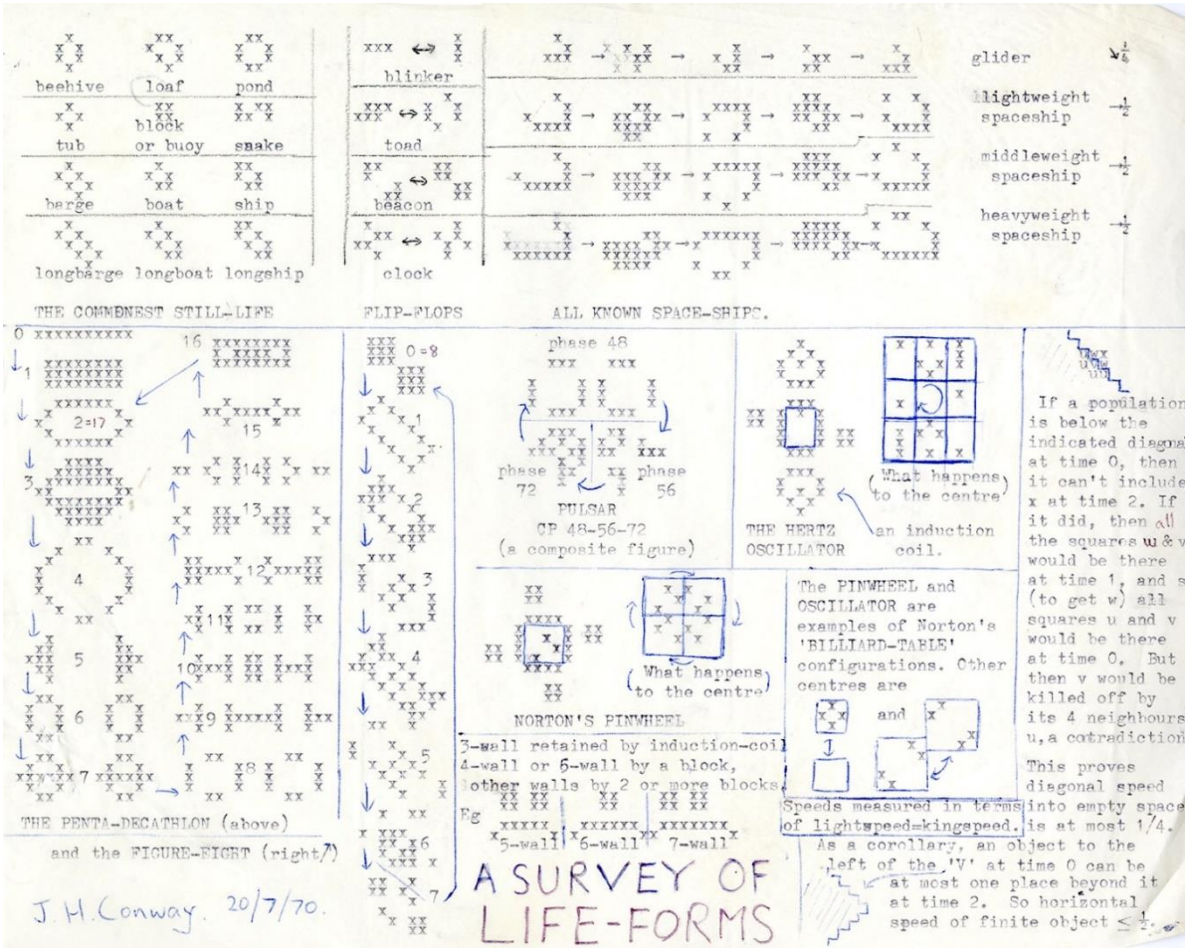


Imagen 2. Parte del contenido de la carta de Conway a Gardner explicando el “juego de la Vida”

Una investigación sobre las características del juego milenario del Go, le llegó a crear los números surreales, descubrimiento del que se sentía más satisfecho.

Pero su pasión por el juego venía de antiguo pues ya en la Universidad era muy aficionado al juego del Backgammon, del que estudió estrategias, y no es de

extrañar que dedicara muchos de sus esfuerzos a la Teoría de Juegos. Creó el juego llamado Sprouts, pero también el conocido como Damas de Conway, o los soldados de Conway. Junto al matemático e informático Michael Guy encontró todas las soluciones del Cubo Soma.

Durante una época dedicado a la Topología Geométrica, se aficionó a la Teoría de Nudos, existiendo la llamada Notación de Conway para organizar los distintos tipos de nudos.

Aunque su biografía quedó truncada en 2020 debido a la pandemia mundial que nos asoló, su legado es tan amplio que es interesante conocer más de su vida, legado y reconocimientos (Alegría y Blasco, 2020)

Por tanto, es hora de que disfrutemos de algunos de esos variopintos resultados.

2. Problemas de matemáticas recreativas.

Como hemos dicho antes, Conway siempre daba un paso más allá en sus investigaciones matemáticas preocupado por la divulgación matemática. No era raro que estuviera interesado en mostrar, a un público más amplio, algunas de las ideas profundas desarrolladas en su trabajo y para ello creaba juegos y sobre todo problemas de ingenio. No pensemos que todos ellos eran triviales. Se pueden encontrar problemas en la red por cuya solución estaba dispuesto Conway a ofrecer 1000 $[1].

Algunos de ellos son interesantes por si mismos pues trabajan matemáticas elementales de una forma muy amena, por lo que se pueden utilizar en clase como recurso didáctico. En el taller trabajaremos algunos como los siguientes:

2.1. La otra noche me senté en el autobús detrás de dos magos. Esta fue su conversación:

[1] https://oeis.org/A248380/a248380.pdf

—Mago A: «Tengo un número entero no negativo de hijos, cuyas edades son números enteros no negativos, su producto es mi edad, y su suma el número del autobús.»

—Mago B: «Aparte del número del autobús, no me das muchas pistas. Quizá si me dijeras tu edad y el número de hijos que tienes, yo podría averiguar las edades de tus hijos.»

—Mago A: «No, no podrías.»

—Mago B: «¡Ah! ¡Entonces ya sé tu edad!»

¿Cuál es el número del autobús?

2.2. ¿Cuál es el siguiente término de la sucesión
1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, …

2.3. Empaquetar seis bloques iguales de dimensiones 1x2x2 en una caja de dimensiones 3x3x3.

3. La teoría de nudos de Conway.

Dentro de sus investigaciones topológicas, realizó un gran número de descubrimientos en la teoría de nudos. Incluso existe el llamado Nudo de Conway, que tiene 11 cruces y cuya resolución no fue publicada hasta 50 años después de ser planteado, concretamente en 2020 por la matemática estadounidense Lisa Piccirillo.

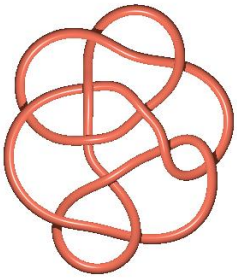


Imagen 3. Nudo de Conway. Imagen de Saung Tadashi.

Algunos de estos juegos topológicos son muy atractivos al poder participar los asistentes en el propio desarrollo del juego. En el taller vamos a realizar lo que se conoce como “Conway tangles”, que se podría traducirse como Enredos de Conway y que también se conoce como “El baile de los entrelazados racionales”.

El estudio de estos entrelazados llevó a Conway al estudio más general de la construcción de nudos. Investigando los enlazados racionales, comprobó que dos entrelazados son equivalentes si corresponden a fracciones asociadas. Tal como lo planteó, este juego permite aprender a los escolares de primeros niveles las operaciones básicas con fracciones, o la composición de aplicaciones, entre otros conceptos.

En este “baile”, nos encontramos con grupos de cuatro personas que se encuentran enlazados dos a dos mediante cuerdas y que tienen una serie limitada de movimientos posibles.

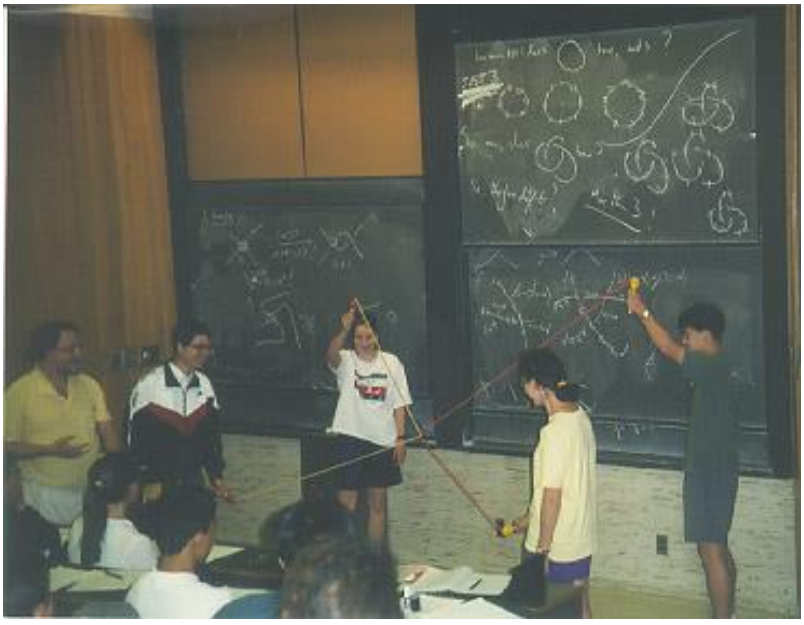


Imagen 4. John Conway presentando el baile de las cuerdas.

En el taller presentaremos los movimientos y pondremos a los asistentes a “bailar” estudiando las aplicaciones que nos llevan de un resultado inicial a una determinada distribución y viceversa. Y veremos fácilmente como la composición de aplicaciones no tiene por qué ser conmutativa.

4. Conway y la combinatoria.

Según cuentan los que lo conocieron, John Conway solía llevar siempre con él, cartas, cuerdas, dados y otros utensilios típicos de los trucos mágicos, para entretener a sus acompañantes, e incluso presentarles algunos conceptos matemáticos.

Según el artículo de “Impressions of Conway” (Seife, 1994), Conway solía realizar el siguiente juego, adaptado a nuestro idioma:

> John saca una baraja de su estuche y va pasando cartas de arriba abajo, una a una, mientras deletrea la palabra A-S (una carta por cada letra). Gira la siguiente carta y resulta que es un as. Deletrea a continuación la palabra D-O-S pasando nuevamente una carta de arriba abajo por cada letra. Al girar la siguiente carta, se trata de un dos. Entrega la baraja a su colega y le pregunta: ¿quieres probar? El colega deletrea la palabra T-R-E-S pero, al girar la siguiente carta, es un comodín. ¡No!, exclama John. Le arrebata la baraja y deletrea T-R-E-S y gira la siguiente carta: es un tres. Vuelve a pasar la baraja a su interlocutor y este deletrea la palabra C-U-A-T-R-O. De nuevo, la siguiente carta es un comodín. El juego continúa de la misma forma, la víctima siempre vuelve un comodín y John siempre vuelve la carta correcta. Por último, John recoge todas las cartas, las ordena adecuadamente y las guarda en el estuche, preparadas para el siguiente voluntario inocente.

En el taller comenzaremos planteando este juego, investigando cuál debe ser la colocación de las cartas inicialmente para conseguir ese efecto y sugerir y animar a los asistentes a que propongan nuevas versiones.

5. El principio de Alexander Kraus.

Para seguir en la línea del bloque anterior, trabajaremos con algunas propuestas tomadas de Alexander Kraus.

En la línea anterior, Kraus propone un deletreo con una puesta en escena bastante impresionante. Se parte de la colocación de las cartas de la baraja francesa completa en el siguiente orden.

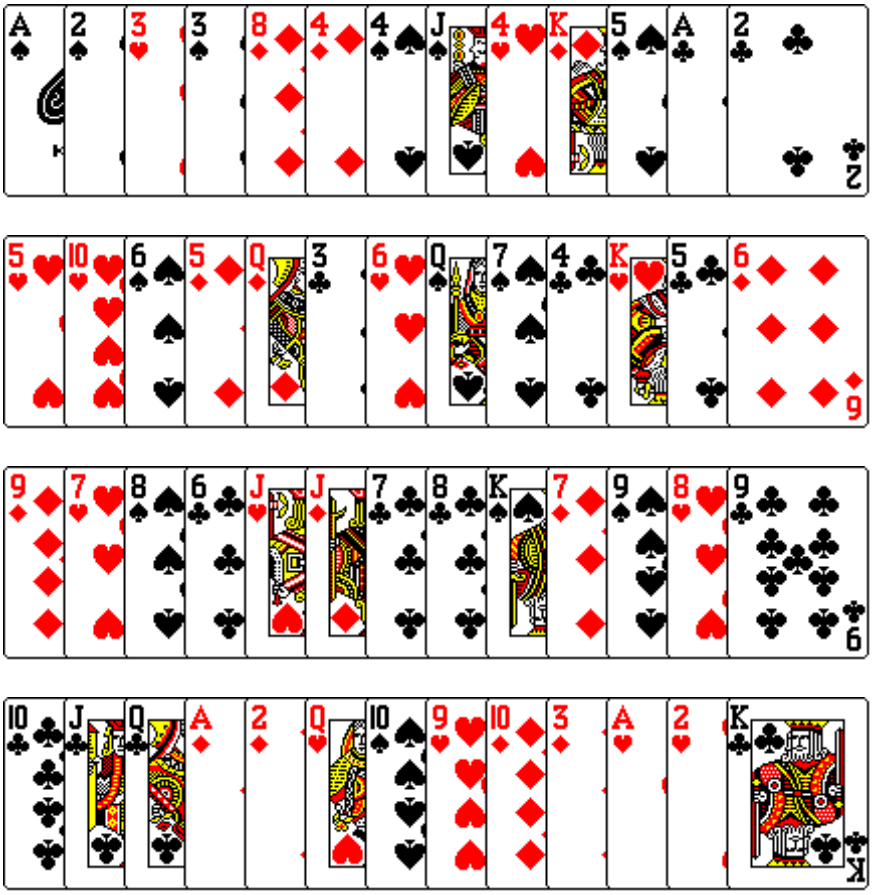


Imagen 5. Colocación de las cartas para el truco.

Se entrega el mazo preparado a un espectador y se le indica los siguientes movimientos:

1. Gira la primera carta y déjala sobre la mesa: As de Picas.
2. Gira la siguiente y déjala sobre la mesa: Dos de Picas.
3. Como es un dos, pasa una carta de arriba abajo y gira la siguiente, dejándola sobre la mesa: Tres de Picas.
4. Como es un 3, pasa dos cartas de arriba abajo y gira la siguiente, dejándola sobre la mesa: Cuatro de Picas.
5. Como es un 4, pasa tres cartas de arriba abajo y gira la siguiente, dejándola sobre la mesa: Cinco de Picas.

6. Repite la misma operación, pasando tantas cartas de arriba abajo como el valor de la última carta girada, excepto la última, que se gira y se deja sobre la mesa. Así irán apareciendo todas las cartas, en orden, de los palos de picas, corazones y rombos.
7. Por último, gira todas las cartas de la mano y aparecen en orden todas las cartas del palo de tréboles.

Pero el plato fuerte de este bloque será el llamado Principio de Kraus, planteado en el número 12 de la revista de magia Ibidem, en diciembre de 1957 con el título de "Sum total", dando la solución en la siguiente revista.

Veremos que partiendo de una determinada distribución, y empezando en cualquier carta, terminamos entrando en un ciclo y acabamos todos en una misma carta. (Alegría, 2021).

Referencias

Alegría, P. (2021): Combinatoria con cartas. *Divulgamat, Sección El Rincón Matemágico.*http://www.divulgamat.net/index.php?option=com_content&view=article&id=18563&directory=67

Alegría, P y Blasco, F (2020). John Conway, el genio mágico. *La Gaceta de la RSME*, vol 23, nº 3, 463-486. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1594

Seife, C. (1994): Impressions of Conway". *The Sciencies.* https://web.archive.org/web/20201109032229/http:/www.users.cloud9.net/~cgseife/conway.html

TaC016 ¡Las matemáticas también se comen!

Anna Gómez Ausina
anna.ausina@institut22.cat
INS El Joncar (Barcelona)

Sergi Muria Maldonado
sergi.muria@institut22.cat
INS El Joncar (Barcelona)

Núcleo temático: Conexiones. Divulgación.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

RESUMEN

Las matemáticas están presentes en muchos momentos de nuestra vida aunque a veces parece que les gusta permanecer escondidas, pero ejerciendo un papel fundamental para que todo funcione y sea harmonioso. La cocina y la buena comida nos pueden ofrecer una gran oportunidad para disfrutar de las matemáticas de una forma rigurosa a la vez que divertida y deliciosa. En el taller se presenta un pequeño proyecto realizado desde la cocina que nos permite profundizar tanto en aspectos culinarios como matemáticos.

Palabras clave: Poliedros, Geometría, Investigación, Proyecto, Cocina.

Muchas veces el trabajo por proyectos se realiza a partir de temas transversales donde participan diferentes áreas académicas y en los que se invierte una carga horaria que proviene de las diferentes áreas implicadas. Esta situación, necesaria y en principio muy interesante, a veces nos puede llevar a situaciones donde hay que llegar a acuerdos de manera que todas las áreas tengan su espacio dentro del proyecto. En estas situaciones las matemáticas pueden quedar en una posición secundaria, aceptando realizar unas propuestas que, al tener que estar integradas dentro del proyecto, no permiten profundizar de forma natural en los contenidos matemáticos implicados como haríamos en el aula usual, pasando a ser una aplicación simple de los contenidos ya trabajados previamente.

En cambio creemos que cuando el motor impulsor del trabajo por proyectos es el área de matemáticas se puede desarrollar un trabajo mucho más profundo respecto a unos contenidos concretos, de manera que los alumnos pueden disfrutar de todo el proceso, sobre todo al ver como avanzan en sus conocimientos y entienden cada vez de forma más sólida la situación de partida, el proceso de investigación, su aplicación y los resultados a los que esta les lleva.

A partir de este planteamiento abogamos por hacer una propuesta para trabajar los proyectos con los contenidos y aplicaciones de las matemáticas como eje central y invitando al profesorado del resto de asignaturas a participar.

Esto ya se realiza con el proyecto de investigación de 4º de ESO y en Cataluña también el Trabajo de investigación de Bachillerato, pero solo afecta a un reducido número de alumnos que lo han elegido.

1. Matemáticas y cocina

Podemos decir que nuestra propuesta es un ejemplo de actividad situada en la frontera entre las matemáticas y la cocina, donde abordamos de forma integrada los dos aprendizajes y intentamos profundizar al máximo en los dos sentidos.

Así, a partir de una elaboración culinaria que hace de inicio motivador intentamos explicitar las matemáticas que estamos trabajando y como estas nos ayudan a evolucionar la propuesta inicial.

1.1 Proyectos matemático-culinarios

A continuación y a nivel de ejemplo explicitamos las diferentes fases en las que estructuramos la elaboración y desarrollo del proyecto previas a poder llevarlo al aula, ya sea de forma parcial o completa.

- **Fase 0**: Punto de salida (Motivación y reto)
- **Fase 1**: Documentación (Investigación culinaria y matemática)
- **Fase 2**: Técnica (Elaboración culinaria)
- **Fase 3**: Práctica a partir del modelo inicial.
- **Fase 4**: Propuesta personal/Evolución
- **Fase 5**: Más pruebas
- **Fase 6**: Propuesta definitiva y documentación (Dejar rastro)
- **Fase 7**: Presentación y mejora
- **Fase 8**: Aplicación didáctica

2. Ejemplificación: Proyecto patata diamante

En este apartado ejemplificaremos el trabajo realizado en las diferentes fases en el caso concreto del Proyecto Patata diamante y que será el motivo central del taller que se desarrollará en las XX JAEM.

Fase 0: Patata diamante de Philippe Echebest

En el último capítulo de Top Chef Francia 2013 se propone a los concursantes cocinar patatas de cinco maneras diferentes y el chef Philippe Etchebest presenta *la* ***P*omme de terre diamant.**

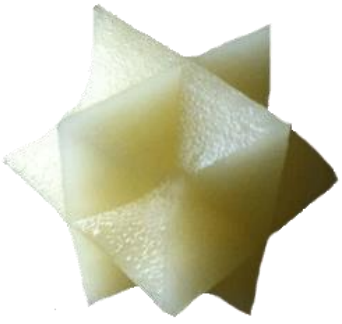


Imagen 1. Patata diamante

Aunque no disponemos del vídeo original si que enlazamos el vídeo Pomme diamant de Bertrand Simon (Chef Simon).

Fase 1: Documentación culinaria y matemática

Después de analizar la propuesta inicial, en esta fase nos centramos en llevar a cabo todo el proceso de investigación tanto de aspectos culinarios como matemáticos.

Aspectos culinarios:

- Tipos de cortes patatas (Paja, Cerilla, Pont Neuf, Carré, etc,.)
- Técnica de corte empleada
- Utensilios adecuados (tipo de cuchillos)
- Variedades de patatas (Monalisa, Agria, Kennebec, etc.)
- Técnicas de cocción (Cocción simple, doble cocción, etc.)

Aspectos matemáticos:

- Tipo de poliedro (Dodecaedro rómbico estrellado o Rombododecaedro estrellado)
- Propiedades (Teselación del espacio – R. Cardil en Matemáticas visuales)
- Construcciones (Papiroflexia, Impresora 3D, Tetrabrick, etc.)
- Actividades relacionadas (Puzle Estrella).

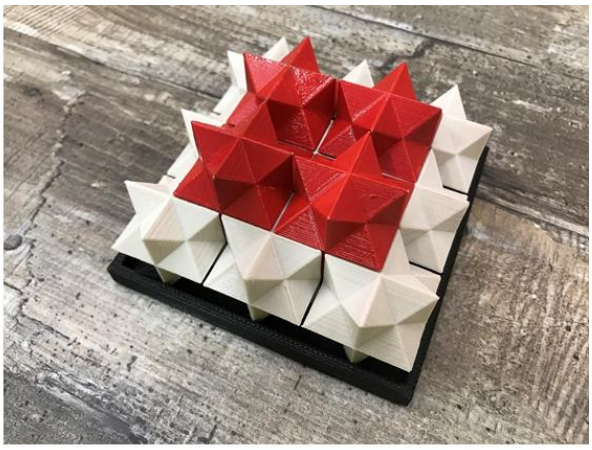


Imagen 2. Teselación del espacio con el Rombododecaedro estrellado

Fase 2: Técnica necesaria y Pruebas

- Pruebas con diferentes tipos de cortes
- Pruebas con diferentes tipos de patatas
- Pruebas con diferentes tipos de cuchillos
- Pruebas con diferentes tipos de cocciones
- Pruebas de otras propuestas encontradas en la fase de documentación
- Etc.

Imagen 3. Pruebas

Fase 3: Práctica con el modelo inicial y recetas de aprovechamiento

En esta fase nos centramos en reproducir el modelo inicial una vez tomadas todas las decisiones para lograr su ejecución con éxito. En este momento ya somos plenamente e conscientes de los contenidos matemáticos implicados y como intervienen en su realización.

Pedimos al alumnado que expliquen y representen esquemáticamente el proceso de ejecución, que se podria resumir como:

1.Cubicamos una patata.

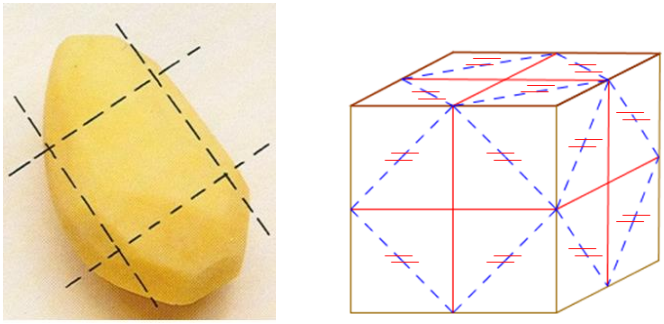


Imagen 4. Esquema de corte

2. Cortamos por los puntos medios de dos aristas paralelas de cada una de las caras del cubo, con una inclinación de 45º respecto a la vertical y en los dos sentidos, hasta llegar a una altura correspondiente a tres cuartas partes de la altura del cubo.

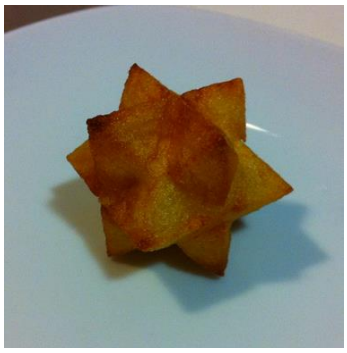


Imagen 5. Modelo inicial reproducido

Evidentemente todas las pruebas nos generan una cantidad importante de ingredientes que aprovecharemos para evolucionar en nuestros conocimientos y prácticas culinarias. Así se proponen recetas como:

- Tortilla de patatas
- Puré de patatas (Joel Robuchon)
- Pan de patata y miel (Dan Lepard)
- Etc.

En este paso los alumnos pueden hacer sus propias propuestas de recetas que después presentan a sus compañeros.

Fase 4: Propuesta propia/Evolución

Esta es una de las fases más importantes donde pedimos a los alumnos que se hagan preguntas y empiecen a hacer propuestas propias intentando responder a las preguntas del tipo: ¿Qué pasará si…? que abren procesos de exploración e investigación muy interesantes, pasando de posición de reproductores a posición de generadores de propuestas nuevas.

Así por ejemplo pueden aparecer preguntas como:

- ¿Qué pasar si cambiamos la posición de los cortes?

- ¿Qué pasará si cambiamos el ángulo de corte?
- ¿Qué pasará si cambiamos el poliedro inicial?

Así, y intentado contestar a estas preguntas se han conseguido de momento los siguientes poliedros:

Imagen 6. Nuevos poliedros generados

Siguiendo este proceso se han conseguido construir hasta el momento:

- A partir del cubo: Rombidodecaedro estrellado, Esfera atrapada en el cubo, Estrella Octángula, Cuboctaedro, Cubohemioctaedro, Octahemioctaedro.
- Se han realizado las 6 construcciones análogas tomando como poliedro de salida prismas hexagonales de diferentes alturas.

Fase 5: Más pruebas

En esta fase, y en pleno proceso de creación, se trata de aprovechar las oportunidades que se van generando de forma natural. Así por ejemplo se pudo plantear una actividad de experimentación siguiendo el ciclo propuesto por Anton Aubanell:

1. Experimentación
2. Descubrimiento
3. Conceptuación
4. Formalización y/o demostración

En este caso se aprovecha una lasca de patata para descubrir la propiedad que la suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo es siempre de 360º.

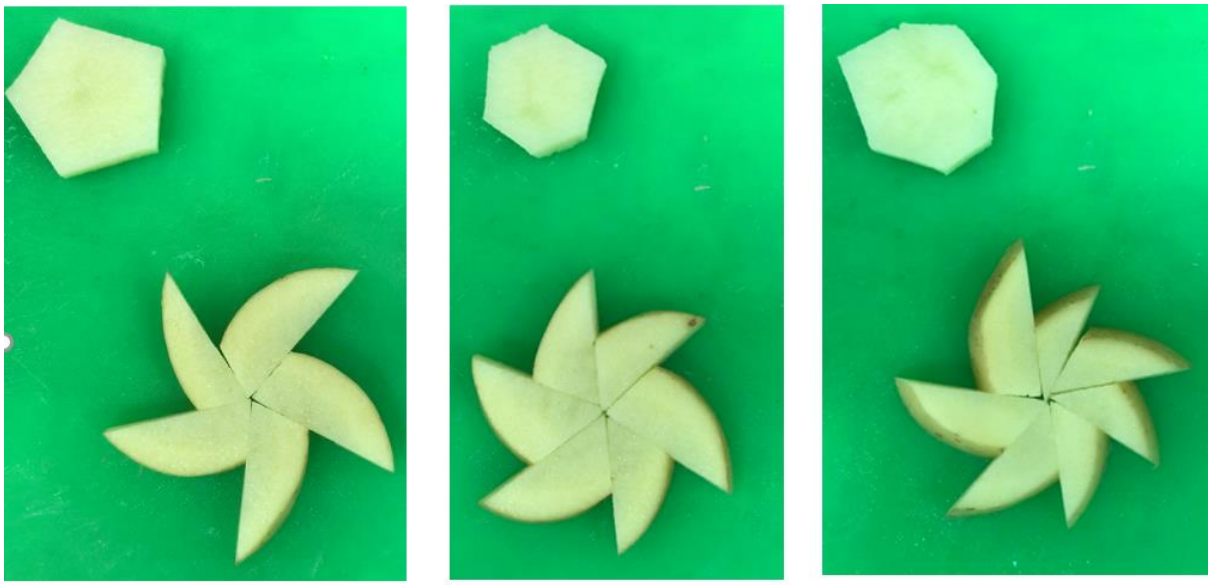


Imagen 7. Suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo

Fase 6: Propuesta definitiva y documentación (Dejar rastro)

A partir de toda la investigación realizada primero por el profesorado y después acompañando se va generando toda a la documentación de la propuesta.

Fase 7: Presentación y mejora

El taller completo se ha presentado en la Jornadas de ABEAM (Barcelona) en noviembre de 2021 y en las de ADEMGI (Girona) en marzo de 2022 como actividad de formación del profesorado.

La confección del taller está viva y se va ampliando paulatinamente a partir de nuevas propuestas. Así actualmente se está trabajando con el tetraedro regular y sus variantes.

Imagen 8. Esfera atrapada en un tetraedro

Fase 8: Aplicación didáctica

Partes del taller se han llevado al aula en un crédito variable de 1º de ESO de Cocina y matemáticas, con alumnado de 2º de ESO como actividad final de la Unidad Didáctica de Poliedros y con alumnado de Bachillerato del programa “Bojos per les Matemàtiques”.

Imagen 9. Aplicación en el aula

3. El Taller

El taller estará enfocado a formación del profesorado, explicando inicialmente la metodología de trabajo para pasar posteriormente a la creación de diferentes poliedros, entre ellos el rombododecaedro estrellado.

Para finalizar el taller se darán ejemplos de otras propuestas de matemáticas y cocina.

Referencias

Aubanell, A (2015): *Orientacions pràctiques per a la millora de la Geometria*. Quaderns d'avaluació. Consell Superior d'avaluació del Sistema Educatiu de Catalunya. nº 31, 67.

Cardil, R. Matemáticas visuales. http://www.matematicasvisuales.com/

Ibáñez, R. (2014): El rombododecaedro estrellado: arte, abejas y puzles (primera parte y segunda parte). Matemoción. Cuaderno de Cultura Científica.

Simón, Bertrand: Le pomme diamant. https://www.youtube.com/watch?v=FN8NDJYt9Sw

TaC021 La recta numérica para conocer el mundo

Xavier Fernàndez
Esc. L'Estació - Sant Feliu de Guíxols
xfernan1@xtec.cat
Tània Costa
tcosta3@xtec.cat
Escola Silvestre Santaló - Vidreres
Marta Aragüés
Esc. Pompeu Fabra - Anglès
marague2@xtec.cat
Laura Gallego
Esc. Immaculada Concepció - Lloret de Mar
lgalle3@xtec.cat

Núcleo temático: Conexiones

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria

RESUMEN

Además de ayudarnos a conocer el sistema de numeración, a comprender la relación de orden y a representar las operaciones aritméticas (Torra, M. 2006), encontramos en la recta numérica un gran recurso para ordenar y representar acontecimientos referentes a la vida de las personas y del entorno real, científico y social.

Es, por tanto, un buen recurso para conectar conocimientos matemáticos entre sí y estos con los de otras materias.

Durante el taller realizaremos 4 actividades simultáneas y una final conjunta en el exterior del aula.

Debemos citar también la colaboración de Júlia Danés (SE Alt Empordà - jdanes2@xtec.cat) en la elaboración de las actividades de este taller.

Palabras clave: Numeración, Representación, Comunicación, Conexiones, Primaria.

1. Introducción

Todos los números se pueden situar sobre la recta numérica. Esta nos proporciona una imagen ordenada de cantidades, tiempo o distancias.

A menudo necesitamos de una representación visual para intentar comprender, por ejemplo, las diferentes etapas de la historia o las distancias entre los astros del Sistema Solar. Pero nos encontramos con demasiada frecuencia con imágenes tan simplificadas que pueden inducir a error. Si cuidamos el rigor en las proporciones, la recta numérica nos permite expresar y comunicar ideas importantes referidas a las ciencias naturales y sociales, teniendo en las matemáticas el lenguaje imprescindible para ello

2. Ejemplos de actividades

Cualquier serie de acontecimientos transcurridos a lo largo de la historia y cualquier grupo de medidas diferentes pueden ordenarse y representarse sobre la recta numérica. Es importante no escatimar espacio ni material para no falsear la realidad del conjunto. Un ejemplo de error que se comete muy a menudo es intentar representar las órbitas de los planetas del sistema solar en una hoja de papel, distorsionando las proporciones “para que quepa”.

Algunos ejemplos interesantes:

- Las distancias de los astros del sistema solar
- Las etapas de la historia de la humanidad (o de alguna parte de ella)
- La evolución en la trama y personajes de una serie de televisión o saga de libros.
- Línea del tiempo de las mujeres que hicieron historia en algún campo.
- La vida de mi familia
- Mi propia vida
- …

3. Las actividades del taller

Los participantes del taller se dividirán en 4 grupos. Cada uno de ellos llevará a cabo una de las actividades siguientes y, al final, explicarán a los demás qué han hecho y qué han descubierto, tanto desde el punto de vista profesional como del alumnado que descubre. Después, todos juntos realizarán la actividad final.

3.1 La línea de mi vida

Actividad surgida en la necesidad de hacer comprender el concepto de HISTORIA a partir de la realidad del propio alumnado.

Consiste en una tira de papel, dividida en años de 12 centímetros en donde irán apuntando los años, los meses, los cursos escolares, acontecimientos importantes en su vida, el dia en que nacieron y el tiempo que se divide entre antes y después de nacer ellos (idea de “Era”) y evidencias obtenidas de la propia memoria y de fuentes directas e indirectas.

Es un trabajo muy interesante que, además, implica a las familias y que relaciona diversos ámbitos del conocimiento.

Imagen 1. La línea de mi vida.

3.2. Los anillos de un árbol

Los anillos de crecimiento de un árbol constituyen un registro de la historia, desde que plantaron el espécimen hasta que lo talaron. A partir de una sección de un cedro del Himalaya recién cortado intentaremos representar diversos acontecimientos de la historia reciente, acompañando al alumnado con buenas

preguntas. Estas se pueden referir a la naturaleza del propio árbol (cuándo lo plantaron, cuántos años tenía cuando lo talaron, en qué épocas ha habido periodos de sequía) como de la vida de las personas (sitúa tu nacimiento y el de tus familiares, los Juegos Olímpicos de Barcelona, las JAEM, el inicio de la pandemia por Covid-19…). Cada acontecimiento se representa con una pequeña banderita clavada en el tronco.

Imagen 2. Los anillos de un árbol.

3.3 Ordenar recipientes

La comprensión del Sistema Métrico no siempre resulta sencilla, especialmente cuando hablamos de volúmenes y capacidades. Además de comparar diferentes recipientes traspasando fluidos de uno a otro y buscando equivalencias, podemos ordenar los resultados sobre la recta numérica. Relacionamos la longitud (cintas métricas) con las diferentes capacidades (recipientes) y volúmenes (bloques multibase) con la convención de colocar 1L a 1m de distancia del origen.

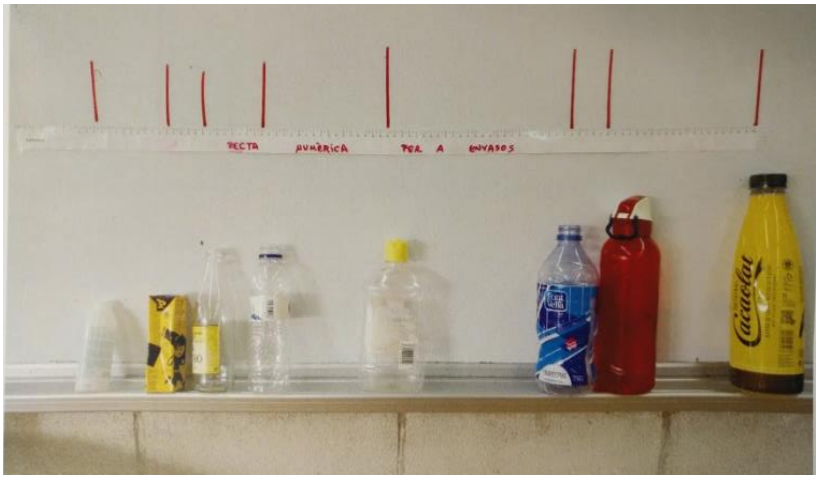


Imagen 3. Ordenamos recipientes.

3.4 Cronograma familiar

En un papel grande representarán su propia vida y la de los familiares más cercanos con serpentinas, incluyendo aquellos que hayan fallecido. Hay que pactar qué longitud representa un año y preparar el marco. También hay que pactar qué familiares se incluyen y cuáles no, dependiendo de la estructura de cada familia.

Podemos descubrir muchas cosas a partir de la representación creada y planteamos preguntas sugerentes…

¿Qué material necesitamos? ¿Qué longitud de papel?

¿Quién vivió a lo largo de 2 siglos? En las Navidades del año….., ¿cuántos se sentaron a la mesa? ¿Cuántos eran niños?

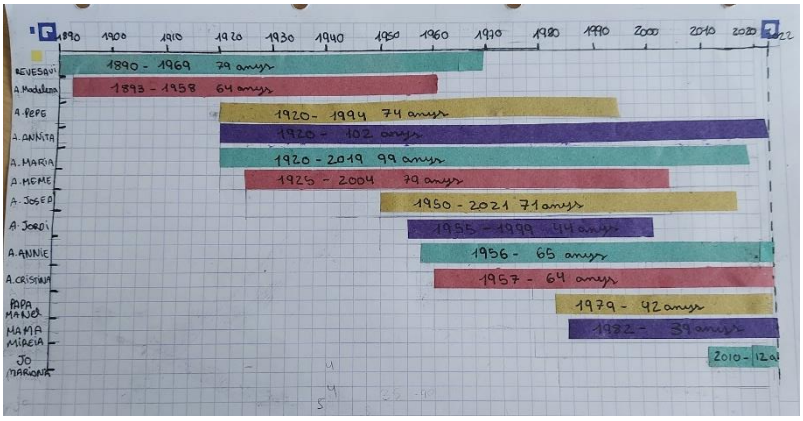


Imagen 4. Cronograma familiar.

3.5 Actividad final: la evolución de la vida en la Tierra

Después de poner en común las actividades realizadas, saldremos al pasillo para colocar sobre una cinta de 12 metros de largo imágenes y textos que describen la evolución de la vida en nuestro planeta. Una vez colocado todo el material, caminamos a lo largo de la cinta lentamente, leyendo e interiorizando sucesos y distancia en el tiempo, con la intención consciente de aprender. La proporción es clave para comprender el paso del tiempo. Así pueden observar cómo se precipitan los acontecimientos cuando estamos en épocas más recientes.

Imagen 5 Caminamos a lo largo de la historia natural de la Tierra.

4. Conclusiones

Tenemos en la recta numérica un buen recurso matemático (material+actividad rica) para comprender la propia realidad y la del mundo que nos rodea. Proporciona modelos comprensibles para nuestro alumnado y permite que sean ellos mismos los que construyan dichas representaciones.

Es importante no escatimar material ni espacio en aras de una buena comprensión. Si representamos la historia de la humanidad en el pasillo más largo del centro y lo caminamos veremos que la mayor parte del recorrido corresponde a la etapa Depredadora (cazadores - recolectores) y que la mayoría de los grandes cambios causados en la Tierra por los humanos se han producido muy recientemente.

También es importante partir de la realidad de cada alumno y verbalizar siempre que se pueda lo que van descubriendo, viendo qué es peculiar y qué es generalizable.

También consideramos muy importante enfatizar antes, durante y al final de la actividad cuál es la intención última de la misma y en dónde tienen que poner más atención.

Referencias

Torra, M. (2006). *La recta numèrica, una representació per aprendre els nombres.* Monogràfic competències matemàtiques . Guix, nº 329. Novembre 2006

TaC022 Gincana matemática

Joan Folguera Farré
jfolgue2@xtec.cat
Ins Samuel Gilii Gaya y MMACA (Museo de matemáticas de Cataluña)

Núcleo temático: Recursos para el aula y Conexiones.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

La finalidad de este taller es mostrar a los asistentes la gincana matemática con material manipulativo que se realiza en mi centro con alumnos de primero de ESO, y a su vez, hacer partícipes de esta actividad a los asistentes. Ellos realizarán algunas actividades.

Los alumnos realizan 18 actividades ludicomatemáticas y algún juego estratégico utilizando material manipulativo muy fácil de construir.

En el taller habrá un vídeo corto mostrando todas las actividades que hacen los alumnos. Después se explican, con la ayuda de una presentación, algunas actividades, y al mismo tiempo, se ponen en práctica algunas de ellas.

Se pretende que algún asistente se anime a hacer una gincana similar en su centro

Palabras clave: Juegos Matemáticos, Geometría, Aritmética, Desencriptar.

GINCANA MATEMÁTICA

1. Descripción

El taller consiste en explicar varias actividades de una gincana matemática y poner en práctica alguno de estos ejercicios. En el patio de nuestro centro tenemos la suerte de tener una pista deportiva completa, campo de fútbol, de baloncesto y pista de atletismo, y utilizamos dicha pista para desarrollar la gincana.

El autor de este taller, ha realizado esta actividad con todos los alumnos de primero de ESO de su centro durante varios años. Los alumnos se dividen en grupos de 8 o 9 personas y han de completar durante 2 horas el máximo número de pruebas. La gincana consiste en realizar diversas actividades ludicomatemáticas para una mejor comprensión de temas matemáticos. Después de hacer estas actividades se recomienda al profesorado que repase en clase algunos de estos conceptos.

Hay algunas actividades de carácter aritmético como por ejemplo los cuatro cuatros, se trata de escribir los números del 0 al 10 utilizando operaciones combinados y exactamente cuatro cuatros, hay 2 puzles, uno de descomposición en factores primos y otro de fracciones. Las piezas de estos dos puzles las han construido los alumnos con piezas de madera.

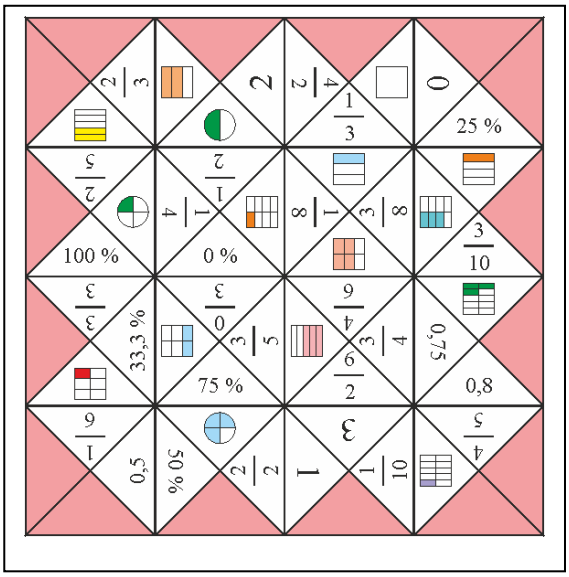


Imagen 35. Puzle de fracciones

Hay otras actividades de juegos matemáticos, por ejemplo, la construcción de un triángulo matemático, utilizando los números del 1 al 9 de manera que los cuatro números que hay en cada lado sumen lo mismo. Un reto de Martin Gardner. El juego de las ranas y el juego de los rascacielos. También hay un juego en el que se utilizan fichas de dominó, y en el que la suma de determinadas filas o columnas tiene que dar unos números predeterminados.

Imagen 2. Los rascacielos

Hay ejercicios geométricos, como, por ejemplo, la carrera del metro cúbico, que consiste en construir un metro cúbico y hacer una carrera de unos 50 metros, y después ponerse todo el equipo dentro del metro cúbico. En esta prueba se trata de concienciar al alumno de lo enorme que es el metro cúbico. La construcción del triángulo de Sierpinsky es otra actividad que realizan con piezas de madera que construyeron los alumnos de primero de ESO en el aula de tecnología. Otra actividad es aproximar el número pi, aprovechando el círculo central de la pista de baloncesto. Y también, se mide con fichas de parchís.

Imagen 3. Carrera del metro cúbico

Hay actividades de criptología, como por ejemplo descifrar varios mensajes utilizando una rueda numérica o utilizando unas plantillas cuadradas.

Otras actividades diversas como juegos con cuerdas, una actividad de palíndromos y un anamorfismo.

Todas las actividades se mostrarán en un vídeo de dos minutos de duración. Algunas actividades se explicarán con una presentación y varias de ellas las emularán los asistentes como si fueran los alumnos.

2. Actividades que harán los asistentes

Harán la prueba de los cuatro cuatros, en la que no hace faltan ningún material y se trata de poner los números del 0 al 9 utilizando exactamente cuatro cuatros, por ejemplo 1 = 4 – 4 + 4/ 4, o el 3 = (4 + 4 + 4) / 4. Hay muchas soluciones y han de encontrar alguna.

La prueba del dominó. En un tablero, deben de poner 4 fichas dobles de dominó de manera que la suma de filas y columnas dé el resultado predeterminado. El autor traerá las fichas de dominó y los tableros.

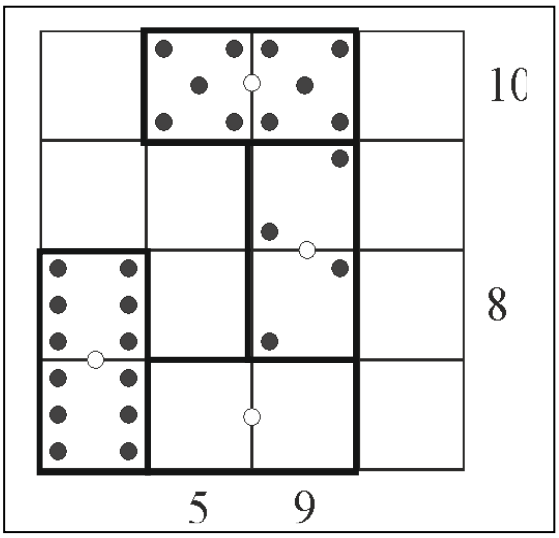


Imagen 4. Ejemplo de prueba del dominó

Los asistentes también desencriptarán tres mensajes con una rueda alfabética. El autor traerá el material necesario, la hoja de los ejercicios y las ruedas para desencriptar los mensajes

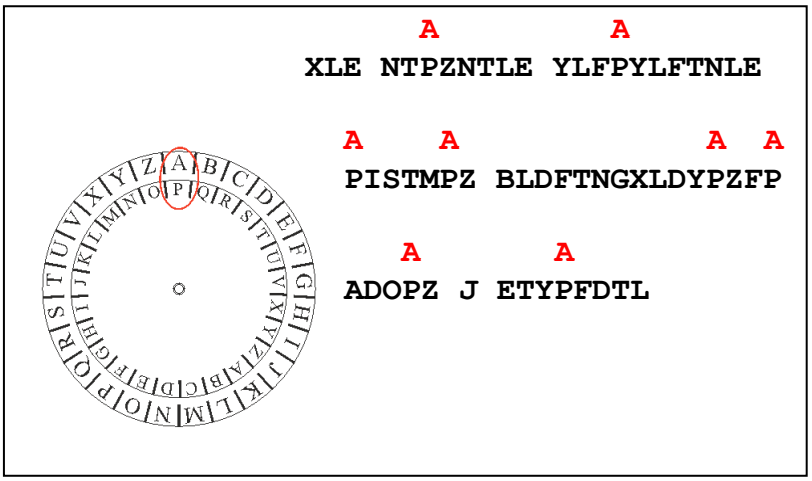


Imagen 5. Mensaje para desencriptar con la rueda

El mensaje oculto es: “Las ciencias matemáticas exhiben particularmente orden y simetría”

Imagen 6. Alumnos desencriptando los mensajes

Otra practica consiste en desencriptar mensajes utilizando una plantilla hecha con cartulina. Hay tres mensajes ocultos y tres plantillas, una para cada mensaje, se trata de dar giros de 90º para desencriptar el mensaje completo

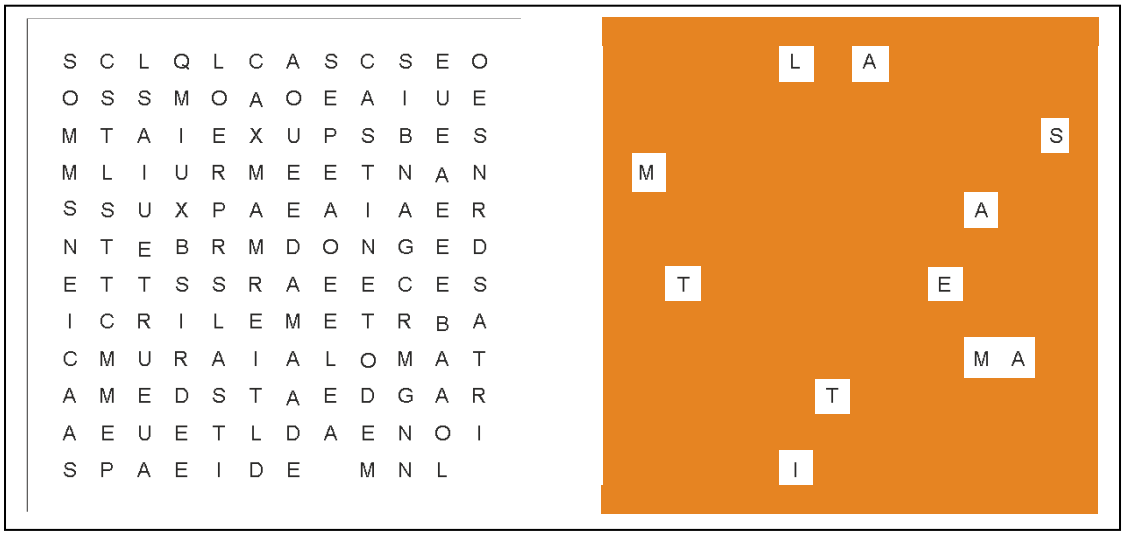


Imagen 7. Mensajes ocultos y plantilla para desencriptarlos

Con la plantilla se puede leer: “Las matemati”

El texto completo es: “La esencia de las matemáticas reside en su libertad”

Con las otras dos plantillas se pueden leer otros dos textos.

Otra actividad es el juego de los rascacielos. Se trata de poner en una plantilla cuadriculada de 4 x 4 cuadrados, casas de diferentes alturas: 1 piso, 2 pisos, 3 pisos y 4 pisos, de manera que en cada calle vertical hay los cuatro tipos de casa, una de cada clase, lo mismo en cada calle horizontal: Los números que hay en el entorno del tablero indican las casa que vería un observador si estuviera en la calle. Evidentemente, una casa alta tapa la casa pequeña que hay detrás, sin embargo, una casa baja permite ver la casa más alta que hay detrás de ella.

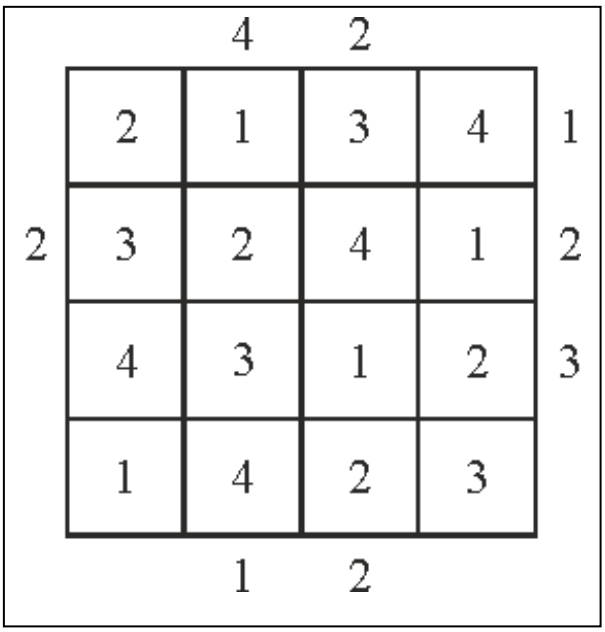


Imagen 8. Ejemplo de juego del rascacielos resuelto

En esta actividad los números de dentro de la cuadrícula significan que el 1 es la casa más baja y el 4 es la más alta. Los asistentes tendrán que poner los números internos.

Los números externos significa el número de casas que puede ver un observador, por ejemplo, el 3 de la derecha significa que un observador puede ver la casa 2, 3 y 4, no puede ver la 1 porque la tapa la casa 2. Estos números ya están impresos.

Actividad de los palíndromos: se trata de completar frases con palíndromos en diversos idiomas (castellano e inglés). Por ejemplo: completar las frases: “Se van sus … “ , “ No melon … “

Las soluciones son “Se van sus naves” y “No melon, no lemon”

La actividad del anamorfismo. Se trata de leer un mensaje deformado y se trata de saber cuál es la mejor forma donde hay que situar nuestro ojo para ver el mensaje.

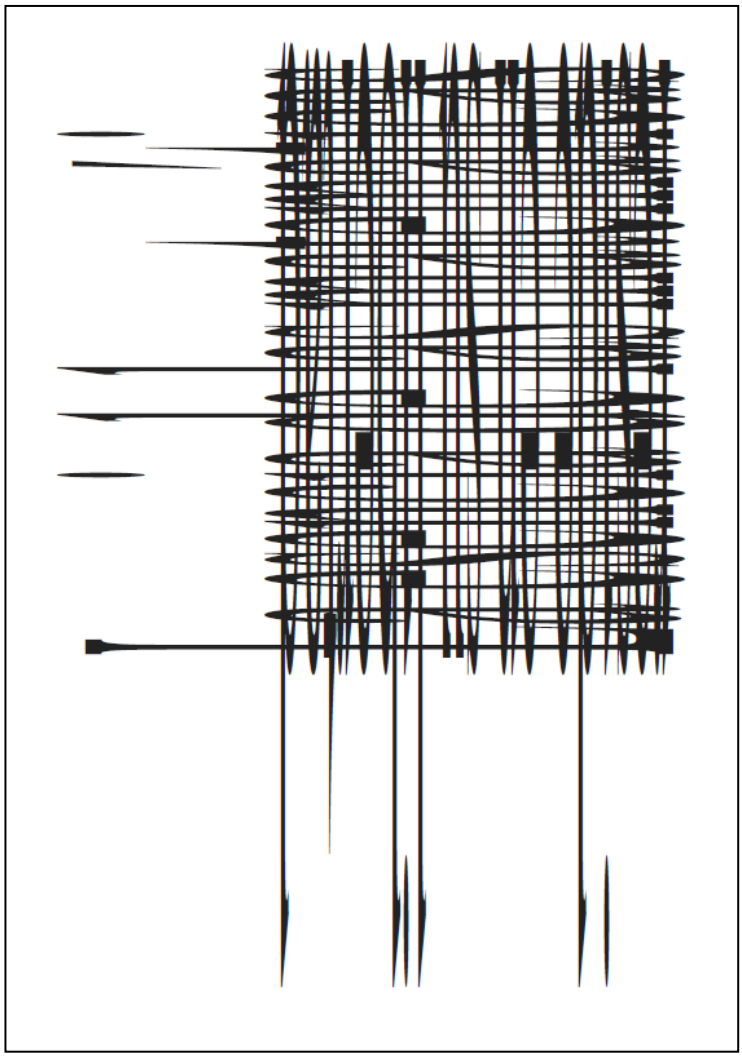


Imagen 9. Anamorfismo

Se puede leer el mensaje anterior: “La esencia de las matemáticas reside en su libertad”

Para acabar tenemos el salto de la rana que consiste en 7 cuadrados alineados. Se coloca una ficha de un color, por ejemplo, rojo, en las tres casillas de la derecha, y

una ficha de otro color, por ejemplo, verde, en las tres casillas de la izquierda y la casilla central queda vacía. El juego consiste en hacer correr las tres fichas rojas hacia las tres casillas de la izquierda y las verdes a las de la derecha, de manera que una ficha, solo se puede mover hacia adelante, se puede mover si la casilla adyacente que tiene delante, está vacía o puede saltar una ficha de otro color, si la casilla siguiente está vacía. Para esta actividad hacen falta fichas de parchís y tableros que el autor del taller llevará el día de la exposición. En la gincana, hay alumnos que hacen de ficha poniéndose un peto, hay petos de dos colores.

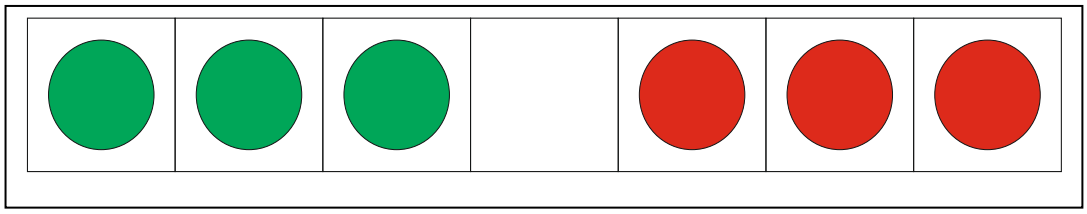


Imagen 10. Posición inicial del juego de la rana

En cada actividad antes de su resolución se pondrá un ejemplo para su mejor comprensión

3. Temporización

- 10–15 minutos para el vídeo y explicaciones con la presentación.
- 10 minutos los cuatros.
- 5 minutos el dominó.
- 20 minutos las dos actividades de desencriptar.
- 5 minutos el juego de los rascacielos.
- 5 minutos los palíndromos.
- 5 minutos el anamorfismo.
- 10 minutos el salto de la rana.

En total unos 75 minutos para hacer todas las actividades.

No he puesto ninguna referencia ya que para hacer este escrito me he basado en la gincana que hace 10 años hacemos en mi instituto y me sé todas las actividades de memoria y no he consultado ningún libro ni ninguna página web.

TaC101 Magia para enseñar Matemáticas o viceversa

Sergio Belmonte Palmero
sergio.belmonte@mmaca.cat
Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA)

Núcleo temático: Conexiones, Recursos para el aula

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato

RESUMEN

La magia despierta curiosidad y la curiosidad es el camino más directo para la motivación interna del aprendizaje. Así, en este taller se verá cómo aplicar la magia como recurso didáctico para aprender conceptos matemáticos. Se enseñarán los elementos básicos para elaborar un guion de magia (es un arte teatral), se realizarán los efectos mágicos y se harán las actividades matemáticas a partir de los mismos.

El objetivo del taller es dotar al profesorado de un recurso atractivo y potente para crear actividades matemáticas. Geometría, álgebra, aritmética y probabilidad son bloques que se pueden trabajar con este recurso. Este taller es de carácter absolutamente práctico.

***Palabras clave**: Magia, Recurso, Curiosidad.*

1. LA MAGIA EN EL AULA

La magia como recurso didáctico podemos decir que ya no es un recurso muy novedoso, puesto que lleva años aplicándose en las aulas como parte del arsenal pedagógico del profesorado. A través de los últimos años y gracias a nombres tan ilustres como Fernando Blasco, Miquel Duran, Pedro Alegría, la gente de Divermates y un servidor mismo, entre otros, se ha fomentado el uso de esta

disciplina -la magia- al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas como elemento motivador y atractivo.

Ya ha habido varias iniciativas y estudios tanto nacionales como internacionales que sustentan su validez y utilidad (ver Referencias [5], [6] y [9] a modo de ejemplo) y que lo convierten en un recurso didáctico a tener muy en cuenta. Iniciativas como los "*Encuentros de Ciencia, Magia y Educación*" coordinados por Fernando Blasco y Miquel Duran han hecho que este recurso esté cada vez más extendido.

1.1 POR QUÉ.

¿A quién no le gusta la magia? Quién no se ha preguntado alguna vez " ¿y eso cómo se hace?". De hecho, esta es la misma pregunta que se hacen los matemáticos ante un problema. Así, aprovechando todas las características intrínsecas que aporta la magia (sorpresa, descubrimiento, admiración, curiosidad) se transforma esta en un magnífico recurso didáctico para realizar actividades matemáticas con el alumnado.

La curiosidad es el camino más directo para la motivación interna del aprendizaje y en este sentido la magia aporta un "plus", ya que juega con las emociones de los asistentes. No hay persona que no se sienta atraída en mayor o menor medida por lo imposible, por lo desconocido y así, con la magia se despierta la curiosidad innata de saber "cómo se ha hecho eso". Claro está que si la explicación es matemática, tenemos la herramienta ideal para generar una buena expectativa de aprendizaje en el alumnado.

1.2 CÓMO

El proceso de aprendizaje de la Magia tiene un paralelismo con el aprendizaje de las matemáticas y en particular, con la resolución de problemas, piedra angular en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

El proceso para la magia sería, *grosso modo*:

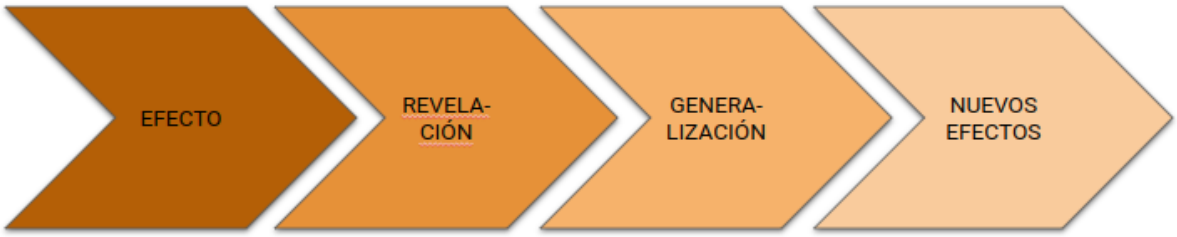


Imagen 1: Esquema aprendizaje magia

Es decir, en magia, observamos un efecto. A partir de este, aprendemos cómo se realiza (revelación) y para ello se necesitará aprender nuevas técnicas, nuevos conceptos mágicos. Estas nuevas técnicas y conceptos, una vez interiorizados, los podremos utilizar en otros contextos y/o otros efectos, lo que finalmente nos llevará a la posibilidad de creación de nuevos efectos de magia.

En matemáticas, el proceso es similar:

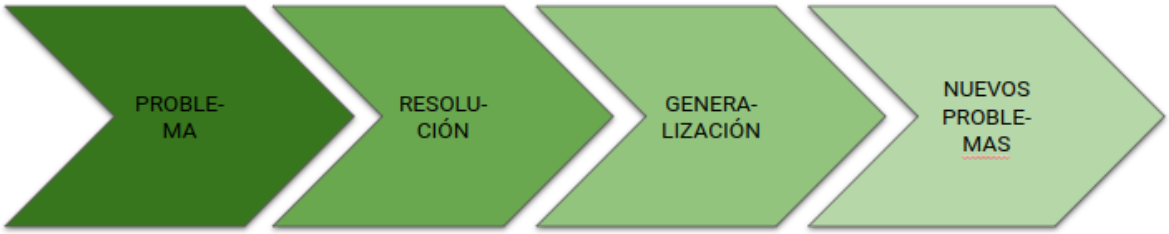


Imagen 2: Esquema aprendizaje Matemáticas

Así, de forma similar a lo que pasa con la magia, partiendo de un problema nuevo, buscamos la resolución del mismo y aprendemos nuevas técnicas o conceptos matemáticos, los cuales podemos aplicar a otros contextos para resolver o crear nuevos problemas.

Además, el motor que hace querer aprender un juego de magia es absolutamente genuino, es decir, no obedece a una utilidad práctica, si no a la pura curiosidad innata.

Como hemos dicho, la magia aplicada a la enseñanza de las matemáticas tiene algunas ventajas que la convierten en un recursos excelente: generar emociones, así como despertar la curiosidad son elementos fundamentales para el aprendizaje significativo.

En contrapartida, es un recurso que debe introducirse en su justa medida ya que es fácil quedarse en el efecto mágico, en la superficie y no ahondar en lo verdaderamente importante a nivel didáctico: el aprendizaje de los conceptos matemáticos a trabajar. Así que, una vez pasado el momento de sorpresa al presentar el efecto, se debe guiar al alumnado de forma adecuada durante la actividad matemática aprovechando la curiosidad que despertará el mismo efecto de magia.

2. ESTRUCTURA DEL TALLER

2.1. Introducción y recursos disponibles.

Explicación del desarrollo del taller y de los beneficios de la aplicación de la magia como recurso didáctico para el aprendizaje de las matemáticas, que se han comentado en el apartado anterior.

Presentación de la web www.magiaymatematicas.com (del autor del taller, Sergio Belmonte) donde están recogidos artículos de investigación matemática sobre

principios y efectos mágicos, y también recursos online y libros recomendados con actividades relacionadas.

2.2. Elementos básicos de la magia.

Breve introducción a la teoría mágica y en los aspectos más importantes a la hora de presentar este recurso en forma de efecto de magia: Teoría de los “5 puntos” de Juan Tamariz:

Imagen 3. Portada e ilustración del libro “Los cinco puntos mágicos” de Juan Tamariz

Explicación de algunos elementos básicos para la elaboración de un guión mágico (involucrar al espectador en la historia, temas universales, emociones, experiencias personales, etc.) y breve introducción a los diferentes enfoques mágicos en la elaboración de un efecto: magia realista, magia metafórica, magia ficcional, etc...

A continuación, se presentarán algunos ejemplos y actividades de aula.

2.3. Efecto 1: “El triángulo de las Bermudas”

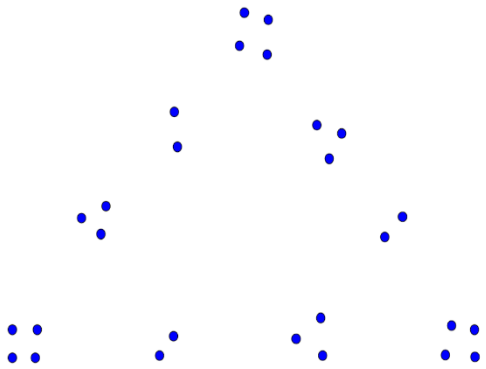
MATERIAL NECESARIO

Lápiz y papel.

Garbanzos, fichas, monedas, bolitas de papel o cualquier elemento pequeño que sirva para contar.

PRESENTACIÓN DEL EFECTO

El mago explica qué es el Triángulo de las Bermudas y porqué es famoso (se dice



que desaparecían barcos y aviones misteriosamente). Se insiste en que el triángulo es prácticamente equilátero y se procede a reproducir un triángulo de las Bermudas "casero" utilizando garbanzos dispuestos así:

Imagen 4: Disposición inicial de los garbanzos

Se comprueba que efectivamente hay 13 garbanzos en cada lado del triángulo (triángulo equilátero).

Ahora el espectador coloca un garbanzo en cualquiera de los montoncitos que hay. El mago realiza varios movimientos con los garbanzos y se comprueba que vuelven a haber 13 garbanzos en cada lado…¡ha desaparecido un garbanzo del triángulo!

Se realiza lo mismo dos veces más con idéntico resultado: da igual dónde coloque el espectador el garbanzo, que siempre desaparece.

DESCUBRIMOS CÓMO FUNCIONA.

Se disponen los alumnos por parejas, y se deja que debatan qué creen que ha pasado y cómo piensan que se hace el juego. Entre todos los grupos, se ponen en común las ideas aportadas y se descartan las menos “lógicas” comentando y destacando las “buenas ideas”.

Actividad 1.

Lo primero que se hará será analizar el triángulo y la disposición de los garbanzos. Cada grupo debe colocar los garbanzos en su mesa de la forma que se ha mostrado en el efecto de magia (es decir, en cada lado hay dos grupos de 4 garbanzos, uno de 3 y uno de 2). De esta manera, hay 13 garbanzos en cada lado (ver Imagen 4)

Ahora deben responder a las preguntas siguientes:

Al contar 13 garbanzos en cada lado, parece que hay 39 garbanzos en total, pero ¿cuántos garbanzos hay en realidad? ¿A qué se debe esto?

Actividad 2.

Ahora analizaremos los diferentes movimientos de garbanzos que se pueden realizar y cómo afectan a la cuenta de cada lado.

Se deja que cada grupo realice un debate sobre cuántas maneras se puede mover 1 garbanzo de un montón a otro y luego se ponen en común. Pueden utilizar dibujos o diagramas para expresarlo.

Ahora deberán estudiar qué provoca cada movimiento en el resultado de cada lado. Inicialmente, Lado “a” = Lado “b” = Lado “c” = 13. Se debe realizar cada movimiento partiendo de la situación inicial y anotar cuántos garbanzos quedan en cada lado. Para ello deben rellenar la siguiente tabla:

Recuento después mover 1 garbanzo	**Lado “a”**	**Lado “b”**	**Lado “c”**
Movimiento 1)	13	13	13
Movimiento 2)			
Movimiento 3)			
Movimiento 4)			12
Movimiento 5)	14		
Movimiento 6)			
Movimiento 7)			

Tabla 1

A la vista de la tabla, responde:

¿Qué movimientos son útiles para el efecto de magia de hacer desaparecer el garbanzo que pone el espectador? ¿Por qué?

Ahora explica qué movimientos se pueden hacer para conseguir tener el mismo número de garbanzos (13) en cada lado:

a) Si el espectador añade un garbanzo en un montón de los del medio.

b) Si el espectador añade un garbanzo en un vértice.

¿Puedes explicar ahora con detalle cómo ha realizado el mago el efecto de magia, es decir, cómo ha hecho “desaparecer” el garbanzo colocado por el espectador?

GENERALIZACIÓN

Cada grupo debe resolver las siguientes cuestiones:

¿Es necesario tener 13 garbanzos en cada lado? ¿Se puede hacer el efecto de magia con un número diferente? ¿Y con un número diferente de montones? ¿Por qué?

¿Se puede hacer con un cuadrado, es decir, podríamos hacer un «Cuadrado de las Bermudas»? ¿y un «Pentágono de las Bermudas»? ¿Y, en general, un «Polígono de Bermudas»?

En el efecto inicial con 13 garbanzos y cuatro montones en cada lado:

¿Cuál es el mínimo número de garbanzos que necesitamos para poder realizar el efecto?

¿Cuál es el número máximo de garbanzos que el espectador puede colocar para que el efecto se pueda hacer (es decir, cuántas veces se puede repetir el efecto de magia)?

¿Se podría realizar el efecto de magia pero al revés (es decir, que el espectador quite un garbanzo de uno de los montones y que el mago lo haga “aparecer”)?

PARA IR MÁS ALLÁ...

Se pueden estudiar las preguntas anteriores (número mínimo y máximo de garbanzos) para otras disposiciones o número de garbanzos diferentes.

Para un nivel más avanzado, también se puede escribir el sistema de ecuaciones relacionado con el juego (cada incógnita sería en número de garbanzos en cada

montón) y estudiar las posibles soluciones. Para ello se puede utilizar algún programa informático o calculadora (https://matrixcalc.org/es/slu.html).

CREACIÓN DE TU PROPIO EFECTO

Ahora se trata de que cada grupo cree su propio guión y su propio efecto de magia. ¡Importante! No puede ser igual que el que presentó el mago, debe ser diferente. La idea es que cada grupo invente un guión y utilice las propiedades que se han visto para el efecto de magia (diferente número de garbanzos, diferentes polígonos, diferentes montones, poner o quitar garbanzos, hacer diferentes movimientos de garbanzos, etc). Lo deben ensayar y preparar bien para después exponerlo a la clase.

Una alternativa es que lo puedan grabar en vídeo haciéndolo a otras personas (familia, amigos, etc) y luego visualizar los efectos en clase.

También se puede realizar una votación para elegir al mejor efecto de magia.

2.4. Efecto 2: “El destino está en tus manos”

MATERIAL NECESARIO

Lápiz y papel.

Baraja de cartas de póquer.

Plantilla del “mapa” de las cartas.

PRESENTACIÓN DEL EFECTO

El mago habla del destino y le pregunta a un voluntario si piensa que está escrito o no. Para comprobarlo, el mago saca una cuadrícula que será como un “mapa” por donde se caminará:

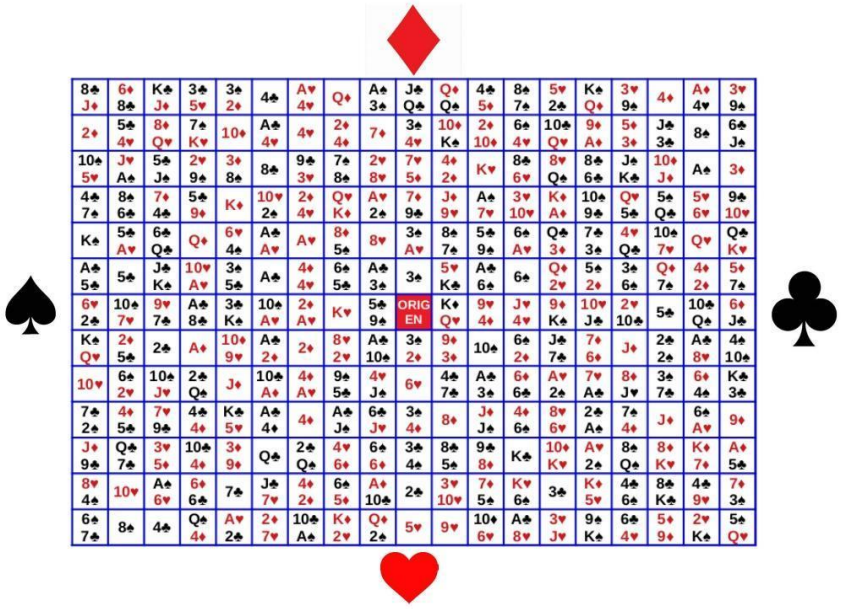


Imagen 5. Cuadrícula con las cartas

De una baraja de cartas, se sacan 8 cartas de la baraja y se le dice al espectador que las mezcle bien y que elija una carta o dos, sin mirarlas. El resto de cartas, marcarán el «camino de su destino».

Se le explica que los palos indicarán la dirección a tomar y el valor de cada carta indicará el número de pasos que se deberán dar. Se empieza, donde pone “Origen”.

De este modo, el espectador va desvelando cartas y se mueve por la cuadrícula en la dirección que indica cada carta (se empieza un movimiento donde se ha terminado el último). Cuando ya haya hecho todo el camino siguiendo las cartas, habrá parado en un cuadradito que indica dos cartas (o una) ..... sorprendentemente son las cartas que había elegido el espectador inicialmente. ¿Estará el destino escrito?

DESCUBRIMOS CÓMO FUNCIONA.

Se coloca al alumnado en grupos de 2 o 3 personas. Se les deja que piensen cómo se ha hecho y que expongan sus hipótesis mediante la elección de un vocal.

Las 8 cartas utilizadas en el efecto son:

3 Picas, 6 Picas, As Corazones, 4 Corazones, As Tréboles, 5 Tréboles, 2 Diamantes, 4 Diamantes.

Lo que se hace en el efecto de magia es convertir cada carta en un vector y la cuadrícula son los ejes de coordenadas (el As es un 1). Responde a las cuestiones:

Indica para cada carta cuáles son sus coordenadas, así como su módulo y argumento.

CARTA	**VECTOR**	**MÓDULO**	**ARGUMENTO**
3P	(-3,0)	3	180º
6P	(-6,0)	6	180º
AC	(0,-1)	1	270º
4C	(0,-4)	4	270º
AT	(1,0)	1	0º
5T	(5,0)	5	0º
2D	(0,2)	2	90º
4D	(0,4)	4	90º

Tabla 2

Con este concepto, ¿qué operación se hace con los vectores al “ir avanzando” con las cartas?

Si avanzamos con el 3P, 4C y AT, ¿a dónde se irá a parar? ¿Importa el orden? ¿Por qué?

Imaginemos que las cartas elegidas por el espectador son el 2D y el 6P. ¿Dónde se iría a parar con el resto de cartas?

¿Y si elige el 3P y AC?

¿Y si solamente elige el 5T?

¿Puedes ahora dar una explicación al efecto de magia? ¿Es decir, cómo se ha creado la cuadrícula?

GENERALIZACIÓN

ACTIVIDAD 1

Con las 8 cartas, ¿cuántas combinaciones de elegir dos cartas tiene el espectador? ¿Y una? ¿Cuántas combinaciones tienen en total el espectador para elegir?

La cuadrícula está hecha para esas 8 cartas, ¿qué deben cumplir las cartas para que se pueda crear la cuadrícula?

Utiliza una calculadora vectorial como esta: https://www.newtondreams.com/fisica/calculadora_vectores/ para calcular todos los resultados posibles para la elección del espectador. (también puedes utilizar https://www.geogebra.org)

ACTIVIDAD 2

Ahora crearás tu propia cuadrícula:

Elige 4 cartas de forma que se pueda realizar el efecto de magia. ¿Qué deben cumplir?

¿Puedes elegir cualesquiera 4 cartas?

¿Hay alguna combinación que sea incompatible? ¿Por qué?

Ahora dibuja una cuadrícula para que funcione el efecto de magia con esas 4 cartas que elegiste. ¿De qué depende el tamaño de la cuadrícula?

ACTIVIDAD 3

Para el alumnado más aventajado, se puede pedir que creen el efecto de magia (la cuadrícula) usando más cartas.

CREACIÓN DE TU PROPIO EFECTO

Ahora se trata de que cada grupo cree su propio guión y su propio efecto de magia. ¡Importante! No puede ser igual que el que presentó el mago, debe ser diferente. Deben crear su propia cuadrícula con un número diferente de cartas, o por ejemplo, usar flechas y números en lugar de cartas de póquer, etc… La idea es que cada grupo invente un guión y unas instrucciones para el efecto de magia. Lo deben ensayar y preparar bien para después exponerlo a la clase.

Una alternativa es que lo puedan grabar en vídeo haciéndolo a otras personas (familia, amigos, etc) y luego visualizar los efectos en clase.

También se puede realizar una votación para elegir al mejor efecto de magia.

3. UN INTERÉS CRECIENTE

También entre el alumnado ha habido un interés creciente en los últimos años en la relación entre la magia y las matemáticas, y cómo interviene una en la otra. Cada año, varios “Treballs de recerca” (trabajos de investigación) que debe realizar todo el alumnado durante el Bachillerato se centran en el tema de magia y matemáticas y en su relación. También algunos trabajos de fin de máster en relación a la didáctica de las matemáticas se han encaminado en esta dirección (ver referencias [3] y [4] a modo de ejemplo), y en ver y comprobar cómo este recurso es cada vez más utilizado en el aula y con cierto éxito.

Referencias

[1] Belmonte, Sergio. Blog www.magiaymatematicas.com

[2] Blasco, Fernando (2016). “Matemagia”. Colección Temas de hoy. Ed. Planeta.

[3] Espinosa Montoya, Javier (2020) TFM “La matemagia como estrategia de la mejora de la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria”. Barcelona

[4] García Cabrero, Alberto (2021) TFM “Matemagia: Números y Álgebra”. Valladolid.

[5] Gann, David (2005). “Magic by numbers”

[6] Maldonado Silva, Manuel Ángel (2013). “La magia como recurso educativo en el aula de matemáticas de 1º de ESO. La MateMagia.”

[7] Ruíz, Xuxo(2013). “Educando con magia”. Ed. Narcea. Madrid

[8] Teixera, Ricardo V. Park, Jang-Woo (2020). “Mathemagics. A magical journey through advanced mathematics”. Ed. World Scientific. Singapur.

[9] Unicef, Gobierno de Tucumán (2019). “Como sorprender haciendo magia?”

TaA002 Geogebra y Evaluación

Juan Francisco Hernández Rodríguez
juanfisicahzrz@gmail.com
Colegio Hispano Inglés
Rambla de Santa Cruz, 94
38004 Santa Cruz de Tenerife

Núcleo temático: Evaluación, recursos para el aula.

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato

RESUMEN

Geogebra se ha convertido en una de las mejores herramientas para el Aprendizaje Basado en Proyectos (y para la evaluación) en el área de matemáticas ya que, por un lado, agiliza que los alumnos lleven a cabo un proceso de investigación y, por otro, fomenta la creación de productos de enorme calidad. Esto ha permitido también "dar la vuelta" al proceso de evaluación dando más peso a las actividades que realizan en clase que a los exámenes. ***La mejor manera de mostrarlo es con ejemplos reales de lo que hacemos en clase***.

. Palabras clave: Geogebra, Aprendizaje, Competencia, Evaluación, Matemáticas.

5. Resultados obtenidos

He comprobado que la utilización de Geogebra:

- Ayuda a captar el interés del alumnado enseñando de manera entretenida y divertida los conocimientos matemáticos.
- Es perfecta para la preproducción de los videos de matemáticas: ayuda en la planificación y en la preparación del guion para la grabación del vídeo.
- En el momento de la grabación, simplifica la explicación de los conceptos matemáticos y, de hecho, crea una mayor conexión emocional. Así, se puede afirmar que Geogebra es el "storytelling de las matemáticas".

- A la hora de explicar en el aula, supone una mejora significativa en el nivel de comprensión matemática del alumnado pues les ayuda a comprender las razones de los procedimientos matemáticos.
- Se ha convertido, además, en una de las mejores herramientas para el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP / PBL) en el área de matemáticas ya que, por un lado, agiliza que los alumnos lleven a cabo un proceso de investigación y, por otro, fomenta la creación de productos de enorme calidad.
- Es una pieza clave en el proceso de evaluación.

6. Objetivos del taller:

a. Conocer cómo usar Geogebra para el proceso de evaluación.
b. Entender cómo Geogebra propicia un cambio en la forma de evaluar.
c. Conocer el modelo de Aprendizaje Basado en Proyectos y cómo aplicarlo en nuestra práctica docente utilizando Geogebra.
d. Conocer las ventajas que ofrece Geogebra dentro del ABP.
e. Utilizar Geogebra como una herramienta fundamental del Storytelling.
f. Planificar un proyecto ABP haciendo uso de Geogebra.

7. Cronograma

CRONOGRAMA TALLER GEOGEBRA Y EVALUACIÓN	
Geogebra y Evaluación	Intervalo tiempo
Presentación del taller	10 minutos
Activación del profesorado: ¿Dónde nos encontramos? ¿a dónde queremos llegar? Testimonios de alumnos sobre el uso de Geogebra.	10 minutos
Vivenciar el desarrollo de un ABP con Geogebra: Ejemplos. Recreación de un ABP usando Geogebra. La evaluación usando Geogebra	30 minutos
Concreción: Elaboración de un ABP por parte de los participantes en el que	30 minutos

Geogebra tenga un papel predominante Cuaderno de evaluación de dicho ABP y metacognición.	
Puesta en común	5 minutos
Conclusiones y valoración del taller	5 minutos

Referencias:

[1] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2018). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.theflippedclassroom.es/ https://www.theflippedclassroom.es/geogebra-una-potentisima-herramienta-para-flipped-y-abp-en-matematicas-y-fisica/

[2] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2017). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.theflippedclassroom.es/ : https://www.theflippedclassroom.es/desde-lo-alto-de-estas-piramides-40-siglos-nos-contemplan-bonaparte/

[3] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2018). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2018/10/28/proyecto-biomatematicas-ano-de-la-biologia-matematica/

[4] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2019). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2019/01/29/analysis-of-yramids-with-geogebra/

[5] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2019). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2018/05/31/proyecto-pendulo-trabajos-de-los-alumnos/

[6] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2017). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2017/06/27/proyectos-finales-matematicas-4o-e-s/

[7] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2017). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2017/05/23/ejemplos-proyectos-matematicas-edicion-carnamat84/

[8] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2017). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ :

https://www.estonoentraenelexamen.com/2018/05/08/proyecto-tiros-parabolicos-en-la-vida-reali/

[9] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2017). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2018/05/10/proyecto-tiros-parabolicos-en-la-vida-realii/

[10] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2019). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2019/09/26/proyecto-calculadoras-trigonometricas/

[11] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2019). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2020/01/14/localizacion-de-puerto-seco-con-geogebra/

[12] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2019). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2019/11/20/el-enigma-de-agustin-de-betancourt/

[13] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2019). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2019/12/11/idolo-de-tara-con-geogebra/

[14] Hernández Rodríguez, Juan Francisco (2019). Santa Cruz de Tenerife. Extraído de https://www.estonoentraenelexamen.com/ : https://www.estonoentraenelexamen.com/2019/11/15/el-tesoro-de-amaro-pargo/

Evidencias:

Evidencia 1: documento que se le envía a los alumnos a su correo para el ABP

PIRÁMIDES

Capacidades o competencias que pretende alcanzar:

Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT), en cuanto que plantea investigaciones, representaciones gráficas y descripción de formas geométricas.

Competencia digital (CD) implícitamente relacionada con el uso de Geogebra y de la edición de videos

Aprender a aprender (AA) al fomentar en el alumnado la búsqueda de diferentes estrategias de resolución de problemas y porque implica la transferencia de aprendizajes para la realización de trabajos interdisciplinares.

Objetivos: Utilizar Geogebra para que los alumnos analicen estructuras piramidales de las antiguas civilizaciones aplicando los conceptos relacionados a la ecuación de la recta, ángulo, pendiente, altura, … y que las construyan a escala usando la vista 3D para poder compararlas

Base o justificación curricular: El uso de Geogebra supone un apoyo para el afianzamiento y la comprensión de conceptos geométricos, y para la comprobación de propiedades geométricas. Con este programa se aumentan, además, las posibilidades de una adecuada presentación de trabajos por parte de los alumnos, investigaciones y conclusiones de estos, de la creatividad, de la autocorrección o de una correcta toma de decisiones.

Descripción de las tareas o actividades que se propondrán o realizarán: Se trabajará en equipos de 4 personas. Seleccionar 4 pirámides que pertenezcan a 4 civilizaciones antiguas diferentes. Realizar el análisis de las estructuras geométricas usando geogebra y representarlas a escala usando Geogebra 3D. Analizar los resultados y extraer conclusiones.

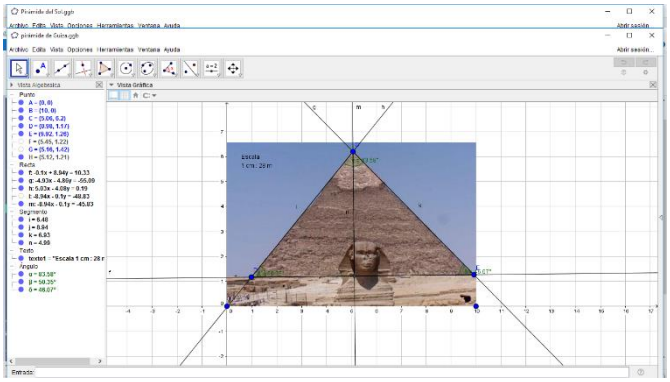
- **Evaluación**: - Un vídeo **en inglés**, que deberá cumplir con las siguientes características:

o Duración: mínima 3 minutos, máxima 9 minutos

o Calidad: 480x360p o superior.

o Formato: mkv, avi, mpeg, mp4 o wmv.

o Contenido: el vídeo debe mostrar cómo insertan las imágenes de las pirámides en Geogebra valorando, lógicamente, que sean apropiadas para realizar el estudio geométrico.



El análisis desde el punto de vista geométrico de la imagen para extraer conclusiones

La representación a escala de estas usando Geogebra 3D

Explicación detallada ***en inglés*** de todo el proceso.

PLAZOS: Realización del 23 al 24 de enero en clase. El plazo de presentación de los trabajos es el 25 de enero en la siguiente carpeta.

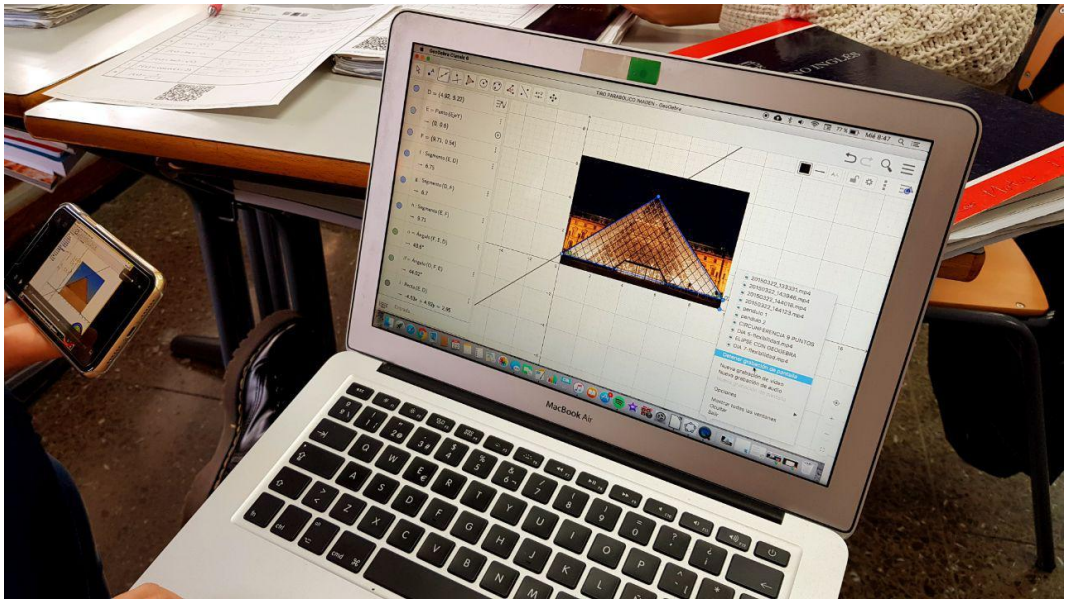
IMPORTANTE: En ningún caso podrá aparecer imagen alguna en los videos que permitan identificar a los alumnos.

Videos de ayuda:

https://www.youtube.com/watch?v=dLBtRfsPgB8&t=4s

https://www.youtube.com/channel/UCXJyHIGOo4LNtE4481C_daA

Trabajos de ejemplo:
https://www.estonoentraenelexamen.com/2019/01/29/analysis-of-pyramids-with-geogebra/



Alumnos trabajando en clase en el proyecto Pirámides.

Evidencia 2: documento que se le envía a los alumnos a su correo para el ABP OPTIMIZACIÓN

Aplicaciones de la derivada para la resolución de problemas de optimización

Capacidades o competencias que se pretende alcanzar:

Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas de optimización.

Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena.

Representa gráficamente funciones para encontrar los máximos o mínimos relacionados con los problemas de optimización.

Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.

Utiliza Geogebra para representar y analizar el comportamiento local y global de las funciones.

Curso: 1º de bachillerato.

Objetivos:

Se pretende comprobar si el alumnado utiliza las técnicas de derivación de funciones para calcular la derivada de una función e interpreta el significado de extremo relativo para resolver problemas de optimización contextualizados, ayudándose de Geogebra.

Base o justificación curricular.

Los problemas de optimización son aquellos que se ocupan de elegir la decisión óptima de un problema, es decir, encontrar cual es el máximo o mínimo de un determinado criterio (una función) sujeto a unas condiciones que nos da el problema. El cálculo de máximos y mínimos no solo se usa en Matemáticas, sino en muchas otras disciplinas, como por ejemplo la economía, la informática, la

planificación y gestión, etc. Son problemas en los que se trata de obtener una solución óptima dentro de distintas soluciones posibles.

Descripción de las tareas o actividades que se propondrán o realizarán.

Los alumnos deberán realizar en clase un trabajo de investigación sobre dos problemas contextualizados de optimización siendo obligatorio que utilicen Geogebra para representar la función a minimizar o maximizar.

Como producto final realizarán un vídeo, que deberá cumplir con las siguientes características: *Duración mínima: 5 minutos*. *Duración máxima: 9 minutos*. Calidad: 480x360p o superior. Tamaño máximo: 60 MB. Formato preferiblemente mp4. Contenido: el vídeo *debe mostrar* el proceso seguido en la resolución de los problemas de optimización, con el rigor y la precisión adecuados y utilizando GeoGebra para mostrar las estrategias de razonamiento en la resolución de los dos problemas.

Se valorará la originalidad y la dificultad que presenten los problemas de optimización. Asimismo, se tendrá muy en cuenta la explicación realizada durante el video.

En el video debe aparecer el nombre de los alumnos que lo han elaborado y es conveniente *que no aparezca imagen o texto alguno en los videos que permitan identificarlos*.

Realización en clase: 09 y 10 de abril.

Presentación de los trabajos: 12 de abril.

Evaluación.

Expresa verbalmente en el video, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de los problemas de optimización, con el rigor y la precisión adecuados

Analiza adecuadamente el enunciado a resolver.

Valora la información del enunciado planteado y lo relaciona con la función apropiada que debe maximizar o minimizar.

Utiliza estrategias de razonamiento en la resolución de problemas de optimización.

Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos propios de las derivadas.

Emplea Geogebra de forma adecuada al tipo de problema de optimización planteado.

Alumnos trabajando en clase en el proyecto Optimización.

Como procedimiento general, ***se evaluará si hacen correctamente los siguientes pasos***:

1º Obtienen la función que se desea optimizar que, de forma general, dependerá de más de una variable.

2º Buscan las ecuaciones de ligadura, con el fin de que la función dependa de una única variable.

3º Derivan la función, obteniendo posibles máximos o mínimos.

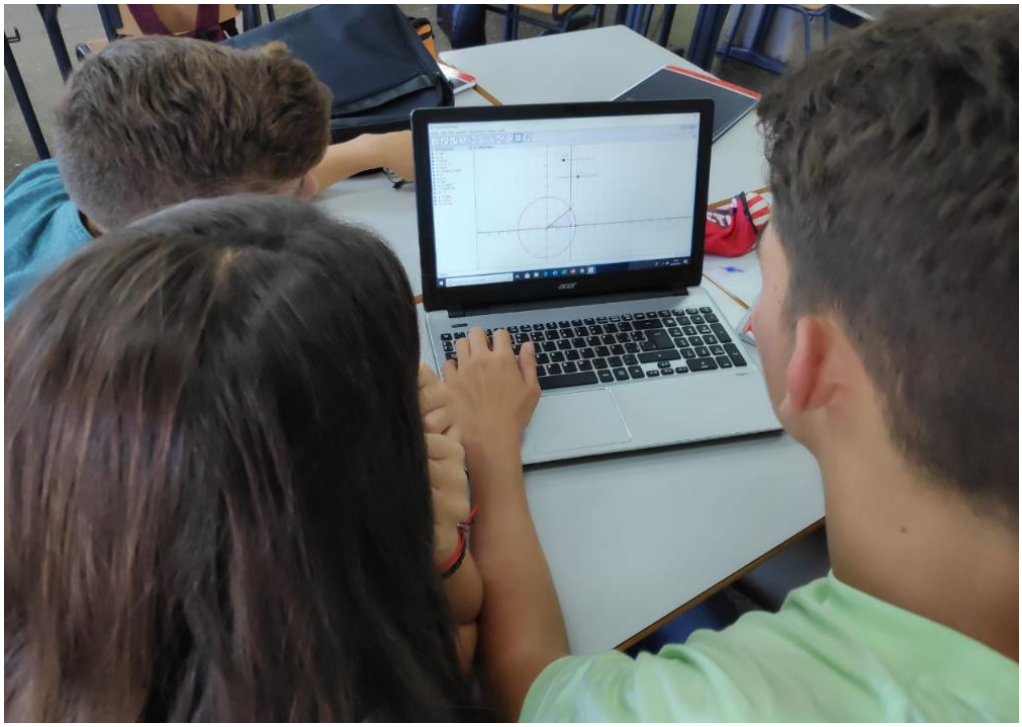
4º Analizan los resultados obtenidos descartando aquellos que carezcan de sentido y quedándonos con los que respondan convincentemente al enunciado.

5º Hallan los valores de la función en sus extremos por si es en esos puntos donde se cumplen las condiciones del enunciado.

Referencia en la web sobre mi blog y canal de YouTube:

https://www.estonoentraenelexamen.com/

YouTube



TaR003 Quien tiene un algoritmo, tiene un tesoro

Joan Jareño Ruiz
jjareno@xtec.cat
Último lugar de trabajo: CESIRE (Dep. Educació Generalitat de Catalunya)

Núcleo temático: Recursos para el aula, Conexiones

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria,

RESUMEN

El pensamiento computacional ha entrado en las nuevas propuestas curriculares. Y este tipo de pensamiento tiene mucho que ver con los algoritmos. Por otro lado, vivimos en un mundo regido por estos, unos claros y otros bien oscuros. Por tanto, conviene saber qué son y cómo funcionan. Mostraremos tres tipos de actividades en torno a ellos: de aplicación, aprendiendo a salir de cualquier laberinto; de interpretación, estudiando y justificando un algoritmo histórico de la multiplicación; de construcción, descubriendo y describiendo la estrategia de pequeños juegos de tablero.

Palabras clave: Algoritmo, Pensamiento Computacional, Juegos.

En el documento del CeMat “Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria” (2021) se destacan tres principios metodológicos para el desarrollo del currículum de matemáticas. Junto al *razonamiento* y la *resolución de problemas* se propone el *pensamiento computacional*. En el mismo documento se nos invita a “ver el pensamiento computacional como un proceso de pensamiento que supone formular problemas y diseñar sus soluciones de manera que puedan ser ejecutadas por un ordenador, un humano o una combinación de ambos”. Este planteamiento relaciona indisolublemente pensamiento computacional y algoritmización. Por otro lado, las nuevas propuestas curriculares oficiales ya están incorporando competencias relacionadas con el pensamiento computacional, no sólo en matemáticas si no también en otras áreas. En el borrador del currículo de Catalunya (2021) aparecen

tanto en primaria como en secundaria. Por ejemplo, en el de primaria encontramos esta redacción para una de las competencias: “Competencia específica 4. Utilizar el pensamiento computacional descomponiendo en partes más pequeñas, reconociendo patrones y diseñando algoritmos para solucionar problemas y situaciones de la vida cotidiana”. La redacción del similar de secundaria añade algunos aspectos más: “Competencia específica 4. Utilizar el pensamiento computacional, organizando datos, descomponiendo en partes, reconocimiento patrones, interpretando, modificando, generalizando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficiente”.

No entraremos en este taller en el territorio de los lenguajes de programación, pero sí en qué y cómo son los algoritmos. Lo haremos a partir de la proposición de tres tipos de actividades de aula, con tres objetivos también diferentes:

- saber *aplicar* un algoritmo a partir de sus instrucciones.
- saber *interpretar* un algoritmo a partir de su ejecución y, si es posible, justificarlo.
- ser capaces de *diseñar* un algoritmo que resuelva un problema concreto.

1. ¿Qué es un algoritmo?

Entre las muchas definiciones existentes de algoritmo, nos quedaremos con la Jean-Luc Chabert, (Chabert y otros, 1994): “Un algoritmo se define como un conjunto finito y organizado de instrucciones que debe dar respuesta a un problema”. Esta definición tan sobria contiene los elementos más característicos de los algoritmos. Entre ellas destacamos la de que su función es resolver un problema. Si para un problema determinado disponemos de un algoritmo de resolución, no tenemos otro problema que el de saberlo llevar a término. No siempre pasa: los algoritmos de montaje de muebles de algunas conocidas cadenas son, como podemos haber comprobado en más de una ocasión, poco explícitos. Pero si el algoritmo está bien diseñado y descrito se puede afirmar que “si tienes un algoritmo no tienes problema”. O, dicho coloquialmente, “quien tiene un algoritmo, tiene un tesoro”.

Chabert amplía su definición con media docena de condiciones básicas. Entre ellas destacamos tres:

- Es un proceso que se ejecuta paso a paso.
- La acción de cada etapa está estrictamente determinada.
- La ejecución termina en un número finito de pasos.

Es decir, un algoritmo es secuencial, no da lugar a dudas y, en algún momento, se acaba.

2. Primera actividad: Apliquemos un algoritmo (Recorrido de laberintos)

La reproducción de algoritmos ocupa una gran parte del tiempo escolar de nuestro alumnado. No es necesario decir que esta actividad, destinada a la pura ejercitación, sin significado y de carácter reproductivo, hace tiempo que se tendría que haber desterrado, o como mínimo, aminorado en las aulas. No tiene sentido realizar “acciones mágicas” que nos aportan soluciones por caminos que no entendemos. Pero para comprender de forma completa qué es un algoritmo, sí que hemos de pasar, en algunos momentos, por su aplicación. Después (o antes, o durante, según el planteamiento de la actividad) podremos entrar en la justificación de los pasos y en ver cómo nos encaminan a la resolución del problema que resuelven. Un ejemplo de algoritmo usual en el aula, rehuyendo de los de cálculo numérico o algebraico, puede ser el dibujo de la mediatriz de un segmento con regla y compás (o con las herramientas equivalentes de GeoGebra).

Para practicar el uso de un algoritmo, y observar si sabemos seguir sus instrucciones, en el taller se propone el *Algoritmo de Trémaux* que nos permite recorrer de forma completa un laberinto, ya sea de paredes conexas o inconexas (figura 1). Esta matización es importante porque en un laberinto de paredes conexas (en el que todas las paredes se tocan entre ellas o sólo hay dos grupos de paredes) puede ser suficiente como algoritmo “caminar pegado a la pared”. No funciona, en cambio, cuando tenemos algunas paredes separadas de las otras.

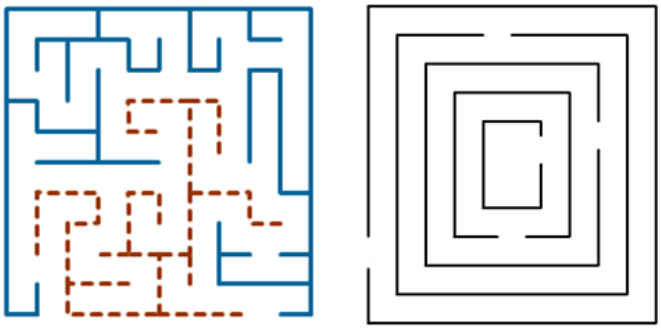


Figura 1. Laberinto conexo de dos paredes y laberinto inconexo

Trabajar en un laberinto real no siempre es posible. Hacerlo en papel es poco útil si vemos todo su trazado. Así que, como material, es recomendable el dibujo de laberintos sencillos en papel (y con trazo grueso de sus calles) que podremos tapar mediante una cartulina con un agujero que nos sirva de “ojo” y nos permita ver sólo una calle o las que concurren en un cruce (figura 2).

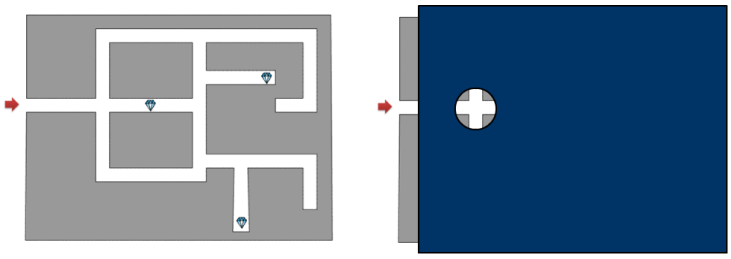


Figura 2. Laberinto y cartulina con “ojo” para taparlo parcialmente

Las instrucciones del algoritmo hacen referencia a las acciones a realizar en los casos de llegar a un cruce de caminos por caminos nuevos o ya transitados, observando, en cada caso, si el cruce ha sido visitado anteriormente o no (figura 3). En el desarrollo de la actividad se hace seguimiento de la aplicación de las instrucciones. Si se siguen correctamente, al destaparlo se puede visibilizar que se han recorrido todos los pasillos dos veces: una de entrada y otra de salida.

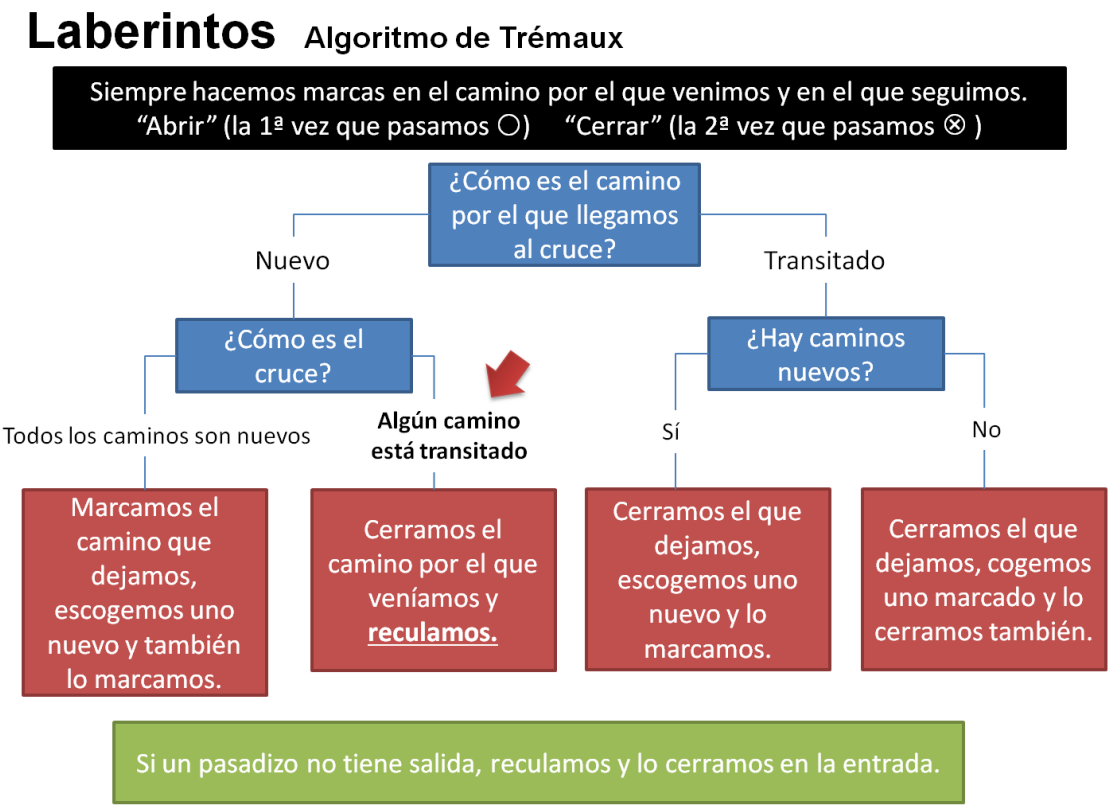


Figura 3. Diagrama del algoritmo de Trémaux

3. Segunda actividad: Interpretemos-justifiquemos un algoritmo (La multiplicación egipcia)

En esta actividad la propuesta consiste en mostrar en silencio, sin comentarios, cómo se aplica un algoritmo, paso a paso, para resolver un problema determinado. Se trata de que el alumnado descubra (y describa) qué se está haciendo en cada uno de ellos. Una vez realizada esta parte se pueden proponer dos cuestiones más de ampliación: justificar por qué funciona y adaptarlo para resolver un problema próximo. Los algoritmos históricos de cálculo se ajustan muy bien a este tipo de propuesta. Ver cómo se realiza una operación ya conocida con un método desconocido crea una situación de extrañamiento y reto inicial que puede ser de gran interés. En el taller se trabaja, inicialmente, la multiplicación egipcia. Uno de los aspectos interesantes de este algoritmo (figura 4) es que en su uso, más que saber las tablas de multiplicar, sólo hace falta saber duplicar.

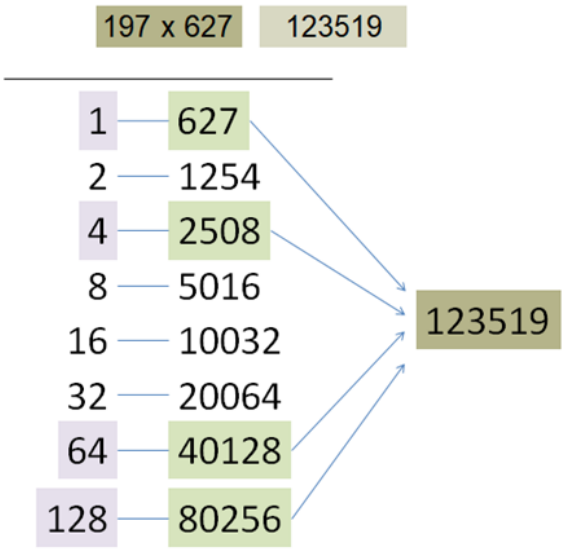


Figura 4. Algoritmo de la multiplicación egipcia

La justificación del algoritmo se basa en ver cuántas “veces” contamos uno de los factores. Los números marcados de la izquierda suman 197 y se encuentran por simple tanteo. Sumandos sus parejas de la derecha tendremos 197 veces 627 y, por tanto, el producto de los dos factores. No es difícil relacionar este algoritmo con la representación binaria del 197 (11000101). Tampoco adaptarlo a la división.

4. Tercera actividad: Construyamos un algoritmo (Juegos de estrategia)

Para algoritmizar la solución de un problema primero debemos encontrar dicha solución. El contexto de los juegos de estrategia es muy propicio para realizar la secuencia resolución-algoritmización. Se proponen dos subactividades. En una se estudia una versión del tres en ralla. En la segunda se propone una modelización de una máquina de autoaprendizaje: a medida que juega va construyendo un algoritmo con la estrategia ganadora.

4.1 El Ta-te-ti loco

El objetivo de este juego es el mismo del clásico tres en ralla jugado sobre papel (sin movimiento posterior de fichas): alinear tres signos iguales. En nuestro caso lo estudiaremos con fichas de dos colores para hacer más cómodos los estudios de

situaciones y explorar las diferentes posibilidades de cada una de ellas. La diferencia con el tres en ralla tradicional está en que cada jugador no tiene un color asignado, si no que, en su turno, puede colocar una ficha del color que desee.

El estudio de la estrategia puede pasar por un análisis previo del tablero, la cantidad de conexiones de las diferentes casillas, las simetrías y giros, etc. Después se puede estudiar la estrategia, en este caso para el primer jugador (el que pone la primera ficha). Se puede observar que, si se empieza por la casilla central, la más óptima por su cantidad de conexiones, sólo será necesario estudiar las ramificaciones que se abren en el juego a partir de dos posibles respuestas del segundo jugador: colocar en una esquina o en la casilla del medio de uno de los lados. El resto de respuestas son equivalentes por giros y simetrías.

Para estudiar las jugadas posibles jugadas óptimas se puede empezar por descartar las claramente perdedoras. Por ejemplo, si el primer jugador empieza con “azul” en la casilla central y el segundo responde jugando “rojo” en una esquina (jugar “azul” sería perdedor), para el primero sólo se han de estudiar cuatro jugadas. Las que están marcadas con ⊗ son perdedoras poniendo uno u otro color. Las respuestas a estudiar están representadas con las fichas pequeñas (figura 5).

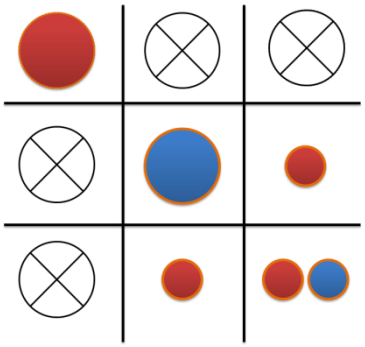


Figura 5. Las cuatro jugadas a estudiar

Continuando con el análisis del juego se puede empezar a diseñar una estrategia, con la respuesta a cada posible jugada del contrario. Recordemos que en la aplicación de un algoritmo no hemos de encontrar acciones dudosas. Una buena herramienta, tanto de análisis como de representación del algoritmo con la estrategia, puede ser un diagrama en árbol (figura 5).

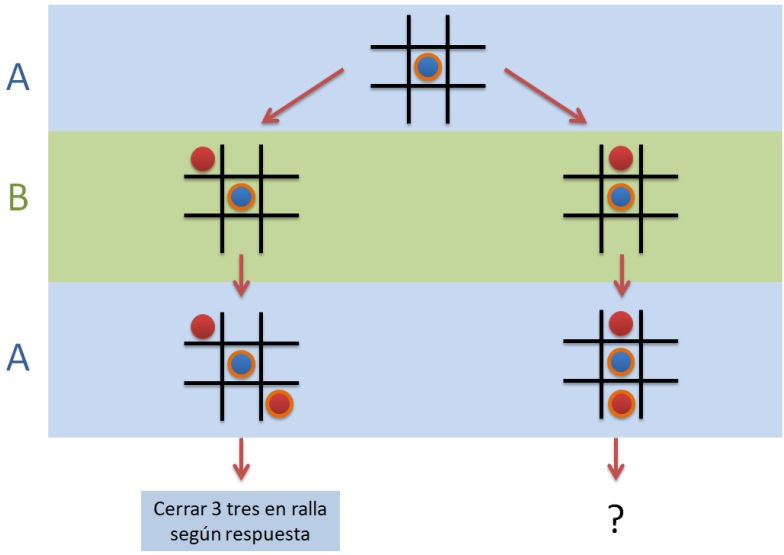


Figura 6. Diagrama con la estrategia parcial del “Ta-te-ti loco”

4.2 La “máquina que aprende” a jugar al NIM.

El juego escogido para esta segunda parte de la actividad es el NIM más sencillo conocido. Se empieza con siete fichas y cada jugador puede retirar una o dos en su turno. Gana el que retira la última. Cuando se practica un poco, es fácil descubrir que si le dejamos tres fichas al contrario ganaremos seguro. Y que para dejarle tres, antes le podemos dejar seis. Por tanto, la estrategia ganadora, consiste en que el primer jugador retirea una ficha en su primera jugada (deja 6) y las necesarias para dejarle tres en la siguiente. Veamos cómo se puede descubrir, también con un algoritmo, el propio que resuelve el juego.

La propuesta consiste en, una vez familiarizados con el juego, realizar partidas contra una “máquina” (papel que hará uno de los miembros del grupo de trabajo). La “máquina” tiene, un tablero donde inicialmente están señaladas todas las situaciones que se pueden producir durante el juego (que hayan 7 fichas, 6, 5…) y las jugadas posibles en cada una de ellas: coger una o dos fichas (figura 7).

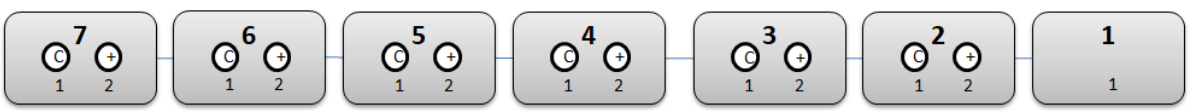


Figura 7. Tablero con las jugadas

Haremos que empiece la partida siempre la máquina y procederemos de la siguiente manera:

- En cada jugada señalará sobre el tablero las jugadas que ella realiza, marcándolas con una ficha.
- En su turno, si tiene dos opciones, la máquina jugará al azar tirando una moneda para escoger una de ellas.
- Una vez acabada la partida, si ha perdido, tachará (penalizará) la última jugada realizada para no volverla a repetir. Si ha ganado no se penalizará ninguna jugada.
- Si en algún momento, por haberlas ido eliminando, se encuentra en una situación en la que se han tachado las dos jugadas posibles, se rendirá y eliminará la jugada inmediatamente anterior.
- Si en una situación sólo encuentra una opción es la que jugará.

No es difícil ver que, a base de eliminar las jugadas perdedoras, sólo quedarán las ganadoras (figura 8). Se encontrará así, de forma automatizada, la estrategia ganadora. Sólo quedará describirla.

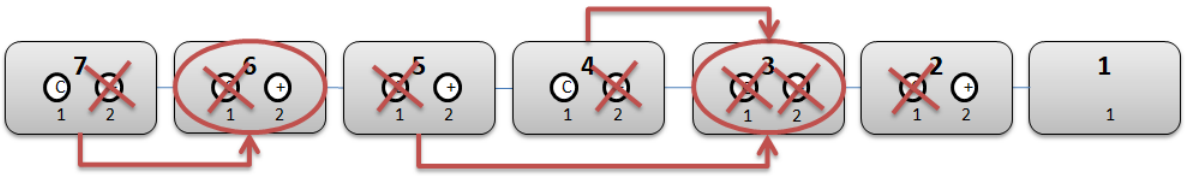


Figura 8. Posible estado final de la ”máquina”

Referencias

- CeMat-VVAA (2021) *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria*. (Última consulta 9/3/2022) https://fespm.es/wp-content/uploads/2021/06/Bases-Matematicas-CEMat-mayo-2021.pdf

- Creamat (2018) *La màquina que aprèn*. ARC. (Última consulta 9/3/2022) https://apliense.xtec.cat/arc/node/30835

- Chabert, J.L y otros (1994) *Histoire d'algorithmes*. Ed. Belin. París.
- Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya (2021). *Esborrany del currículum d'Educació Primària.* ((Última consulta 10/3/2022). https://documents.espai.educacio.gencat.cat/documents_publics/Centres/20220119-Annex2AreesPrimaria.pdf
- Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya (2021). *Esborrany del currículum d'Educació Secundària.* (Última consulta 10/3/2022). https://documents.espai.educacio.gencat.cat/documents_publics/Centres/20220119-Annex3MateriesSecundariaObligatoria.pdf
- DDAA. *Algoritmo de Tremaux*. Wikipedia (Última consulta 9/3/2022) https://es.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_de_Tremaux
- Jareño, Joan (2005) *Laberints.* Calaix +ie. (Última consulta 9/3/2022) http://www.xtec.cat/~jjareno/
- Jareño, Joan (2015) *Multiplicar amb dobles o amb dobles i meitats. Les multiplicacions egípcia i russa.* Blog del Calaix +ie. (Última consulta 9/3/2022) http://calaix2.blogspot.com/2015/06/multiplicar-amb-dobles-o-amb-dobles-i.html
- Jareño, Joan (2014) *Ta-Te-Ti boig i Tripos: dues variants del tres en ratlla*. Blog del Calaix +ie. (Última consulta 9/3/2022).

  http://calaix2.blogspot.com/2014/04/ta-te-ti-boig-i-tripos-dues-variants.html

TaR007 Taller: laboratorio de Matemáticas

Enric Castellà
ecaste56@xtec.cat
Joan Jareño
jjareno@xtec.cat
Sílvia Margelí
smargeli@xtec.cat
Montserrat Torra
mtorra12@xtec.cat
CESIRE/ Dept. d'Educació de Catalunya.

Núcleo temático: Recursos para el aula, Formación del profesorado.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

Los materiales manipulativos de matemáticas nos permiten llevar al aula propuestas en las que el alumnado puede ensayar estrategias, investigar, generar preguntas, hacer conjeturas, argumentar, hacer conexiones y representar los descubrimientos a diferentes niveles, introducir o reforzar conceptos, utilizando siempre el lenguaje matemático. Son propuestas inclusivas, que crean contextos de aprendizaje en los cuales se proporcionan múltiples maneras de presentar la información, de formas de acción y de diversidad de métodos de representación. Permiten diferentes niveles de profundidad, y promueven el trabajo competencial de alto nivel para todo el alumnado.

En este taller veremos diferentes actividades que se proponen dentro de este programa y que se utilizan en la formación vinculada al préstamo del material a los centros. En la comunicación "Laboratorio de Matemáticas" se explica con más detalle el proyecto realizado por el Centro de Recursos Específicos para la Innovación y la Investigación Educativa (CESIRE) en Catalunya.

Palabras clave: Materiales, Laboratorio, Formación, Manipulativo

LABORATORIO DE MATEMÁTICAS.

1. Intención

Una de las líneas de trabajo del Centro de Recursos Específicos para la Innovación y la Investigación Educativa (CESIRE) en el ámbito de matemáticas es el uso de materiales manipulativos en el aula. Es también una de las líneas de impulso para la educación matemática del **Congreso de Educación Matemática** C2EM, que, en su octava línea, nos invita a promover **los laboratorios de matemáticas como ámbitos propicios para la experiencia matemática**.

El uso de material permite la experimentación, la participación activa de todo el alumnado de forma inclusiva y la resolución de problemas. Pero para promocionar su uso necesitamos acompañarlo de buenas propuestas de trabajo.

Partimos del proyecto realizado por el CESIRE en Catalunya, que ha consistido en la distribución a los centros de recursos de toda Catalunya de 75 maletas de material didáctico de matemáticas. Este material se presta a escuelas o institutos durante un curso y se complementa con un programa de formación para acompañar al centro en su utilización. Además se han creado vídeos y propuestas de actividades que están a disposición de todos los docentes, participen en el programa o no.

Una de las premisas de la formación asociada a este proyecto es que las sesiones de formación modelizan el uso de materiales forma similar a como se harían en el aula, intentando reproducir un ambiente similar. Es por este motivo que en el taller se va a instar a que los asistentes experimenten, conjeturen, descubran i conceptualicen a través de la manipulación del material a partir de diferentes propuestas.

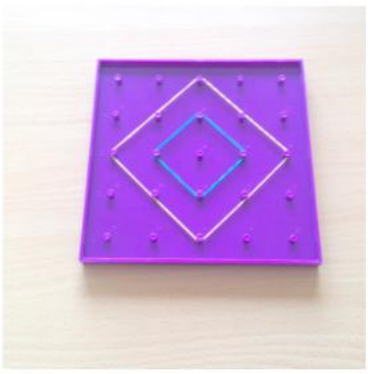
2. Campaña Laboratorio de Matemáticas

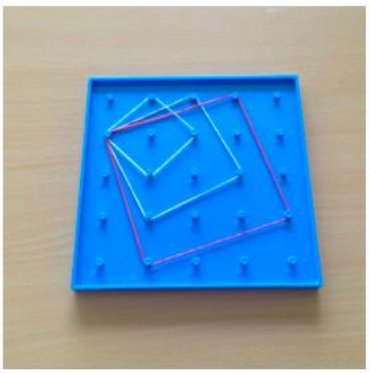
Para acompañar a los centros que tienen las maletas, y al resto de centros que utilicen material manipulativo de matemáticas en las escuelas e institutos, hemos preparado una campaña “laboratorio de matemáticas” en la que se pueden encontrar propuestas de uso de los materiales para alumnos de infantil, primaria y secundaria. Es un espacio web con diversas páginas en las que se recogen diferentes actividades que proponen la utilización de cada uno de los materiales, con explicaciones y comentarios para ayudar a la implementación en clase.

Quadrats

Si ens iniciem utilitzant el geoplà ortogonal, començarem amb les figures planes més senzilles. Per exemple, preguntant "**Quants quadrats diferents podem fer?**"

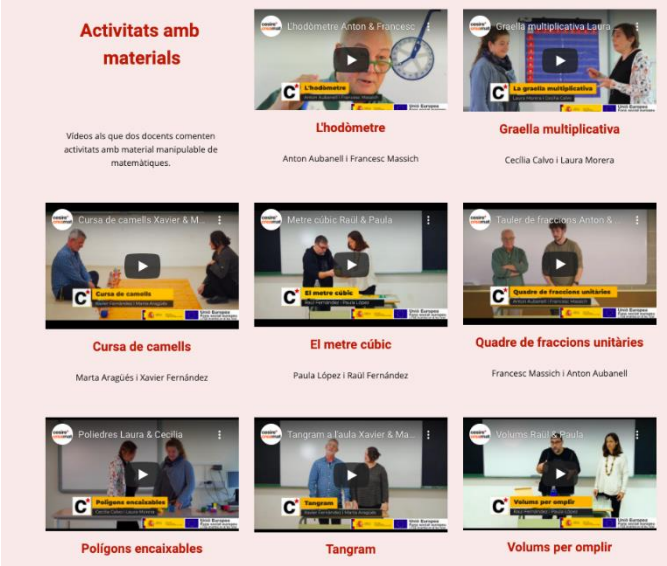
Ens trobarem que començaran a crear-los utilitzant els quadrats ortogonals. tal i com es veuen al geoplà taronja. Però mica en mica, hi haurà algú que descobrirà que si els girem també podem obtenir altres quadrats, tal i com veiem en els geoplans lila i blau.





Dentro de la campaña también disponemos de vídeos explicativos. Hay un par de vídeos de aula, en los que se pueden ver diferentes maneras de conducir una sesión a partir del uso de material. Otro conjunto de videos en los que dos docentes, a través del diálogo entre ellos, proponen usos de un material determinado: La

"carrera de camellos" para abordar en primaria el tema del azar y la probabilidad, usos del tangram, de los volúmenes para llenar de agua, del odómetro, el metro cúbico… y muchos más.



3. Taller

El taller consiste en una pequeña introducción de 10-15 minutos donde se explicarán los objetivos básicos de la formación asociada al proyecto y el concepto que entendemos desde el CESIRE para el Laboratorio de Matemáticas: un espacio propicio para la experimentación matemática.

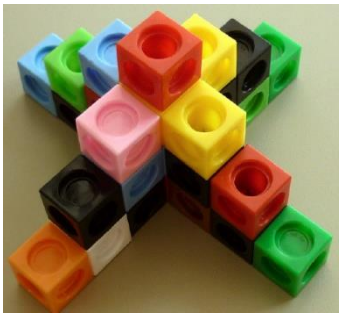
El tiempo restante se dividirá a los asistentes en 4 grupos distribuidos en 4 mesas.

En cada mesa uno de los talleristas presentará alguno de los materiales de la maleta planteando diferentes propuestas para trabajar con él, desde el nivel de Infantil al de Secundaria.

Los asistentes estarán en una mesa, y al cabo de unos minutos rotaran y se trasladaran a la mesa siguiente, para, de esta forma, conseguir que todos los asistentes pasen por todas las mesas y puedan ver (y vivenciar) actividades con dados, cubos encajables (multilink), volúmenes i geomosaicos (pattern blocks).

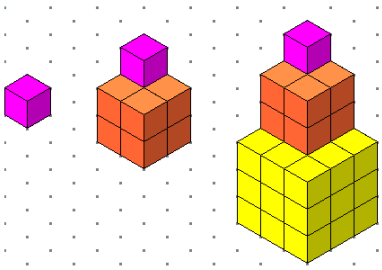
A continuación os detallamos preguntas y propuestas que desarrollaran en cada una de las mesas.

Mesa 1: Policubos



Fíjate en esta torre. ¿Puedes construir una torre como ésta pero de 5 pisos? ¿Cuántas piezas necesitarás para construir la de 10 pisos?
Utiliza piezas de colores para explicar cómo pasas de una construcción a la siguiente, para visualizar qué se añade y cómo crece: (A esta acción la podemos llamar “colorificar”, de “coloear+codificar”, adaptando el término “ColorCode” de Jo Boaler)
Y ahora… ¿Cuál sería el término general de tu construcción? ¿Qué expresión algebraica usarías? Veremos que podemos usar expresiones muy diversas pero equivalentes.

Usa papel impreso con retícula isométrica para dibujar tus construcciones de policubos.



Mesa 2: Dados

¿Cuánto suman las caras que no ves de estos dados?

Tira 4 dados y súmalos. ¿Cómo lo haces?

¿Cómo sumas los puntos de cada foto? ¿Cómo continuarías las disposiciones?

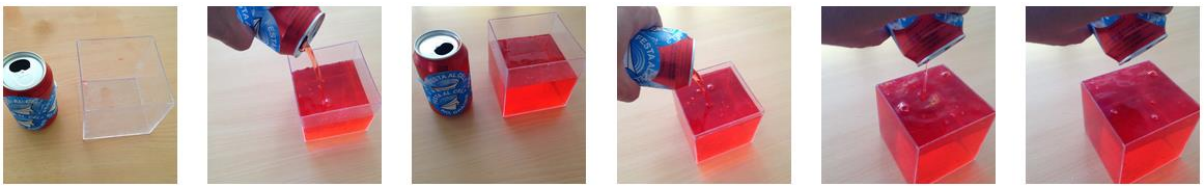
Juego del 24: Tira 4 dados y utilizando operaciones básicas, encuentra como resultado 24 utilizando el valor de los dados.

Acercarse a 3 con 4 dados: Necesitamos dos dados de 8 caras y dos dados de 10 caras. El objetivo es aproximarse al número 3 sin pasarse, haciendo operaciones con decimales. Se trabaja en parejas. Y las normas son las siguientes:

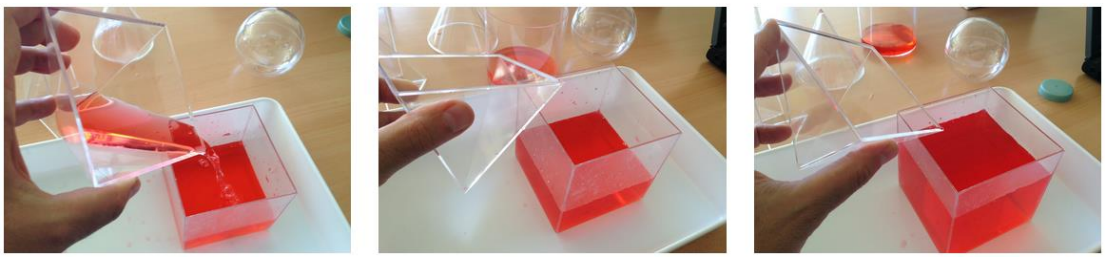
- El primer jugador escoge un número entre 0,5 y 2,5.
- El segundo jugador tira los cuatro dados y utilizará tres de los números que han salido para formar un número decimal. Sumará esta cantidad al número inicial que ha propuesto el primer jugador.
- El primer jugador repetirá el mismo proceso volviendo a tirar los cuatro dados, escogerá 3. formará un número decimal y lo sumarà al número anterior.
- Ganará el jugador que consiga acercarse más a 3 sin pasarse.

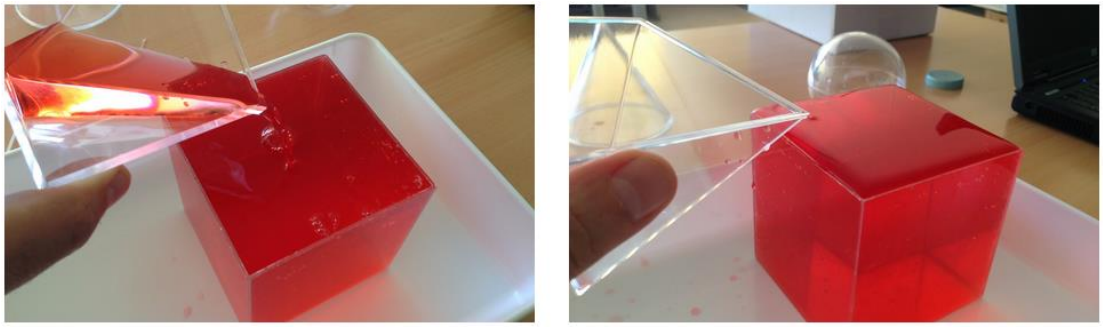
Mesa 3: Volumenes

Llenar una lata de refresco y preguntar cuántas latas caben dentro del cubo de 1 dm de lado.

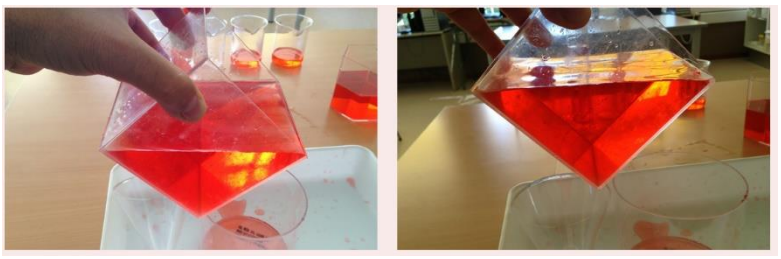


Mostrar que caben 3 piràmides en el prisma que tiene la misma base y altura que la pirámide.

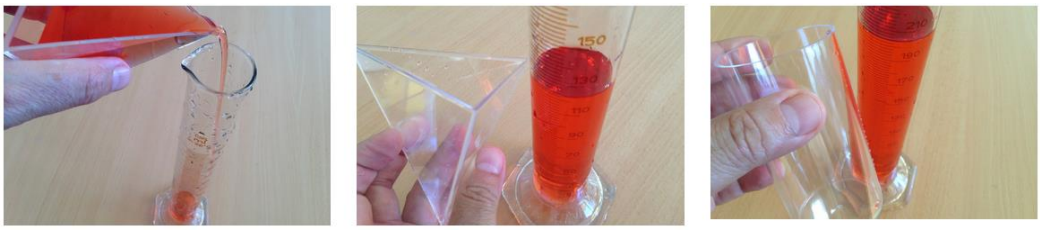




¿Cómo puedes conseguir llenar exactamente la mitad del cubo?



¿Cómo medir el volumen de las figuras mediante una probeta?



¿Cómo podemos relacionar volúmenes de diferentes figuras?

Mesa 4: Pattern Blocks

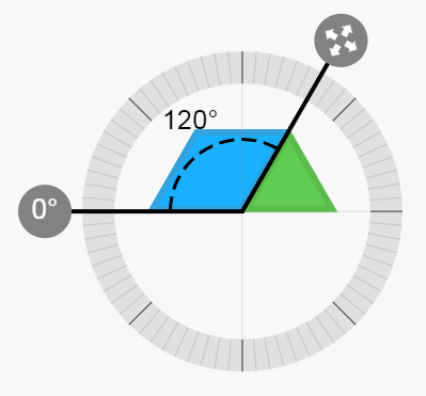
Presentación de la piezas del material: Búsqueda de criterios para clasificarlas.

Reconocimiento tàctil: Ponemos las piezas dentro de la bolsa, y sin mirar, tenemos

que ir identificándolas

Rompecabezas: ¿Qué formas de piezas puedes construir a partir de otras?

Ángulos: ¿Cómo puedes conocer la amplitud de los ángulos de todas las figuras *sin medir*?



Frisos: Finalmente, estudiaremos las cenefas. ¿Cuántos tipos hay? ¿Cómo las podemos clasificar?

Sanefa	Gir 180°	Simetria horitzontal	Simetria vertical	Simetria lliscant	Tipus
					F_1
	✔				F_2
		✔			F_1^1
			✔		F_1^2
				✔	F_1^3
	✔	✔	✔		F_2^1
	✔		✔		F_2^2

Bibliografia

Aubanell Pou, A. (2006). Llicència d'estudis "Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària. Consultat el 4 / Abril / 2022, a http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200506/memories/1005m.pdf

CESIRE. (2019). Campanya "Laboratori de Matemàtiques". Recollit de ja.cat/LabMat

CESIRE. (2020). Vídeos del laboratori de matemàtiques. Recollit de ja.cat/videosLabMat

CESIRE. (7 / Setembre / 2021). Web CESIRE. Consultat el 4 / Abril / 2022, a https://serveiseducatius.xtec.cat/CESIRE/

Comissió per a l'impuls de les conclusions del C2EM. (2018). c2em. Consultat el 4 / Abril / 2022, a https://c2em.feemcat.org/2258-2/

TaR010 En búsqueda de la afinación 20JAEM. La escala musical, un problema competencial abierto.

Santi Vilches
svilches@xtec.cat
ABEAM, Catedrático de Matemáticas del Institut Vilamajor y Formador del profesorado
Maite Gorriz
mgorriz@xtec.cat
ABEAM, Inspectora de educación del Área de Matemáticas y Formadora del profesorado

Núcleo temático: Recursos para el aula, Procesos

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Bachillerato.

RESUMEN

Se trata de un taller muy dinámico, divertido y, al mismo tiempo de enorme rigor histórico y matemático.

En el taller analizaremos las distintas propuestas que se han planteado para la escala musical en la historia de occidente, demostraremos la imperfección de la escala actual y ofreceremos estrategias para **crear una nueva propuesta: "la afinación JAEM22"** usando conocimientos matemáticos del bachillerato. Podremos oírla e incluso interpretar una música exclusiva y jamás escuchada con la "afinación 20JAEM"

Esta actividad se ajusta a las exigencias de una **actividad competencial del bachillerato** puesto que se trata de una **situación real** en la que el alumnado debe transferir sus conocimientos matemáticos para aplicarlos a una nueva propuesta creativa y personal. Para hacerlo deberá desarrollar las competencias matemáticas (interpretar, modelizar, conjeturar, argumentar, representar, comunicar, resolver, compartir, etc.). Se mostrarán investigaciones actuales y se analizará el posible uso de la "afinación 20JAEM".

***Palabras clave**: Escala Musical, Creatividad, Competencias, Situación de Aprendizaje.*

Presentación

En el siguiente texto no expondremos las soluciones a los problemas matemáticos propuestos, simplemente explicamos cuáles serán las actividades que se irán planteando. Por una cuestión básica de falta de tiempo, en el transcurso del taller, las actividades de cálculo más técnicas y rutinarias se describirán de manera rápida, puesto que los participantes no deberían tener ningún problema para resolverlas por su cuenta (se ofrecerán las soluciones en un documento aparte). **Se dedicará todo el tiempo a justificar la propuesta y a permitir que los participantes desarrollen libremente su imaginación creando, escuchando y utilizando una escala musical totalmente nueva, propia y creativa. El taller es muy dinámico y enormemente divertido**, aparte de ser un **ejemplo extraordinario de trabajo competencial** para alumnado de bachillerato.

La música ha sido un rasgo identitario ancestral del ser humano que se ha ido desarrollando a lo largo de todas las civilizaciones. La creación, evolución y afinación de los distintos instrumentos musicales se ha convertido en una necesidad humana que ha generado un problema matemático irresoluble y abierto. Los pitagóricos ya intentaron resolver este problema y valorando su importancia dividieron los conocimientos exactos o matemáticos en cuatro (cuadrívium): aritmética, música, geometría y astronomía.

Vincenzo Galilei (1520-1591), padre de Galileo, era matemático y compositor, disponía de un laboratorio matemático para investigar alrededor del diseño de laúdes, defendió un nuevo sistema de afinación que rompía con la tradición pitagórica enfrentándose con los cánones establecidos

La escala musical no es única, podemos encontrar argumentos para utilizar distintas distribuciones sonoras. Cualquiera de estos argumentos tiene una base matemática

y podemos incluso desarrollar una nueva escala musical planteándolo como un problema abierto.

Objetivos del taller

Entender el problema matemático histórico de la afinación de los instrumentos musicales.

Analizar las distintas soluciones matemáticas que se han planteado a lo largo de los años.

Buscar nuevas soluciones **de una manera libre y creativa** y **experimentar** usando las matemáticas en un contexto creativo.

Escuchar las propuestas de los participantes, por ejemplo… **como suena un logaritmo**?, y un arco tangente? **Encontrar la afinación 20JAEM**

El problema de la afinación

No es fácil saber cómo ni cuándo el hombre primitivo empezó a crear el lenguaje musical pero todos podemos imaginar unos inicios en los que una mujer primitiva descubrre cómo, o cómo suena una piel que se ha secado sobre una vasija de barro, como pita un hueso cuando soplamos su interior para limpiarlo o cómo suena la cuerda tensada de un arco al apoyarla sobre un tronco vacío

Imagen1. Flauta de hueso

Todas las civilizaciones se han encontrado, en un momento dado ante un problema: si queremos construir un instrumento, como por ejemplo, un arpa y queremos que suene junto a un otro instrumento, por ejemplo una flauta, ¿cómo construiremos

(afinaremos) los instrumentos para que el sonido superpuesto de ambos resulte agradable al oído humano?

Éste es un problema de carácter matemático totalmente abierto que permite multitud de soluciones. De hecho, cada civilización ha dado su afinación propia y característica. Todos reconocemos una música oriental o árabe tan sólo por la afinación diferenciada de sus instrumentos. Éste es el problema que nos plantearemos. **¿Es posible encontrar una afinación propia de las 20JAEM?**

Conceptos y vocabulario

El sonido se inicia cuando un cuerpo vibra. Esta vibración transmitida por un medio natural en forma de movimiento ondulatorio penetra por el pabellón auditivo y hace vibrar la membrana del tímpano.

Un ejemplo sencillo es el de una barra metálica clavada sobre un soporte.

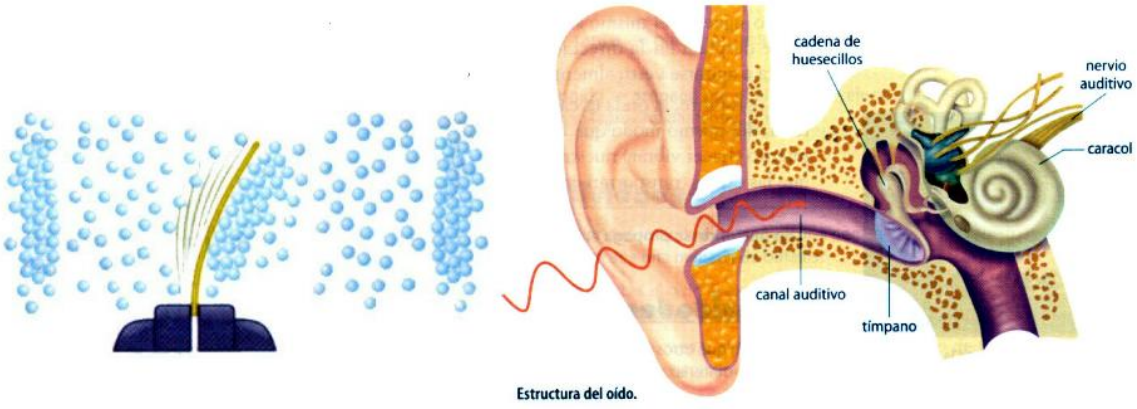


Imagen2. La transmisión y recepción del sonido

Si la cantidad de oscilaciones por unidad de tiempo es siempre la misma diremos que este movimiento oscilatorio es periódico y llamaremos frecuencia a la cantidad de oscilaciones (ciclos) por segundo.

La unidad de medida de la frecuencia son los ciclos por segundo llamados Hertz (Hz) en honor a Henrich Hertz (1857 - 1894)

Un fenómeno natural del sonido

Si un oído humano percibe el sonido producido por una fuente emisora con una frecuencia fija, por ejemplo de 440 Hz y simultáneamente percibe un sonido con el doble de la frecuencia (en este caso 880Hz) o la mitad (220Hz) el cerebro humano interpreta que está sintiendo el mismo tono e incluso no es capaz de percibir que se trata de dos tonos distintos si no los escucha por separado.

Por tanto, si decidimos llamar por ejemplo A a un tono producido por una frecuencia determinada, deberemos llamar también A al tono producido por la frecuencia duplicada o por la frecuencia mitad, puesto que nuestro cerebro no los va a diferenciar.

Si A = f entonces A = 2f, A = 4f; A = 8f... también A = $\frac{1}{2}f, \frac{1}{4}f, \frac{1}{8}f$...

Temperamento

Volviendo al problema original. Se desea definir una serie de frecuencias para incorporarlas un instrumento musical para que pueda tocar simultáneamente con otros instrumentos.

Empezaríamos con una cuerda que emite una frecuencia determinada f, por ejemplo 440Hz y a continuación pondríamos otra cuerda con otra frecuencia por ejemplo 480Hz, y así sucesivamente. Después de unas cuantas cuerdas llegaremos a una cuerda con una frecuencia 2f , en este ejemplo 880Hz. Como el oído humano percibe esta nota igual que la original, a partir de ahí deberemos seguir exactamente el mismo criterio para ir «repitiendo» todas las notas hasta la frecuencia 4f y así sucesivamente. Inversamente, hacia atrás también podemos incorporar nuevas cuerdas con el mismo criterio inverso hasta llegar a $\frac{1}{2}f$...

La creación de una escala musical consiste, por tanto en determinar qué frecuencias sonoras forman parte de una secuencia que va desde una frecuencia f hasta la frecuencia 2f y cuál es el criterio matemático que rige esta serie numérica.

Una serie de frecuencias numéricas que va de f a 2f se llama temperamento. Los criterios que lo generan deberá repetirse sucesivamente para determinar el resto de frecuencias sonoras de 2f a 4;,de 4f a 8 f,... (y también de forma inversa de f a $\frac{1}{2}f$, de $\frac{1}{2}f$ a $\frac{1}{4}f$,…)

Los armónicos. Timbre y tono

Si tensamos una cuerda hasta que haga 440 vibraciones por segundo y golpeamos un trozo de metal que también oscila a 440 vibraciones por segundo, ¿por qué percibimos los dos sonidos de una manera totalmente diferente, si emiten la misma frecuencia?

ACTIVIDAD 1. ¿Qué son los armónicos?

Ataremos una cuerda en un extremo de un aparato con un motor que oscile de forma constante. Tensamos la cuerda y observamos las vibraciones de la cuerda. Las vibraciones vienen determinadas por el impulso del oscilador y por tanto obligará a la cuerda a moverse de una forma determinada, pero la tensión que le damos también determina su forma de moverse.

Observaremos qué ocurre cuando modificamos la tensión de la cuerda:

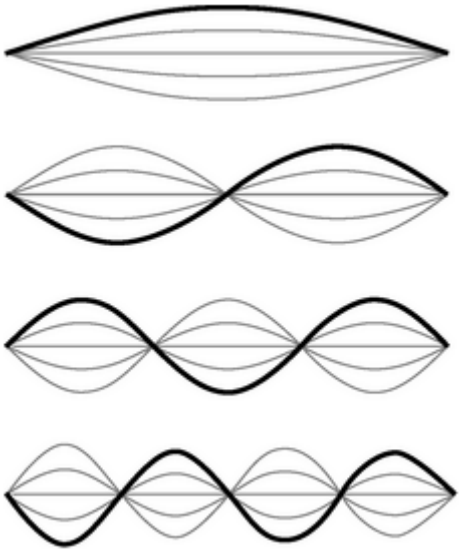


Imagen3

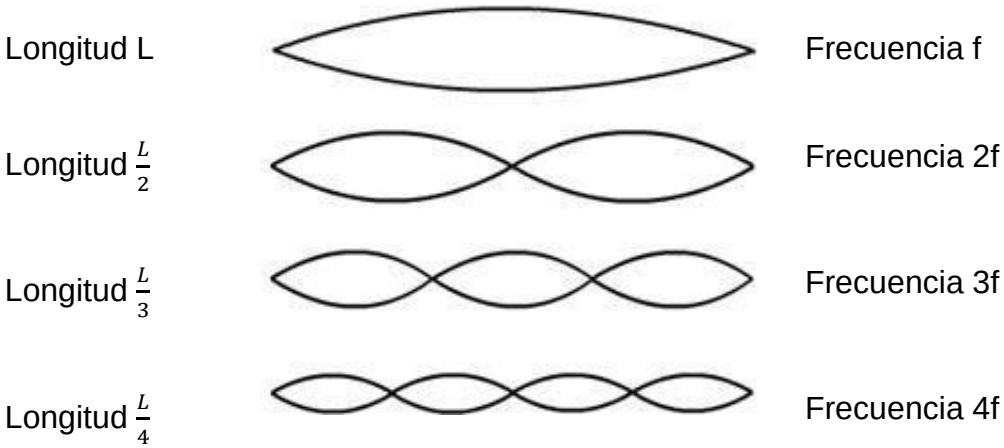
Es fácil hacer vibrar las cuerdas de longitud L de un instrumento musical de forma similar al experimento anterior (por ejemplo una guitarra o un violonchelo).

Cogeremos de cuerda y pulsamos la cuerda rozándola ligeramente a una distancia de$\frac{L}{2}$, $\frac{L}{3}$ $\frac{L}{4}$etc. Escucharemos el sonido y observaremos el efecto sonoro que produce.

Imagen4

Toquemos ahora una sola cuerda y detengamos su vibración con los dedos. Escucharemos cómo las demás cuerdas también suenan, es decir, las partículas de aire en movimiento han logrado activar la vibración del resto de cuerdas. Este fenómeno sonoro se llama «simpatía». El sonido que emite la “simpatía” de un instrumento es inevitable.

La frecuencia que emiten unas cuerdas por simpatía debe tener una relación numérica con la frecuencia que la provoca, de modo que las oscilaciones que genera pueden activar diferentes subdivisiones de la cuerda, tal como se observa en el siguiente esquema:



Es decir, las frecuencias de los armónicos son los múltiplos de la frecuencia fundamental.

ACTIVIDAD 2. ¿Qué es el timbre?

Abre en tu dispositivo móvil la *App Spectral Audio Analizer* (se instalará en un par de minutos) y emite una nota o tono con un instrumento o con la voz. Observa el espectro. Repite el experimento con otro instrumento musical con la misma nota o tono. ¿Cuáles son las diferencias?

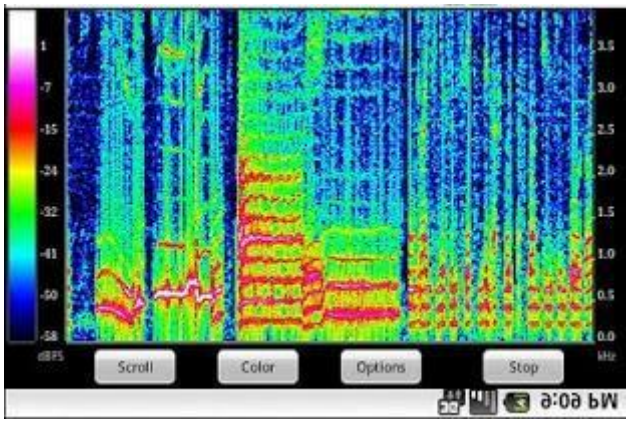


Imagen5

Cuando un elemento vibra (una cuerda tensada, una lengüeta, una barra de hierro tensada...) con toda su longitud L, el elemento vibra al mismo tiempo y simultáneamente también con la mitad de su longitud $\frac{L}{2}$, a tercios $\frac{L}{3}$, en cuartos $\frac{L}{4}$... produciendo frecuencias múltiples de la primera, 2f, 3f, 4f, ... superponiendo, de hecho, todas las frecuencias, es decir, todos sus armónicos. Cada instrumento emite unos armónicos con mayor intensidad que otros y hace que cada instrumento tenga un ***timbre*** diferente.

Temperamento armónico

Para resolver el problema del temperamento la solución debería tener obligatoriamente unos requisitos indispensables:

Todas las notas (frecuencias) deben estar entre f y 2f, ya que el oído humano considera equivalentes las notas $f \equiv 2f$. A partir de 2f únicamente será necesario repetir los criterios de generación de notas hasta 4f y así sucesivamente.

Si incorporamos la frecuencia f en un temperamento no podemos evitar que sus armónicos 2f, 3f, 4f, ... suenen. Por tanto no sería una buena idea no incorporar estas notas ya que se estarían sonando unas notas que no existen en el temperamento empleado y el resultado final resultaría, cuanto menos, desconcertante.

Si queremos incorporar una nota nueva al temperamento y esta nota no está entre f y 2f podemos dividir o multiplicar esta frecuencia por dos tantas veces como queramos. Así por ejemplo si queremos incorporar 3f al temperamento sólo es necesario considerar la nota $\frac{3}{2}f \equiv 3f$ *con* $f < \frac{3}{2}f < 2f$

ACTIVIDAD 3. Temperamento armónico

Busca un temperamento siguiendo estos criterios (utiliza desde f hasta 16f).

Analiza si existe relación entre las notas consecutivas, si se trata de una progresión y en este caso si es aritmética o geométrica

Podremos escuchar esta escala generada con el programa Pure Data (por ejemplo con f = 264 Hz). Escucharemos este temperamento y opinaremos sobre su viabilidad musical.

Observación: Esta actividad puede plantearse de manera análoga a partir de la longitud de la cuerda en lugar de las frecuencias.

Pitágoras

En la época Pitagórica los conocimientos matemáticos se dividían en cuatro (quadrivium): aritmética, música, geometría y astronomía. El problema de construir un temperamento para afinar distintos instrumentos para tocar conjuntamente era uno de los problemas matemáticos importantes de la época.

Los pitagóricos estudiaron este problema a fondo, siempre desde una perspectiva matemática y posiblemente se dieron cuenta de dos hechos trascendentales:

El problema de los temperamentos es un problema puramente matemático

El problema es totalmente abierto porque la solución no es única ya que forma parte de la creatividad humana.

Los pitagóricos debieron hicieron multitud de experimentos variando la tensión de las cuerdas con diferentes pesos, golpeando campanas de distintos tamaños, entre otros. Uno de los instrumentos de investigación más importante fue el monocorde, un instrumento de una sola cuerda tensada en el que se podía variar su longitud.

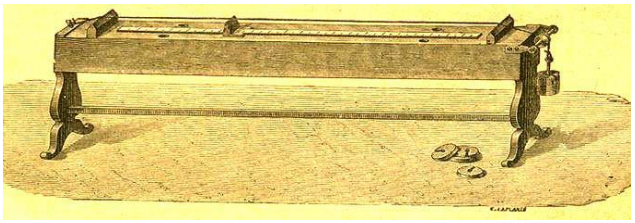


Imagen6. Monocordio

ACTIVIDAD 4. Temperamento Pitagórico

Pitágoras se dio cuenta de que uno de los problemas más graves del temperamento armónico es que conseguimos los armónicos de la nota inicial f pero no los armónicos del resto de notas. La propuesta de Pitágoras fue buscar una escala alternativa en la que, disponemos siempre del tercer armónico (es decir el primer armónico no trivial) de todas y cada una de las notas y renunciando al resto de armónicos cuya intensidad natural era mucho menor.

Construiremos un nuevo temperamento de 7 notas siguiendo los siguientes criterios

A partir de una frecuencia f añada el tercer armónico 3f, del que también incorporaremos el tercer armónico 3(3f) y así sucesivamente. Las notas que tendrá la nueva escala serán: f, 3f, 3^2f, 3^3f, 3^4f, 3^5f, 3^6f.

En cualquier caso las notas deben estar entre f i 2f por lo tanto hay que dividir las notas nuevas por potencias de 2.

Analice si existe relación entre notas las consecutivas, si se trata de una progresión y en este caso si es aritmética o geométrica

Continúe con 5 notas más 3^7f, 3^8f, 3^9f, 3^{10}f, 3^{11}f. y escríbalas con un color diferente.

Analice de nuevo si es o no progresión aritmética o geométrica.

Podremos escuchar esta escala generada con el programa Pure Data (por ejemplo con f = 352 Hz = “FA”). Escuche este temperamento y opine sobre su viabilidad musical.

Explique con detalle qué ventajas y qué inconvenientes puede tener este temperamento. (observe el enorme inconveniente de esta propuesta cuando deseamos cerrar el ciclo intentando que $3^{12}f/2^n$, se ajuste exactamente a 2f)

Temperamento Aristógenes-Zarlino

Pitágoras no fue capaz de resolver satisfactoriamente el problema del temperamento, y por tanto el problema quedó abierto, dando pie a otras soluciones alternativas. Una de ellas fue propuesta por Aristógenes 350 años antes de Cristo. Giosefo Zarlino (1517-1590), maestro de capilla de san Marcos en Venecia la hizo popular y se utilizó mucho durante el renacimiento.

Vincenzo Galilei (1520-1591) coincidió con Zarlino y cuestionó su propuesta. Entre ambos se produjo una tensa disputa matemática que, desde un punto de vista matemático ganó Zarlino, pero no desde un punto de vista práctico y realista.

ACTIVIDAD 5 Temperamento Aristógenes-Zarlino

La propuesta de Aristógenes consiste en utilizar el tercer armónico 3f y también el quinto armónico 5f de la nota principal o dominante. Después añadir sucesivamente terceros armónicos de cada una de estas notas: f, 3f, 3^2f, 3^3f, 5f, 5·3f, 5·3^2f,

Genere este nuevo temperamento.

Aplíquelo al valor f = 352 Hz (nota fa)

Analice las diferentes razones existentes entre una nota y otra. Reflexione la dificultad que hay al incorporar nuevas notas en medio

Podremos escuchar esta escala generada con el programa Pure Data (por ejemplo con f = 352 Hz = FA). Escuche este temperamento y opine sobre su viabilidad musical.

(nota. Por falta de tiempo esta actividad solamente se comentará y no se realizará en el taller)

La escala temperada

Hasta el siglo XVI era impensable considerar una escala musical en la que no se incorporaron los armónicos naturales. Vincenzo Galilei, el padre de Galileo se reveló con los cánones establecidos y se planteó la posibilidad de abrir el problema. ¿Por qué no ignorar las restricciones? ¿Por qué no «pasar de los armónicos»? Este espíritu rebelde le ocasionó muchos problemas con las autoridades intelectuales de la época y éste fue uno de los aprendizajes que tuvo Galileo de su padre.

El problema más grave de las escalas establecidas hasta entonces era la afinación de instrumentos como el clave y la imposibilidad de realizar transposiciones de una manera satisfactoria. (Una transposición consiste en alterar la tonalidad de una pieza musical subiendo o bajando algunos tonos para adecuar la música al registro de un cantante.) Cualquier transposición sonaba ligeramente distinta que la pieza original.

ACTIVIDAD 6. La escalera Temperada

La solución que Vincenzo Galilei defendió fue propuesta ya por Bartolomé Ramos de Pareja, (1440-1491) profesor de teoría musical en la universidad de Salamanca pero su solución no fue aceptada hasta casi 200 años después. La idea es simple. Sólo hace falta construir una progresión geométrica de modo que con 12 términos pasemos de f a 2f.

Construya este temperamento

Aplíquelo tomando como nota principal f = 264 Hz (nota do[1]) y cree una escala sonora con algún instrumento o con el ordenador con la siguiente estructura: tono-tono-semitono-tono-tono-tono-semitono.

Comente la viabilidad de esta escala.

	Do #	*re#*		*fa#*	*sol#*	*la#*	
do	*re*	*mí*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*do*
264							

J. S. Bach (1685–1750) fue quien popularizó definitivamente la escala temperada creando una genial composición llamada *El clave bien temperado* que ha sido usada para justificar las ventajas de usar progresiones geométricas para crear escalas musicales. Bach compuso una pieza para cada tonalidad, lo que permite ir valorando distintos aspectos sonoros. Escucharemos brevemente algún fragmento.

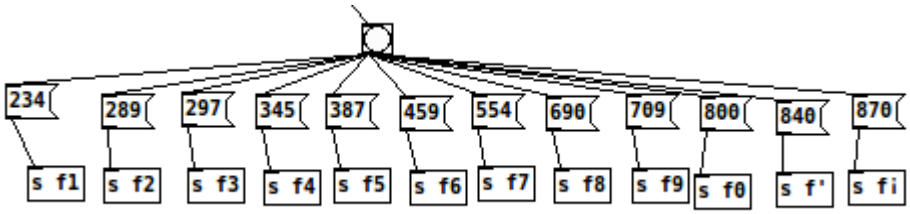
[1] Habitualmente esta escala se construye a partir de la=440 Hz.

ACTIVIDAD 7

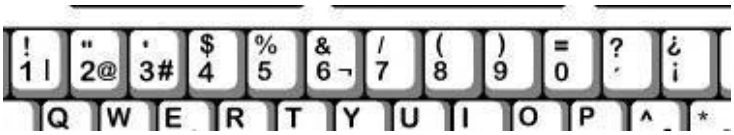
Una vez aceptada una escala que no respeta un principio fundamental como es la incorporación de los armónicos, ¿por qué no tomar nuevos criterios para crear nuevas estructuras sonoras?

Rompamos todas las restricciones y elijamos nuevas ideas. Haga una nueva propuesta de una escala musical con los criterios matemáticos que desee usando sus conocimientos matemáticos. Hágala sonar y expóngala a sus compañeros. Busquemos la “afinación 20JAEM”.

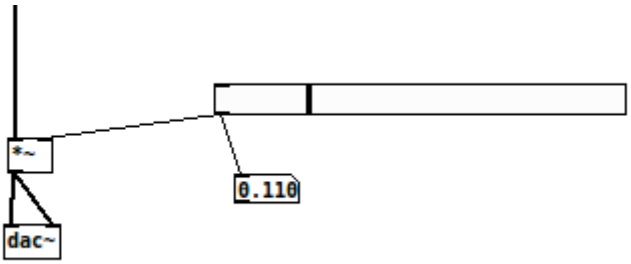
Para poder interpretar música con la escala que ha creado sólo tiene que introducir las frecuencias que ha elegido en el siguiente archivo de Pure Data (el archivo se compartirá durante el taller)



Para interpretar música es necesario utilizar las teclas con números del teclado.



Es necesario subir el volumen del PD moviendo a la derecha el cursor:



Para finalizar el taller valoraremos la utilidad de usar escalas alternativas para crear músicas alternativas que tienen infinidad de usos distintos encaminados a transmitir todo tipo de emociones.

Referencias

ARENZANA, V. y ARENZANA, J. (1998): "*Aproximación matemática a la música"*, Números, Revista de didáctica de las matemáticas, Vol. 35, pp. 17-31.

BARBOUR, J.(1953) *Tuning and Temperament. A Historical Survey*, East Lansing

BLACKWOOD, E. (1985) *The structure of recognizable diatonic tunings* Princeton University Press

CONTRERAS, A. Diez M. Pacheco J. P. (2007) *Las Matemáticas y la evolución de las escalas musicales.* SUMA 43-49

DOUGLAS R. HOFSTADTER (1979) *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid.* Basic Books

JOHNSON, T. (2001): *Found Mathematical Objects*, www.entretemps.asso.fr/Seminaire, pp. 1-19.

KREIDLER J (2009). *Programming Electronic Music in Pd.* <www.kreidler-net.de>

PASCAL, C. y TOMAS, N. (2000): *Musique et Mathématiques*, TER, Université de la Méditerranée, pp. 1-41.

TaR012 CAMINOS: Juegos de mesa para trabajar Geometría

Narcís Matas Tortosa
nmatas.tortosa@gmail.com
CEIP Cas Saboners (Mallorca)
Ana Belén Petro Balaguer
anabelen.petro@uib.es
Universitat de les Illes Balears (Mallorca)

Núcleo temático: Recursos para el aula, Procesos.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Primaria.

RESUMEN

El taller trata de dar a conocer a sus asistentes una óptica diferente del bloque de geometría, un bloque que suele tener poco protagonismo en las aulas. A partir de 10 juegos de mesa, todos ellos con características muy diferentes, pero con un punto en común, los recorridos o caminos, se trabaja la geometría y la estrategia de una forma motivadora y divertida, potenciando el reto, la perseverancia y la superación para favorecer el aprendizaje. En el taller, los asistentes podrán experimentar y analizar los diferentes juegos, descubriendo las potencialidades y los límites para el correcto desarrollo de la competencia de la orientación espacial.

Palabras clave: Juegos de Mesa, Geometría, Caminos, Estrategia, Pensamiento Lógico.

Motivación del taller

En este taller queremos trabajar uno de los aspectos menos tratados de la Geometría, los objetos unidimensionales (1D), presentado una serie de juegos que tienen un punto en común: los caminos. Los juegos presentados trabajan con diferentes temáticas, diferentes objetivos y algunos potencian el trabajo en grupo y

otros el trabajo individual o en pareja, pero en todos ellos se debe buscar una estrategia ganadora, potenciando el pensamiento lógico, para aprender a "desplazarse" de forma adecuada en el espacio, favoreciendo la constancia y el esfuerzo para llegar al éxito.

Los juegos que se presentarán en el taller pretenden potenciar la orientación espacial de los alumnos, trabajando los recorridos y los trayectos que se efectuarán para conseguir el éxito en los diferentes juegos.

Según Canals (2009), los principales aspectos de la geometría son tres:

Relaciones de posición en el espacio

Reconocimiento de formas, en las líneas, superficies y volúmenes

Estudios de las transformaciones o cambios de forma y posición.

Estos tres aspectos están relacionados y se pretende profundizar en dos de ellos y en su relación: la orientación espacial y las líneas.

La orientación espacial se asocia con la necesidad de los individuos de ubicarse y moverse en el espacio para poder actuar en el entorno que los rodea. Según Zapateiro-Segura *y otros* (2018), "la orientación espacial es la competencia que involucra establecer diferentes posiciones en el espacio y operar con ellas; incluye la propia posición y sus movimientos, además, las posiciones de otras personas o de objetos, representadas en mapas y coordenadas" (p.123). Esta competencia la podemos encontrar en los "Principios y Estándares para la Educación Matemática" (NCTM (2003)) como una de las expectativas a alcanzar en las diferentes edades (desde Pre-K-2 hasta los 12 años) en el bloque de Geometría, proponiéndola juntamente con la visualización y el uso de modelos geométricos como una herramienta básica para la resolución de problemas. En cada una de las etapas se plantean diferentes tipos de problemas y diferentes modelos (como las redes o los grafos) que pueden ayudar a mejorar esta orientación espacial, aparte de trabajarla desde diferentes nociones matemáticas como las representaciones bidimensionales, los planos o mapas o las referencias cartesianas. También en Canals (2009), se nos

plantean diferentes propuestas para trabajar conjuntamente las líneas y la orientación espacial, ya que como se indica, las relaciones de posición en el espacio deben empezarse por la relación de orden, que es inseparable de la línea. Otros autores también han destacado la importancia del estudio de los desplazamientos para entender el espacio que nos rodea. Así, Berthelot y Salin, citados en Gonzato *y otros* (2011),

identifican tres categorías para que el sujeto tenga un buen control de sus relaciones con el espacio sensible, esto es: reconocer, describir, fabricar o transformar objetos; desplazar, encontrar, comunicar la posición de objetos; reconocer, describir, construir o transformar un espacio de la vida cotidiana o de desplazamiento (p. 101).

Por tanto, vemos la importancia de trabajar la orientación espacial dentro del bloque de geometría, ya que "observamos que frecuentemente en los cursos de matemáticas el tema de orientación y visualización de espacios … es poco tratado o planteado como actividad recreativa" (Gonzato *y otros*, 2011, p. 115).

Son pocos los autores que hablan de las líneas como parte importante de la geometría, y de la importancia de tratar los objetos unidimensionales, pero como dicen Badillo y Edo (2007) es básico que los estudiantes entiendan que los polígonos y las figuras geométricas planas (2D) contienen implícitamente la unidimensión, ancho y largo. También Alsina (2006) hace fuerza en la idea que la enseñanza de la línea y de sus características en edades tempranas es básica para la posterior comprensión de las figuras en dos dimensiones y de los cuerpos tridimensionales.

Por otra parte, podemos encontrar muchos artículos que potencian el trabajo con juegos de mesa para mejorar la enseñanza de las matemáticas. Como podemos leer en Vigotski (1988), este autor es uno de los primeros que considera que el juego es una actividad esencial en el desarrollo humano porque proporciona beneficios cognitivos, sociales y morales. Diferentes estudios demuestran que el tiempo invertido en jugar a juegos colectivos en clase de matemáticas puede ser una inversión de gran valor y que implican el aprendizaje tanto de conceptos como

de estrategias (Edo, 1998; Corbalán y Deulofeu, 1996). Como se indica en Carmona y Cardeñoso (2019), para poder implementar una situación de aprendizaje de las matemáticas en el aula basada en un juego de mesa es imprescindible que los juegos conecten con los intereses y los gustos lúdicos del alumnado y que presenten verdaderas oportunidades para el aprendizaje de estas. Edo *y otros* (2007) distinguen los juegos de mesa en tres categorías, en función del grado de azar que contienen:

Juegos de azar puro. Son juegos en que el jugador se limita a ejecutar las órdenes dictadas por el dado.

Juegos con alguna estrategia favorecedora. Son juegos con presencia del azar, pero en los cuales el jugador ha de tomar una decisión que puede influir en el resultado de su partida.

Juegos de estrategia. En estos juegos todas las decisiones están en manos del jugador, que pueden llegar a descubrir una estrategia ganadora.

Como se indica en Badillo *y otros* (2012), es importante trabajar con los juegos del tipo b y c ya que implican un razonamiento que está estrechamente vinculado con el pensamiento matemático deseable en la resolución de problemas. “Podemos establecer una comparativa entre las demandas de un juego de estrategia y las de la resolución de problemas, donde se puede apreciar que sus etapas son equiparables” (Gómez Chacón, 1992; Edo *y otros,* 2008, como se citó en Carmona y Cardeñoso, 2019, p. 64). Este hecho se puede observar en la Tabla 1.

Tabla 1. Comparativa de resolución de problemas y juego. Extraida de Carmona y Cardeñoso (2019).

Comprensión del problema	**Comprensión del juego**
¿Qué pide?	¿Qué requisitos?
¿Qué datos tengo?	¿Cuáles son las acciones posibles?

¿Qué necesito?	¿Cuándo se gana?
¿Conozco algún problema análogo?	¿He jugado algún juego similar?
Ahora establezco conjeturas	Ahora elaboro estrategias
Y examino las conjeturas	Y examino estrategias
Ejecuto un plan	Juego
¿Se trata de una estrategia aplicable en general?	¿Funciona la estrategia ganadora bajo cualquier condición?
¿Se puede modelizar la estrategia para cierta tipología de problemas?	¿Es posible su modelización para cierto tipo de juegos?

Por tanto, podemos ver la potencialidad de los juegos de mesa para llegar a ciertos contenidos matemáticos y para reforzar la resolución de problemas, buscando estrategias ganadoras.

Propuesta de juegos

A continuación, se presentan brevemente cada uno de los juegos que se proponen. Se indican algunas recomendaciones de los juegos, así como la dinámica adecuada para llevarlo al aula. En el siguiente enlace se pueden descargar las instrucciones de cada uno de los juegos de mesa, ofrecidas a los estudiantes para un rápido conocimiento de cómo jugar:

https://cutt.ly/hFrKFrj

2.1 Juegos de retos individuales o en pareja

En este grupo incluiríamos los juegos: Camelot Jr, Caperucita Roja, Laser Maze y Rush Hour.

Imagen 1. Juego Camelot Jr.

Imagen 2. Juego Rush Hour

Imagen 3. Juego Laser Maze.

Aunque el trabajo en la orientación espacial de estos juegos es muy diferente los unificamos, ya que consideramos que la dinámica de juego es muy parecida. Todos ellos se pueden considerar dentro de la categoría de juegos de estrategia. Son juegos para trabajar de forma individual o en pareja donde se presentan, a través de un libro, diferentes propuestas de retos, que los alumnos deben ir superando, siguiendo las instrucciones indicadas. Son juegos que pueden ser planteados sin un tiempo fijo, ya que cuando se termina un reto se puede abandonar y continuar en otro momento en el punto que se ha dejado.

Según la dificultad los podríamos diferenciar en dos grupos: Camelot Jr y Caperucita Roja adecuados para primer ciclo de primaria, en cambio, Rush Hour y Laser Maze serían más adecuados para segundo y tercer ciclo. Se ha visto que el tiempo máximo de juego con atención y concentración mantenida para los estudiantes de primer ciclo suele ser de unos 15 - 20 minutos, pero para ciclos superiores, hay niños que pueden estar más tiempo, hasta los 30 minutos.

La temática suele gustar a los alumnos y, en general, los retos iniciales suelen ser superados fácilmente.

2.2 Juegos en grupo de cartas

En este grupo consideramos los juegos: Triteringa y Bandida/o.

Son juegos de cartas, de temáticas y objetivos diferentes, donde pueden jugar de 2 a 4 jugadores. Son juegos que precisan de bastante espacio para jugar (cuatro mesas escolares).

El juego Triteringa tiene diferentes opciones de juego, también de forma individual o en tríos, aunque sólo se han experimentado las opciones de trabajo en grupo de 4 o en pareja.

La duración del Triteringa suele ser de 15 o 20 minutos. El juego de Bandido/a es un poco más largo, unos 30 minutos. A los alumnos, este último, a veces se les puede hacer un poco largo, por lo que se podría jugar con menos cartas. Este último es un juego cooperativo, donde todos tienen un objetivo común y ganan o pierden, aunque no es fácil llegar al éxito.

Imagen 4. Juego Bandida.

Imagen 5. Juego Triteringa

Ambos tienen unas instrucciones fáciles de comprender por lo que se podrían proponer en cualquier ciclo de primaria, pero consideramos que son más adecuados para segundo y tercer ciclo, especialmente, el Bandido/a.

Los dos los podemos considerar dentro de la categoría de juegos con alguna estrategia favorecedora.

2.3 Juegos en grupo de tablero

En este grupo incluimos los juegos: Laberinto, La cucaracha, Marrakeck y Carcassone.

Todos ellos se pueden proponer para jugar de 4 a 2 personas (Carcassone se puede jugar con 5 personas, también). Son juegos donde cada jugador compite contra los demás para alcanzar un objetivo.

Imagen 6. Juego Laberinto

Imagen 7. Juego Marrakech

Imagen 8. Juego La Cucaracha.

Los juegos Carcassone y Marrakech son juegos de larga duración, al menos unos 30 minutos. De todos modos, son juegos dinámicos y los estudiantes no suelen perder el interés. En ambos tienen que ir pensando los caminos y reconsiderando la estrategia a medida que avanza el juego.

La cucaracha es un juego más rápido, de unos 10 minutos, pero al cual los alumnos se enganchan fácilmente y quieren seguir jugando.

El juego Laberinto puede durar unos 20 minutos, pero se puede acortar fácilmente, si es necesario, eliminando algunas de las cartas que se reparten inicialmente. Es un juego donde podemos observar grandes diferencias entre los alumnos según su orientación espacial.

Los juegos Laberinto y Carcassonne pueden considerarse dentro de la categoría de juegos de estrategia. Los juegos Cucaracha y Marrakech los podemos considerar dentro de la categoría de Juegos con alguna estrategia favorecedora.

3. Conclusiones

Los juegos se han experimentado en diferentes aulas de educación primaria, desde primero hasta sexto, en diferentes escuelas de Mallorca, siendo el resultado muy positivo tanto para alumnos como para maestros.

Los alumnos han mostrado una predisposición muy buena a la hora de jugar y colaborar con sus semejantes, casi no han surgido conflictos, exceptuando algún caso esporádico en los juegos en pareja. Al ser preguntados al final del taller, la mayor parte del alumnado ha respondido que están trabajando matemáticas porque son juegos de pensar y de buscar una estrategia, pero muy pocos han sido conscientes de estar trabajando la geometría.

En cada una de las aulas donde se ha llevado a cabo el taller, sólo se ha podido poner en práctica un único día en una sesión de una hora. Pensamos que sería muy positivo repetir las sesiones con los mismos juegos para ver como mejoran las estrategias y como se mejora la organización espacial del alumnado.

Uno de los maestros del aula donde se presentaron los juegos, consideró que uno de ellos se podía materializar, a partir del propio alumnado, para poder introducir el concepto de ángulo en su clase. Consideramos muy positivo que, a partir de los juegos de mesa, se puedan extraer ideas para contextualizar el aprendizaje de nuestros alumnos.

Podemos concluir que ha sido una experiencia muy interesante y de la que se pueden extraer ideas de enseñanza de la geometría.

Referencias

Alsina i Pastells, À. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de los 0 a los 6 años: Propuestas didácticas.* Barcelona: Octaedro.

Badillo, E., & Edo, M. (2007). *Orientaciones didácticas para el taller de arte y geometría III: líneas (1D), polígonos y otras figuras geométricas planas (2D).* En C. Tomás y M. Casas (coord.). Educación Primaria. Orientaciones y Recursos (6-12 a os). Wolters Kluwer Educación. Barcelona. CD-ROM, 25 pág.

Badillo, E., Edo, M., & y Piquet, J. D. (2012). *L'adquisició de competències matemàtiques d'alumnes de primària en contextos de jocs de taula i resolució de problemes.* Noubiaix: revista de la FEEMCAT i la SCM, 29-43.

Canals, M.A. (2009). *Superfícies, volums i línies*. Dossiers Rosa Sensat 105.

Carmona Medeiro, E., & Cardeñoso Domingo, J. M. (2019). *Situaciones basadas en juegos de mesa para atender la elaboración del conocimiento matematico escolar*. Épsilon.

Corbalán, F. & Deulofeu, J. (1996). *Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas.* Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 7, 71-80.

Edo, M. (1998). *Juegos y matemáticas. Una experiencia en el ciclo inicial de primaria.* Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 18, 21-37.

Edo, M., Deulofeu, J. i Badillo, E. (2007). *Juego y matemáticas: Un taller para el desarrollo de estrategias en la escuela.* Actas XIII JAEM, Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, Granada.

Gonzato, M., Fernández, M., & Díaz, J. J. (2011). *Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial.* NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77, 99-117.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Sevilla, España.

Vigotski, L. S. (1988). *Liev Semiònovitx Vygotski: Pensament i llenguatge*. [ed. a cargo de Ignasi Vila i Rosa Colomina]. Vic: EUMO/Barcelona: Diputació de Barcelona.

Zapateiro-Segura, J. C., Poloche-Arango, S. K., & Camargo-Uribe, L. (2018). *Orientación espacial: una ruta de enseñanza y aprendizaje centrada en ubicaciones y trayectorias.* Tecné, Episteme y Didaxis: TED, (43), 119-136.

TaR015 Origami: ángulos y otras historias con papiroflexia

Belén Garrido Garrido
belengarrido@gmail.com
Colegio Guadalaviar. Valencia

Núcleo temático: Recursos para el aula

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Secundaria.

RESUMEN

El doblado de papel, papiroflexia u origami, se puede considerar como un recurso manipulativo que puede ayudar a mejorar el razonamiento en el área de la geometría ya que, debido principalmente a su carácter visual y experimental, facilita la comprensión de conceptos geométricos.

El objetivo del taller es proporcionar a los docentes una herramienta didáctica para el estudio de la geometría de una manera accesible y amena.

Los asistentes al taller, dirigidos por la ponente, llevaran a cabo cuatro actividades basades en figuras de papiroflexia básicas no complicadas. Durante el doblado de las figuras la ponente irá explicando cómo usar esa figura en el aula de matemáticas. Los retos, a los que llamamos orisangakus (Garrido, 2015), que se propondrán serán de distinta complejidad y todos ellos se pueden resolver utilizando conceptos geométricos básicos.

Palabras clave: Papiroflexia, Origami, Orisangakus, Ángulos, Geometría

La exploración de los aspectos geométricos de las figuras de papiroflexia se puede utilizar para investigar las relaciones entre los elementos geométricos de las figuras, descubrir sus propiedades características y aprender a utilizarlas en la solución de problemas (Royo Prieto, 2002) (Hull, 2006).

La relación entre origami y geometría es fácilmente observable. Al hacer un modelo se cumplen deliberada o intuitivamente ciertas propiedades que responden a acciones específicas de geometría y cuando se despliega este pueden verse las regularidades y simetrías en las marcas de plegado. Las posibilidades pedagógicas del origami son enormes para estudiar conceptos geométricos para ello es fundamental que la acción del plegado no sea una cuestión mecánica y de repetición, sino en un proceso reflexivo con una correcta interpretación geométrica de lo que se está haciendo (Ricotti, 2011).

Las actividades de papiroflexia en el aula de matemáticas pueden favorecer el uso y la comprensión de conceptos básicos de geometría (diagonal, mediana, vértice, bisectriz, etc.), el análisis de las propiedades de diversas figuras geométricas, la identificación de relaciones de simetría y semejanza, el uso de los teoremas de Thales y Pitágoras y de conceptos trigonométricos para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras.

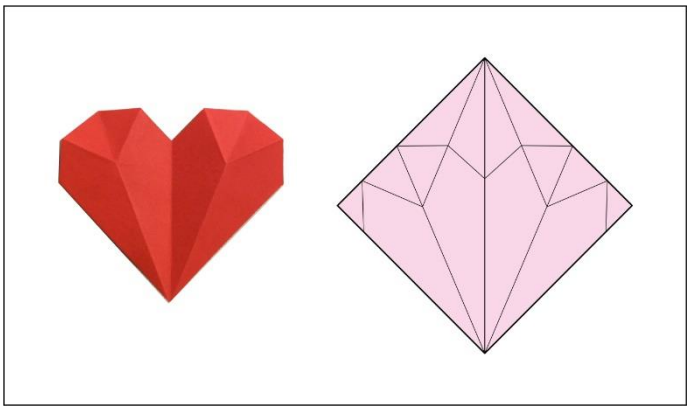
Este taller trata de aportar ideas a los profesores para que elaboren actividades basadas en la papiroflexia dirigidas a que sus alumnos y alumnas sean capaces de interpretar geométricamente los dobleces que hacen siguiendo instrucciones, exploren e investiguen las propiedades geométricas de las figuras que construyen y generen demostraciones utilizando un lenguaje matemático básico adecuado.

Las actividades que se llevarán a cabo estarán basadas principalmente en el patrón de formas geométricas (CP) obtenido al desdoblar una figura de papel.

Al desdoblar una figura de papiroflexia aparecen en el papel un conjunto de marcas muy interesantes desde el punto de vista geométrico. A este conjunto de marcas se le denomina patrón de marcas CP (Crease pattern).

Corazón anguloso

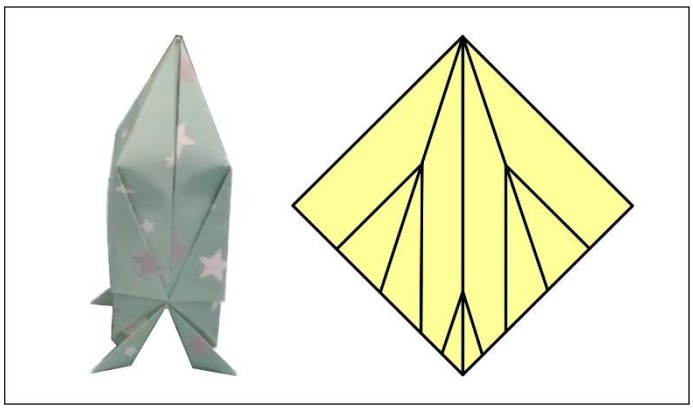
A partir de un cuadrado de papel doblaremos un corazón y lo utilizaremos para analizar el valor de los ángulos que aparecen en el patrón de marcas.



Corazón

1. Cohete

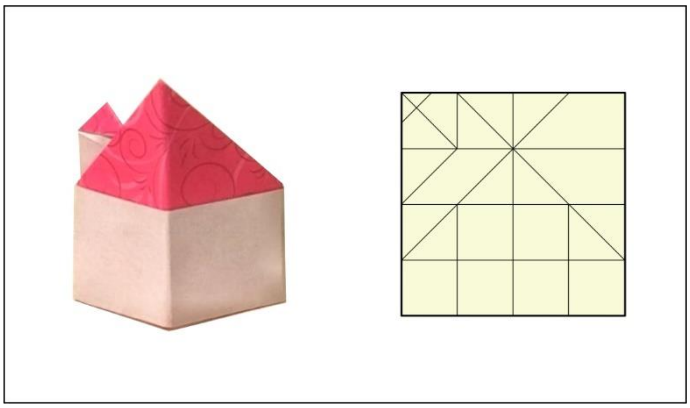
Este cohete que podemos hacer volar a propulsión nos servirá para trabajar, conocer, medir, buscar, comparar, clasificar y relacionar ángulos y visualizar el teorema de Thales.



Cohete

2. Casita

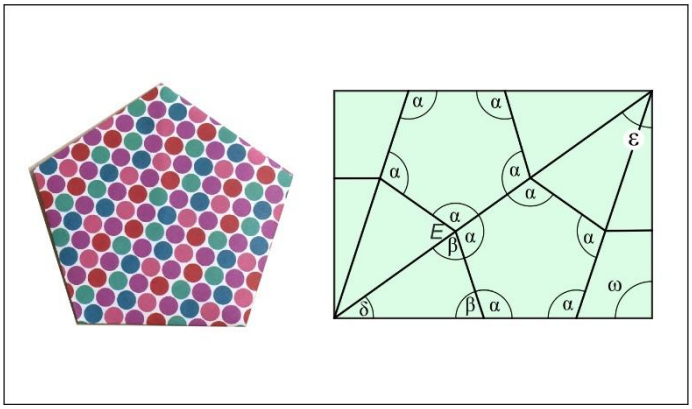
En esta actividad trabajaremos fracciones y proporciones.



casita

3. Sobre pentagonal

Esta interesante construcción de un sobre pentagonal serà la base para investigar la proporción que debe tener un rectángulo de papel para que el pentágono obtenido sea regular.



Sobre pentagonal

Referencias

Garrido Garrido,M.B. (2016). *Orisangakus. Desafíos matemáticos con papiroflexia*. Editorial SM. Madrid

Hull, T. (2013). *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics.* AK Peters. Wellesley

Ricotti, S (2011). *GEOMETRIA Y ORIGAMI.Una fiesta con papeles para la clase de matemáticas.* Editorial Homo Sapiens. Rosario.

Royo Prieto, J. I. (2002). Matemáticas y papiroflexia. *Sigma* 21, 175-192.

TaR019 Cómo construimos matemáticas con piezas de cartón en Educación Infantil

Myriam Codes Valcarce
myriam.codes@ddi.uhu.es
Universidad de Huelva, Departamento de Didácticas Integradas
Rocío Pérez Guzmán
yo.chiogpic@gmail.com
CEIP Aurora Moreno (Gibraleón, Huelva)
Luisa Mª Martínez del Valle
luisamartinezdelvalle@gmail.com
CEIP Las Viñas (Bollullos Par del Condado, Huelva)
Ángeles Chico Gómez
angeles.chico@ddi.uhu.es
Universidad de Huelva, Departamento de Didácticas Integradas

Núcleo temático: Recursos para el aula; Procesos

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Infantil / Primaria (primer ciclo).

RESUMEN

En este taller pretendemos que los participantes descubran el potencial semiótico de un recurso no estructurado y proveniente de material reutilizable formado por piezas de cartón (cajas, planchas, etc.). A partir de la familiarización con el recurso, proponemos a los participantes que reflexionen sobre el contenido matemático que podrían trabajar en un aula de Educación Infantil o primer ciclo de Educación Primaria con ese recurso. Compartir las propuestas nos brindará la oportunidad de apreciar, por un lado, el potencial del recurso y, por otro lado, el papel del maestro en la gestión del recurso para convertirlo en un instrumento de aprendizaje. Apoyándonos en la experiencia de dos maestras, nos preguntamos qué conocimiento pone en juego el profesorado en su papel de mediador.

Palabras clave: Recursos, Educación Infantil, Mediación, Potencial Semiótico, Aprendizaje Matemático.

1. Introducción

En Educación Infantil y primer ciclo de Educación Primaria es indudable la necesidad de apoyarnos en manipulativos que medien en la construcción del conocimiento de los y las infantes. Este es uno de los rasgos que determinan la idiosincrasia de estos niveles escolares. También el conocido conocimiento matemático informal que, como nos indica Baroody (1994), adquieren los niños y las niñas fuera de la escuela. Ese conocimiento informal conlleva unas diferencias significativas en los conocimientos previos de los estudiantes que el maestro ha de gestionar para garantizar la construcción de conocimiento en todo el grupo clase.

Por otro lado, Gasteiger y otros (2020) sostienen que "enseñar matemáticas en educación Infantil significa alentar al infantado a reconocer y pensar en estructuras, números, formas, etc. en la visa cotidiana" (p. 194). Llevar esas situaciones de la vida cotidiana al aula es labor del enseñante, así como plantear situaciones que den sentido al uso del conocimiento matemático. Recordemos que un aprendizaje con sentido es lo que garantiza un verdadero aprendizaje.

Volviendo a los recursos manipulativos, no debemos olvidar que el mero hecho de dejar en manos de un niño cualquier manipulativo, no garantiza que el niño aprenda. En esta línea, Ball (1992) reclamaba la necesidad de dejar de pensar que el uso de recursos manipulativos es la panacea. En este sentido, Willians y Kamii (1986) realzan el valor de las acciones mentales que tienen lugar en la mente del individuo cuando manipula los recursos, restando importancia al recurso en sí. Esas acciones mentales no se producen de manera espontánea en la mente del individuo. Para que se activen, es necesaria la intervención del maestro que, hábilmente, planteará al niño la pregunta que, al ser contestada, movilizará su conocimiento.

2. Marco teórico

Nos apoyamos en los trabajos recientes de Bartolini y Mariotti (2008) en los que destacan el papel del profesor como mediador semiótico del potencial de recursos. Estos trabajos se desarrollan bajo el marco teórico instrumental del que tomamos, sintéticamente y en relación con lo que se va a desarrollar en el taller, el proceso de

instrumentalización que se produce cuando un artefacto se transforma en un objeto mental por la acción de un individuo sobre él (Verillon y Rabardel, 1995). Artefacto es cualquier objeto material fabricado por el hombre para un fin, pero también incluye gestos u otros símbolos generados por el lenguaje y que no son tangibles. Cuando un individuo actúa con el artefacto en un contexto de ejecución de una tarea, se dice que se ha apropiado del artefacto y lo ha transformado en un objeto mental generador de significados.

Figura 1. Artefacto vs instrumento

El papel que juega el maestro en esta situación es el de promover la creación de significados matemáticos a través del diseño de tareas en las que el niño actuará sobre el artefacto para generar esos significados. El potencial semiótico del artefacto se ve desde dos perspectivas. Por un lado, desde la posibilidad de crear significados matemáticos personales cuando el individuo utiliza el artefacto y, por otro lado, desde la previsión, por parte del profesor, de creación de significados matemáticos (Verillon y Rabardel, 1995). En este taller nos centraremos en analizar cómo el profesorado transforma nuestras piezas de cartón en herramientas para la

construcción de conocimiento y nos preguntamos por el conocimiento especializado que pone en juego el profesorado en esta situación (Carrillo, et al. 2018).

3. Ejemplos

Hemos llevado a dos aulas de Educación Infantil de 5 años un conjunto de piezas de cartón formado por cajas de diferentes tamaños, tubos cilíndricos de diferentes radios y alturas, paneles de cartón nido de abeja con diferentes tamaños y espesores y otros recortes de cartón provenientes de diversos embalajes. Las dos maestras participantes no habían trabajado anteriormente con este tipo de material en sus aulas. Se les pidió que llevaran al aula esas piezas para trabajar con su alumnado contenido matemático, sin sugerirles ningún contenido concreto para no influir en sus decisiones.

Grabamos las dos sesiones y observamos, al igual que Bartolini y Mariotti (2008), patrones de acción de las maestras en su empeño por crear relaciones entre las piezas de cartón, nuestros artefactos, y contenidos matemáticos. Ese contenido forma parte del potencial semiótico que, como maestras, reconocen en este recurso no estructurado. Se mostrará sendos fragmentos de vídeo en los que se observa cómo emergen los significados matemáticos que promueven las maestras a través de la acción de los niños sobre las piezas de cartón.

4. Desarrollo del taller

El taller se desarrollará en cuatro partes. En función del número de asistentes al taller, haremos grupos de entre dos y cuatro personas para que trabajen compartiendo ideas y el desarrollo del taller tenga dinamismo. Trataremos de que los integrantes de los grupos compartan el nivel educativo del que son especialistas, para que compartan los objetivos de la experiencia que llevarán a cabo.

Las piezas de cartón que protagonizan el taller se expondrán en una mesa central, a la vista de todos los participantes, a los que se les pedirá que escojan unas cuantas, dependiendo nuevamente del número de participantes.

4.1 Parte I: contextualización (10 minutos)

Comenzaremos con una breve exposición de los principios teóricos que sustentan nuestra experiencia, haciendo hincapié en dos ideas fundamentales: (i) los recursos por sí solos no son generadores de conocimiento; (ii) el profesorado es un agente esencial en la construcción del conocimiento matemático del estudiante.

4.2 Parte II: familiarización y análisis del recurso (20 minutos)

A continuación, nos detendremos en las piezas de cartón, los artefactos, destacando que todas provienen de reutilizar cajas pequeñas, restos de planchas de embalaje con diferentes grosores, formas y tamaños, y tubos de rollos de papel de diferentes diámetros y longitudes. Se repartirán entre los asistentes una variedad piezas.

> Actividad 1. Reconocemos los artefactos y su vínculo con la matemática (tiempo previsto 20 minutos).
>
> Los asistentes al taller, en su grupo, discutirán y elaborarán un listado en el que se etiqueten los artefactos que se le han facilitado con una breve descripción de las características físicas de cada uno de ellos. Este listado será el resultado de la observación y la manipulación de los artefactos. A partir de esta descripción, los participantes analizarán qué contenido matemático es susceptible de ser desarrollado en un aula de Infantil o primer ciclo de Educación Primaria con esas piezas de cartón.
>
> En los pequeños grupos se defenderán los contenidos que cada integrante proponga y el modo en que cada uno piense que se introducirían en el aula. Además, deberán justificar el motivo de la elección de los contenidos.

4.3 Parte III: puesta en común (50 mimutos)

Se propondrá una puesta en común en gran grupo. A través de una lluvia de ideas, se compartirán las iniciativas de los distintos grupos que tendrán que sintetizar la discusión que se haya desarrollado en el pequeño grupo. Se elaborará un gran listado, a modo de mural, con todos los contenidos matemáticos que han resultado

en los diferentes grupos. A continuación, se consensuará un contenido matemático susceptible de ser trabajado en el aula.

Actividad 2. Diseñamos una tarea (tiempo estimado 15 minutos)

Cada grupo diseñará sucintamente una tarea en la que se emplee el artefacto como agente motivador o contextual de ese contenido. Se realizará por escrito un guion que recoja cómo lo desarrollarían.

A continuación, mostraremos nuestros dos ejemplos a partir de algunos fragmentos de vídeo para ilustrar cómo se han desarrollado unas prácticas de aula con nuestros artefactos. Nos centraremos en tres aspectos:

- patrones en la gestión del aula: describiremos algunos patrones de acción que hemos observado en el quehacer de las maestras cuando promueven que afloren significados matemáticos con las piezas de cartón.

- abordaje exitoso de algún contenido matemático: mostraremos dos momentos, uno del desarrollo de la sesión de cada maestra, en los que los contenidos previstos por ellas en la planificación de la sesión captaron la atención de los niños y las niñas y, manipulando algunas piezas de cartón, se experimentó con mayor profundidad algún aspecto de un contenido matemático.

- dificultades encontradas en el desarrollo de las sesiones: el potencial semiótico de las piezas de cartón que las maestras identificaron proporcionó un listado variado de contenidos matemáticos de los que solo con algunos se profundizó. La consigna dada a las maestras para llevar al aula las piezas de cartón fue tan abierta, que no permitió una concreción en la construcción de un significado matemático específico.

Actividad 3. Debate (tiempo estimado 20 minutos)

A partir del visionado de los vídeos, se guiará un debate en el que un portavoz de cada grupo sintetizará su propuesta. Se guiará el debate para discutir qué conocimiento pone en juego el profesorado en su papel de mediador.

4.4 Parte IV: síntesis (10 minutos)

Cerraremos el taller valorando las iniciativas que se expongan y destacando nuevamente las dos ideas centrales que podemos resumir en el papel central del profesorado como mediador en la construcción de conocimiento a través de la experimentación con recursos, en este caso, no estructurados. Además, pondremos en alza el potencial semiótico de las piezas de cartón reutilizadas y la posibilidad de abordar contenidos matemáticos mediados por algunas piezas de cartón.

La reutilización de estas piezas, además de fomentar el trabajo con una variedad de contenidos matemáticos, nos permite introducir el tema de la sostenibilidad y la conservación del planeta, tema transversal en la Escuela.

Agradecimientos

Este estudio está asociado al proyecto RTI2018-096547-B-I00 (Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, España).

Referencias

Ball, D. L. (1992). Magical Hopes: Manipulatives and the Reform of Math Education. *American Educator: The Professional Journal of the American Federation of Teachers*, nº. 16 vol 2, 14-18,46-47.

Baroody, A. J. (1994). *El pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial.* Madrid: Visor.

Bartolini, M. G. y Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh y D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education, second revised edition* (pp. 746-783). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education.* nº. 20, vol 3, 236-252. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Gasteiger, H., Bruns, J., Benz, C., Brunner, E. y Sprenger, P. (2020). Mathematical pedagogical content knowledge of early childhood teachers: a standardized situation-related measurement approach. *ZDM,* nº. 52 vol. 2, 193-205. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01103-2

Kinzer, C., Gerhardt, K. y Coca, N. (2016). Building a Case for Blocks as Kindergarten Mathematics Learning Tools. *Early Childhood Education Journal*. nº. 44, vol 4, 389-402. https://doi.org/10.1007/s10643-015-0717-2

Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Though in Relation to Instrumented Activity. *European Journal of Psychology of Education*, nº. 10 vol 1, 77-101.

Willians, C. K. y Kamii, C. (1986). How do children learn by handling objects? *Young Children*, nº. 42 vol 1, 23-26.

TaR022 Web portal Math4u

Juan Seguí de Miguel
jl.seguimiguel@edu.gva.es
IES GABRIEL CÍSCAR, Oliva
Marta Mínguez Luján
m.minguezlujan@edu.gva.es
IES EDUARDO MERELLO, Port de Sagunt

Núcleo temático: Recursos para el aula. Inclusión.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

RESUMEN

Math4u.vsb.cz es un portal educativo con una base de datos de más de 4000 ejercicios tanto para Educación Secundaria como Bachillerato. Totalmente gratuito, organizado en temas y secciones. Está diseñado, principalmente, para ser utilizado mediante dispositivos electrónicos en cinco idiomas diferentes. Consta de tres aplicaciones según se utilice como alumnado, profesorado o clase. Aunque se hará una pequeña presentación de todas ellas, el objeto de este taller es explicar con más detalle el funcionamiento de la aplicación destinada al profesorado, donde se explicará la selección de ejercicios y el diseño de pruebas escritas en distintos formatos PDF, HTML...

Palabras clave: **Software Educativo, CLIL, Inclusión**

https://math4u.vsb.cz/es

1. Portal MATH4U.VSB.CZ

El portal *Math for You* está diseñado para practicar matemáticas a nivel de educación secundaria y bachillerato (abreviado Math4U, dirección web: https://math4u.vsb.cz/). El proyecto comenzó en el año 2016, con la implementación de los proyectos *Mathematical Exercises for You* (2016-2019) y *Mathematical Exercises for You 2* (2019-2022) apoyados por el programa Erasmus+.

Imagen 1. Logo. Fuente: https://math4u.vsb.cz/es

Dentro de la interfaz de la página web podemos elegir tres usos: ESTUDIANTE, PROFESOR y CLASE.

Imagen 2. Apps. Fuente: https://math4u.vsb.cz/es

ESTUDIANTE diseñada para que los alumnos practiquen en línea y donde se incluyen dos aplicaciones: *Math4Student* y *Math4Student Easy*. El alumnado puede generar una prueba adaptada a sus necesidades. Eligiendo el idioma, tema, subtema, nivel de dificultad (A, B, C) y número de preguntas se genera una prueba HTML *on line*. Se obtiene *feedback* tras contestar cada pregunta y, una evaluación global y gráfica al finalizar la prueba. Ambas aplicaciones funcionan en ordenadores, tabletas y teléfonos inteligentes. Se recomienda especialmente el uso en Smartphone para *Math4Student Easy*, ya que las preguntas de prueba incluidas se pueden resolver sin el uso de lápiz y papel, pudiendo practicar mientras viajas en tren o esperas en la parada del autobús.

Imagen 3. Math4Student. Fuente: http://math4u.vsb.cz/appStudent/

PROFESOR, la aplicación *Math4Teacher*, está diseñada para la creación rápida de pruebas de preguntas de opción múltiple eligiendo preguntas de entre un total de 5800 de la base de datos. El modo PROFESOR está disponible para usuarios registrados y es gratuito. Cada docente tiene disponible una cuenta donde almacenar los tests generados que serán accesibles en cualquier momento. Además, pueden ser modificados o generados en otro idioma con un simple *click*.

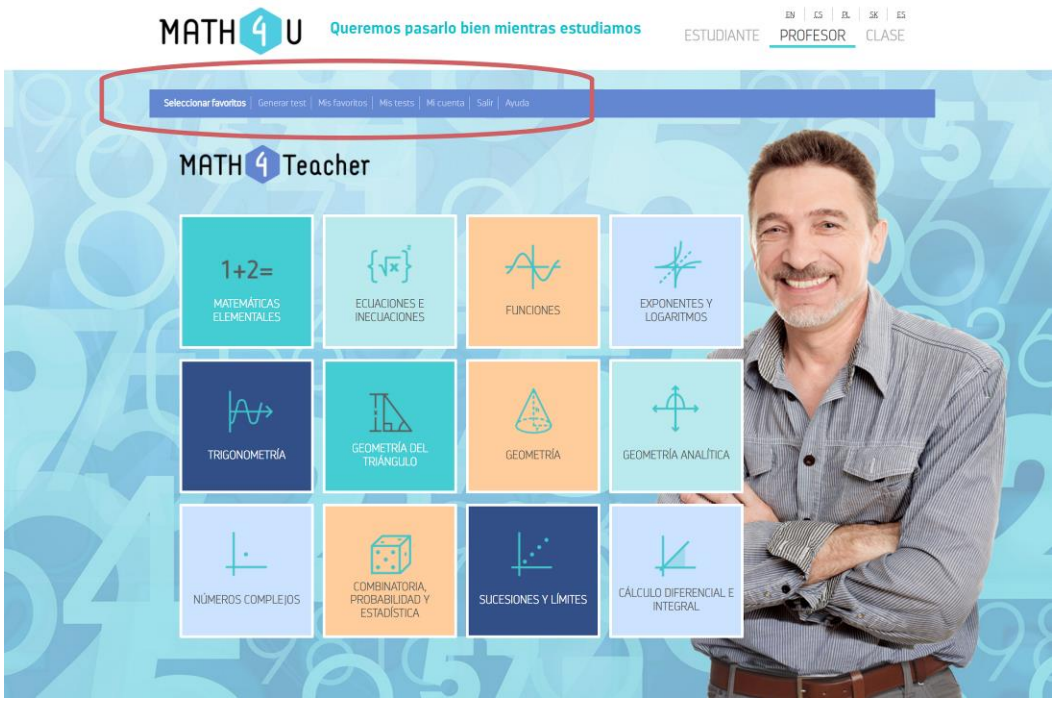


Imagen 4. Math4Teacher. Fuente: https://math4u.vsb.cz/es/generator/areas

De esta manera, el profesorado no tiene que crear sus propios problemas de matemáticas, hacer dibujos y gráficos, ni realizar la composición tipográfica en un editor. Simplemente selecciona aquellas cuestiones que le gustan y genera el test, pudiendo elegir luego entre tres formatos de salida para el mismo:

• Prueba escrita en *formato PDF,* lista para imprimir.

• Prueba *interactiva*, para uso en una pizarra digital o proyector. En ella, el estudiante marca las respuestas a las preguntas y al finalizar la misma, se muestra tanto la evaluación general como las respuestas correctas.

• Prueba *HTML,* preparada para utilizar mediante la aplicación *Clase de Matemática Interactiva* (esta parte se encuentra ahora en la fase de prueba y pilotaje).

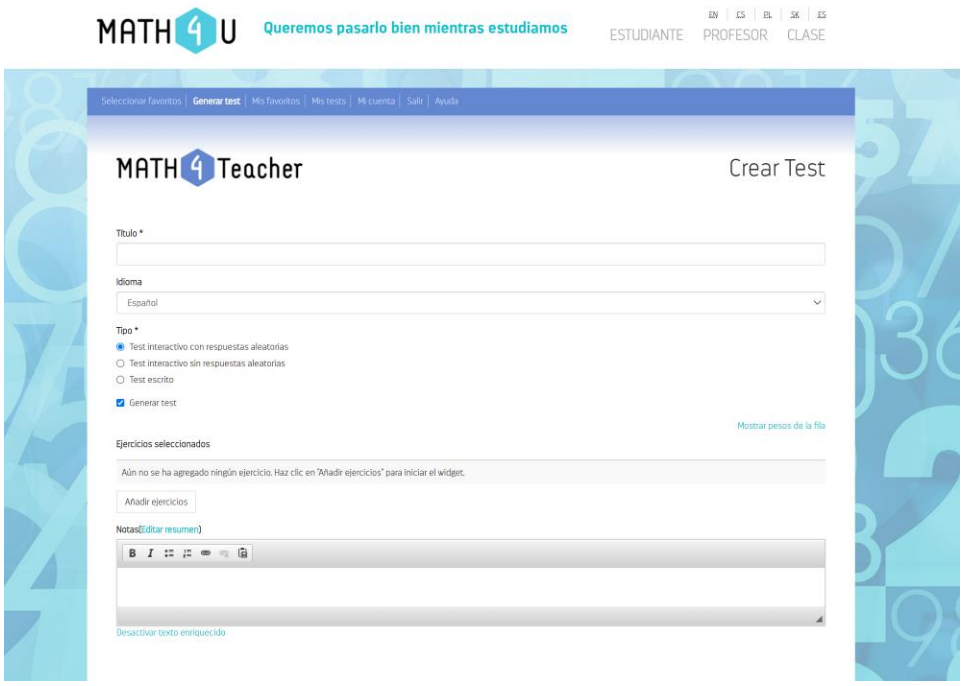


Imagen 5. Generar test en Math4Teacher. Fuente: https://math4u.vsb.cz/es/node/add/m4u-ctest

La sección **CLASE** es una biblioteca de juegos de entrenamiento y cuestionarios preparados previamente.

Imagen 6. Temas en Math4Class. Fuente: https://math4u.vsb.cz/es/4class/areas

Contiene 150 juegos de emparejamiento y selección para practicar con toda la clase. El objetivo de la mayoría de los juegos es unir preguntas con sus respuestas correctas (por ejemplo, las gráficas de funciones con sus expresiones analíticas, los ángulos con una medida en grados o radianes). Cada par de preguntas y respuestas contestadas correctamente muestran parte de una cita oculta de un matemático famoso. Después de terminar el juego, es posible mostrar una página con información interesantes sobre la vida de este matemático y ver evaluaciones tanto verbales como gráficas.

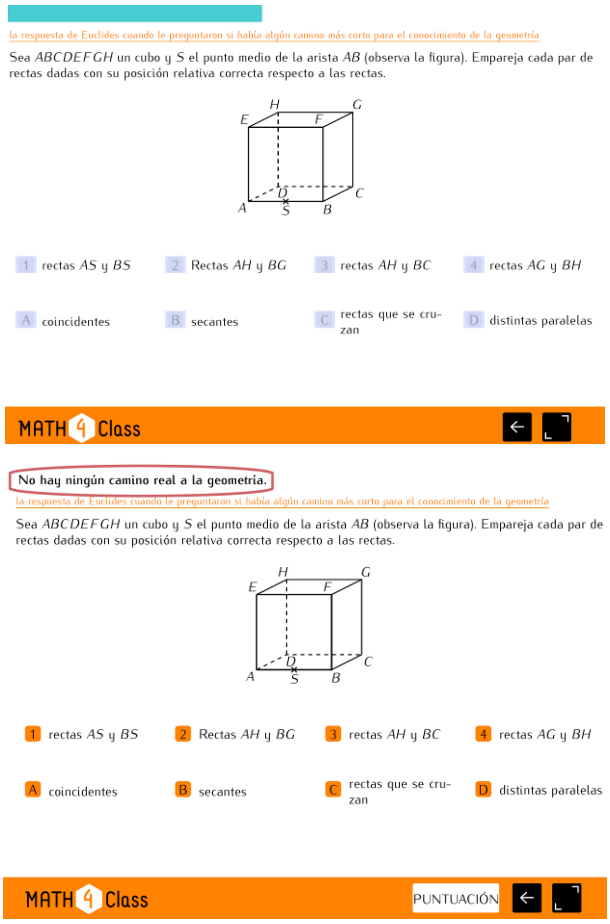


Imagen 7. Juegos de parejas en Math4Class. Fuente: https://math4u.vsb.cz/es/4class/area/25

Los juegos de entrenamiento son especialmente adecuados para estudiantes que necesitan consolidar sus conocimientos básicos con una mayor cantidad de problemas y preguntas. Todos los cuestionarios y juegos educativos se crean como

archivos PDF interactivos con tipografía matemática de alta calidad y evaluación inmediata. Son adecuados para pizarras interactivas, donde los estudiantes marcan las respuestas ellos mismos o se pueden proyectar con un proyector.

2. Portal multilingüe y CLIL

Todas las partes del portal web *math4u.vsb.cz* y todas las aplicaciones han sido diseñadas en varios idiomas. Cualquier estudiante o profesor puede elegir cualquiera de los cinco idiomas (EN, CS, PL, SK, ES).

Content and Language Integrated Learning (CLIL) es un enfoque en el que se utiliza un idioma adicional para el aprendizaje y la enseñanza tanto del contenido como del idioma. En general las matemáticas son consideradas como una materia muy adecuada para el *Aprendizaje Integrado de Contenidos y Lenguas* (AICLE) ya que los números, los símbolos, los signos, los gráficos y los dibujos ya son portadores de información en sí mismos. Además, muchos de los ejercicios matemáticos no requieren formulaciones complejas ni enunciados largos. Por otra parte, CLIL brinda beneficios indiscutibles al estudiante, como una mayor motivación para aprender un idioma y mejores habilidades lingüísticas.

Aunque gracias a Internet es posible encontrar una gran cantidad de material didáctico disponible en inglés, la gran ventaja del portal es que todas las secciones están disponibles en cinco idiomas y se puede cambiar de idioma en cualquier momento. Por ejemplo, un profesor puede crear una prueba (hoja de trabajo, tarea) en inglés e inmediatamente recibirla en español (checo, eslovaco, polaco).

Asimismo, los estudiantes que practican el uso de las aplicaciones en la sección ESTUDIANTE pueden cambiar de idioma en cualquier momento mientras trabajan con la prueba. Por lo tanto, la aplicación se utiliza no solo para practicar matemáticas, sino también los idiomas mencionados anteriormente.

La Comisión Europea subraya la necesidad de integrar en los currículos educativos nuevas formas de aprendizaje, más eficaces para una sociedad cada vez más móvil y digital (“Teaching Languages at School in Europe-2017”,Eurydice), como el Aprendizaje Integrado de Contenidos y Lenguas (AICLE) que no está tan extendido en los currículos formales.

Por último, mencionar que el portal fue galardonado con el *premio Etiqueta Europea 2020* por su contribución a la enseñanza de idiomas.

3. Detalles técnicos

Todas las aplicaciones se han creado en la plataforma de aplicaciones web Angular 2+, que es un marco para crear aplicaciones en HTML. Con esta plataforma, las aplicaciones funcionan en todos los navegadores web y no están limitadas por el sistema operativo o la plataforma de hardware.

Las aplicaciones están conectadas con una base de datos de unas 5.800 preguntas en cada uno de los cinco idiomas. Las preguntas para la base de datos se escribieron utilizando la notación del sistema tipográfico *LaTeX*. La base de datos se almacena y mantiene en el marco Drupal.

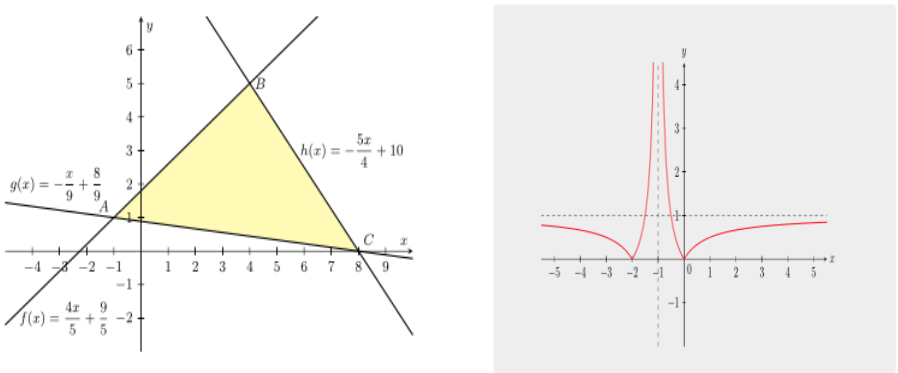


Imagen 8. Gráficas. Fuente: http://math4u.vsb.cz/appStudent/run

Los autores codifican las expresiones matemáticas en lenguaje *LaTeX* y el *JavaScript* en *Mathjax* transforma esta expresión en una representación gráfica en

el navegador web. Esto tiene varias ventajas. *LaTeX* es un sistema ampliamente utilizado para la autoría matemática y para la preparación de textos que incluyen expresiones matemáticas. La mayoría de los matemáticos están familiarizados con esta herramienta y la utilizan a diario. La biblioteca *Mathjax* es una biblioteca de código abierto respaldada por editoriales líderes y, por lo tanto, permite obtener resultados de apariencia profesional con un costo mínimo o nulo y también permite transformar los materiales en archivos PDF para imprimir o leer en pantalla. En la salida PDF utilizamos el compilador nativo *LaTeX* y alcanzar así la mejor calidad tipográfica para publicaciones impresas. Los resultados del compilador *LaTeX* nativo alcanzan la calidad de los libros de texto creados por sistemas de composición tipográfica profesionales y son claramente superiores a los textos impresos directamente desde los navegadores HTML.

4. Beneficios del portal

La principal ventaja es una enorme base de datos de preguntas de opción múltiple en cinco idiomas para utilizar en las aplicaciones. La base de datos de preguntas de opción múltiple cubre todo el currículo de la escuela secundaria.

Cabe mencionar que los usuarios del portal aprecian el alto nivel y la corrección de las formulaciones matemáticas de las preguntas de la base de datos. Esto se ha logrado por el hecho de que cada pregunta ha sido revisada por tres revisores independientes de VSB - Universidad Técnica de Ostrava. Un proceso de revisión tan sólido no es común cuando se prepara material didáctico para escuelas secundarias y hace que esta base de datos de problemas sea distinta de otras herramientas y sitios web educativos.

Un atributo importante es la alta calidad tipográfica que se ha logrado mediante el uso de la codificación matemática *LaTeX* y el motor *MathJax* para insertar contenido matemático. Una gran cantidad de preguntas en la base de datos contienen figuras con el objetivo de fortalecer la comprensión de los significados geométricos de los

temas a trabajar. Todas estas figuras están preparadas en formato vectorial y por ello permiten zooms arbitrarios sin degradación de la imagen.

Otra característica importante es que las aplicaciones están diseñadas para ejecutarse en la mayoría de los sistemas operativos y dispositivos portátiles (tabletas, móviles).

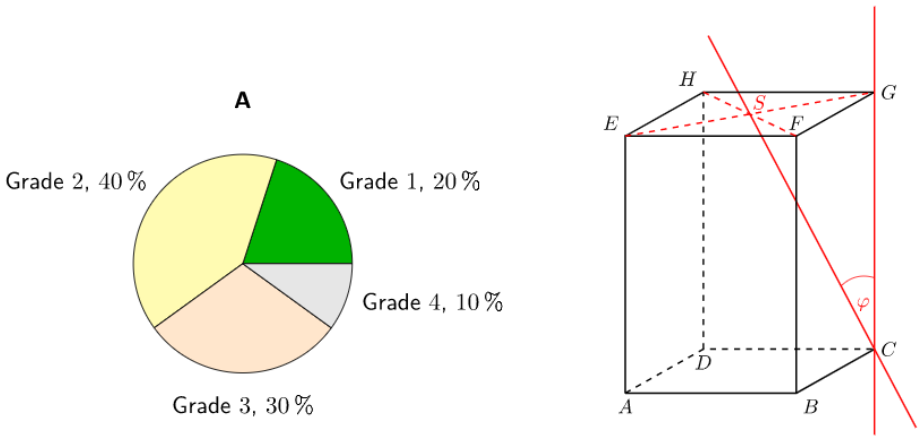


Imagen 9. Gráficos. Fuente: http://math4u.vsb.cz/appStudent/run

Referencias

P. Beremlijski, P. Vondráková, (2021) "*Knihovna interaktivních her Math4Class*", Sborník příspěvků z konference a soutěže eLearning 2021, pp. 3-8.

P. Beremlijski, P. Vondráková, R. Mařík,(2019) "*Math4S – Educational software Math for Student"*, INTED2019 Proceedings, pp. 5685-5690.

P. Beremlijski, P. Vondráková, R. Mařík, (2019) *"Math4U – Math in four languages for students and teachers"*, INTED2019 Proceedings, pp. 5710-5717.

P. Beremlijski, P. Vondráková, (2020) "*MATH4U - portál pro procvičování středoškolské matematiky*", Speciál pro střední školy, 3/2020, pp. 27-20.

P. Beremlijski, P. Vondráková, (2020) *"Mathematical educational portals MsR, STEMforYouth and Math4U*", INTED2020 Proceedings, pp. 6370-6379.

P. Beremlijski, P. Vondráková, (2021)"*Procvičování matematiky s aplikací Math4Student*", Sborník příspěvků z konference a soutěže eLearning, pp. 55-60.

P. Beremlijski, P. Vondráková, (2020) "*Use of educational portal Math4U for practicing precalculus and calculus*", INTED2020 Proceedings, pp. 6416-6423.

P. Beremlijski, P. Vondráková, (2021) "*Use of the Math4U portal during the COVID19 pandemic*", INTED2021 Proceedings, pp. 7496-7503.

TaR024 La vida oculta del cubo

Antonio Ledesma López
antonioledesmalopez@gmail.com
Catedrático de educación secundaria. Requena (Valencia)
José Muñoz Santonja
josemunozsantonja@gmail.com
Catedrático de educación secundaria. IES Macarena. Sevilla
Juan Antonio Hans Martín
juanantonio.hans@gmail.com
Profesor de educación secundaria. Sevilla
Antonio Fernández-Aliseda Redondo
aliseda3.0@gmail.com
Profesor de educación secundaria. Gines (Sevilla)

Núcleo temático: *Recursos para el aula. Conexiones.*

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

El cubo está entre las figuras geométricas más utilizadas, forma parte de nuestro patrimonio cultural y está muy presente en nuestro alrededor: aparece en minerales; en el plástico prensado para reciclar; en maceteros; en obras artísticas de Dali, Vasarely, Oteiza, Meavilla…; decorando rotondas; en poesía visual; en juegos (y no solo el de Rubik); en recipientes… Por ello, creemos que se puede aprovechar más en las clases de matemáticas. Vamos a proponer una serie de historias, ideas, recursos y actividades alrededor suyo que ayuden a los profesores a acercar este cuerpo geométrico a sus alumnos, a conocerlo mejor, a investigarlo y, por qué no, a entretenerse y divertirse con él.

Palabras clave: Cubo, Geometría, Recursos, Pasatiempos, Cultura matemática.

1. Introducción

Protagonista de una de las historias épicas de las matemáticas, el cubo, a quien vamos a dedicar este taller, no tiene suerte.

En el contexto matemático la palabra cubo (o también hexaedro) está perfectamente definida, aunque con dos acepciones: poliedro regular limitado por seis cuadrados y potencia tercera de una cantidad o expresión[1]. No ocurre lo mismo en el contexto cotidiano, donde se asocia automáticamente con recipiente, por lo general en forma de cono truncado invertido o de cilindro, con asa abatible en la parte superior. Además, existen dificultades con el concepto: con frecuencia se le llama cuadrado, lo que pone de manifiesto que no está interiorizado en el acervo matemático popular.

Hace unos veintiséis siglos, allá por el VI o V antes de Cristo, aparecen una serie de problemas geométricos que cautivan a los iniciados en esta disciplina. De ellos tres sobrevivieron sin resolverse durante más de dos mil quinientos años; son: la cuadratura del círculo; la trisección del triángulo y la duplicación del cubo. Este último, donde aparece nuestro protagonista, trata de construir un cubo con el doble de volumen de un cubo dado (imagen 1) y, también es conocido como el problema de Delos[2]. Según la leyenda este problema tiene un origen mitológico, pues cuenta que asolada Atenas por la peste acudieron sus ciudadanos al oráculo de Delos en busca de ayuda y éste les respondió que, para evitar la mortandad que se estaba produciendo, había que duplicar el tamaño del altar cúbico dedicado al dios Apolo.

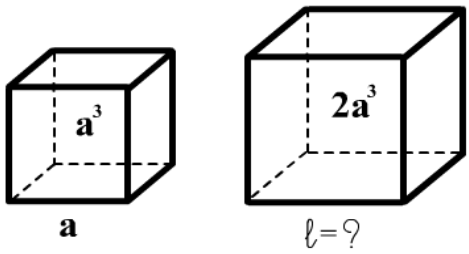


Imagen 1: Duplicación del volumen del cubo.

En el estudio geométrico había una dificultad añadida: en su resolución solo estaban permitidas “soluciones euclídeas”, es decir, aquéllas que utilizasen únicamente regla no graduada y compás.

1 En este taller nos centraremos en el poliedro.

2 La isla de Delos está situada en el mar Egeo y es uno de los lugares mitológicos, históricos y arqueológicos más importantes de Grecia.

Con la notación actual, si *a* es el lado del cubo inicial y *l* el del cubo buscado, la ecuación que resuelve el problema es:

$$l^3 = 2 \cdot a^3 \rightarrow l = \sqrt[3]{2 \cdot a^3} \rightarrow l = a \cdot \sqrt[3]{2}$$

En esencia, dada una unidad de longitud, necesitaban construir un segmento de $\sqrt[3]{2}$ unidades de longitud; mas es posible que los griegos no supiesen extraer raíces cúbicas que no fuesen exactas y, por otro lado, sus requisitos eran puramente geométricos: recordemos, con regla no graduada y compás.

El reto produjo múltiples avances en las Matemáticas. Hicieron camino al andar Hipócrates de Chios (~470-410 a. C.), Arquitas de Tarento (428-350 a. C.), Eudoxo de Cnido (~408-355 a. C.), Menecmo (~375-~325 a. C.), Nicómedes (280-210 a. C.), Filón de Bizancio (~280-220 a. C.), Eratóstenes de Cirene (276-194 a. C.), Apolonio de Perga (~262-190 a. C.), Diocles (~240-180 a. C.), Herón de Alejandría (~10-75 d. C.), Pappus de Alejandría (290-350 d. C.)… que encontraron soluciones, pero no cumplían las condiciones; otros, más modernos, tampoco las encontraron como Descartes (1596-1650) o Gauss (1777-1855), que también abordaron este problema y, a hombros de gigantes, Pierre-Laurent Wantzel (1814-1848) lo consiguió.

Hubo que esperar hasta el siglo XIX y utilizar el potente aparato algebraico que se había desarrollado hasta entonces, en particular la teoría de Galois, para que el matemático francés Wantzel publicase, en 1837, que no se puede resolver con regla y compás la duplicación del cubo: $2^{1/3}$ no es construible con regla y compás pues es raíz de una ecuación de grado tres, en concreto de $x^3 - 2 = 0$.

La epopeya de la duplicación del volumen del cubo con regla y compás había terminado: era imposible.

Vamos a proponer una serie de ideas, recursos y actividades alrededor del cubo que ayuden a los profesores a acercar a sus alumnos este cuerpo geométrico, a conocerlo mejor, a investigarlo y, por qué no, a entretenerse y divertirse con él.

2. Para empezar

2.1. Conteo de cubos

Todos los niños han tenido contacto con algún juego infantil diseñado con esta forma, ya sea tipo puzle donde en las caras de los cubos aparecen partes de una figura, de construcción por apilamiento u otros. Por tanto, el cubo es una figura geométrica normalmente conocida antes de la escolarización, con el que ha habido una relación física, táctil. En la escuela se amplía tanto el léxico como el conocimiento de sus partes, al principio sin formalismo y más tarde con rigor.

Como consecuencia de este conocimiento la figura cubo aparece en pasatiempos y entretenimientos infantiles, algunos de ellos de la prensa (Grupo Alquerque, 2022), como los de las imágenes siguientes.

Imagen 2:

Lecturas, 17 de febrero de 2021.

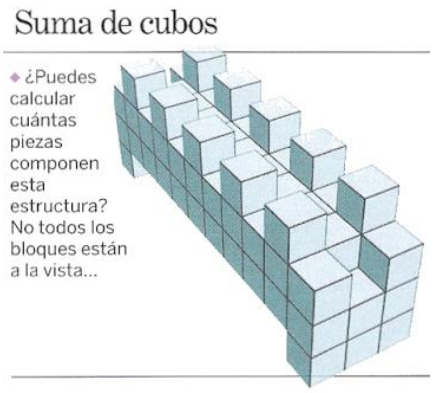


Imagen 3:

Lecturas, 7 de abril de 2021.

ACTIVIDAD 1.

a) Resolver el pasatiempo de la imagen 2.

b) Resolver el pasatiempo de la imagen 3.

Este tipo de actividades, que no son sencillas -en ambas imágenes hay bloques que no están a la vista y hay que tenerlos en cuenta para la solución-, contribuyen a familiarizarse conceptualmente con el cubo y su representación gráfica y a desarrollar la visión espacial, por lo que nos parecen oportunas en el proceso de

conocimiento de esta forma geométrica. Y, además, el formato pasatiempo suele tener un carácter lúdico que contribuye a su aceptación, orillando en gran medida las dificultades cognitivas que plantee su resolución.

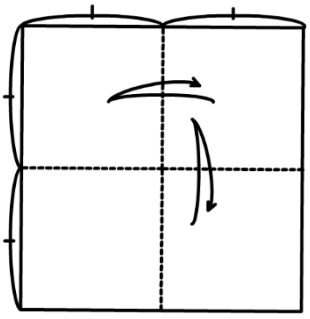
2.2. Construcción con papiroflexia de un cubo de una pieza

En este momento es interesante tocar un cubo. No solo verlo, sino tenerlo entre las manos y familiarizarse física (y no solo conceptualmente) con él. Para ello vamos a utilizar uno de los recursos más baratos y frecuente en nuestras aulas: el papel. Partimos de un cuadrado de papel al que se le hará una serie de dobleces. Para evitar eternidades y chapuzas es conveniente, antes de empezar, llevarlo cortado (aunque dibujar y recortar un cuadrado es muy interesante -y más con solo regla, aunque sea graduada, y compás-) según las medidas que deseemos.

En cada uno de las siguientes imágenes aparece cómo debe quedar después del doblado y la línea que indica el siguiente movimiento.

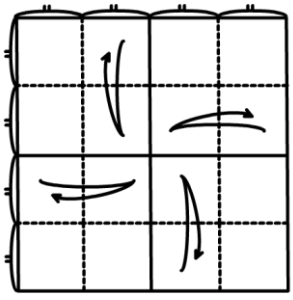
Paso 1: Se dobla el cuadrado de papel longitudinal y verticalmente por la mitad. Por tanto, se divide en cuatro cuadrados iguales.

El símbolo anterior indica doblar y desdoblar.



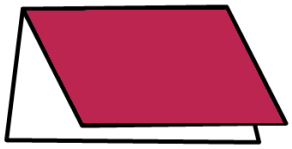
Paso 1

Paso 2: Cada una de las mitades se dobla de nuevo por la mitad longitudinal y verticalmente. Con ello cada uno de los cuartos se divide en cuatro cuadrados iguales. El cuadrado inicial queda marcado con 16 cuadros iguales.



Paso 2

Nos paramos para recordar los dos tipos de dobleces que necesitamos hacer y debemos distinguir. El *doblez de montaña,* que provoca un saliente hacia arriba.

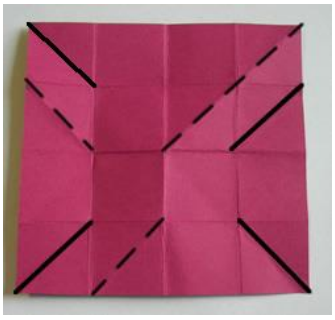


Doblez de montaña

Y el *doblez de valle,* que simula un hundimiento en el papel.

Doblez de valle

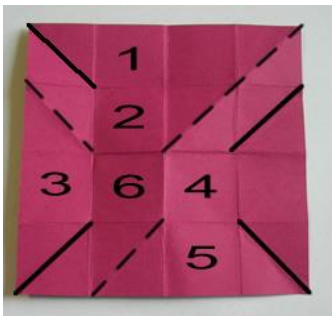
Paso 3: En algunos de los 16 cuadraditos obtenidos debemos hacer siete dobleces (tres de montaña y cuatro de valle). En la imagen hemos marcado con línea discontinua los dobleces que se deben hacer de montaña y con línea continua los de valle.



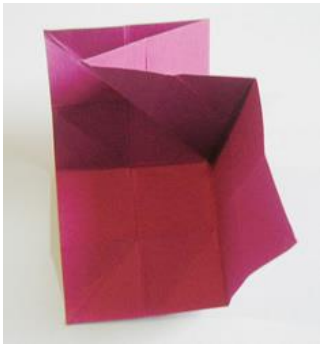
Paso 3

Paso 4:

Para montar el cubo lo colocamos como indica la imagen del paso 4, en la que se han señalado los siete dobleces realizados. Se han enumerado los cuadrados que corresponden a las caras exteriores del cubo. A continuación, utilizamos los dobleces como muestran las siguientes fotos.



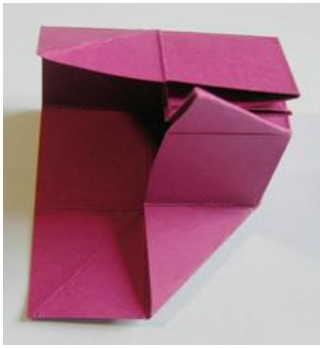
Paso 4

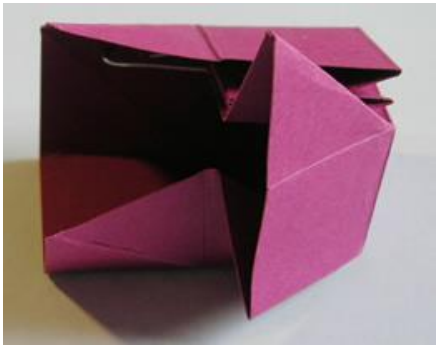

Paso 5

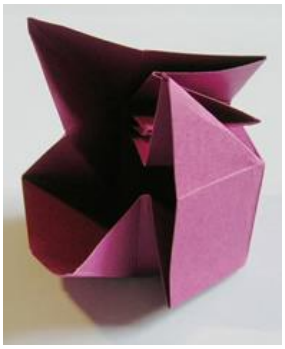
Paso 6

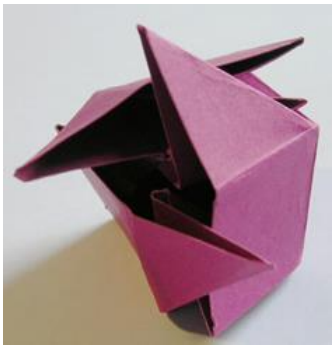
Paso 7

Paso 8


Paso 9


Paso 10


Paso 11


Paso 12

Cubo construido

Imagen 4. Instrucciones para la construcción de un cubo de una pieza.

ACTIVIDAD 2.

Construir un cubo de una sola pieza siguiendo los pasos de la imagen 4.

3. Para desarrollar

3.1. Cuatro dados

Una vez que sabemos hacer un cubo con papel podemos construir fácilmente un rompecabezas que plantea un problema interesante y nada fácil. Hay toda una

familia de puzles con esa misma idea. El que vamos a mostrar se comercializó en España con el nombre de *Cuatro dados* (imagen 5) dentro de una colección denominada *Juegos de Ingenio.*

Se necesitan cuatro cubos iguales como el explicado en el apartado anterior a los que vamos a colorear sus caras con cuatro colores (azul, verde, rojo y amarillo -o blanco-). Obviamente algunas de las seis caras de un mismo cubo deben tener el mismo color. Si no se tienen colores se pueden sustituir por una marca, una letra o el nombre del color para que ejerzan la misma función.

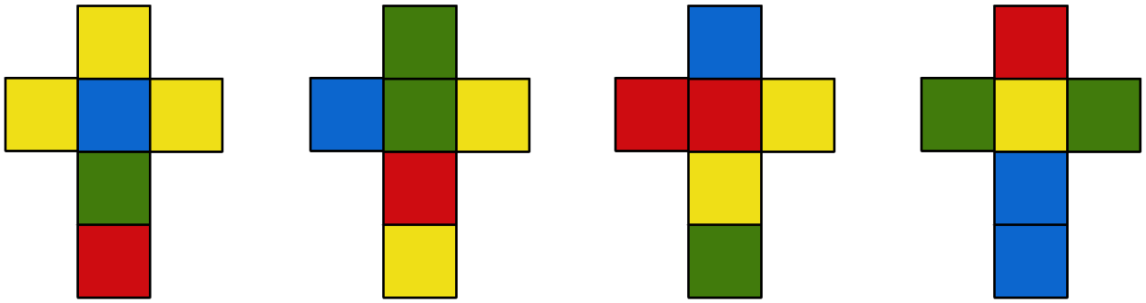


Imagen 5: Desarrollo plano de los cuatro cubos del juego *Cuatro dados*.

ACTIVIDAD 3.

Encontrar una disposición lineal de los cubos (mejor en fila que en columna), de forma que los cuatro lados largos de esa fila muestren los cuatro colores solo una vez. El orden de los colores dentro de cada línea no se tiene en cuenta. Las caras que quedan en los extremos y entre los cubos no se consideran.

Hay 41472 formas de colocar los cuatro cubos y solo tres son solución del reto planteado.

3.2. Visión espacial

Siguiendo con nuestro eje escolar, posteriormente se empieza a introducir y formalizar los elementos del cubo: caras; vértices; aristas; diagonales y centro. Se amplía la visión espacial y se estudian sus medidas y simetrías.

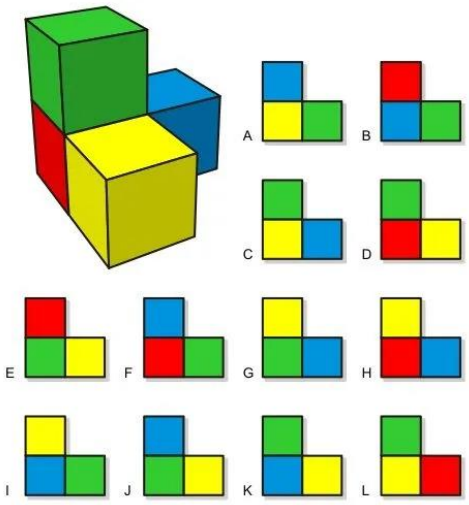


Imagen 6: *¿Qué vistas planas de la forma tridimensional son correctas?* Autor: Peter Grabarchuk.

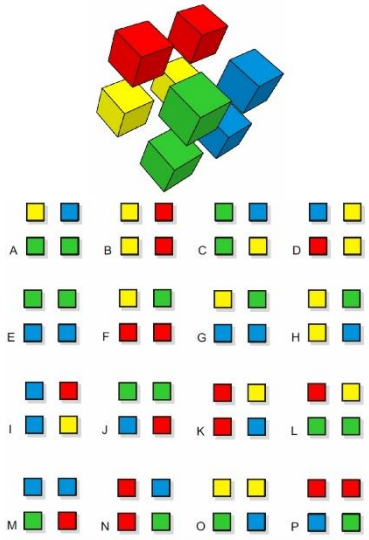


Imagen 7: *¿Cuáles de las vistas inferiores son correctas?* Adaptación de una idea de Peter Grabarchuk.

ACTIVIDAD 4.

a) ¿Qué vistas planas de entre las que se dan de la forma tridimensional de la imagen 6 son correctas?

b) ¿Y de la imagen 7?

c) Dibuja todas las vistas posibles que se pueden observar de la forma tridimensional de la imagen 6.

d) Haz lo mismo con la imagen 7.

SUGERENCIAS METODOLÓGICA:

¿Cómo trabajar esta actividad?

Dado el precio de las fotocopias en color es difícil disponer de una copia para cada uno de los alumnos, por lo que podemos proyectar sobre una pantalla la imagen de la tarea y trabajar sobre ella.

Este método no es cómodo, por las miradas alternativas a pantalla y papel. Lo que sí podemos facilitarles para su trabajo es una plantilla muda, donde la

distribución de color de la pieza a estudiar y las posibles vistas estén vacías y se completen con bolígrafos o lápices de color o las iniciales de los colores (rojo, verde, azul y amarillo). En la imagen 8 se muestra un ejemplo de plantilla muda para las actividades 4b y 4d. En este último caso hará falta más de una hoja.

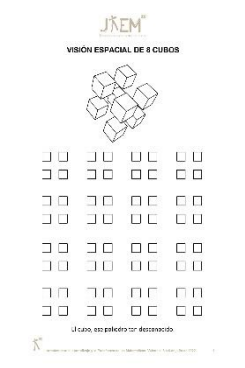


Imagen 8: Plantilla muda para la imagen 7.

3.3. Desarrollo plano de un cubo

Y continuando con el aprendizaje escolar del cubo como protagonista más tarde se aborda en el centro educativo su desarrollo plano.

Otra forma de construir un cubo con el que los escolares puedan interactuar y realizar actividades de reconocimiento de sus elementos, es a partir de un desarrollo plano (en papel o cartulina) que se les facilite y que ellos recorten y recompongan.

Imagen 9: *El País.*

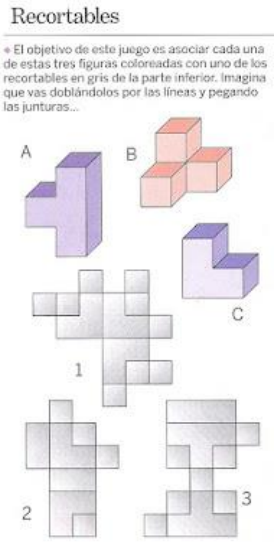


Imagen 10: *Lecturas*, 10 de marzo de 2021.

ACTIVIDAD 5.

a) Resolver el pasatiempo de la imagen 9.

b) Resolver el pasatiempo de la imagen 10.

En 1953, siendo alumno en la Universidad de Harvard, el futuro matemático e ingeniero norteamericano Solomon W. Golomb (1932-2016), reconocido por sus aportaciones sobre juegos matemáticos, propuso el nombre de "poliminós" (generalización de la forma de un dominó) a conjuntos de cuadrados conectados al menos por uno de los lados de cada cuadrado, y, también, nombrar las piezas según el número de cuadrados conectados.

Si excluimos las rotaciones y las simetrías especulares hay un único minó, un dominó, dos triminós, cinco tetraminós, 12 pentominós, 35 hexaminós, 108 heptaminós...

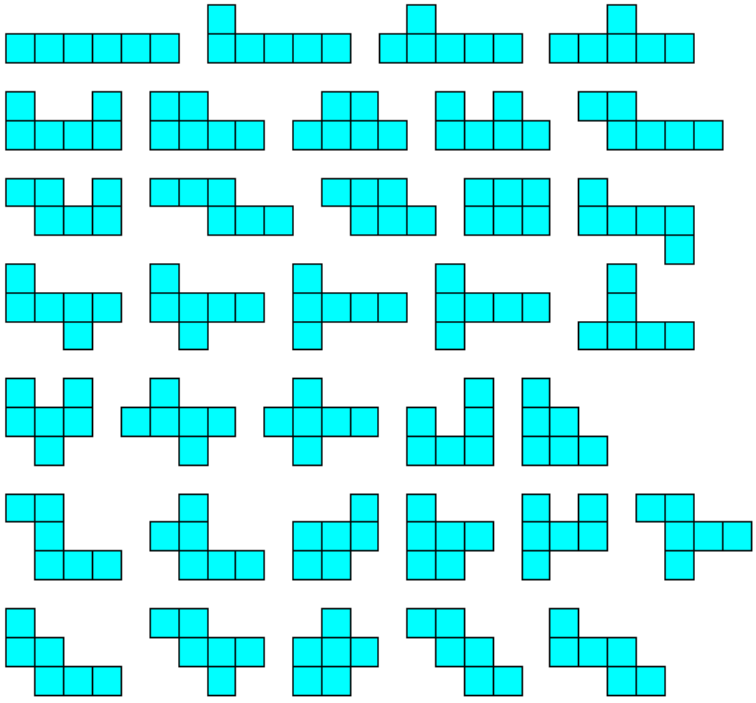


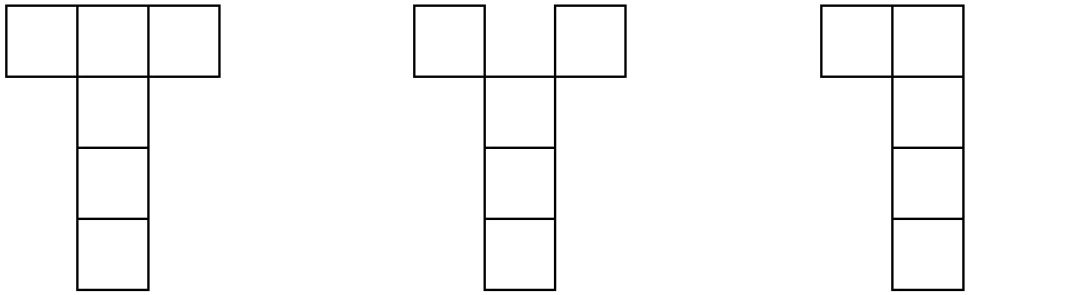
Imagen 11: Los 35 hexaminós existentes. Origen de la imagen: http://www.cs.us.es/

ACTIVIDAD 6. ¿Cuáles de los 35 hexaminós (imagen 11) son un desarrollo del cubo, es decir, se pueden plegar formando esa figura?

3.4. Cubos abiertos de 5 caras

ACTIVIDAD 7. Contar casos 1.

Un cubo tiene once desarrollos planos. En un desarrollo cualquiera, por ejemplo el de la imagen 12. a, quitamos un cuadrado con la condición de que siga quedando conexo, es decir, todo cuadrado pueda articularse sobre todas sus aristas: obtenemos así un 5-cuadrado conexo (imagen 12). ¿Cuántos de los 5-cuadrados conexos que se obtienen de los once desarrollos permiten, al plegar, formar un cubo sin tapa?



a. Desarrollo de un cubo b. 5-cuadrados no conexo c. 5-cuadrados conexo

Imagen 12: Obtención de un 5-cuadrado conexo que forma un cubo sin tapa.

En este estudio es fundamental, para garantizar que se han estudiado todos los casos posibles, la sistematización sobre el cuadrado que se suprime.

ACTIVIDAD 8. Contar casos 2.

Existen 35 hexominós (imagen 11), de los que once corresponden al desarrollo de un cubo. Sobre ellos, en la actividad 7 (Contar casos 1), está propuesto el estudio de los 5-cuadrados conexos (imagen 12) que dan lugar, al plegar, a un cubo sin tapa. Vamos con el resto de los hexominós. ¿Cuántos de los 5-cuadrados conexos que se obtienen al suprimir un cuadrado en los 24 hexominós restantes permiten, al plegar, formar un cubo sin tapa?

3.5. Complementariedad para formar un cubo

Relacionadas también con la visión espacial y con la discriminación de formas están las actividades de encajar piezas, en nuestro caso para formar un cubo.

Imagen 13: *Mi País*, 6 de noviembre de 1999.

Imagen 14: *Quo*, otoño de 2000.

ACTIVIDAD 9.

a) Resolver el pasatiempo de la imagen 13.

b) Resolver el pasatiempo de la imagen 14.

4. Para profundizar

4.1. Deconstrucción del cubo

En 1974 el artista norteamericano Sol LeWitt (1928-2007), pionero del arte conceptual y minimalista, expuso por primera vez sus *Variaciones sobre cubos abiertos incompletos* (*Variations of Incomplete Open Cubes*) en la Galería John Weber de Nueva York. Esta instalación consta de 122 estructuras de cubos de madera pintada de 6,66 cm aproximadamente de lado (2⅝ pulgadas), en las que faltan algunas aristas. En ella están todas las variaciones posibles de un cubo abierto incompleto, es decir, son configuraciones tridimensionales obtenidas a partir de las aristas (pero no todas) de un cubo (se descartan las planas); que son distintas (se suprimen las que pueden transformarse en otra por rotación espacial, pero no mediante una reflexión -imagen 15-) y son construibles (con conexión entre las aristas).

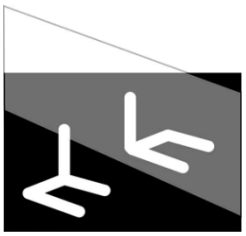


Imagen 15: Dos configuraciones diferentes.

Origen de la imagen: https://doi.org/10.1007/s00004-015-0254-8

LeWit clasificó los modelos posibles con un código numérico de cifras separadas por una barra. El primer dígito indica el número de aristas que lo componen y el segundo es un orden secuencial, que él asignó, dentro de ese nivel. Así, 3/2 nombra a la segunda pieza de las que tienen tres aristas (imagen 16).

Imagen 16: Variaciones diferentes con tres aristas (3/1, 3/2, 3/3).

Origen de la imagen: https://cubes-revisited.art/about/

ACTIVIDAD 10. Muestra todas las formas que expuso el artista:

a) ¿Con doce aristas? ¿Por qué? ¿Y con once?

b) ¿Con cuatro aristas?

c) ¿Y con cinco?

SUGERENCIAS METODOLÓGICAS:

La disponibilidad de centicubos o policubos, material de plástico con forma de cubo que se une uno a otro por presión de un saliente sobre un agujero, facilita el estudio anterior y permite su abordaje para aquel alumnado con mayores dificultades de visión espacial.

Con cinco aristas el número de casos es alto, por lo que esta dificultad hay que tenerla en cuenta.

De nuevo es importante la sistematización al abordar problemas relacionados con estudios exhaustivos y, sobre todo, cuando se desconoce el total. Es interesante aprovechar las construcciones ya conocidas para dar el salto a los casos con una arista más.

También se puede facilitar una plantilla muda (imagen 17) donde aparezca el esquema de un cubo con sus aristas y los alumnos vayan marcando con bolígrafo las aristas que incorporan. Este recurso facilita, al tener dibujados los cubos incompletos, comprobar si los que se añaden son iguales o no a los ya dibujados.

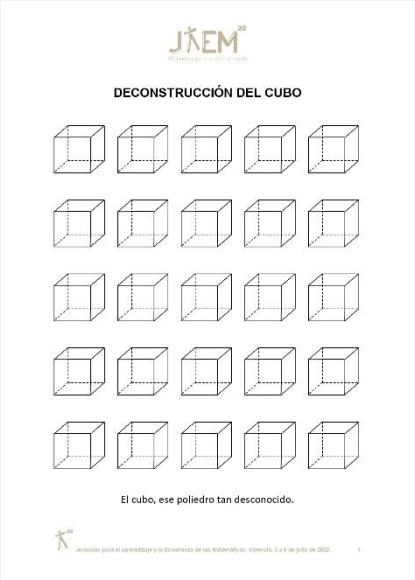


Imagen 17: Plantilla para el estudio de la deconstrucción de un cubo.

El resumen de la relación entre el número de aristas utilizadas y las formas diferentes de colocarlas (con las restricciones establecidas por Sol LeWit) es el indicado en la siguiente tabla:

Aristas	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Formas	3	5	14	24	32	25	13	5	1

Tabla 18: Modelos de LeWit en función del número de aristas consideradas.

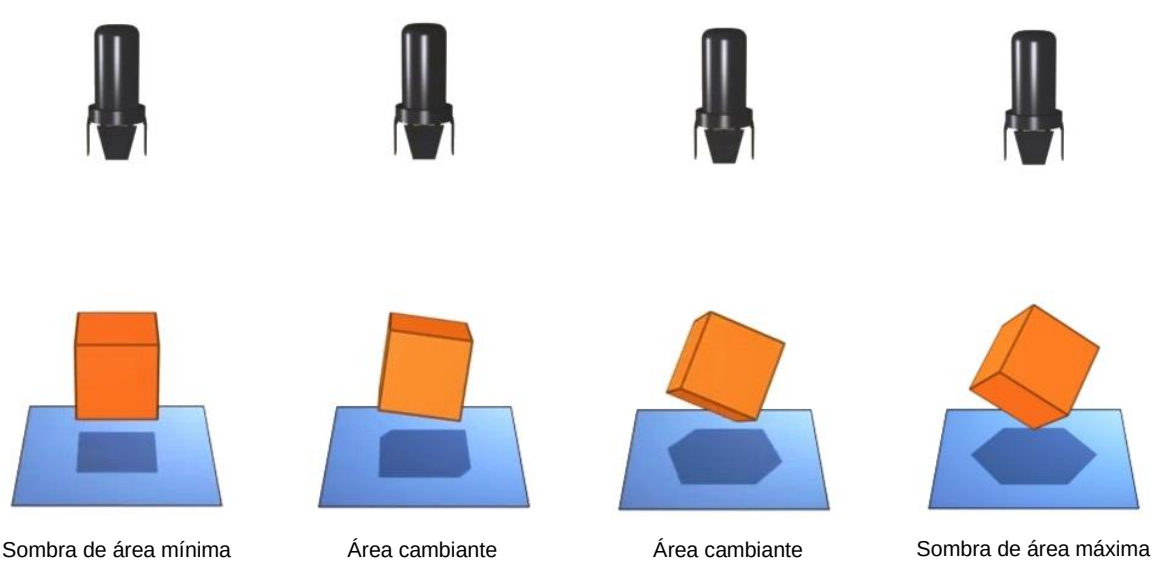
Una imagen con un estudio esquemático de los cubos abiertos incompletos de Sol LeWitt se puede ver en la siguiente dirección web: https://plusequals.art/01/.[1]

[1] No incorporamos la imagen en este trabajo para no desvelar la solución de las preguntas planteadas en la actividad 10.

4.2. Cubo de Rupert

John Wallis (1616-1703), matemático inglés, precursor del cálculo infinitesimal, profesor de Oxford y fundador de la Royal Society atribuyó al Príncipe Rupert del Rin (1619-1682), militar anglo-alemán y científico, también fundador de la Royal Society, la participación en una apuesta asociada a una conjetura de contenido matemático del propio príncipe: “Es posible horadar un cubo de forma que por el agujero realizado quepa, sin forzar, otro cubo de dimensiones iguales o ligeramente mayores a las del original”. El príncipe Rupert apostó a que sí. Y llevaba razón: el propio Wallis demostró que tal agujero era posible.

La respuesta a la cuestión planteada la da el teorema de la sombra del cubo, que demuestra que la forma de la sombra oscila entre un cuadrado (área mínima) y un hexágono regular (área máxima) (imagen 19). Y en ese hexágono regular es posible pasar un cubo de arista $\frac{3\sqrt[2]{2}}{4} \approx 1{,}060\ u.d.l.$, aproximadamente un 6 % mayor que la del cubo que lo recibe.



Sombra de área mínima | Área cambiante | Área cambiante | Sombra de área máxima

Imagen 19: Evolución del área de la sombra de un cubo.

Alrededor de un siglo más tarde, el matemático y químico holandés Pieter Nieuwland (1764-1794) propuso la solución óptima, usando un hueco con un ángulo 22,5º, diferente al de la diagonal del espacio que había indicado Wallis.

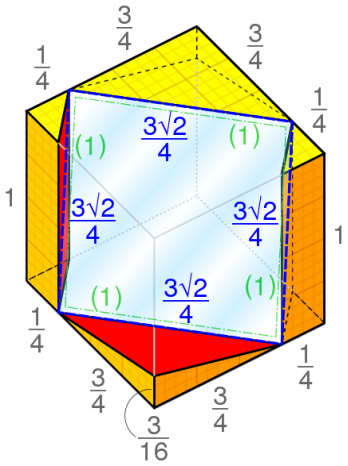


Imagen 20: Nieuwland mejoró la solución.

La línea verde muestra un cuadrado de lado unidad en el orificio indicado por la línea discontinua azul.

Origen de la imagen: Wikipedia.

Actualmente un poliedro tiene la propiedad de Rupert si otro poliedro de su misma forma e igual o mayor tamaño puede pasar a través de un hueco del primero. Los cinco sólidos platónicos: el cubo, el tetraedro regular, el octaedro regular, el dodecaedro regular y el icosaedro regular, tienen esta propiedad.

5. Para finalizar

5.1. Cubos truncados

En un apartado anterior hemos construido un cubo usando una sola pieza de papel; ahora vamos a hacerlo utilizando la papiroflexia modular, en este caso con seis módulos. Se trata de una variante del *Cubo de Jackson* (*Jackson Cube*), en honor de Paul Jackson, quien lo diseño a principios de la década de 1970.

Necesitamos seis rectángulos de cartulina (para obtener un cubo con suficiente solidez) de tamaño 2x1 (doble de largo que ancho). En la imagen 21 se muestran los pasos a seguir. Se coloca un rectángulo sobre otro como en la imagen 21.1 para garantizar que la parte visible posteriormente es un cuadrado. Para tener un mayor detalle de los pasos a seguir se puede consultar *Origami Resource Center* (https://origami-resource-center.com/business-card-jacksons-cube/).

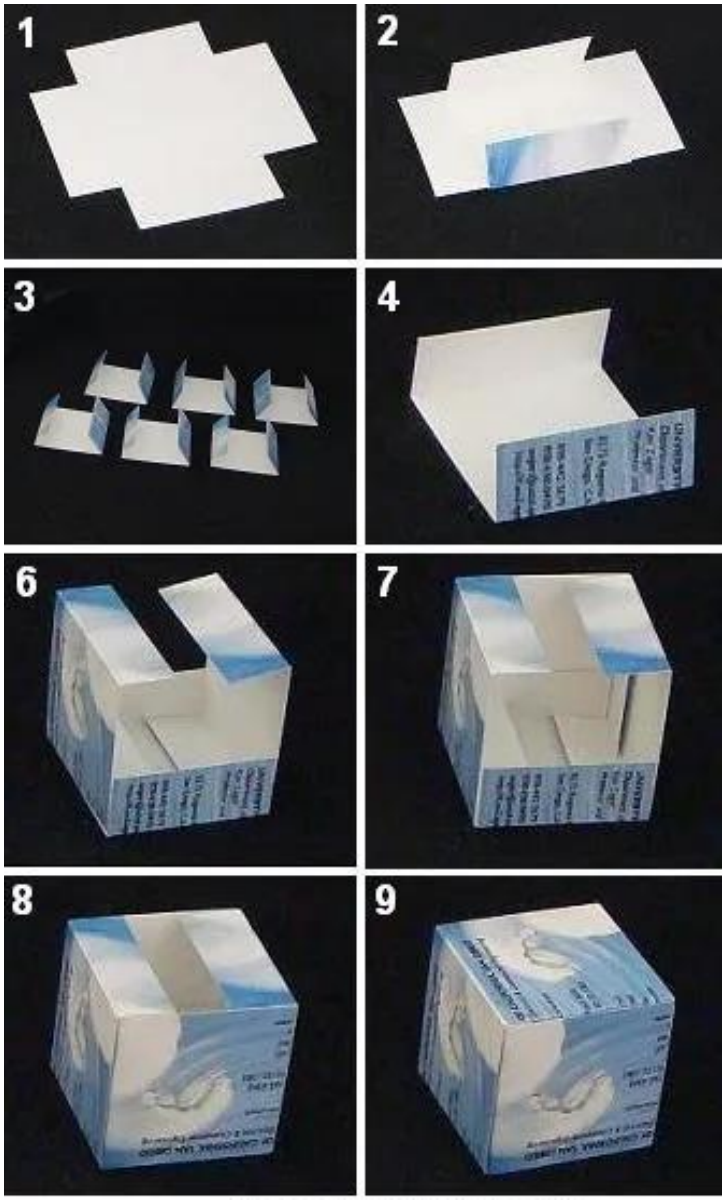


Imagen 21: Pasos para la construcción en papel de un cubo de Jackson.

Origen de la imagen: https://origami-resource-center.com/business-card-jacksons-cube/

La imagen 22 indica los pasos a seguir para conseguir un cubo truncado en uno de sus vértices: el estudio de los truncamientos posibles y diferentes es el objetivo final de esta sección. Se trata de una pieza denominada *Cubo de Colón* (*Columbus Cube*) diseñada por David Mitchell. Una explicación más detallada de su construcción se puede obtener en *Origami Resource Center* (https://origami-resource-center.com/business-card-columbus-cube/).

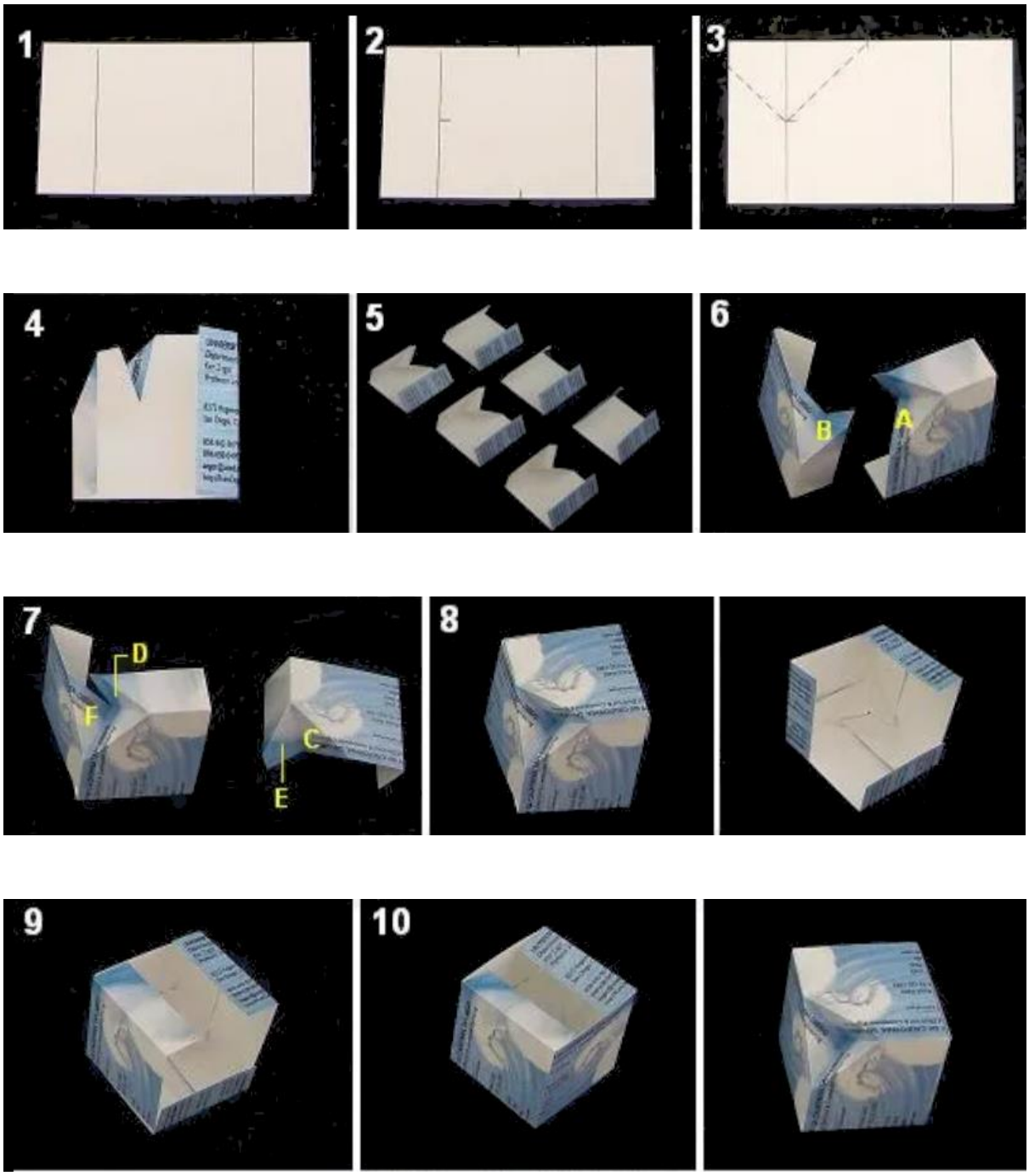


Imagen 22: Pasos para la construcción en papel de un cubo con un solo truncamiento (Cubo de Colón).

Origen de la imagen: https://origami-resource-center.com/business-card-columbus-cube/

ACTIVIDAD 11.

a) Construir un cubo usando el diseño modular de Jackson.

b) Construir un cubo con un solo truncamiento (Cubo de Colón).

c) Truncar varios vértices (al menos un segundo vértice en distinta posición).

d) ¿Cuántos poliedros distintos pueden obtenerse con 0, 1, 2…, 8 vértices truncados en el cubo?

SUGERENCIAS METODOLÓGICAS:

En la actividad 11.d se puede facilitar una plantilla muda, como la de la imagen 17, donde aparezca el esquema de un cubo con sus vértices y los alumnos vayan marcando con bolígrafo o rotulador la situación de los que trunca. Este recurso facilita, al tenerlos dibujados, comprobar si los poliedros resultantes son iguales o no a los ya dibujados.

Referencias

Grupo Alquerque. (12 de diciembre de 2021). Bloque Geométrico-Topológico. Pasatiempos Matemáticos de la Prensa. http://pasatiemposmatematicosdelaprensa.blogspot.com/search/label/Bloque%20Geom%C3%A9trico-Topol%C3%B3gico

Guillén Soler, Gregoria. (1991). *Poliedros.* Colección: Matemáticas: cultura y aprendizaje, n.º 15. Editorial Síntesis. Madrid.

Ledesma, A y otros (2020). *Cubos³*. *XXXII Open Matemático*. Monografías Open Matemático. Colectivo Frontera de Matemáticas. Requena (Valencia).

Pacioli, Luca. (1991). *La Divina proporción.* Editorial Akal. Madrid.

TaR025 Resolución de problemas en infantil y primer ciclo

Nisamar Hernández Rodríguez
niherrodj@canariaseducacion.es
Centro de Educación Infantil y Primaria San Matías. Consejería de Educación del Gobierno de Canarias
Lucía Santamaría Grúa
lsangru@canariaseducacion.es
Centro de Educación Infantil y Primaria Juan Valero Consejería de Educación del Gobierno de Canarias
María Nila Pérez Francisco
nilacapicua@yahoo.es
Servicios Centrales.Consejería de Educación del Gobierno de Canarias

Núcleo temático: Procesos, Recursos para el aula

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria

RESUMEN

En el taller se trabajará una propuesta de resolución de problemas, especialmente los aritméticos, para la etapa de infantil y el primer ciclo de primaria adaptada de la propuesta de Polya y Schoenfield. Revisaremos cuáles son las situaciones a las que se enfrenta el alumnado para resolver problemas, especialmente los aritméticos, reflexionaremos sobre las prácticas de aula y cómo la propuesta ayuda al alumnado a decidir desde la lógica matemática. El diagrama que usaremos para los problemas aritméticos como organizador gráfico es el Parte-Todo o Partes-total.

Palabras clave: Problemas, Diagrama, Aritméticos.

Esta propuesta se ha ido desarrollando desde hace varios años en el Proyecto Matemáticas Newton Canarias después de observar las dificultades que presentaban los alumnos en la resolución de problemas, no sabían responder a eso que se llama “pensar”.

Ya se había adaptado la propuesta de Polya y las aportaciones de Schoenfield al segundo y tercer ciclo de primaria y en secundaria obligatoria.

Después de una reflexión sobre las características del alumnado de estas edades se llegó a una definición de fases y diagramas interesantes y cómo llevarlas a la práctica.

1. Fases y diagramas

1.1 Fases:

1.1.1 Cuéntame la historia.

Es la fase de comprender la situación e identificar la información pertinente en función del objetivo.

1.1.2 Pensemos una manera de resolverlo.

Se piensa individualmente, se comparte en pequeño grupo y se elige en gran grupo una idea de cómo llevarlo a cabo.

1.1.3 Manos a la obra

Llevamos a cabo la idea que nos parece más adecuada para obtener una solución.

1.1.4 Respondemos

El alumnado valora las soluciones obtenidas mediante preguntas que realiza el profesorado. Cuando estamos seguros de que la solución o soluciones son válidas expresamos oralmente, de forma gráfica o por escrito la respuesta.

2. Diagramas

Se trabajan con el alumnado los diagramas partes-todo, los diagramas de barras, los diagramas en árbol y las tablas.

3. Actividades

En este taller se analizarán diversas formas de resolver un mismo problema, se analizarán los pasos a seguir por parte del alumnado y se pondrán ejemplos de problemas tanto para Infantil como para 1º de Primaria.

Una vez analizadas todas las fases realizaremos problemas como:

- **Los vasos**: Alicia quiere comprar 57 vasos. En la tienda ve que los vasos se venden en cajas de 3 y 5 piezas. Alicia compra en total 13 cajas de manera que pueda tener exactamente 57 vasos. ¿Cuántas cajas de tres vasos y cuántas cajas de cinco vasos ha comprado Alicia?
- **Los juguetes**: Marta tiene tres juguetes: un peluche, un camión y una pelota. Su mamá le dice que puede coger dos y solo dos juguetes para jugar. ¿Qué juguetes podría escoger Marta? Piensa en todas las posibilidades.
- **Partido de baloncesto**: Noemí metió un punto más que Nerea en el último partido de baloncesto. Entre las dos metieron 27 puntos. ¿Cuántos puntos metió Nerea?
- **Camellos y dromedarios**: En el desierto del Sáhara un tuareg tiene camellos y dromedarios. Entre todos suman 32 patas y 13 jorobas. ¿Cuántos camellos y dromedarios tiene el tuareg?

Referencias

Fernández Bravo, J.A. (2019). *Resolución de problemas matemáticos. Creatividad y razonamiento*. Grupo Mayéutica.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.

García Déniz, M. (2018). Proyecto Newton. Matemáticas para la vida. *Revista Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, nº 98, 45-58

TaR029 Superficies de revolución y regladas: A clase con GeoGebra

Bernat Ancochea Millet
bancoche@gmail.com
Associacío Catalana de GeoGebra
José Manuel Arranz San José
josemarranz@gmail.com
IES Álvaro de Mendaña. Ponferrada. León
José Muñoz Santonja
josemunozsantoja@gmail.com
IES Macarena. Sevilla

Núcleo temático: recursos para el aula, conexiones.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

El objetivo de este taller es comprobar cómo las herramientas de una poderosa herramienta geométrica como GeoGebra, permiten introducir dentro del aula objetos tridimensionales que forman parte de nuestro entorno cotidiano, estudiando sus superficies y favoreciendo que el alumnado investigue alternativas potenciando su creatividad. Nos centraremos en las superficies de revolución y regladas y mostraremos la gran variedad de resultados que podemos obtener con unas mínimas órdenes. La metodología del taller consistirá en la resolución de una serie de actividades con GeoGebra, por lo que es imprescindible disponer de ordenador o algún medio tecnológico que permita manipular el programa.

Palabras clave: Geometría, GeoGebra, Superficies.

Una **superficie** es aquello que solo tiene longitud y anchura.
Euclides, Los Elementos, Libro I, definición 5ª.

1. Superficies dentro y fuera del aula.

Vivimos en un mundo tridimensional en donde constantemente estamos rodeados de referencias matemáticas. Uno de los objetivos de la didáctica, al menos en entornos no universitarios, ha sido siempre el llevar aspectos del entorno cotidiano al interior del aula para utilizarlos como recursos. No siempre es fácil ya que las matemáticas que existen en esa cotidianidad superan los niveles o las posibilidades que podemos desarrollar dentro del aula. Sin embargo, los avances tecnológicos están permitiendo que podamos trabajar en el aula, de forma sencilla, conocimientos que hasta el momento superaban nuestras expectativas.

En esta línea, queremos presentar las posibilidades que el programa GeoGebra nos da para construir muy fácilmente objetos tridimensionales que han sido generados por revolución o de una forma reglada a partir de segmentos lineales o curvos. Por un lado, la respuesta a la consabida pregunta de para qué sirven las matemáticas que vemos en la secundaria puede ser respondida fácilmente viendo que objetos cotidianos son generados o diseñados gracias a las matemáticas. Por otro, la herramienta permite que el alumnado pueda plantear un proyecto donde investigar variaciones creando objetos regulares que se escapan de lo habitual, lo cual les sirve de aliciente y de motivación.

2. Superficies de revolución

Una superficie de revolución es aquella que se genera mediante la rotación de una curva plana, o generatriz, alrededor de una recta directriz, llamada eje de rotación, *la cual se halla en el mismo plano que la curva (no es necesario en GeoGebra)*.

Ejemplos comunes de una superficie de revolución son:

Una superficie de revolución cilíndrica es generada por la rotación de una línea recta, paralela al eje de rotación, alrededor del mismo;

Una superficie de revolución cónica es generada por la rotación de una recta alrededor de un eje al cual interseca en un punto, llamado vértice o ápice,

Una superficie de revolución esférica está generada por la rotación de una semicircunferencia alrededor de su diámetro;

Una superficie de revolución toroidal está generada por la rotación de una circunferencia alrededor de un eje que no la interseca en ningún punto

La utilización de superficies de revolución es esencial en diversos campos de la física y la ingeniería, así como en el diseño. La alfarería, el torneado industrial e incluso el diseño en multitud de campos, moldean y modelan volúmenes con variadas superficies de revolución de gran utilidad y uso cotidiano.

Imagen1. Superficies de revolución.

2.1 Superficies de revolución de objetos geométricos.

Las versiones actuales de GeoGebra permiten construir superficies de revolución de la mayoría de los objetos creados utilizando los botones de la barra de herramientas, tanto los de la vista gráfica 2D y 3D. La construcción de superficies de revolución está al alcance de todos los alumnos sin limitación de edad.

2.1.1 Superficies de revolución de un segmento

Actividad 1. Herramienta Superficie de revolución.

Construye los puntos A(1,1), B(3,2) y el segmento AB en la vista gráfica 2, para ello selecciona la herramienta segmento, y haz clic en los dos puntos del plano. Automáticamente se muestra el segmento creado en la vista gráfica 3D.

Haz clic en la vista gráfica 3D, para que se muestre su barra de herramientas. Selecciona la herramienta "**Superficie de Revolución**" y selecciona el segmento construido, de forma automática se construye la superficie de revolución engendrada por el segmento al girar una vuelta completa alrededor del eje x.

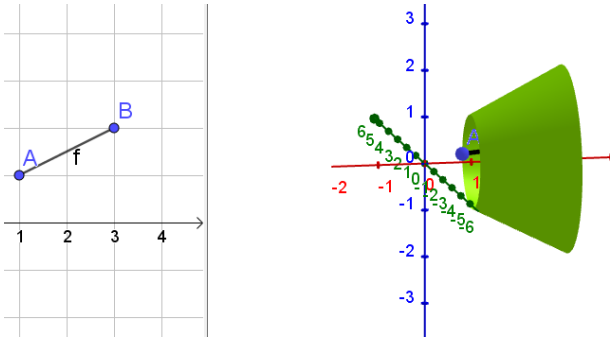


Imagen 2. Superficie de revolución de un segmento alrededor del eje x

Mueve ahora utilizando el ratón los puntos A y B, de forma que se modifique la superficie construida. Mueve los puntos para que la superficie sea un cono, un cilindro, …

Se obtiene el mismo resultado si en vez de utilizar la herramienta Superficie de revolución, se escribe en la barra de entrada la expresión**: Superficie(f, 360º),** o bien **Superficie(f, 2 pi)**, donde f es el segmento. En este caso podemos indicar el ángulo en grados o en radianes. Superficie(f, 45º) es equivalente a Superficie(f, pi/4).

Actividad 2. Cambio de eje en la superficie de revolución.

Si se desea construir la superficie de revolución que genera el segmento alrededor de cualquier otro eje, es necesario especificarlo.

Superficie(f, 360º,EjeY) construye la superficie alrededor del eje y.

Construye un tronco de cono como el que muestra la imagen como superficie de revolución de un segmento alrededor del eje y.

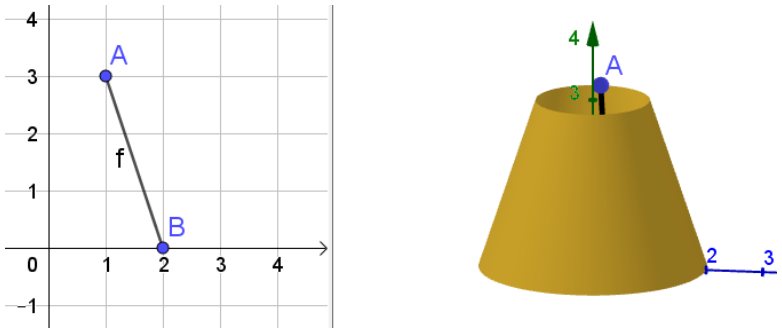


Imagen 3. Tronco de cono como superficie de revolución de un segmento.

Si se desea mostrar el eje y en posición vertical, basta acceder a las opciones de la vista gráfica 3D y marcas la casilla "**Eje Y vertical**".

También podemos hacer Superficie(f, 360º,EjeZ) que en este caso creará una corona circular en el plano z=0. Es la forma más sencilla de colorear una corona circular con GeoGebra.

Actividad 3. Hiperboloide de una hoja

Construye una circunferencia de radio 2 con centro en el origen (0,0,0), puede hacerse con la herramienta Circunferencia o bien utilizando la instrucción: **Circunferencia(<Punto>, <Número o valor numérico (radio)>)**, De forma análoga construye la circunferencia centrada en (0,0,3) de radio 2. Puede hacerse ésta como traslación de la primera por el vector (0,0,3).

Construye un punto sobre cada una de las circunferencias y el segmento que los une. La superficie de revolución **Superficie(f,2pi,EjeZ)** será un cilindro, cono o hiperboloide de una hoja en función de la posición relativa de los puntos sobre las circunferencias.

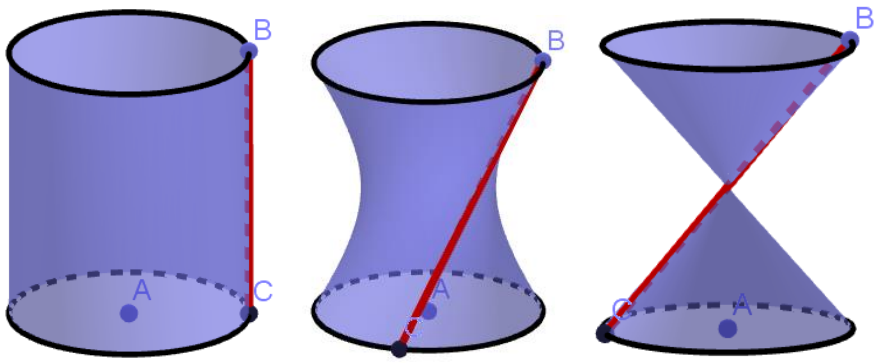


Imagen 4. Cilindro, hiperboloide de una hoja y cono como superficies de revolución de un segmento.

Si previamente se construyen dos deslizadores, r radio y h altura se generalizan de forma inmediata las dimensiones de los objetos construidos.

2.1.2 Superficies de revolución de polígonos y circunferencias.

Actividad 4. Superficie de revolución de un polígono.

Construye un polígono en la vista gráfica y crea las superficies de revolución que se generan al rotar sobre el eje x y sobre el eje y.

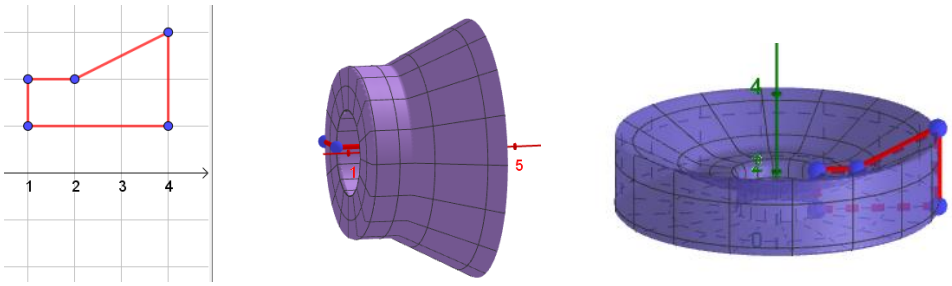


Imagen 5. Superficies de revolución de un polígono.

Actividad 5. Toro como superficie de revolución.

Construye un punto sobre el eje x, por ejemplo A=(4,0,0). Introduce la expresión **Circunferencia(A, 1, EjeY)** que construye la circunferencia de radio 1 centrada en A en la dirección del eje y. Basta ahora escribir **Superficie(c,2 pi, Eje Z).**

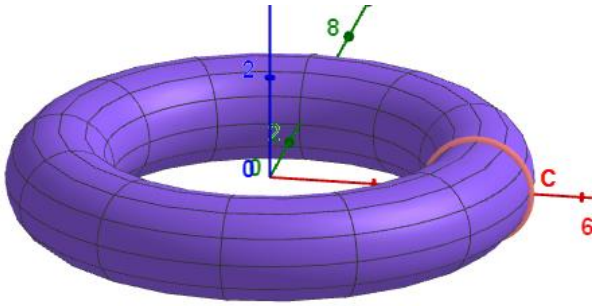


Imagen 6. Toro como superficie de revolución de una circunferencia.

2.1.3 Superficies de revolución de líneas poligonales. Comando Spline.

Actividad 6. Superficie obtenida de una poligonal.

Utilizando la herramienta Poligonal, construye una línea poligonal en la vista gráfica o gráfica 2, o bien escribe en barra de entrada: Poligonal(A,B,C,D,E,F). la instrucción Superficie(f, 2 pi, EjeY), donde f es la poligonal, construye la superficie de revolución que se muestra en la imagen de la izquierda. Se ha situado el eje y en posición vertical.

El comando Spline construye una curva polinómica (grado mayor o igual que tres) que pasa por los puntos que se indiquen. La estructura del comando es : **Spline(<Lista de puntos>, <Grado ≥ 3>),** como se muestra en la imagen de la derecha.

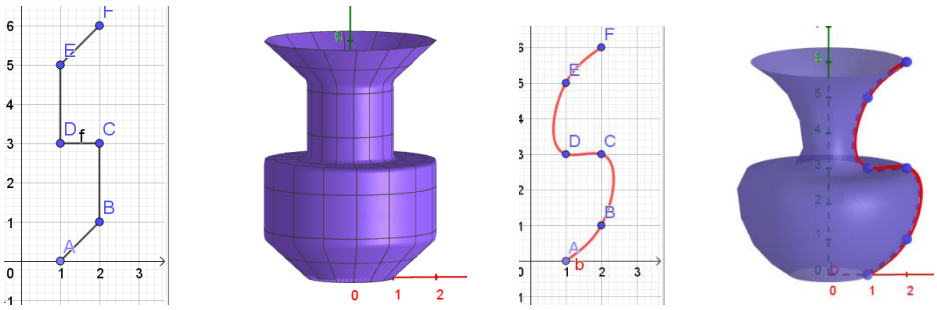


Imagen 7. Superficie de revolución de una línea poligonal y su curva Spline.

2.1.4 Superficies artesanales. Figura a mano alzada

Seleccionando la herramienta "**Figura a mano alzada**" podemos dibujar con el ratón una línea, que GeoGebra denomina **boceto(x)** y a partir de ella construir la superficie de revolución correspondiente.

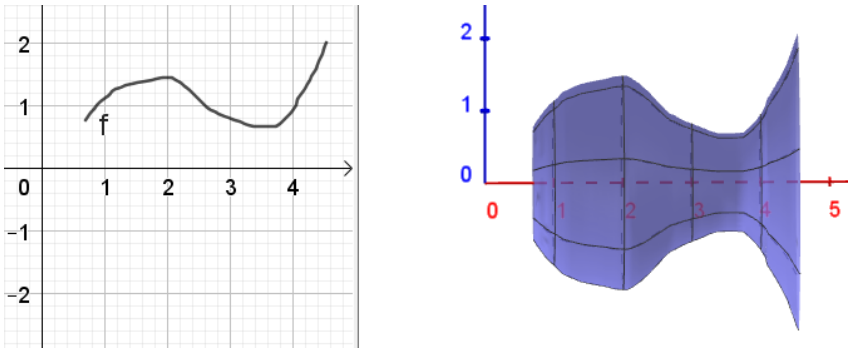


Imagen 8. Superficie de revolución de una línea a mano alzada.

Para que GeoGebra identifique la línea a mano alzada, ésta ha de ser una función, a cada valor de x, un único valor de y.

Las versiones actuales de GeoGebra permiten también construir polígonos sencillos: triángulos, cuadrados, rectángulos, así como circunferencias a mano alzada. Basta que la línea trazada con el ratón u otro dispositivo sea aproximadamente el objeto que se desea.

2.2 Superficie de revolución de una función y=f(x)

Utilizando la instrucción **Superficie(<Función>,<Ángulo de rotación(en sentido antihorario)>)** si la rotación es alrededor del eje x o bien **Superficie(<Curva>, <Ángulo de rotación (en sentido antihorario)>, <Lado (semi/recta o segmento)>)** para cualquier eje, GeoGebra construye y muestra la superficie que se obtiene. La técnica es idéntica a la mostrada en el apartado anterior sustituyendo ahora un objeto geométrico por una función y=f(x).

2.2.1 Funciones en un intervalo

Para definir una función en un intervalo se utiliza la instrucción **Función(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)**

Actividad 7. Superficie de revolución de una función alrededor del eje X o Y.

Construye la superficie generada por y=x^2 definida en [0,2] al rotar al alrededor del eje x y del eje y.

Mediante la expresión: Función(x^2,0,2) o si se prefiere Si(0<x<2,x^2) se construye la función, sea f dicha función.

Superficie(f,360º) construye la superficie alrededor de eje x. Superficie(f, 360º,EjeY) la superficie al rotar sobre el eje y. El ángulo puede expresarse en grados o bien en radianes.

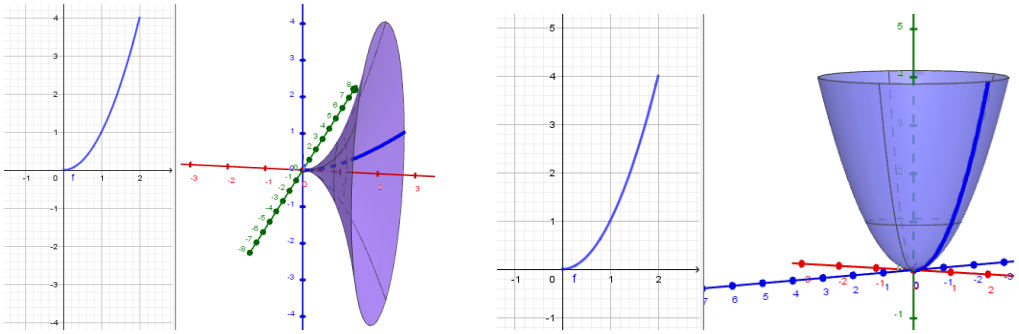


Imagen 9. Superficie de revolución de función y=x^2 sobre eje x y eje y.

En la imagen de la derecha se ha situado el eje y en posición vertical como se indicó en anteriormente.

Actividad 8. Superficie de revolución de una función alrededor del eje Z.

Superficie de revolución de y= f(x) sobre el eje Z.

Para generar superficies de revolución sobre el Eje Z a partir de la función y=f(x) basta escribir: **Superficie(u cos(v), u sen(v), f(u), u, m, M, v, 0, α)** donde m y M son los extremos del intervalo de definición de f(x) y α el ángulo de giro, que puede ser menor de 360º si así se desea.

Construye la superficie de revolución generada por la la función y=e ^x al girar sobre eje z, con x definido en el intervalo [-2.5,1.8].

Escribe en barra de entrada: **Superficie(u cos(v),u sen(v),e ^u,u,-2.5,1.8,v,0, 2 pi)**

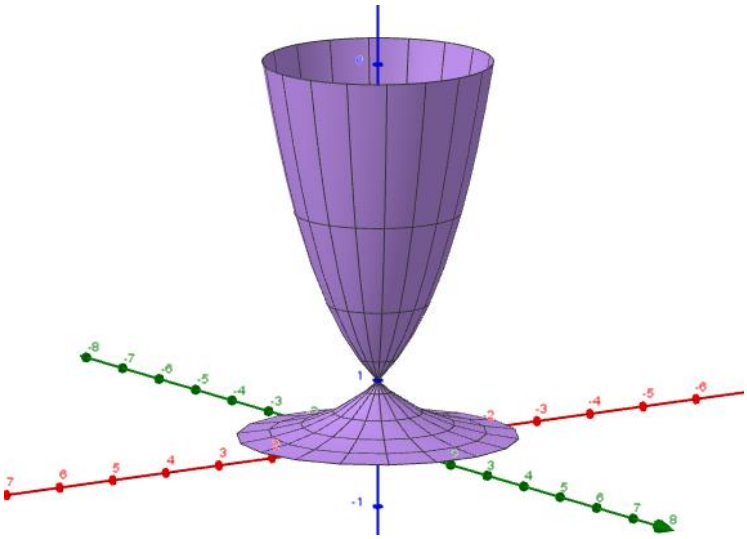


Imagen 10. Superficie de revolución de la función y=e ^x alrededor de eje z.

Actividad 9. Hiperboloide como superficie de revolución de una función.

De igual forma que se han construido superficies de revolución al girar sobre uno de los ejes de coordenadas x, y, z, puede de forma idéntica construirse superficies al girar sobre un eje cualquiera.

Construye la hipérbola y= -1/x en el intervalo [-4,1/4] y la bisectriz del primer cuadrante, recta que pasa por A(0,0) y B(1,1), sean f y g respectivamente.

La instrucción **Superficie(f,2 pi, g)** construye un hiperboloide de una hoja.

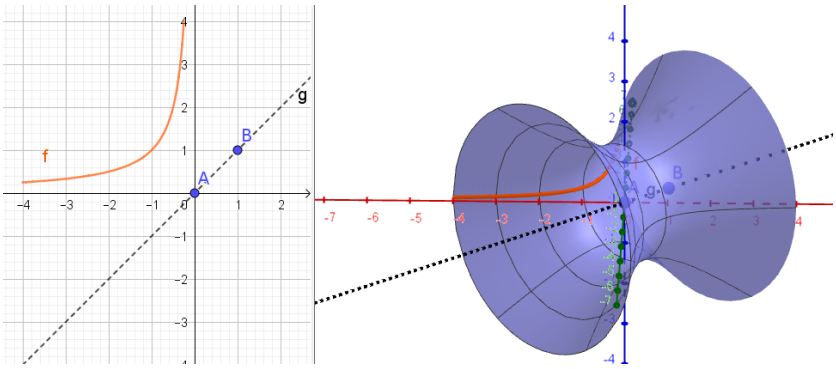


Imagen 11. Superficie de revolución de la función y=1/x alrededor de bisectriz primer cuadrante.

Modifica la construcción anterior de forma que B=(1,1,1) ¿Se obtiene el mismo paraboloide en distinta posición, o es un paraboloide diferente?

2.2.2 Funciones definidas a trozos

La utilización de funciones definidas a trozos amplía las posibilidades de construcción de superficies. Consideramos es una excelente actividad para alumnos de tercer y cuarto curso de educación secundaria. Las posibilidades son aún mayores si se definen las funciones con ayuda de deslizadores.

Actividad 10. Superficie de una función a trozos.

Representa la función a trozos: Si(0 < x < 1, x², 1 < x < 2, 1, 2 < x < 4, -x + 3), de forma idéntica a como se ha hecho en apartados anteriores, la superficie que se origina al girar sobre el eje x es: Superficie(f, 2 pi, EjeX)

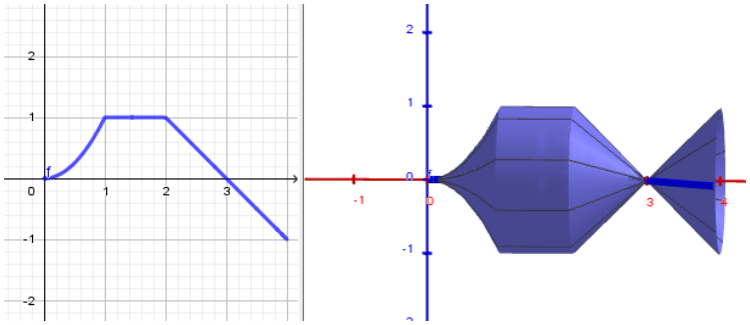


Imagen 12. Superficie de revolución de una función definida a trozos.

2.3 Superficies de revolución de curvas paramétricas.

El procedimiento de construcción de superficies de curvas expresadas en forma paramétrica, es idéntico a lo ya visto en los apartados anteriores.

Actividad 11. Superficies de revolución de lemniscata de Bernoulli

Representamos en primer lugar la Lemniscata, cuya expresión en coordenadas paramétricas es: Curva (r sen(t)/(1+cos(t)²),r sen(t) cos(t)/(1+cos(t)²),t,0,2π) donde r es un parámetro que da la amplitud de la hoja definido mediante un deslizador.

La superficie de revolución al girar la curva sobre el Eje X se construye escribiendo en la barra de entrada Superficie(a, 2π) y la superficie de revolución al girar sobre el Eje Y es Superficie(a, 2π, EjeY).

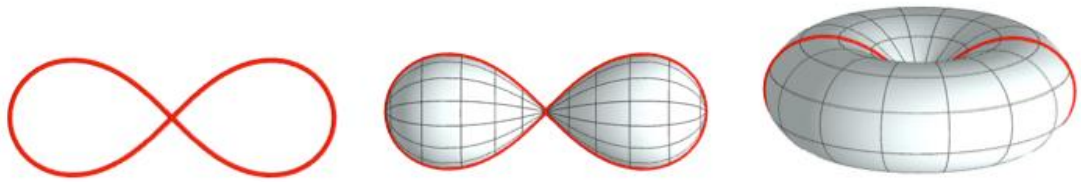


Imagen 13. Lemniscata de Bernuilli y superficies al girar sobre eje x e y respectivamente.

3. Superficies regladas

Una superficie reglada, en geometría, es la generada por una recta, denominada generatriz, al desplazarse sobre una curva o varias, denominadas directrices. En función de las características y condiciones particulares de estos elementos, recibe diversos nombres.

Imagen 14. Superficie reglada. Imagen de Roberto Uderio en Wikimedia Commons.

No existe una instrucción específica en GeoGebra para construir superficies regladas, basta con aplicar la definición. Para poder construir superficies regladas, las dos curvas han de estar definidas en forma paramétrica, con una excepción: se

admiten segmentos construidos en forma geométrica en la versión actual de GeoGebra.

3.1 Parametrizar un segmento

Es corriente que para hallar superficies regladas tengamos que parametrizar los segmentos o curvas que se van a utilizar en la construcción. Hasta hace poco, era necesario también con los segmentos pues en caso contrario no funcionaba. Aunque ahora ya se puede, para homogeneizar todo el proceso vamos a ver como se puede parametrizar un segmento, y lo mismo tendremos que hacer con otras curvas.

La expresión **Curva(A(1-t)+B t,t,0,1)** construye el segmento AB. Es fácil ver que para t=0 se obtiene el punto A, para t=1 se obtiene B y para valores de t entre 0 y 1 los puntos intermedios entre A y B.

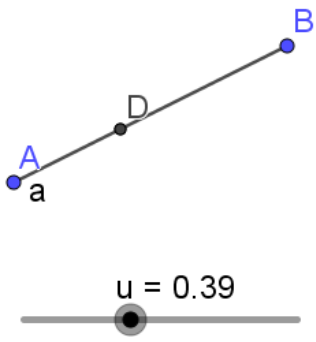


Imagen 15. Segmento en forma paramétrica.

3.2 Superficie reglada entre dos segmentos. Paraboloide hiperbólico.

Como hemos dicho, ya es posible hacerlo directamente con segmentos, por ello en la siguiente actividad supondremos que f y g pueden haberse obtenido de la forma que se desee.

Si dos segmentos están en el mismo plano, la superficie reglada construida entre ellos es el cuadrilátero que tiene por lados opuestos los segmentos dados. Si los segmentos no son coplanarios, la superficie reglada entre ellos es una porción de un paraboloide hiperbólico, también conocido como “silla de montar”.

Actividad 12. Paraboloide hiperbólico entre dos segmentos en el espacio.

Construye dos segmentos AB y CD sobre el plano base en la vista 3D, sean f y g, mueve con el ratón al menos dos de ellos verticalmente de forma que los cuatro puntos no estén en el mismo plano.

Escribe en barra de entrada: **Superficie(f(t) k + g(t) (1 - k), t, 0, 1, k, 0, 1)**

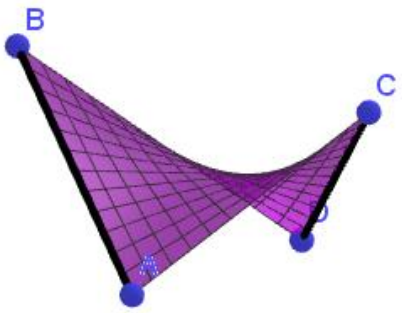


Imagen 16. Paraboloide hiperbólico entre dos segmentos.

Actividad 13. Superficie reglada en tetraedro

Construye un tetraedro y la superficie reglada entre dos aristas opuestas.

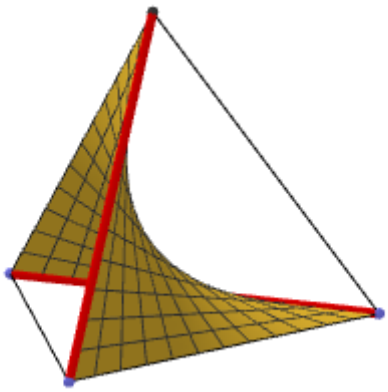


Imagen 17. Paraboloide hiperbólico construido entre aristas opuestas de un tetraedro.

El paraboloide hiperbólico construido divide al tetraedro en dos partes de igual área y volumen.

3.3 Superficies regladas entre dos curvas

Repitiendo la estructura de la instrucción del apartado anterior podemos construir superficies regladas entre dos curvas cualesquiera, con la única condición de que ambas estén expresadas en forma paramétrica.

3.3.1 Superficies regladas entre dos circunferencias

Actividad 14. Cilindro e hiperboloide de una hoja como superficies regladas.

Una circunferencia de radio r sobre el plano XY, centrada en el origen se parametriza en la forma Curva(r cos(t), r sen(t),0, t, 0, 2π). Si la circunferencia está en el plano z=h su expresión es Curva(r cos(t), r sen(t), h, t, 0, 2π), siendo r el valor que queramos darle al radio.

La superficie reglada entre ambas, cilindro, se construye mediante la expresión: Superficie(a(t) k +b (t)(1-k), k,0,1, t,0,2π) siendo a y b las circunferencias.

Sea a' la circunferencia que se obtiene al rotar la circunferencia a un cierto ángulo α alrededor del Eje Z. Si en la expresión anterior sustituimos a' por a, la superficie que se obtiene es un hiperboloide de una hoja, construido como superficie reglada. Si el ángulo de rotación es 180º se obtiene un doble cono.

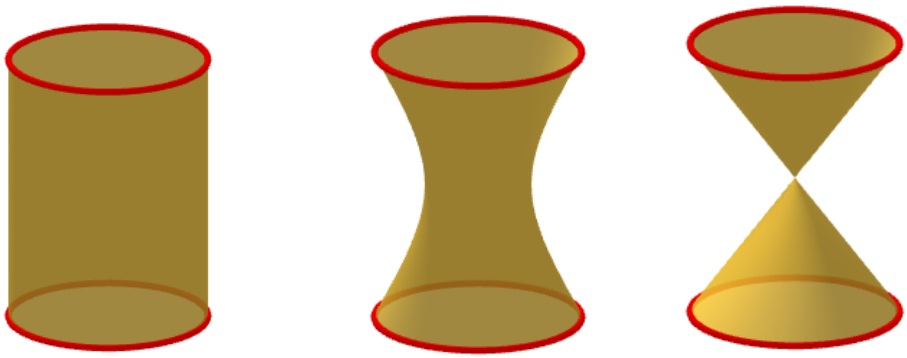


Imagen 18. Cilindro, hiperboloide y cono construidos como superficies regladas entre dos circunferencias.

Si las circunferencias tienen distinto radio, obtenemos un tronco de cono en el primer caso, un hiperboloide asimétrico en el segundo y dos conos diferentes en el tercer caso al realizar un giro de una de las circunferencias.

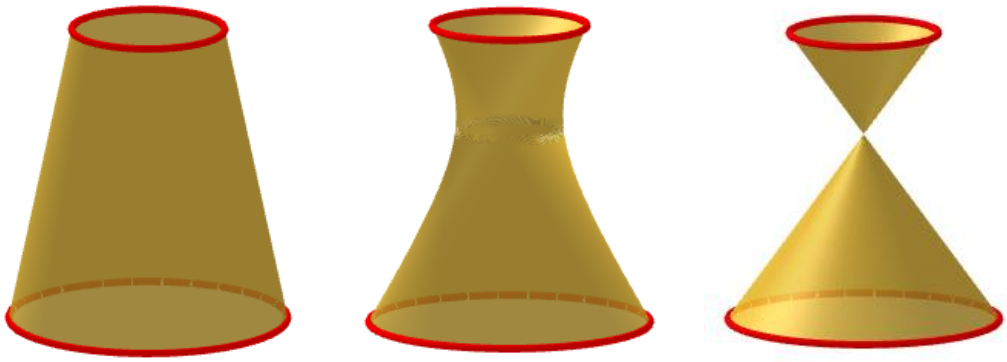


Imagen 19. Tronco de cono, hiperboloide asimétrico y doble cono entre circunferencias de distinto radio.

Resulta sencillo seguir generalizando esta construcción, basta trasladar horizontalmente una de las circunferencias o ambas para obtener cilindro, hiperboloide y conos oblicuos.

Si sustituimos las circunferencias por elipses, obtendríamos un cilindro elíptico en el primer caso, hiperboloide elíptico, y cono elíptico en el tercero.

3.3.2 Superficies regladas entre arcos de circunferencia.

Pueden realizarse construcción es similares entre arcos de circunferencias, pudiendo éstos tener un punto común. Las cúpulas que coronan algunas iglesias y otros monumentos pueden modelarse por esta técnica.

Actividad 15. Superficie reglada entre dos arcos perpendiculares

Construye la superficie reglada entre dos arcos de circunferencia perpendiculares de igual radio de amplitud 180º.

El primer arco sobre el eje x tiene por expresión **Curva(a+a cos(t),0,a sen(t), t, 0, π)**, el arco sobre el eje y se puede expresar como **Curva(0, a+a cos(t), a sen(t), t, 0, π)**, y por tanto la superficie entre ambos **Superficie(c(t) (1 - k) + d(t) k, k, 0, 1, t, 0, π)** siendo c y d los arcos construidos previamente.

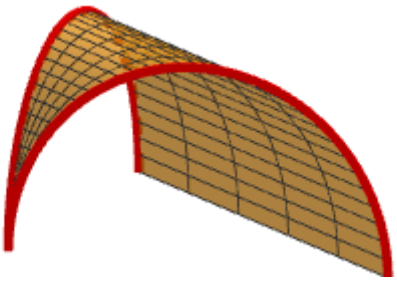


Imagen 20. Superficie reglada entre dos arcos de circunferencia perpendiculares.

No siempre es fácil escribir la expresión paramétrica de una de estas curvas en cualquier posición. Si escribimos su expresión de una circunferencia en una posición determinada y posteriormente hacemos giros o traslaciones, GeoGebra se encarga de mostrar su nueva ecuación parametrizada.

Si los arcos tienen distinta amplitud angular, es necesario trasformar su expresión parametrizada de forma que tenga la misma, lo más eficaz es expresarlos ambos en el intervalo [0,1], el arco **Curva(a cos(t), a sen(t),0, t, 0, π)** puede escribirse como **Curva(a cos(pi t), a sen(pi t),0, t, 0, 1)** con lo que se resuelve el problema.

3.3.3 Superficie reglada entre dos curvas definidas por Splines

La utilización de curvas definidas mediante Spline allana las dificultades expuestas al parametrizar curvas en el espacio, especialmente en el caso de arcos.

Actividad 16. Construcción de una cúpula mediante superficies regladas.

- Construye los puntos A=(0,0,4), B=(1,0,2.5), C=(2.5,0,2) y D=(3,0,0) y la curva Spline({A,B,C,D},3) supongamos que es a.
- Rota(a, 60º,EjeZ). Se obtiene a'.
- Crea la superficie **Superficie(k a(t) + (1 - k) a'(t), k, 0, 1, t, 0, 1)** sea b.
- Secuencia(Rota(a', t 60°, EjeZ), t, 1, 4).
- Secuencia(Rota(b, t 60°, EjeZ), t, 1, 5).

Moviendo con el ratón verticalmente los puntos iniciales y modificando el ángulo de rotación si se desea la construcción modeliza la mayoría de las cúpulas que presiden muchos edificios.

Finalmente, modifica aspectos visuales de curvas y superficies que has construido.

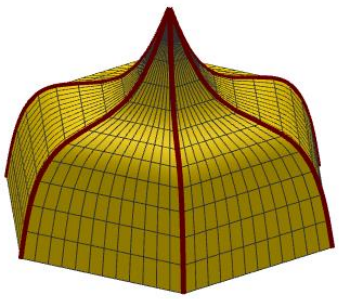


Imagen 21. Cúpula construida mediante curvas Spline y superficies regladas.

3.4 Superficies regladas entre un punto y una curva

Lo expuesto para dos curvas es válido para la construcción de superficies entre un punto y una curva, basta sustituir una de las curvas por el punto.

Dados un punto A y una curva parametrizada a(t), la superficie reglada se construye como: **Superficie(A k +a(t)(1-k),k,0,1,t,0,2 pi).**

De esta forma, si construimos la superficie reglada entre un punto y una circunferencia se obtiene un cono, recto o inclinado en función de su posición relativa. Sería un cono elíptico si utilizamos una elipse y muchas otras superficies en función de la curva empleada: rosáceas, nefroides, lemniscatas, …

Actividad 17. Reglada entre punto y curva

Crea el punto A=(0,0,3) y la curva a=Curva(3.5cos(t), 2sen(t), t, 0, 2 Pi). La superficie se crea mediante la expresión: **Superficie(A k+a(t)(1-k),k,0,1,t,0, 2 Pi)**.

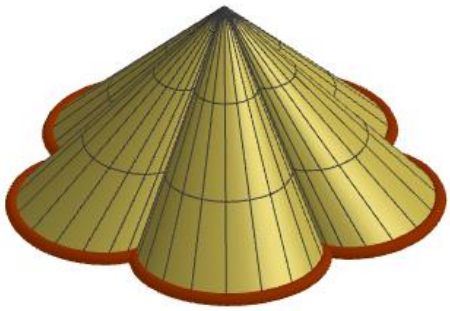


Imagen 22. Superficie reglada entre curva y punto.

Moviendo el punto A horizontalmente se obtiene la superficie inclinada.

4. Superficies de traslación

Se denominan superficies de traslación o superficies traslacionales a las que se obtienen cuando una curva generatriz se desplaza siguiendo la trayectoria de otra curva directriz. Si la curva directriz es una recta (o segmento), se obtienen las superficies regladas. Las superficies de traslación son por tanto una generalización de las superficies regladas.

Las posibilidades de generación de superficies mediante esta técnica son infinitas. Sea a(u) es la curva generatriz, b(v) la curva directriz, si A es el punto de intersección de ambas, la superficie de traslación se obtiene mediante:

Superficie(a(u)+b(v)-A, u, u_m, u_M, v,v_m, v_M). donde los subíndices m y M aluden a valor mínimo y máximo de los parámetros.

En principio no hay restricciones en el tipo de curvas a y b, con la única condición que ambas curvas estén expresadas en forma paramétrica.

Veamos un ejemplo de estas interesantes superficies. Una semicircunferencia (roja) se traslada siguiendo la trayectoria de otra semicircunferencia perpendicular (verde) como muestra la imagen de la izquierda.

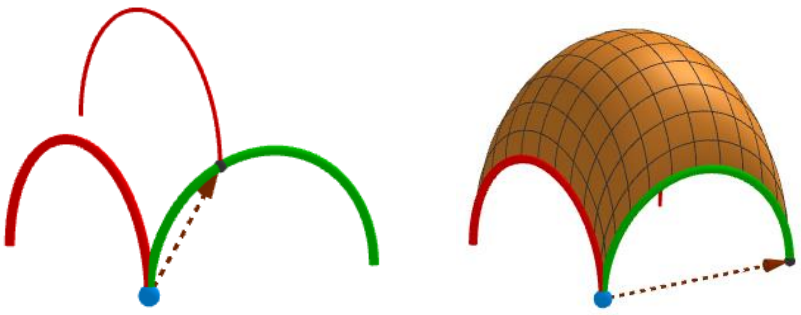


Imagen 23. Superficie de traslación de una semicircunferencia sobre otra semicircunferencia.

Actividad 18. Paraboloide hiperbólico.

Construye las dos parábolas siguientes expresadas en forma paramétrica:

Curva generatriz: Curva(-4,t,-t^2+4,t,-2,2). Curva directriz: Curva(t,0,t^2/4,t,-4,4). El punto de intersección de estas curvas es A(-4,0,4).

La superficie que se obtiene al trasladarse la primera parábola siguiendo la trayectoria de la segunda es: **Superficie(a(u)+b(v)-A, u, -2,2, v, -4,4)**.

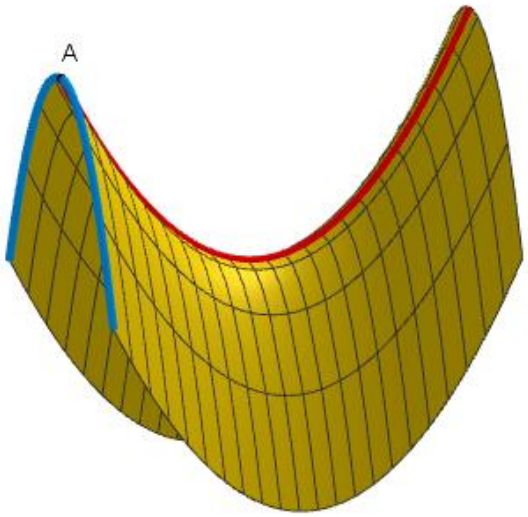


Imagen 24. Paraboloide hiperbólico como superficie de traslación.

4. En busca de las superficies en nuestro entorno.

Una vez que hemos visto la facilidad con que se pueden construir las superficies de revolución y las regladas, el paso siguiente es salir del aula y buscar construcciones a nuestro alrededor que se engloben dentro de esos parámetros. Y por supuesto, plantearnos como recrearlas utilizando GeoGebra.

Para toda persona que haya llegado hasta este punto con tiempo proponemos una última actividad.

La siguiente imagen vemos una puerta con un rosetón de la Iglesia de Petra, en Mallorca.

Imagen 25. Iglesia de Petra en Mallorca.

Actividad 19: Recreación de la ubicación de un rosetón.

Lo que te proponemos es hacer una construcción donde pueda verse la ventana que incluye el rosetón. Se podría obtener una imagen como la siguiente:

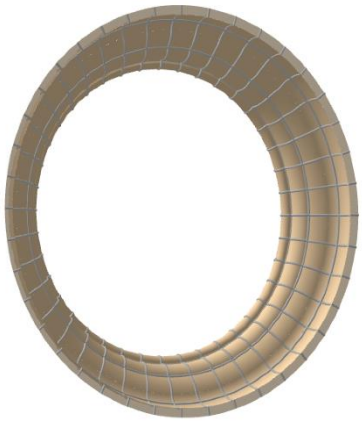


Imagen 26. Recreación de la ventana del rosetón.

TaR032 Usando la calculadora para aprender matemáticas en primaria

Ángel A. García Marrero
aagm38@me.com
Escuelas Pías Tenerife

Núcleo temático: Recursos didácticos y formación profesorado

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria,

RESUMEN

¿Por qué utilizar la calculadora en Educación Primaria?

Para gran parte del profesorado esto puede parecer una pregunta retórica, ya que se suele creer que la calculadora es una herramienta especializada en el cálculo y que no tiene sentido utilizarlas en la enseñanza de las matemáticas a edades tan tempranas. Y este parece ser un argumento tan sencillo de entender que consigue un amplio consenso entre el profesorado.

Manipular es mucho más que divertirse mientras se aprende. La manipulación de

materiales es un modo de aprender que provoca que el aprendizaje sea más eficaz, que no por ello significa que sea más rápido Alsina y Planas (2008).

Kamii (1990) manifiesta que cuando los niños tienen la posibilidad de tener objetos y

distintos materiales en sus manos se estimula su acción mental. Por tanto, el material manipulativo debe desempeñar un papel básico en los primeros niveles de enseñanza, por la necesidad que tienen los niños de contar con referentes concretos de los conceptos abstractos que tratan los docentes de enseñar, por lo

que deben estar presentes en todas las etapas educativas, y en concreto en Primaria.

Entre los recursos materiales para matemáticas se encuentra la calculadora, su introducción en el currículum suscitó un enorme debate sobre las presuntas consecuencias negativas de su utilización para otros aprendizajes, así como la edad adecuada del alumnado para usarla en el aula. Fielker (1986) compara la calculadora con otros materiales estructurales convencionales, ya que estos facilitan el uso de la intuición y proporcionan imágenes visuales a través de su manipulación, generando nuevas ideas sobre el modelo abstracto. La calculadora, en cambio, no favorece por si misma la construcción intuitiva de nociones matemáticas, pero proporciona oportunidades de hacer deducciones.

En el año 1985, el informe Cockcroft afirma que algunas investigaciones demostraron

que los estudiantes habituados a utilizar la calculadora mejoran su actitud hacia las

matemáticas, las destrezas del cálculo, la compresión de los conceptos y la resolución de problemas. En diversos estudios sobre actividades con calculadoras (Fraile, 1997), se confirma que su uso desarrolla estrategias para la resolución de problemas, por lo que debería utilizarse como instrumento de apoyo didáctico, permitiendo no solo el trabajo individual, ya que con el razonamiento durante las actividades con calculadora el alumnado interactúa entre ellos y hacen suyas las ideas y procedimientos del otro, por lo que el problema no reside tanto en decidir la edad para empezar sino en utilizar las actividades de calculadora más adecuadas para cada edad.

La NCTM (2000) explicita que las tecnologías electrónicas, entre las que se incluye las calculadoras son herramientas esenciales para enseñar, aprender y hacer matemáticas.

Específicamente, recomienda que todo el alumnado debe utilizar la calculadora para:

- Concentrarse en los procesos de resolución de problemas y no en la aritmética,

con el objeto de enriquecer su aprendizaje.

- Lograr el acceso a las matemáticas más allá de su nivel computacional.

- Explorar, desarrollar y reforzar conceptos incluyendo estimación, computación y

aproximación.

- Experimentar con ideas matemáticas y patrones.

- Hacer cálculos con datos de la vida real.

En este taller se presentarán y plantearán propuestas de aula dónde la calculadora será una herramienta de aula, imprescindible para el desarrollo de las mismas. Proponemos actividades encaminades a:

• Iniciar al alumnado en la utilización de la calculadora para la realización de cálculos numéricos, para aprender y para resolver problemas.

• Utilizar las propiedades de las operaciones, las estrategias personales y los diferentes procedimientos que se usan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar (algoritmos escritos, cálculo mental, tanteo, estimación, calculadora).

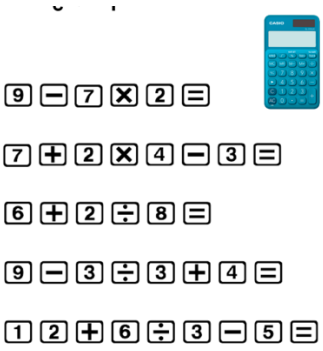
• Operar con los números teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones, aplicando las propiedades de las mismas, las estrategias personales y los diferentes procedimientos que se utilizan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar

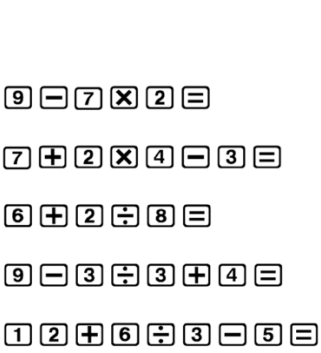
(algoritmos escritos, cálculo mental, tanteo, estimación, calculadora), usando más adecuado.

• Cálculo de tantos por ciento en situaciones reales. Elaboración y uso de estrategias de cálculo mental. Utilización de la calculadora.

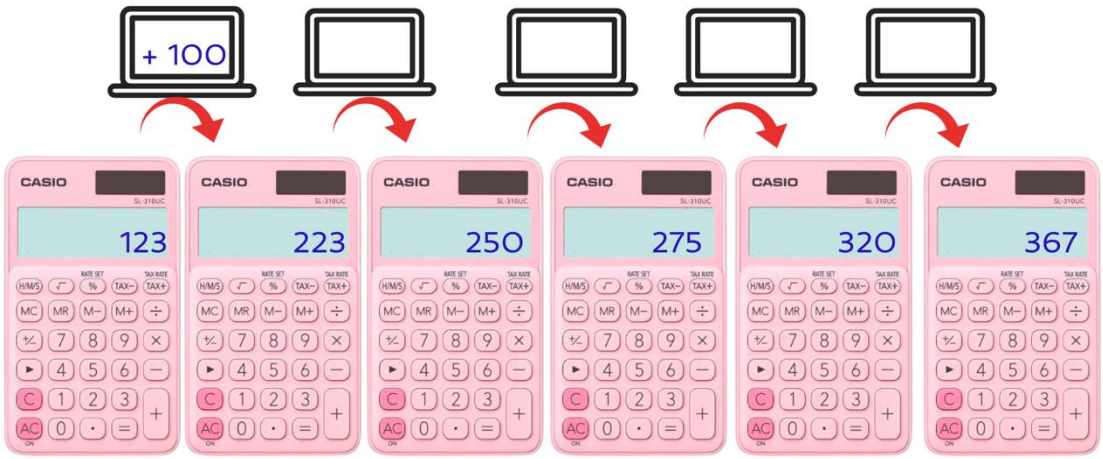
El tipo de actividades que se proponen para la integración de la calculadora en el aula son:

¿Qué pasa cuando hacemos este cálculo en calculadora científica y elemental?





¿Qué número tenemos que añadir para que aparezca en la pantalla de la calculadora estos números?



¿Sabes cómo usar las tecles MC, MR, M+,M-? Con ellas podemos hacer operaciones combinades.

Borramos la memoria pulsando MC

Tecleamos la operación así:

7 × 4 M+ 2 × 5 M+ 3 × 2 M- MR

¿Sabes que el "Factor Constante" de las calculadores elementales lo podemos usar para calcular potencias? Teclea esto y dime que pasa.

2 × × =

Investiga que pasa si usas el Factor Constante con la operación división.

¿Jugamos al 3 en raya con números decimales?

Grupo A:

0,50 1

3 4

Grupo B:

1,50 2,50

3,50 6

0,75	7,50	3,50	24
6	1,25	10,50	6
1,50	10	1,75	5
4,50	2,50	14	3

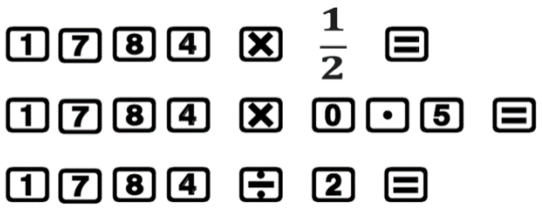
Resolución de problemas.

Al dueño de una tienda se le ocurrió una idea genial como estrategia de venta. A cada producto de su tienda le subió el precio un 15 %, y a cada cliente le diría que le iba a hacer una 15% de descuento en cada producto con el fin de aumentar sus ventas. ¿Qué pasará con un producto que ahora cuesta 100 €? ¿Qué opinas de la idea del comerciante? ¿Es una buena estrategia?¿Cuánto tendría que ser el porcentaje aumentado para que la estrategia mejore manteniendo el 15 % de descuento?

Ayúdate de una tabla para ir dejando rastro escrito de los intentos:

Precio del producto	Porcentaje de incremento	Lo hacemos en la calculadora	Nuevo precio del producto	Le hacemos el descuento	Precio rebajado
100	15 %	100 x 15% =15		115 x 15% =	

Una alumna dice que para obtener la mitad de 1784 le da lo mismo hacer la operación 1784 : 2, que hacer la operación 1784 x ½ , o incluso 1784 x 0,5. ¿Estás de acuerdo con ella? _____ Si tu respuesta es afirmativa di por qué. Si no estás de acuerdo muestra con un ejemplo por qué no.



Referencias

COCKCROF (1985). *Las matemáticas sí cuentan*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

FIELKER, D. S. (1986): *Usando la calculadora con niños de 10 años*. Valencia: Conselleria de Cultura, Educació i Ciencia. (Traducción del original en inglés Using a calculator with upper juniors, 1985).

FRAILE M., J. (1997): *Más allá de los algoritmos: uso de la calculadora y aprendizaje de estrategias con alumnos de 8 años*. (Revista Suma Nº 26 pp95-102). https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/12987/095-102.pdf?sequence=1

KAMII. C, (1990): *¿Qué aprenden los niños con la manipulación de objetos?* (Infancia: educar de 0 a 6 años, ISSN 1130-6084, Nº. 2, 1990, págs. 7-10)

ALSINA Y PLANAS (2008). ***Matématica inclusiva: Propuestas para una educación matemática accessible.*** **Ed. Narcea.**

TaR034 La calculadora en la escuela

Maria Salgado Somoza
maria.salgado@usc.es
Ceip Plurilingüe de Sigüeiro
M Assumpció Comalat Navarra
tuticomalat@gmail.com
Escola Guinardó SCCL

Núcleo temático: Recursos para el aula y Formación del profesorado

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria,

RESUMEN

¿Por qué utilizar la calculadora en Educación Infantil y en Primaria?

Para gran parte del profesorado esto puede parecer una pregunta retórica, ya que se suele creer que la calculadora es una herramienta especializada en el cálculo y que no tiene sentido utilizarlas en la enseñanza de las matemáticas a edades tan tempranas. Y este parece ser un argumento tan sencillo de entender que consigue un amplio consenso entre el profesorado.

En este taller se presentarán y plantearán propuestas de aula dónde la calculadora será una herramienta de aula, imprescindible para el desarrollo de las mismas.

Palabras clave: Calculadora, Educación Infantil, Educación Primaria

Manipular es mucho más que divertirse mientras se aprende. La manipulación de

materiales es un modo de aprender que provoca que el aprendizaje sea más eficaz, que no por ello significa que sea más rápido Alsina y Planas (2008).

Kamii (1990) manifiesta que cuando los niños tienen la posibilidad de tener objetos y

distintos materiales en sus manos se estimula su acción mental. Por tanto, el material manipulativo debe desempeñar un papel básico en los primeros niveles de enseñanza, por la necesidad que tienen los niños de contar con referentes concretos de los conceptos abstractos que tratan los docentes de enseñar, por lo que deben estar presentes en todas las etapas educativas, y en concreto en Educación Infantil y Primaria.

Entre los recursos materiales para matemáticas se encuentra la calculadora, su introducción en el currículum suscitó un enorme debate sobre las presuntas consecuencias negativas de su utilización para otros aprendizajes, así como la edad adecuada del alumnado para usarla en el aula. En un inicio se comparó la calculadora con otros materiales estructurales convencionales, ya que estos facilitan el uso de la intuición y proporcionan imágenes visuales a través de su manipulación, generando nuevas ideas sobre el modelo abstracto. La calculadora, en cambio, no favorece por sí misma la construcción intuitiva de nociones matemáticas, pero proporciona oportunidades de hacer deducciones.

En el año 1985, el informe Cockcroft afirma que algunas investigaciones demostraron

que los estudiantes habituados a utilizar la calculadora mejoran su actitud hacia las

matemáticas, las destrezas del cálculo, la compresión de los conceptos y la resolución de problemas. En diversos estudios sobre actividades con calculadoras (Fraile, 1997), se confirma que su uso desarrolla estrategias para la resolución de problemas, por lo que debería utilizarse como instrumento de apoyo didáctico, permitiendo no solo el trabajo individual, ya que con el razonamiento durante las actividades con calculadora el alumnado interactúa entre ellos y hacen suyas las ideas y procedimientos del otro, por lo que el problema no reside tanto en decidir la edad para empezar sino en utilizar las actividades de calculadora más adecuadas para cada edad.

M Antònia Canals en el año 1986 como introducción en su libro “El Cálculo mental y la Calculadora” escribió: “Estoy convencida que muchos maestros querrían usar la

calculadora como instrumento de trabajo en la clase, pero delante de la máquina se encuentran perdidos y no saben cómo utilizarla. No saben qué tipo de ejercicios tendrían que proponer que fuesen útiles para los niños y las niñas. Entonces optan por rechazarla, por miedo a que solo sirva para impedirles pensar." (Canals, 1986: 6)

La NCTM (2000) explicita que las tecnologías electrónicas, entre las que se incluye las calculadoras son herramientas esenciales para enseñar, aprender y hacer matemáticas.

Específicamente, recomienda que todo el alumnado debe utilizar la calculadora para:

- Concentrarse en los procesos de resolución de problemas y no en la aritmética,

con el objeto de enriquecer su aprendizaje.

- Lograr el acceso a las matemáticas más allá de su nivel computacional.

- Explorar, desarrollar y reforzar conceptos incluyendo estimación, computación y

aproximación.

- Experimentar con ideas matemáticas y patrones.

- Hacer cálculos con datos de la vida real.

En este sentido, en este taller se llevarán a cabo diferentes actividades de acuerdo a lo anteriormente descrito:

Actividades sobre el conocimiento y manejo de la Calculadora

Actividades en las cuales aprendemos cómo es la calculadora, cómo se maneja y qué posibilidades tiene.

Actividades basadas en conceptos curriculares.

Actividades con las que aprendemos las propiedades de las operaciones y de los números, descubrimos regularidades y comprobamos hipótesis.

Actividades contextualizadas e interdisciplinares.

Actividades en las que utilizamos la calculadora para facilitar unos cálculos que hechos a mano serían largos y tediosos.

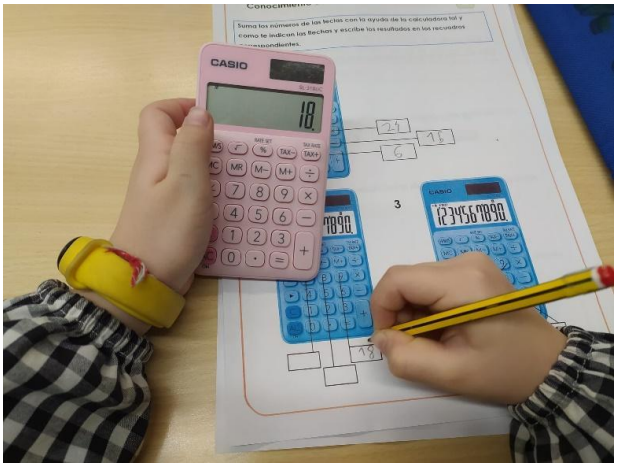


Imagen 1. Actividad de conocimiento de la calculadora.

Referencias

Alsina, Á., e Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. Madrid: Narcea.

Canals i Tolosa, M Antònia. (1986). *El càlcul mental i la calculadora 1. Catalunya.* Editorial Eumo. Vic

Fraile, J. (1997). Más allá de los algoritmos: uso de la calculadora y aprendizaje de estrategias con alumnos de 8 años. SUMA (26), 95- 102.

Kamii, C. (1990). ¿Qué aprenden los niños con la manipulación de objetos? Infancia, nº. 2, 7-10.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics. [Trad. Castellana: NCTM (2003). Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: SAEM Thales.

TaR035 Puedo mejorar mi didáctica con calculadora gráfica

Lluís Bonet Juan
l.bonetjuan@edu.gva.es
CEFIRE Alacant

Ricard Peiró i Estruch
ricardpe@gmail.com
IES Abastos València

Núcleo temático: Recursos para el aula.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Bachillerato.

RESUMEN

Lamentablemente nos encontramos todavía inmersos en el debate sobre cuál debe ser el papel de las calculadoras en el aula: ¿Las calculadoras son una simple herramienta de cálculo o son una herramienta que ayuda a la adquisición del conocimiento matemático? ¿Debe estar a disposición del alumnado para que la utilice como herramienta didáctica?

El uso de la calculadora gráfica como herramienta didáctica en el aula mejora la comprensión de los conceptos y desarrolla destrezas del alumnado a la hora de utilizar sus estrategias y conocimientos previos para la resolución de situaciones de aprendizaje. Una oportunidad para cambiar nuestra metodología en el aula, dejar espacio al razonamiento, a la creatividad y al pensamiento abstracto. Una metodología no reñida con el aprendizaje de las matemáticas y que huye de recetas, clichés y repeticiones para poner más acento en investigar, descubrir, conectar, comprobar y así dar respuesta crítica a grandes retos como el respeto al medio ambiente, la sostenibilidad o la eficiencia energética.

Palabras clave: Situaciones de Aprendizaje, Conexiones, Modelizar.

Lamentablemente nos encontramos todavía inmersos en el debate sobre cuál debe ser el papel de las calculadoras en el aula: ¿Las calculadoras son una simple herramienta de cálculo o son una herramienta que ayuda a la construcción del conocimiento matemático? ¿Conviene que el profesorado haga un uso didáctico de esta herramienta con el alumnado? ¿Debe estar a disposición del alumnado para que la utilice cuando sea necesario o hay que limitar su uso?

El uso de herramientas digitales (calculadoras, programas de geometría dinámica, hojas de cálculo, etc.) en los procesos de verificar, ejecutar, investigar, conceptualizar y profundizar posibilita el poder abordar la resolución de situaciones de aprendizaje más complejas directamente relacionadas con la vida cotidiana, la investigación matemática haciendo uso de datos reales, la modelización matemática para mejorar los procesos de comunicación y representación, etc. Una combinación que puede motivar al alumnado, favorecer conocimientos matemáticos sólidos y descubrir las matemáticas como herramientas esenciales para el desarrollo científico y tecnológico.

El uso de la calculadora gráfica como herramienta didáctica en el aula mejora la comprensión de los conceptos y desarrolla destrezas del alumnado a la hora de utilizar sus estrategias y conocimientos previos para la resolución de situaciones de aprendizaje. Permite la movilización de los saberes básicos de todos los sentidos: numérico, de la medida, espacial, algebraico, estocástico y socioafectivo. Además, deja espacio al razonamiento, a la creatividad y al pensamiento abstracto fundamentales para dar respuesta a grandes retos como el respeto al medio ambiente, la sostenibilidad o la eficiencia energética.

Las competencias específicas del Bachillerato en la nueva Ley Educativa LOMLOE, hacen una vez más hincapié en el uso de las TIC como herramientas didácticas y lo hacen de manera expresa y directa:

- Manejar diferentes estrategias y herramientas, incluidas las digitales, que modelizan y resuelven problemas de la vida cotidiana y de la Ciencia y la Tecnología, seleccionando las más adecuadas según su eficiencia (CE1).
- Formular o investigar conjeturas o problemas, utilizando el razonamiento y la argumentación, con apoyo de herramientas tecnológicas, para generar nuevo conocimiento matemático (CE3).
- Representar procesos matemáticos seleccionando diferentes tecnologías para visualizar ideas y estructurar razonamientos matemáticos (CE7).

También se menciona de forma indirecta, ya que abordar con éxito la resolución de situaciones de aprendizaje más complejas, que utilicen datos reales, que necesiten realizar representaciones y conexiones entre los diferentes sentidos matemáticos, etc., solamente es viable con el uso de herramientas tecnológicas como la calculadora gráfica.

Siendo así, se presentan a continuación dos propuestas que nos parecen de interés y en las que la calculadora gráfica CASIO CG50 ofrece un gran potencial.

1) Conexiones entre los sentidos algebraico y geométrico.
2) Modelización matemática en el diseño de una situación de aprendizaje.

1. Conexiones entre los sentidos algebraico y geométrico.

Resolver el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x-y-z=4 \\ 4x+y-3z=2 \end{cases}$

Interpretar geométricamente el resultado.

Se puede resolver el sistema utilizando el método de Gauss.

Se considera la matriz ampliada del sistema:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Con la calculadora se puede triangular el sistema.

Se define la matriz ampliada y se triangulariza:

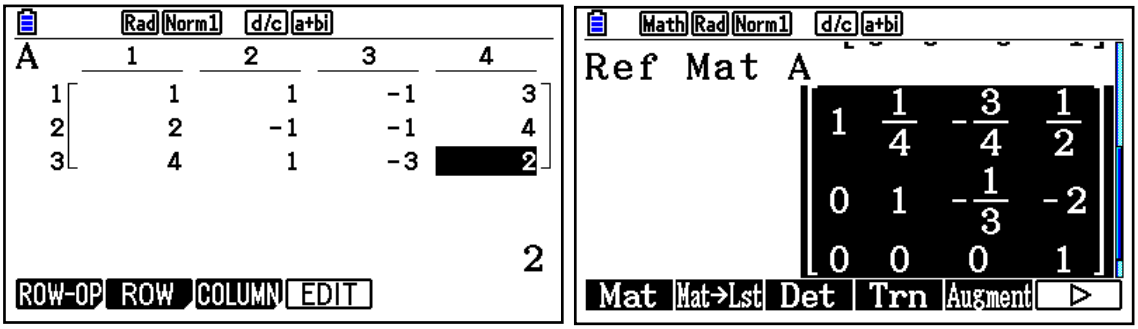


Imagen 1. Comando Ref para triangulizar una matriz.

El sistema es incompatible.

Con el **Menú A: Ecuación** se resuelve el sistema:

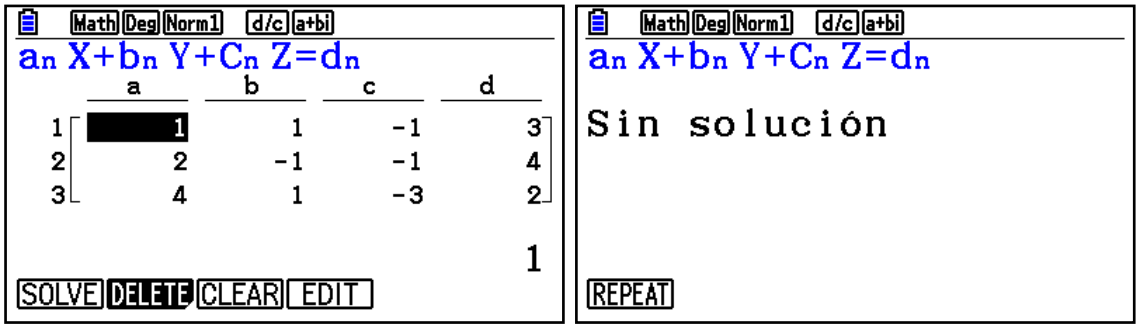


Imagen 2. Resolución desde el Menú A: ecuación.

Para interpretar el sistema geométricamente, se debe saber que una ecuación lineal con tres incógnitas es un plano en el espacio.

Con el **Menú K: Gráfico 3D**, se define la ecuación de cada uno de los tres planos y se representan gráficamente:

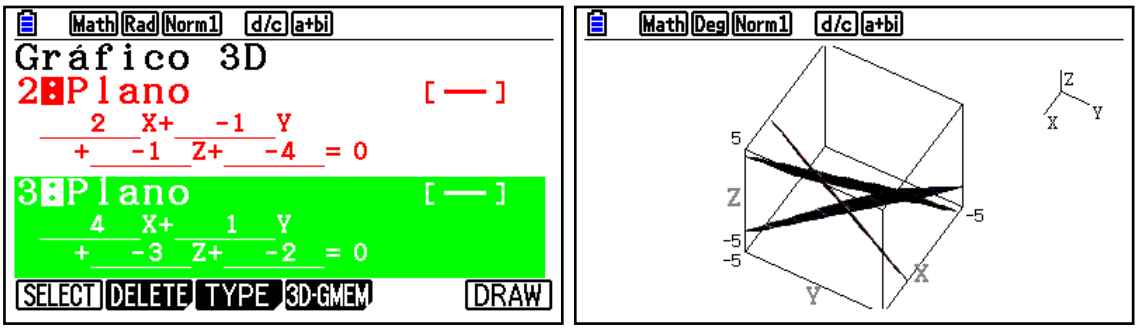
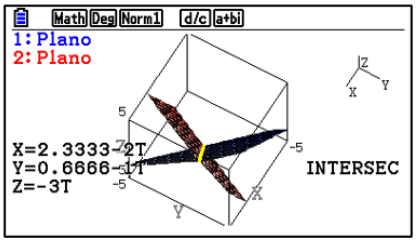


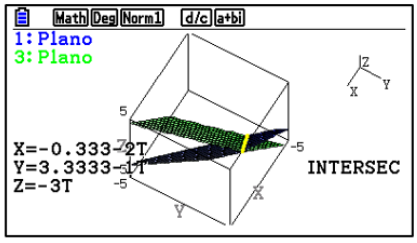
Imagen 3. Representación gráfica en 3D de los planos.

Se observa que los tres planos intersectan dos a dos en una recta.

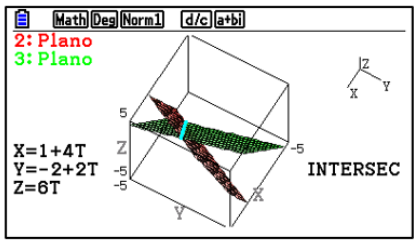
Se determina la recta intersección de los planos dos a dos:



$$r_{12} \equiv \begin{cases} x = \frac{7}{3} - 2\alpha \\ y = \frac{2}{3} - \alpha \\ z = -3\alpha \end{cases}$$



$$r_{13} \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{3} - 2\alpha \\ y = \frac{10}{3} - \alpha \\ z = -3\alpha \end{cases}$$



$$r_{23} \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\alpha \\ y = -2 + 2\alpha \\ z = 6\alpha \end{cases}$$

Imagen 4. Representación gráfica en 3D de los planos dos a dos.

Se tiene que las tres rectas son paralelas (observar los vectores directores de las tres).

Se puede comprobar gráficamente. Para ello se definen las tres rectes i se representan gráficamente:

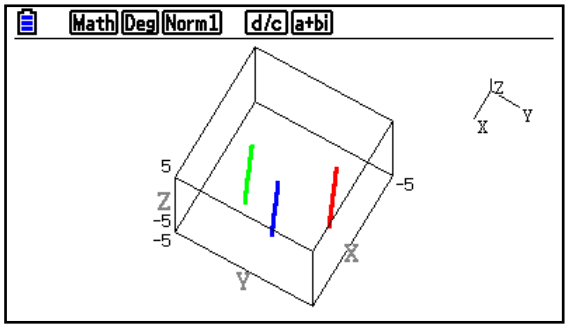
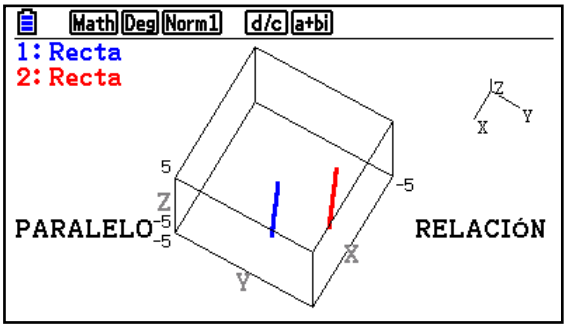
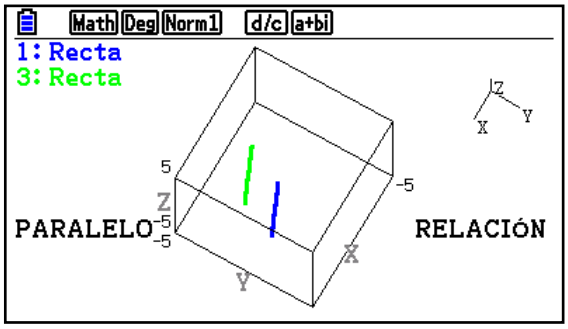


Imagen 5. Rectas intersección de los planos dos a dos.

Se puede estudiar ahora la posición relativa de las tres rectes y se comprueba que son paralelas dos a dos.





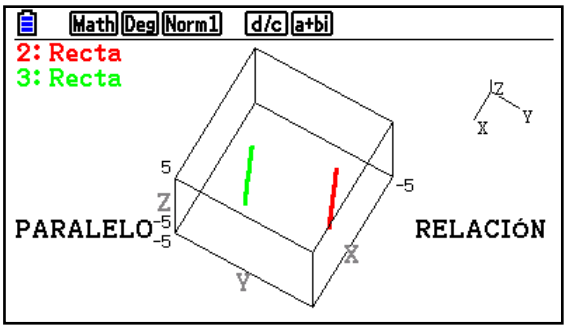


Imagen 6. Posición relativa de las rectas dos a dos.

2. Modelización matemática en el diseño de una situación de aprendizaje.

Los estomas de las plantas, dos células oclusivas que se encuentran normalmente en la epidermis del envés foliar son en parte las responsables del intercambio gaseoso de las plantas y a la vez, al tratarse de estructuras porosas, participan también en los procesos de la transpiración de las mismas.

En la revista *Bosque*, con la lectura del artículo "*Características de los estomas, densidad e Índice estomático en secuoya (Sequoia sempervirens) y su variación en diferentes plantaciones de Chile*", surgen preguntas del tipo... ¿Cómo se puede calcular la superficie de una hoja?, o ¿cuántos estomas tiene una hoja?

La resolución de esta actividad pretende descubrir entornos en los que dar respuestas a las ciencias en general con la ayuda de las herramientas que nos proporcionan las matemáticas y la tecnología.

La actividad consta de dos partes:

- El cálculo del área de una hoja a partir de su fotografía.
- La investigación en el laboratorio de biología del número de estomas que tiene la hoja en una superficie de 1 mm^2.

2.1. Cálculo del área de una hoja de eucalipto.

Para calcular el área de la hoja de eucalipto se ha hecho una fotografía a la hoja y con el programa **CASIO Picture Conversion Engine** se ha transformado el archivo .jpeg al formato que reconoce la calculadora gráfica, .g3p:

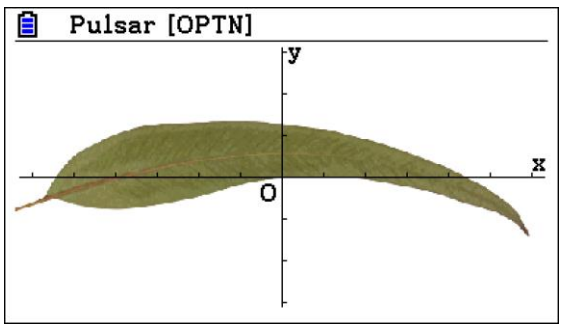
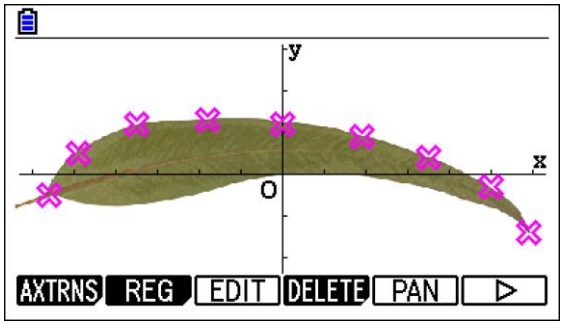


Imagen 7. Foto de la hoja de eucaliptus en la CASIO CG50.

En el menú **Trazar Imagen** se marcan unos puntos para modelizar el perfil superior de la hoja y escoger el modelo de regresión que ajuste lo mejor posible:



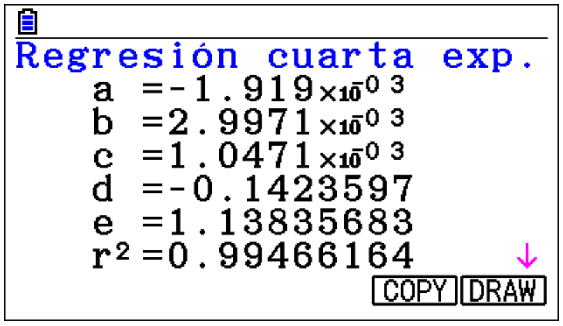
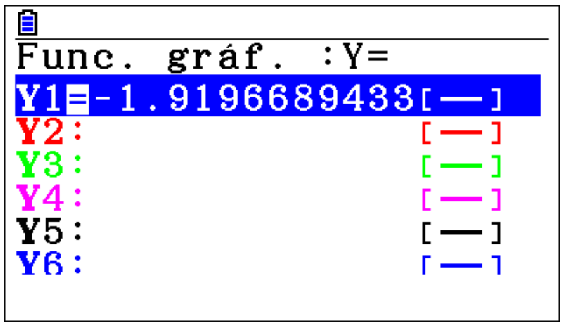
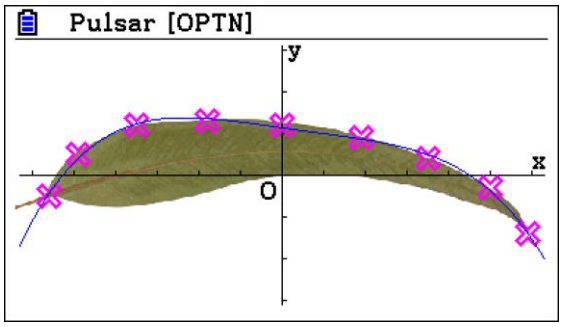


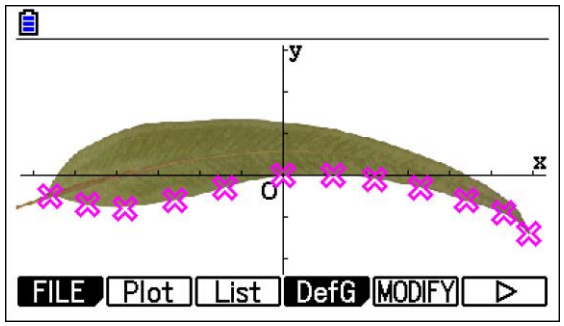
Imagen 8. Ajuste perfil

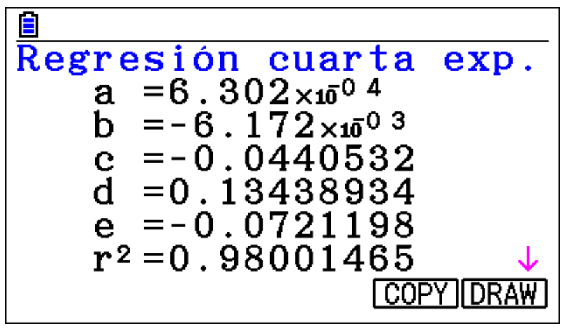


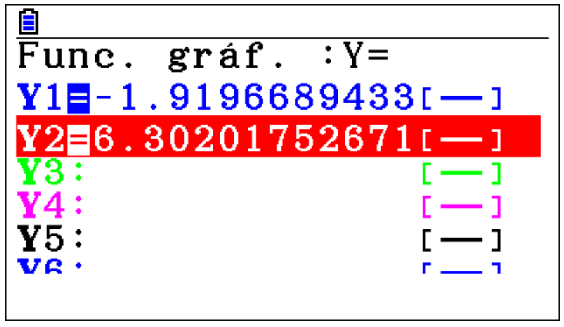


superior de la hoja.

Se repite el proceso con el perfil inferior de la hoja:







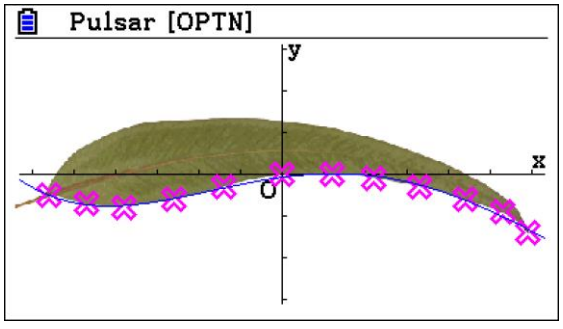


Imagen 9. Ajuste perfil inferior de la hoja.

Una vez encontradas las funciones que definen el contorno de la hoja se utiliza el menú **Gráfico** para hallar, utilizando el cálculo integral, el área comprendida entre las dos funciones.

Se pulsa **G-Solv** (F5) e **INTSECT** (F5) para calcular los puntos de intersección de las dos funciones. Estos puntos determinan los extremos de la hoja:

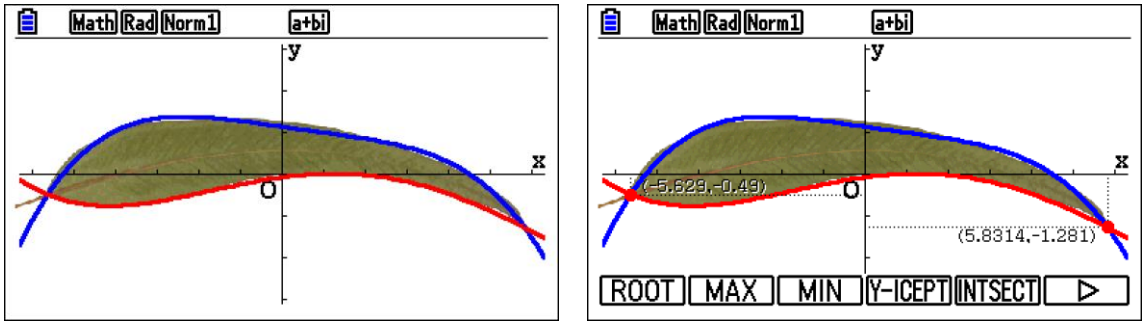


Imagen 10. Puntos de intersección de los modelos.

Los puntos anteriores son los límites de integración que hay que usar para calcular el área delimitada por las dos funciones:

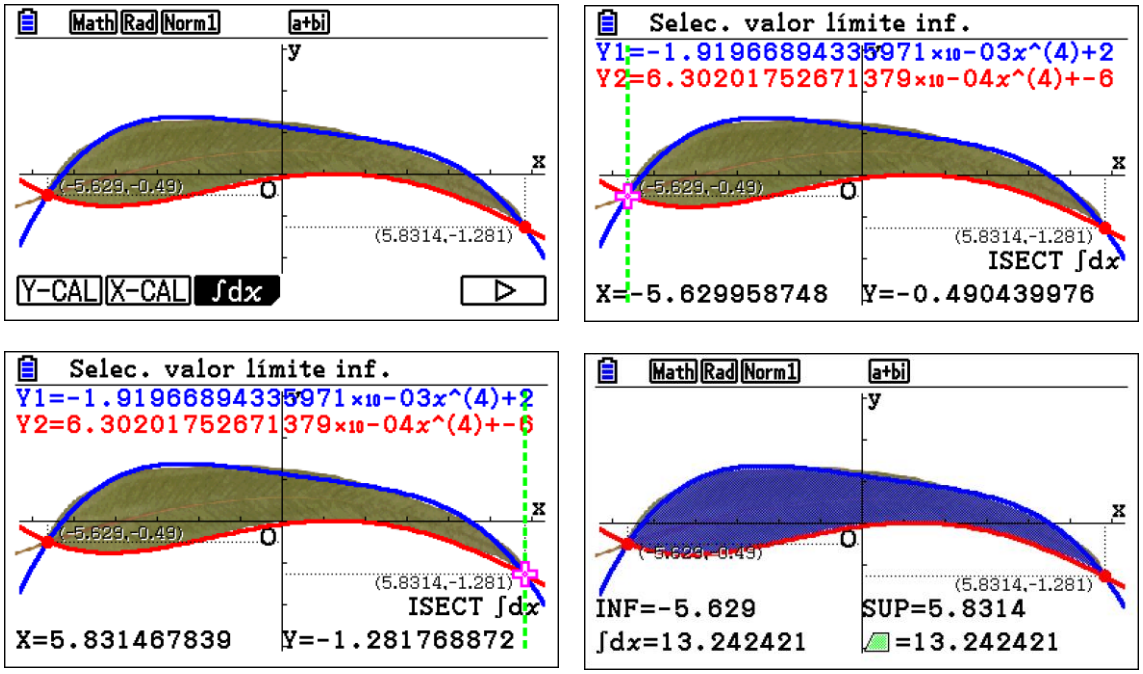


Imagen 11. Cálculo del área.

El factor de escala entre la fotografía y las medidas reales de la hoja hechas previamente en papel milimetrado, permiten conocer la superficie real con bastante precisión:

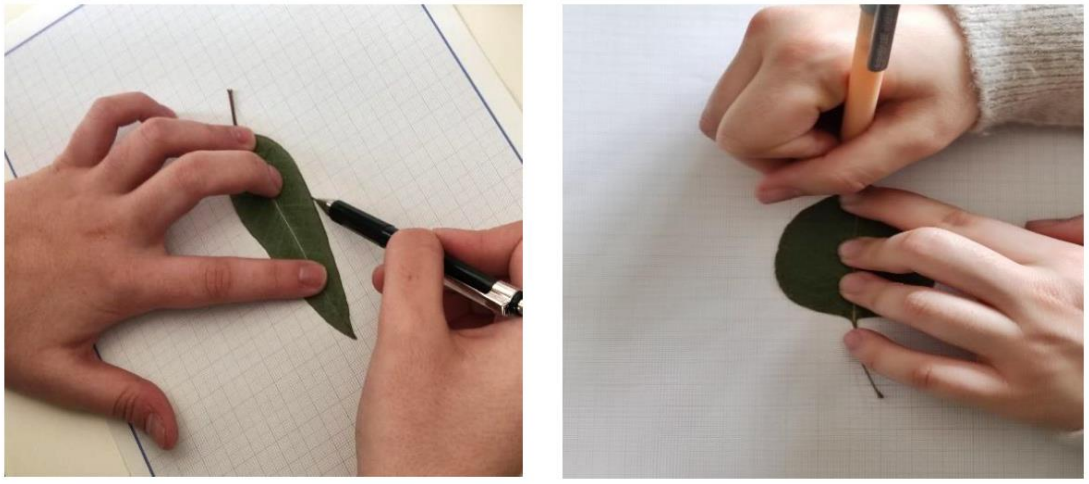


Imagen 12. Perfil de la hoja sobre papel milimetrado.

Se calcula la distancia entre los extremos A = (−5,63 , −0,49) y B = (5,83 , −1,28) de la hoja:

$$d\ (A,\ B) = 11{,}487$$

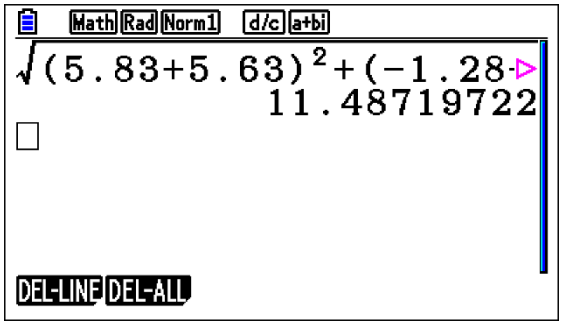


Imagen 13. Distancia entre los dos puntos.

Esta distancia en el papel milimetrado es de 17,1 cm, por lo que la escala fotografía-realidad es:

$$11{,}487 : 17{,}1$$

Finalmente, se multiplica el área obtenida por la razón al cuadrado para obtener el área real de la hoja del eucalipto:

$$\text{Área de la hoja} \approx 29{,}34\ \text{cm}^2$$

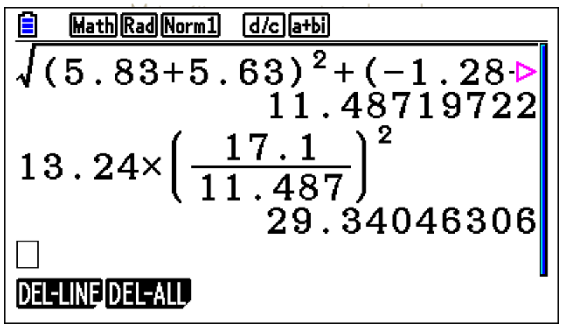


Imagen 14. Cálculo del área real.

Si se cuentan los mm^2 que ocupa la superficie de la hoja en el papel milimetrado, donde se han dibujado, se obtiene un área aproximada de 29,60 cm^2:

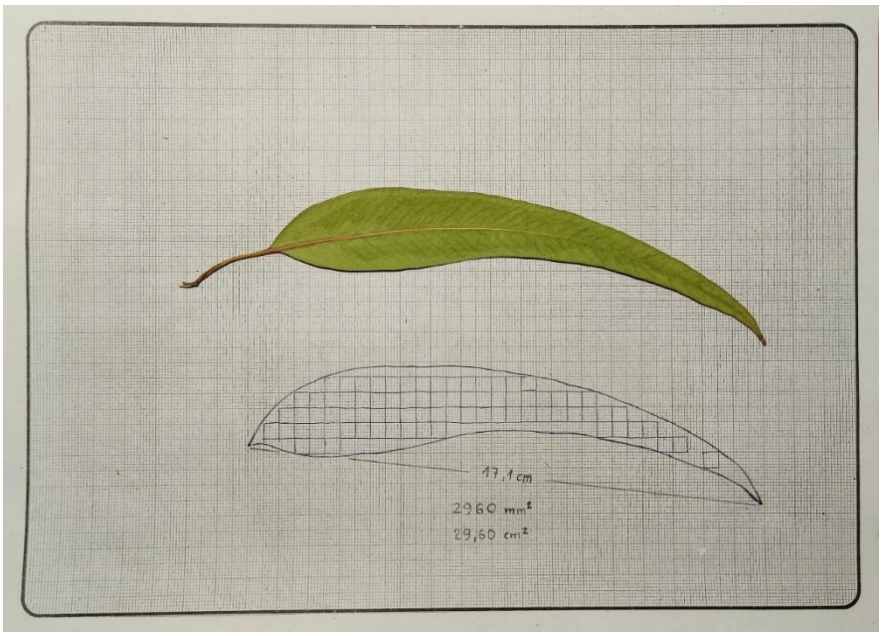


Imagen 15. Contar milímetros cuadrados.

2.2. Investigación del número de estomas que hay en una hoja.

Se ha trabajado sobre cómo preparar las muestras de la hoja de eucalipto. Para poder mirarlas al microscopio se han seguido los siguientes pasos:

- Se recortan unos cuadrados de una hoja fresca de eucalipto.
- Se pinta el envés de la hoja con esmalte de uñas transparente, se coloca en el portaobjetos y se deja secar.
- Se retira con unas pinzas la muestra para que quede pegada la epidermis con los estomas en el portaobjetos.
- Se mira al microscopio con el objetivo y el ocular de 10 aumentos cada uno para conseguir una visión de 100 aumentos.

- Se fotografían diversas muestras para contar posteriormente los estomas que hay en 1 mm^2.

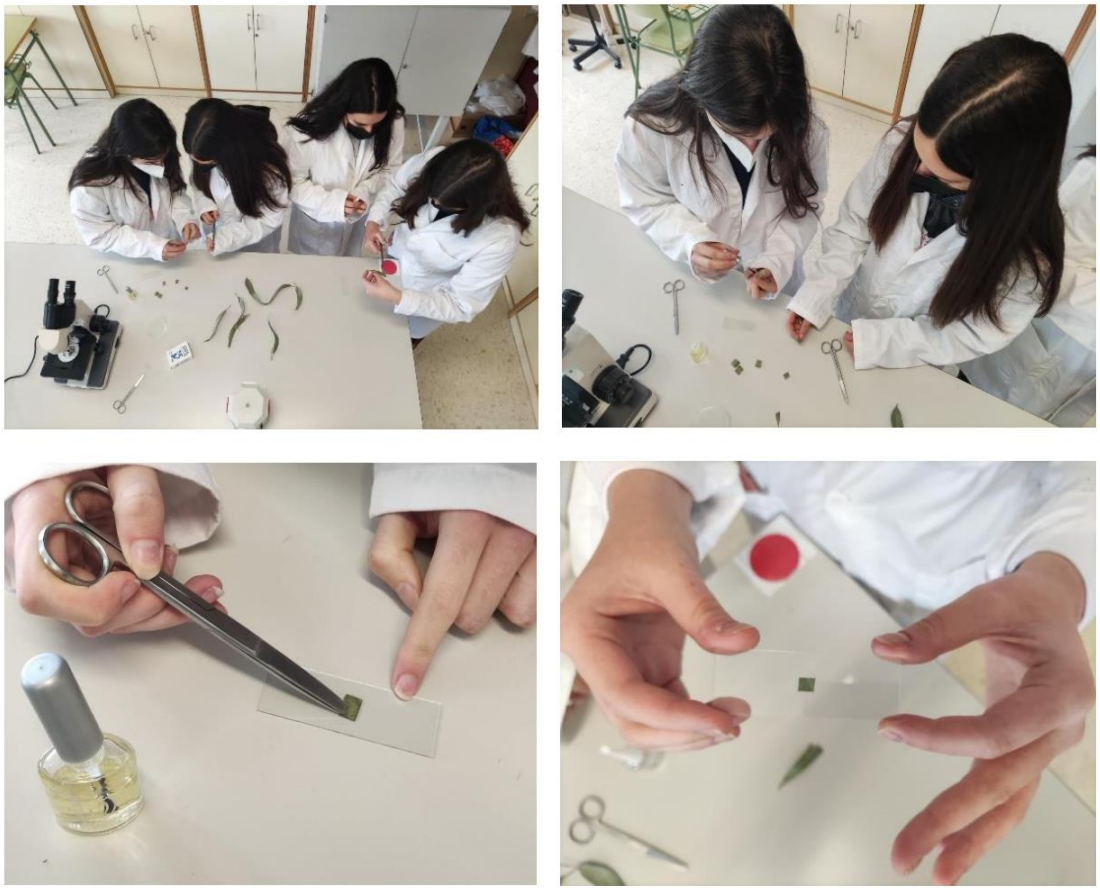


Imagen 16. Preparando las muestras sobre el portaobjetos.

El proceso de perimetrar 1 mm^2 ha sido complejo. Primero se consiguió un portaobjetos que tenía la cuadrícula marcada, pero resultó imposible utilizarlo ya que la muestra de la epidermis de la hoja no era lo suficientemente transparente para dejar ver la cuadrícula milimetrada.

Por este motivo, se eligió fotografiar el portaobjetos milimetrado sin ninguna muestra y luego superponer las dos fotografías, logrando así un perimetraje de 1 mm^2 en cada muestra.

Para terminar, se han editado las fotografías de seis muestras, para señalar y contar los estomas. La media aritmética resultante de este conteo es 164 estomas/mm^2.

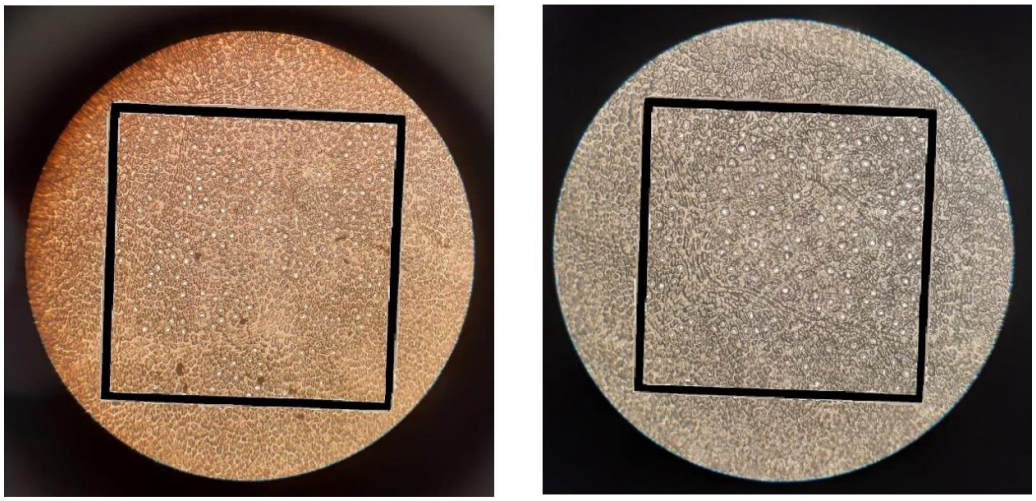


Imagen 17. Marcar los estomas y contar.

Si se multiplican los 164 estomas/mm^2 por la superficie aproximada de la hoja de eucalipto seleccionada (2 934 mm^2) se obtiene la respuesta a la pregunta planteada: 481 176 estomas en esta hoja de eucaliptus.

Imagen 18. Cálculo final del número de estomas.

TaR039 Juegos de mesa para el aprendizaje de las matemáticas

Jordi Deulofeu Piquet
jordi.deulofeu@uab.cat
Universitat Autònoma de Barcelona
Pol San Barón
pol.san@tekmaneducation.com
Tekman Education
Luis Cros Lombarte
lluis.cros@sarria.epiaedu.cat
Escola Pia de Sarrià de Barcelona
Teresa Longueira Guerrero
tere.longueira@tekmaneducation.com
Tekman Education

Núcleo temático: Recursos para el aula, Comunicación y divulgación.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

RESUMEN

El juego es una de las herramientas más importante en el desarrollo integral de las personas. Jugamos desde que nacemos, por curiosidad, para entretenernos, para divertirnos, por multitud de razones pero todas positivas, nadie juega por obligación o porque es lo que toca.

Desde el grupo SET nos planteamos la posibilidad de trasladar al aprendizaje de las matemáticas el juego, y más en concreto el juego de mesa. Desde hace cinco años analizamos juegos de mesa contemporáneos y vemos que viabilidad tienen para ser usado como herramienta pedagógica, después de esta investigación hemos hecho una selección de juegos que cubren todos los contenidos que se trabajan desde los primeros cursos de infantil hasta bachillerato. Esta selección es una muestra de todo lo que se puede hacer con juegos en el aprendizaje de las matemáticas, a través de este taller lo queremos compartir con todas las personas interesadas en el tema..

Palabras clave: Ludificación, Aprendizaje Significativo, ABJ, Manipulativo, Competencial.

¿Tú juegas? seguramente tu respuesta haya sido sí, de hecho esta pregunta la hemos realizado en clase pidiendo a los alumnos que levanten la mano si juegan y en todas las aulas, sea cual sea el nivel, todos los alumnos han levantado la mano.

A continuación, les preguntamos, ¿por qué o para qué juegas? y las respuestas eran del siguiente estilo:

“Por diversión”, “Para pasar el rato”, “Para pasarlo bien”, “Para ganar”, “Porque es un reto”...

Curiosamente, si preguntamos, ¿para qué haces mates? algunas personas responden lo mismo pero otras nos dicen: “Para aprobar”, “Porque es lo que toca”, “Para prepararme para la universidad”,...

Reflexionando sobre estas respuestas obtenidas nos planteamos si habría la posibilidad de extender el sentimiento de amor y diversión por las mates que tiene una parte de nuestro alumnado a todos.

¿Qué herramienta podría ayudarnos a conseguirlo?

Desde hace cinco años, un grupo de personas relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas y amantes de los juegos de mesa, hemos estado probando juegos de mesa contemporáneos analizando si son apropiados para trabajar contenido matemático de diferentes niveles educativos. Tras probar muchos juegos hemos hecho una selección de juegos que permite trabajar cualquier bloque de contenido desde el primer curso de infantil hasta segundo de bachillerato.

La selección realizada es la siguiente:

para infantil:

en el bloque de Numeración y cálculo: *Unicornio destellos*

en el bloque de Medida: *Eduludo palitos*

en el bloque de Geometría: *Eduludo formas*

en el bloque de Percepción visual: *Dobble kids*

en el bloque de Razonamiento lógico: *Bugsy*.

para el ciclo inicial de primaria:

en el bloque de Numeración y cálculo: *Hungry shark*

en el bloque de Relaciones: *Gizeh*

en el bloque de Espacio y forma: *Katamino*

en el bloque de Medida: *Rally de las zanahorias*

en el bloque de Estadística y azar: *El frutalito*

en el bloque de Resolución de problemas: *Chocolate fix*

en el bloque de Razonamiento lógico: *Monza*

para el ciclo medio de primaria:

en el bloque de Numeración y cálculo: *Código secreto 13+4*

en el bloque de Relaciones: *Políssimo*

en el bloque de Espacio y forma: *Kingdomino*

en el bloque de Medida: *El oro de Orinoco*

en el bloque de Estadística y azar: *El rey de los dados*

en el bloque de Resolución de problemas: *Hanabi*

en el bloque de Razonamiento lógico: *Ticket to Mars*

para el ciclo superior de primaria:

en el bloque de Numeración y cálculo: *Mía*

en el bloque de Relaciones: *Cubissimo*

en el bloque de Espacio y forma: *Karuba*

en el bloque de Estadística y azar: *Can't Stop*

en el bloque de Resolución de problemas: *Eureka*

en el bloque de Razonamiento lógico: *Gravity superstar*

para el ciclo inicial de secundaria:

en el bloque de Numeración y cálculo: *Zero win win*

en el bloque de Relaciones: *Veracruz*

en el bloque de Espacio y forma: *Blokus*

en el bloque de Estadística y azar: *El rey de los dados*

en el bloque de Resolución de problemas: *Miyabi*

en el bloque de Razonamiento lógico: *Misión cumplida*

para el ciclo final de secundaria:

en el bloque de Numeración y cálculo: *Fantasma*

en el bloque de Relaciones: *Samurai Sword*

en el bloque de Espacio y forma: *Ubongo*

en el bloque de Estadística y azar: *Banjooli Xet*

en el bloque de Resolución de problemas: *Shikoku*

en el bloque de Razonamiento lógico: *Red7*

para bachillerato:

en el bloque de Relaciones: *SET*

en el bloque de Espacio y forma: *Swish*

en el bloque de Estadística y azar: *Doggy bags*

en el bloque de Resolución de problemas: *MicroRobots*

en el bloque de Razonamiento lógico: *Ricochet Robots*

Lo que proponemos en este taller es mostrar estos juegos a los docentes que estén interesados en usar el juego de mesa como herramienta pedagógica. Estableceremos unos espacios con los juegos agrupados por etapa para que todos los asistentes al taller puedan ver los juegos, probarlos y debatir con los talleristas la manera de llevar el juego al aula. También dispondremos de unos espacios con unos juegos gigantes para poder jugar y de algunos de los juegos las fichas de actividades para llevar el juego al aula.

Nuestros objetivos al hacer esta selección de juegos por bloque de contenido y por etapa era:

+ Dotar de recursos a aquellos docentes que ya hacen uso del juego de mesa en el aula.

+ Dar las herramientas necesarias para poder comenzar una experiencia lúdica en el aula de matemáticas a aquellos docentes que no hayan tenido experiencia previa.

Aunque cada juego está asignado a una etapa y un bloque de contenido casi todos permiten trabajar más de un bloque de contenido y se pueden usar en diferentes niveles.

¿Cómo se seleccionan los juegos para el aula?

A la hora de escoger juegos para llevar al aula hay que evitar juegos que tengan unas **instrucciones** poco **claras**, que tengan muchos elementos y de pequeño tamaño y que el tiempo de juego sea tan amplio que no permita poder hacer varias

partidas y reflexionar sobre la estrategia del juego y ver las matemáticas que se han trabajado. Para eso aconsejamos los **juegos** que denominamos **5-10-15**:

5 minutos para comprender las instrucciones, una vez se esté jugando al juego hay que revisar que se juega de manera correcta y si se ha decidido hacer algún cambio, que este no modifique el objetivo pedagógico del juego. Una manera de dinamizar la comprensión de las instrucciones es hacerles llegar las instrucciones a través de videotutoriales de modo que en el aula simplemente haya que resolver dudas concretas y ponerse a jugar. También es una buena solución usar juegos que ya conocen los alumnos por haberlos jugado en cursos anteriores o en su casa.

10 minutos de juego, para poder jugar varias partidas y trabajar las matemáticas del juego.

15 euros de precio.

También sería adecuado un juego que costase 10 euros de precio y 15 minutos de juego.

Otra cosa que tenemos que tener en cuenta a la hora de seleccionar un juego para el aula es su **rejugabilidad.** Entendemos por rejugabilidad las ganas de volver a jugar otra partida al acabarla, el '¿Jugamos otra?'. Si un juego al acabar no da ganas para volverlo a jugar, no cumple con la idea básica de emocionar y, por lo tanto, puede ser muy potente matemáticamente, pero no conseguirá asentar los conocimientos trabajados.

A la hora de llevar el juego al aula también hay que diseñar la estructura que le daremos en el aula:

Temporización, asumiendo que la gran mayoría de las sesiones que tenemos son de 50/55 minutos destinaríamos:

Alrededor de 15 minutos a la preparación inicial: organización espacial del aula, agrupación de alumnos, reparto de juegos, preparación del juego y comprensión de las reglas del juego por todos los jugadores.

Alrededor de 25 minutos a jugar al juego

Alrededor de 15 minutos para hacer presente las matemáticas que se han trabajado durante el juego y reflexionar sobre el trabajo relacionado, valoración de la sesión, metacognición...

En los juegos que tienen implícita las matemáticas o en los juegos que se hacen adaptaciones y se trabajan acompañados por alguna ficha de reflexión, se puede alargar el periodo de juego y reducir el de hacer presente las matemáticas. En el caso de juegos de que se tenga previsto seguir con el mismo juego o hacer las preguntas de profundización en las matemáticas en sesiones posteriores, es imprescindible que se haga presente que la sesión ha sido de aprendizaje, no de juego, se pierde el sentido pedagógico de la sesión cuando el alumnado sale de la sesión con la sensación de 'hoy en clase hemos jugado'.

Agrupamiento, dependerá del número de alumnos en el aula y del número de ejemplares del juego que se dispongan. Para decidir el número de jugadores por juego nos podemos orientar por la recomendación del juego pero debemos analizar lo que hace cada jugador desde que acaba su turno hasta que le vuelve a tocar jugar, algunos juegos fomentan la concentración y los jugadores han de estar atentos a lo que juega cada jugador ya que influye en su propio turno o existen juegos que el turno no es ordenado y se puede participar en cualquier momento. Estos juegos son los ideales para el aula, por contra los juegos en los que los jugadores desde que acaban su turno hasta que los vuelve a tocar no han de estar atentos o pasa mucho tiempo porque así lo requiere la dinámica del juego no son buenos juegos para el aula ya que a veces, cuando un alumno no tiene nada que hacer, hace lo que no debe. Algunos juegos pueden estar diseñados para un número grande de jugadores pero nosotros lo podemos limitar en función de nuestra

necesidad. Como soluciones para situaciones en las que disponemos de pocos ejemplares del mismo juego os damos las siguientes:

Crear dinámicas de juegos con varios juegos que trabajen el mismo concepto e ir rotándolos entre los grupos de juego. Para hacer esto hay que tener presente que el tiempo de juego ha de ser similar para que se acabe la partida y la reflexión sobre el juego al mismo tiempo y hacer la rotación. Nunca es una buena opción acabar el juego sin llegar al objetivo del juego que es establecer un ganador, es muy frustrante para los jugadores haber creado una estrategia ganadora y no poder comprobar si es buena o no. En este caso es buena opción seleccionar juegos en los que se pueda acabar el juego tras un número determinado de rondas y que se pueda adaptar el número de rondas.

Hacer espacios de trabajo diferenciado, donde tengamos un rincón con los alumnos trabajando con el juego, otro rincón donde otros alumnos estén trabajando con material manipulativo, otro rincón con otro grupo trabajando con el formalismo del concepto o haciendo una sesión de dudas o de explicación entre expertos… Se pueden hacer tantos espacios como sean necesarios pero todos tienen que tener que tener claro su trabajo en la sesión que dure un tiempo similar. Tras diversas sesiones, todos los alumnos han de haber podido pasar por todos los espacios.

Hacer que cada jugador sea un pequeño grupo de alumnos, 2 o 3, 4 empieza a ser complicado y más de 4 no es funcional. De esta manera se puede agrupar a muchos alumnos entorno a un mismo juego, han de estar atentos para tomar decisiones y se fomenta el trabajo colaborativo, la compartición de información, el debate...Este planteamiento es ideal para los juegos solitarios, si está bien organizado es una buena propuesta para trabajar en grupos cooperativos.

Evaluación/Valoración. Desde el punto de vista del docente lo primero que se tiene que analizar es si se ha conseguido el objetivo pedagógico que se perseguía, se puede hacer a través de algún tipo de prueba evaluativa a posteriori o a través de una rúbrica de observación. También se ha de valorar si el diseño de la sesión ha sido adecuado y listar aquellos aspectos a mejorar se tienen que tener en cuenta

para sesiones posteriores, con el mismo juego o con otros. También se puede obtener una calificación con las fichas de trabajo que se han usado durante la sesión. Desde el punto de vista del alumnado se ha de pedir una valoración de la actividad para determinar si ha cumplido las expectativas creadas, si volverían a realizar una sesión de trabajo similar y tienen que hacer una valoración crítica de lo que han aprendido durante la sesión. Tanto si se quiere hacer las valoraciones con fines calificativos como analíticos, recomendamos el uso de rúbricas para disponer de una valoración objetiva.

Usar los juegos de mesa como herramienta pedagógica tiene múltiples ventajas pero se han de saber usar para que cumplan la función que se pretende desde el punto de vista del docente. A través de este taller intentaremos dar a los asistentes las ideas necesarias para que puedan hacerlo.

TaR042 GeoGebra...Problem? Estrategia específica

Juan Agustín Noda Gómez
joannoda@gmail.com
IES Güímar

Ángel A. García Marrero
aagm38@me.com
Escuelas Pías Tenerife

Núcleo temático: Recursos didácticos y formación profesorado.

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, 5º y 6º de Primaria.

RESUMEN

Dentro de la estrategia general de resolución de problemas del Proyecto Matemáticas Newton Canarias (MNC) está contemplada como estrategia específica el propio programa GeoGebra por su capacidad de modelización dinámica y de organización de la información.

En este taller, se dará respuesta a diversos problemas siguiendo las cuatro fases de la estrategia general que propone el proyecto MNC (comprender, pensar, ejecutar y responder), representando la información clasificada de la fase de comprender en la aplicación GeoGegra para su modelización y manipulación. El objetivo principal es ofrecer este software como estrategia para resolver problemas y posteriormente investigar qué relaciones matemáticas se han establecidos para que el programa haya mostrado cierta respuesta. Este enfoque conecta con la perspectiva de resolver problemas para aprender matemáticas.

Palabras clave: Resolución de Problemas, GeoGebra. Proyecto MNC

Según López A. y otros (2016,2018), en el proyecto Matemáticas Newton Canarias (proyecto MNC en adelante), se concibe la resolución de problemas según las cuatro fases de Pólya y Schoenfeld: comprender, pensar, ejecutar y resolver. Tal y como proponen los autores Pólya y Schoenfeld, en la fase de comprender, el alumnado debe clasificar la información en los datos, el objetivo y relación. En esta primera fase también el alumnado puede realizar una representación gráfica en

forma de diagrama que contenga toda la información de la que dispone. En la fase de pensar se elige una estrategia entre tres básicas (modelización, ensayo y error y organización de la información), cuatro específicas (buscar patrones, eliminar, ir hacia atrás y generalizar) o dos auxiliares (simplificar y analogía), y GeoGebra para resolver el problema. A continuación, en la fase de ejecutar el alumnado realiza las acciones que la propia estrategia le indica, lo cual implica diseñar o recuperar un diagrama y llegar a una solución. Por último, en la fase de responder se debe hacer una comprobación de la respuesta y analizar el tipo de solución a la cual se ha llegado para luego elaborar una respuesta (solución comprobada y analizada, redactada en los términos del problema). Por tanto, se ofrece una estrategia general que vuela por encima de cualquier concepto matemático. Además, permite seguir las fases de Bruner, esto es, a través de la estrategia específica de modelización se puede resolver el problema manipulativamente, a través de la técnica Partes-Todo con su diagrama Partes-Todo, se puede resolver gráficamente, y por último la técnica aritmética o algebraica permite resolverlo simbólicamente.

Según Flores (2016) y Mora (2007), el programa GeoGebra permite realizar investigaciones y al mismo tiempo plantear conjeturas observando qué ocurre cuando se dinamiza una construcción, esto es, al mover, cambiar o desplazar algunos de sus elementos qué es lo que se mantiene constante o invariante. Este dinamismo no sustituye a la demostración, pero sí encamina a encontrarla o dar la respuesta a un problema. Por tanto, el énfasis de este taller es ofrecer el programa GeoGebra como una estrategia específica de resolución de problemas.

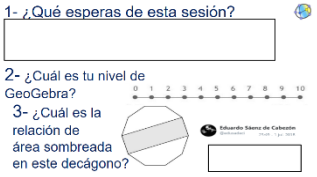
En este taller se ofrece una selección de problemas para ser resueltos a través de la manipulación de construcciones hechas con GeoGebra. Como añadido, se darán pautas para su evaluación a través de la realización de vídeos explicativos que permitan contribuir al desarrollo de la competencia lingüística y la digital. Comentar que la estructura del taller es la que se ha seguido durante la formación a docentes en las ediciones del proyecto MNC. Concretamente estará estructurado de la siguiente forma:

1. Introducción

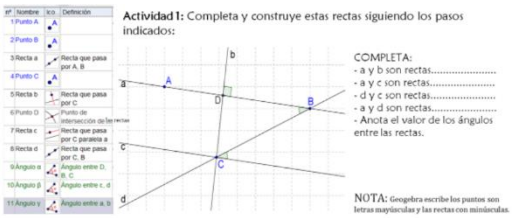
   Se arranca con una pregunta motivadora ¿Puede ser el GeoGebra una estrategia específica de resolución de problemas? Se visualizan dos vídeos

matemáticos utilizando GeoGebra donde se aprovecha para explicar las distintas partes de GeoGebra. Y se plantea una nueva pregunta ¿En los anteriores vídeos GeoGebra se ha resuelto un problema?

2. Antes de empezar
   a. Se realiza una dinámica donde individualmente los asistentes responden unas preguntas (una de ellas es su nivel de GeoGebra de 1 a 10) y estiman un área sombreada, donde posteriormente hablan un minuto entre ellos. Por último se agrupan en parejas de más nivel a menos nivel para formar parejas heterogéneas y se puedan ayudar.



   b. Paseo rápido por la web de GeoGebra y abrir o crear cuenta en la nube para guardar todas las actividades y problemas del taller.

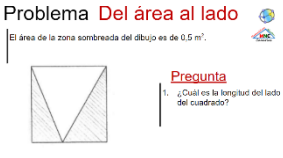


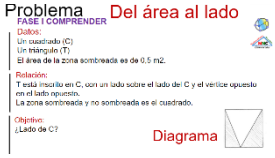
3. Breve iniciación a GeoGebra.
   a. Se resuelve varias actividades de conceptos básicos para poder modelizar los problemas propuestos en el punto 4.
   b. Se resuelve con GeoGebra la estimación realizada de la pregunta 3 de la dinámica del punto 2 de la presentación. Se compara el resultado que da GeoGebra con el vaciado en un diagrama de barras de sus estimaciones hechas en los papeles recogidos.

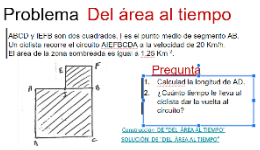
4. ¿Preparado para tu primer reto?
   Se resuelven varios retos geométricos. Imagen a modo de ejemplo

5. GeoGebra como estrategia específica.
   Se explica brevemente la estrategia general de resolución de problemas del proyecto MNC para

después aplicarla para responder a varios problemas utilizando como estrategia específica el GeoGebra (las imágenes son algunos ejemplos).







6. Otros instrumentos de evaluación.
    a. Se enseñarán varios ejemplos de cómo evaluar la resolución de problemas, en particular, con GeoGebra. Se trata de cómo el alumnado puede explicar a través de la grabación la pantalla del ordenador (Screencast-o-matic) su resolución del problema con GeoGebra. Una forma de hacer hincapié en la C de comunicación de las TIC. Realizar una reflexión conjunta de que si las herramientas (T) nos lleva a otros escenarios u horizontes, quizás deberíamos cambiar las preguntas. Se ofrece una rúbrica para evaluar o coevaluar la resolución problemas con vídeos matemáticos con GeoGebra.

Se termina con la lectura de las respuestas a la primera pregunta de la dinámica del primer punto mientras los participantes responden que resuman el taller en dos palabras con la herramienta mentimeter.

Objetivos:

- Conocer las posibilidades didácticas de GeoGebra en el currículo de PRIMARIA y la ESO.
- Ofrecer la herramienta GeoGebra como estrategia específica de resolución de problemas dentro de la estrategia general del proyecto MNC.
- Utilizar el programa GeoGebra como estrategia específica de modelización dinámica, como estrategia específica de organización de la información; y como estrategia específica Ensayo y Error.
- Mostrar las posibilidades didácticas y su combinación con el vídeo resolviendo problemas con el GeoGebra.

Contenidos:

- Experimentación con GeoGebra y sus posibilidades didácticas en PRIMARIA y SECUNDARIA.
- Principales claves de uso de este software con el alumnado de SECUNDARIA.

Referencias

Flores, P. (2016). Materiales y recursos en el aula. En L. Rico y A. Moreno, Elementos de didáctica de la matemática para el profesorado de secundaria. Madrid: Pirámide, 275-292.

López, A.; Aciego, R.; García-Déniz, M.; García-Quintero, D.; y Ramos, E. (2017). Evaluación del Proyecto Newton. "Matemáticas para la Vida" de 3º a 6º de Educación Primaria. NÚMEROS, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 95, 43-59 http://www.sinewton.org/numeros/numeros/95/Articulos_03.pdf

Mora, J. (2007). Geometría Dinámica en Secundaria. En Actas de la XIII JAEM. Granada: SAEM Thales. Descargado el 25 de julio de 2017 de http://jmora7.com/miWeb8/Archiv/2007%20Granada%20JAMora.pdf

S. Machado, R. Aciego, M. García-Déniz, D. García-Quintero, (2018). Obligatoria. Números: Revista de Didácticas de las Matemáticas, Volumen 99, 85-104.

TaR045 Realidad Aumentada e impresión 3D. Construcciones de Félix Candela.

José Aurelio Pina Romero
ja.pinaromero@edu.gva.es
IGV – SEMCV Al-Khwarizmi- IES Sant Blai. Alicante
Bernat Ancochea Millet
bancoche@gmail.com
Profesor jubilado ACG – FEEMCAT

Núceo temático: Recursos para el aula.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

Se ha utilizado GeoGebra para reproducir obras del arquitecto español Félix Candela (Madrid, EE. UU., 1910-1997), que destacan por sus estructuras realizadas en hormigón armando y de manera más específica con el uso del paraboloide hiperbólico.

En el taller construiremos superficies regladas y de revolución, y veremos la forma de descargar los archivos de GeoGebra en nuestro móvil con Realidad Aumentada para interaccionar con la misma, con la posibilidad de acceder a su interior, modificar algunos de sus parámetros, realizar fotos y grabar la obra mediante la pantalla de tu dispositivo. Intentaremos reproducir algunas de las construcciones de Félix Candela mediante el uso del paraboloide hiperbólico.

El taller finalizará con la exportación de la construcción a un formato adecuado (stl) para poder laminar mediante CURA e imprimir la construcción con impresoras FDM.

Palabras clave: Paraboloide hiperbólico, GeoGebra, Realidad Aumentada, Impresión 3D.

1. Introducción

1.1. Biografía de Félix Candela

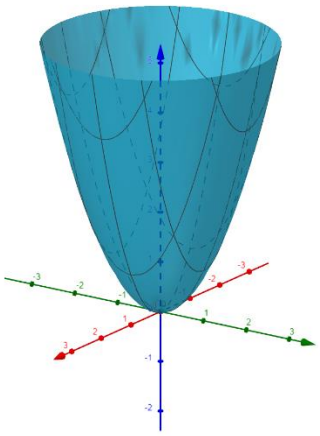
Nace en Madrid el 27 de enero de 1910 y fallece en Carolina del Norte el 7 de diciembre de 1997. De nacionalidad española y nacionalizado mexicano en 1941 y estadounidense en 1978. Estudió arquitectura en la Escuela Superior de Madrid, donde se licenció en 1935. Continuo sus estudios en la Real Academia de Bellas artes de San Fernando donde conoció a Eduardo Torroja y sus técnicas de uso de cubiertas de hormigón.

Una de las figuras fundamentales de la arquitectura del siglo XX en cuanto al desarrollo de nuevas formas estructurales de hormigón armado se refiere. Su mayor aportación a la arquitectura fue la creación de estructuras en forma de cascarón, generadas a partir de paraboloides hiperbólicos, una forma geométrica de una eficacia extraordinaria que se han convertido en el sello distintivo de su arquitectura.

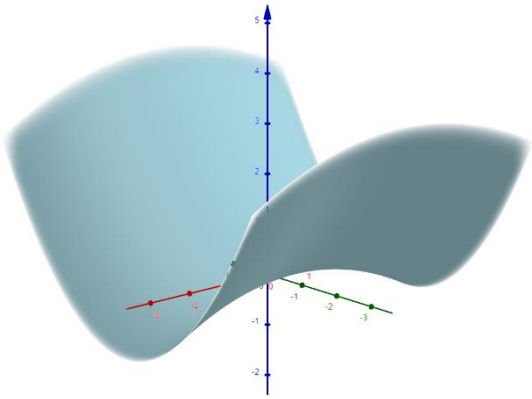
En geometría analítica, una cuádrica es un paraboloide, superficie tridimensional que se describe mediante ecuaciones cuya forma canónica es del tipo:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 - z = 0$$

Y puedes ser elípticos o hiperbólico según los valores que tomen los términos cuadráticos. Si los términos cuadráticos toma signo contrario, entonces tenemos un paraboloide hiperbólico. Y si toman el mismo signo, entonces tenemos un paraboloide elíptico.



Paraboloide elíptico



Paraboloide hiperbólico

Fuente: https://www.geogebra.org/m/vyepjuuu

Su obra replantea el papel del arquitecto en relación con los problemas estructurales a partir de tres premisas: economía, sencillez de cálculo y flexibilidad. No obstante, la calidad de su obra radica en la sensibilidad para conformar espacios

En 1936 obtiene una beca para estudiar en Alemania, pero al desencadenarse la guerra civil se alista en las fuerzas republicanas y es nombrado capitán de ingenieros. Tras pasa por el por el campo de concentración de Perpiñán, se exilia en México en junio de 1939 donde traba contacto con los hermanos arquitectos Fernando y Raúl Fernández Rangel. Juntos fundaron en 1950 la empresa Cubiertas Ala, dedicada a instalar estructuras industriales.

La empresa constructora disfrutó un notable auge durante veinte años, que culminó con la edificación del Palacio de los Deportes con motivo de la olimpiada de 1968 en México.
Candela, que desde sus inicios se había preocupado por enviar sus artículos al American Concrete Institute (ACI) y dar a conocer su obra estructurística, empezó a obtener fama internacional y a divulgar sus conocimientos en congresos a los que

asistía y en conferencias que impartía, siempre con una actitud rebelde y un vigoroso espíritu crítico. Esto le ayudó a abrirse camino dentro del medio de la construcción y comenzó a recibir encargos frecuentes del extranjero, hasta el punto de que empezó a considerar la posibilidad de emigrar nuevamente.

Desde 1961, cuando se le confirió el premio Augusto Perret, se demandaba su presencia en muchos países. En 1971, después de culminar el Proyecto del Palacio de los Deportes, Candela se decidió a dejar el país y trasladarse a Estados Unidos.

Candela experimentó una profunda transformación profesional y creativa, que lo alentó a abandonar su trabajo de ingeniero y concentrarse cada vez más en la arquitectura. Se instaló en Chicago y trabajó como profesor de tiempo completo en la Universidad de Illinois, tarea que desempeñó hasta 1978. No En esos años recibió una invitación para realizar en 1973, el proyecto del estadio de fútbol madrileño Santiago Bernabéu. Pero como las autoridades se empeñaron en acompañar el coso de un rascacielos, la obra nunca se llevó a cabo.

Realizo una gran cantidad de proyectos, muy ambiciosos casi todos, sólo culminaron algunos. Uno de los últimos en que participó antes de morir fue la Ciudad de las Artes y de las Ciencias de Valencia, que incluyó un gran parque oceanográfico en cuya construcción colaboró también el famoso arquitecto Santiago Calatrava. Durante su estancia en la capital de provincia, su antigua dolencia del corazón le obligó a retornar a Raleigh, Carolina del Norte, su lugar de residencia desde el año 1990, para recibir atención en el Hospital de Duke, donde falleció en diciembre de 1997

1.2. Principales obras

Pabellón de los Rayos Cósmicos, Ciudad de México, México. (1950-1951)

Ilustración 27Pabellón de los Rayos Cósmicos, Ciu-dad de México, México. (1950-1951)

Tienda de Flores y Plantas, Lomas Virreyes, México D.F. (1951)

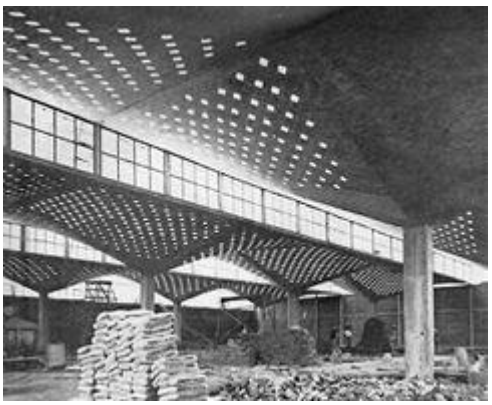
Junto con Eduardo Robles Piquer y Cayetano de la Jara y Ramón.

Iglesia de la Milagrosa, Navarte, México. (1953-1957)

Capilla de Nuestra Señora de la Soledad, Coyoacán, México. (1955)

Quiosco de Música, Santa Fe, México. (1955-1956)

Fábrica High Life, Coyoacán, México (1955-1958)



Capilla de San Antonio de las Huertas,

Restaurante Los Manantiales,

Tacuba, México. (1956)

Xochimilco, México. (1956-1957)

Cabaret La Jacaranda, Acapulco, México. (1956-1957)

Capilla abierta de Cuernavaca, Palmira, México. (1957-1958)

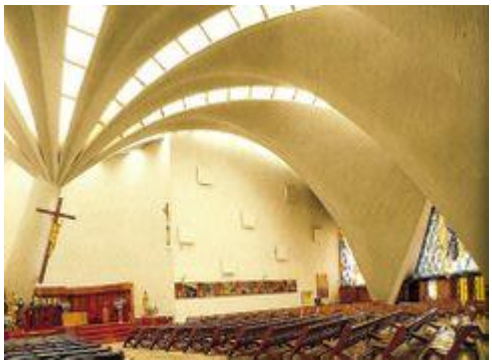
Plaza de Abanicos, Lomas de Cuernavaca, México (1958)

Iglesia de San José Obrero, Monterrey, México. (1958-1959)

Capilla de San Vicente Paul, Coyoacán, México. (1959)

Capilla de Santa Mónica, San Lorenzo de Xochimancas, México. (1959-1960)

Planta embotelladora de Bacardí, Cuautitlán, México. (1959-1960)



Iglesia Nuestra Señora de Guadalupe, Madrid, España. (1962-1963)

Iglesia de San Pedro Mártir, Tlalpan, México (1965)

Palacio de Deportes, Ciudad de México, México. (1965-1968)

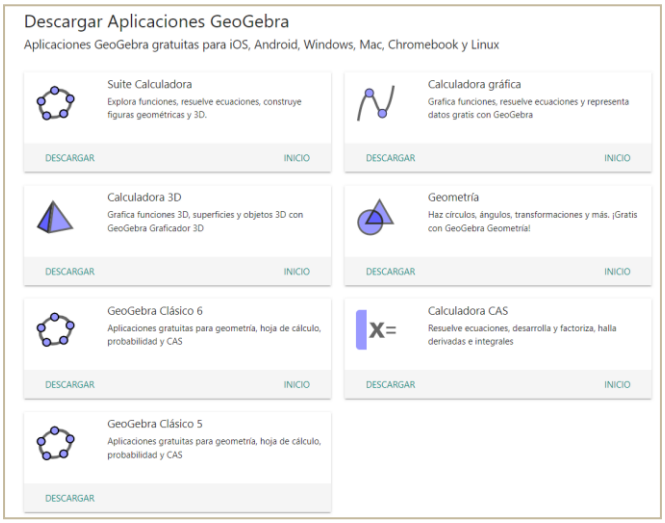
Parroquia del Señor del Campo Florido, Ciudad de México, México. (1966)

L'Oceanogràfic, Ciudad de las Artes y las Ciencias, Valencia,(1994-2002)

1.3. Tecnología de la información

En el siglo XXI el profesorado puede plantear al alumnado proyectos enmarcados en el currículum que ayuden a mejorar su competencia en matemáticas y en las tecnologías de la información. Realizar conexiones con otras áreas de conocimiento (arte, arquitectura, tecnología, etc.) que les permita inferir procedimientos propios de las matemáticas en otros escenarios no matemáticos.

Cabe recordar que en la última década el uso de impresoras 3D en el ámbito educativo se ha visto incrementado por su coste y accesibilidad de la mano del profesorado (Beltrán-Pellicer P; 2017, Aguilar G., 2020, Mora et al 2021) innovador y creativo. Creemos que el uso de esta tecnología se puede utilizar para generar oportunidades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel escolar, abriendo la mente del alumnado (Reichenberger et al, 2019).



El software libre GeoGebra (https://www.geogebra.org/), permite trabajar con Geometría en el espacio a partir de la versión 5 de manera sencilla, y la versión 6 incorpora la posibilidad de exportar los objetos a formato STL que nos permitirá imprimirlas tras laminar con un programa adecuado (Cura, PrusaSlicer, Repetier-Host etc.). Y se puede utilizar en todas las etapas educativas del sistema educativo español de acuerdo con la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre. Además, cabe recordar

que el RD 1105/2005, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato promueve la utilización de aplicaciones informáticas de geometría dinámica que faciliten la compresión de conceptos y propiedades geométricas.

https://www.geogebra.org/download

https://ultimaker.com/es/software/ultimaker-cura

https://www.prusa3d.com/es/pagina/prusaslicer_424/

https://www.repetier.com

2. Construcción sencilla de superficies regladas y de revolución.

2.1. Definición superficie reglada

Una superficie reglada, en geometría, es la generada por una recta, denominada generatriz, al desplazarse sobre una curva o varias, denominadas directrices. En función de las características y condiciones particulares de estos elementos, recibe diversos nombres.

No existe una instrucción específica en GeoGebra para construir superficies regladas, basta con aplicar la definición. Para poder construir superficies regladas, las dos curvas han de estar definidas en forma paramétrica, con una excepción: se

admiten segmentos construidos en forma geométrica en la versión actual de GeoGebra.

Si dos segmentos están en el mismo plano, la superficie reglada construida entre ellos es el cuadrilátero que tiene por lados opuestos los segmentos dados. Si los segmentos no son coplanarios, la superficie reglada entre ellos es una porción de un paraboloide hiperbólico, también conocido como “silla de montar”.

2.2. Definición superficie de revolución

Una superficie de revolución es aquella que se genera mediante la rotación de una curva plana, o generatriz, alrededor de una recta directriz, llamada eje de rotación, *la cual se halla en el mismo plano que la curva (no es necesario en GeoGebra)*.

Ejemplos comunes de una superficie de revolución son:

Una superficie de revolución cilíndrica es generada por la rotación de una línea recta, paralela al eje de rotación, alrededor del mismo;

Una superficie de revolución cónica es generada por la rotación de una recta alrededor de un eje al cual interseca en un punto, llamado vértice o ápice,

Una superficie de revolución esférica está generada por la rotación de una semicircunferencia alrededor de su diámetro;

Una superficie de revolución toroidal está generada por la rotación de una circunferencia alrededor de un eje que no la interseca en ningún punto

La utilización de superficies de revolución es esencial en diversos campos de la física y la ingeniería, así como en el diseño. La alfarería, el torneado industrial e incluso el diseño en multitud de campos, moldean y modelan volúmenes con variadas superficies de revolución de gran utilidad y uso cotidiano.

2.3. Construcción paso a paso

La construcción paso a paso de estas superficies se detalla en aplicaciones con GeoGebra que figuran en el libro GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/sdebdrxa)

del taller proponiendo algunos ejemplos sencillos (Ancochea Millet, B. y Pina Romero J.A. (2022)).

3. Construcción paraboloide hiperbólico

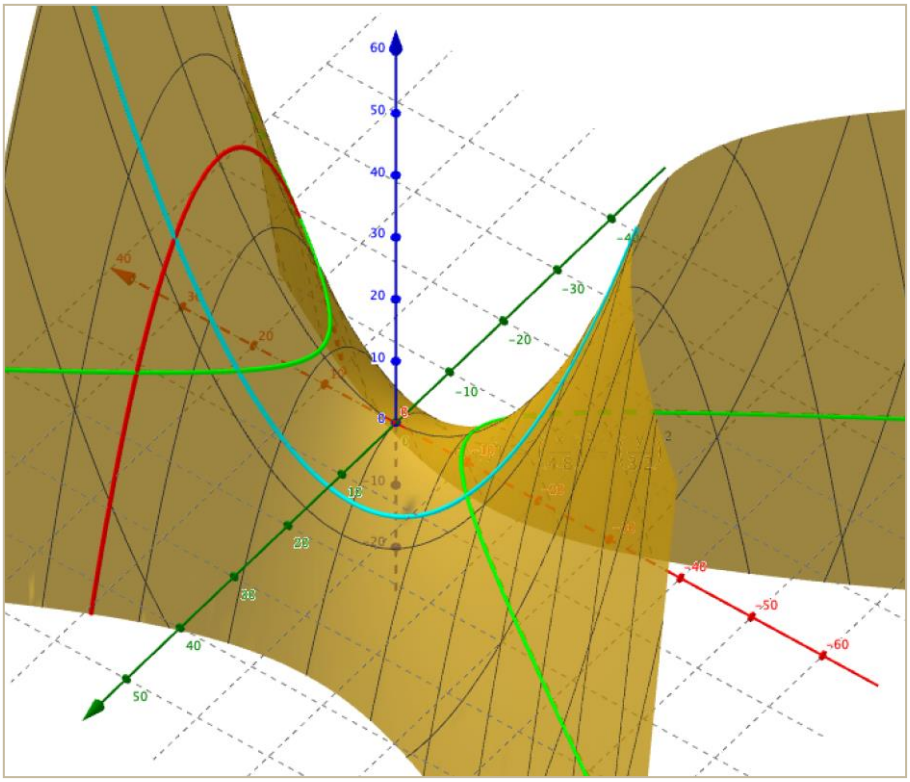
3.1. Definición

Es una superficie doblemente reglada por lo que se puede construir a partir de rectas. Es una de las más utilizadas en obras de Antoni Gaudí y de Félix Candela. También se lo conoce bajo los nombres de silla de montar o paso de montaña por su conformación geométrica, pues es una superficie que en una dirección tiene las secciones en forma de parábola con los lados hacia arriba y, en la sección perpendicular, las secciones son en forma de parábola con los lados hacia abajo. Se puede simplificar el concepto afirmando que es un plano alabeado.

Las secciones según planos perpendiculares a los dos anteriores son en forma de hipérbola. Si están por debajo del punto de la silla, en el centro de la figura, los lados de la hipérbola dan la forma de valles. Si están por arriba de este punto, las secciones de la hipérbola dan forma a los picos que flanquean el paso.

3.2. Construcción paso a paso

Una forma sencilla de construir un paraboloide hiperbólico es introducir su ecuación en la Línea de Entrada del GeoGebra como, por ejemplo, x y.



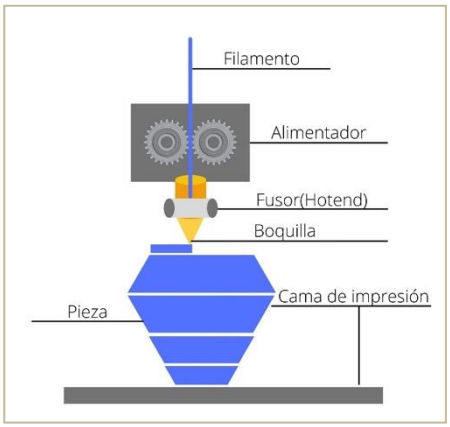
La construcción paso a paso de estas superficies también se detalla en el libro GeoGebra del taller antes citado.

4. Reproducción de una obra de Félix Candela

No es trivial reproducir con GeoGebra una obra de Félix Candela y la explicación paso a paso sobrepasaría los límites de este documento por lo que hemos aprovechado también las posibilidades que nos ofrecen los libros GeoGebra para mostrar el procedimiento de manera pautada y detallada.

5. Impresión 3D y realidad aumentada

5.1. Impresión 3D



Una impresora 3D construye de forma automática objetos en tres dimensiones a partir de unas instrucciones almacenadas en un fichero electrónico. Existen diversas tecnologías de impresión 3D, aunque la más extendida en diversos ámbitos es la conocida como FDM (Modelado por Deposición Fundida) que se basa en 3 elementos: una cama de impresión, una bobina de filamento y una cabeza de extrusión. El filamento es fundido por el extrusor de la impresora, que deposita el material capa a capa sobre la cama de impresión. El filamento se funde cuando el Fusor (Hotend) alcanza alrededor de 200ºC (en función del tipo de material), a continuación, se extruye el material de 1,75 mm de diámetro sobre la plataforma a través de una boquilla que se mueve sobre tres ejes (X, Y, Z). (Mora et al, 2021).

El material más utilizado por la comunidad es el PLA (Ácido poliacético), que a su vez es el más económico. Es cierto que hay otros tipos, también muy conocidos, como sonb: el ABS (Acrilonitrilo Butadieno Estireno), el PETG (Tereftalato de Polietileno Glicol), el TPE (elastómeros termoplásticos, el ASA (Acrilonitrilo estireno Acrilato) y el PD (Policarbonato).

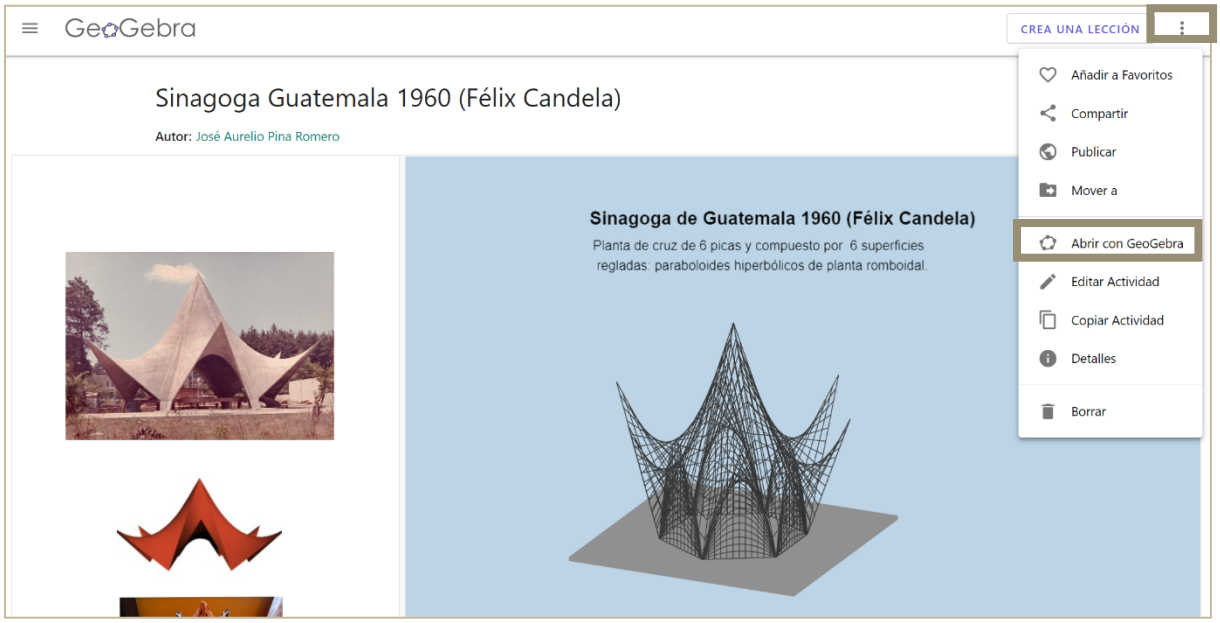
Las impresoras FDM se pueden adquirir ensambladas por un precio que puede rondar los 200 euros, consideradas de bajo costes ya que hay disponible en el mercado máquinas con un coste que pueden rondar los 5000-6000 euros.

5.2. Impresión de objetos 3D con GeoGebra

Partimos de una de las construcciones disponibles en el libro de GeoGebra sobre Félix Candela Construcciones de Félix Candela – GeoGebra

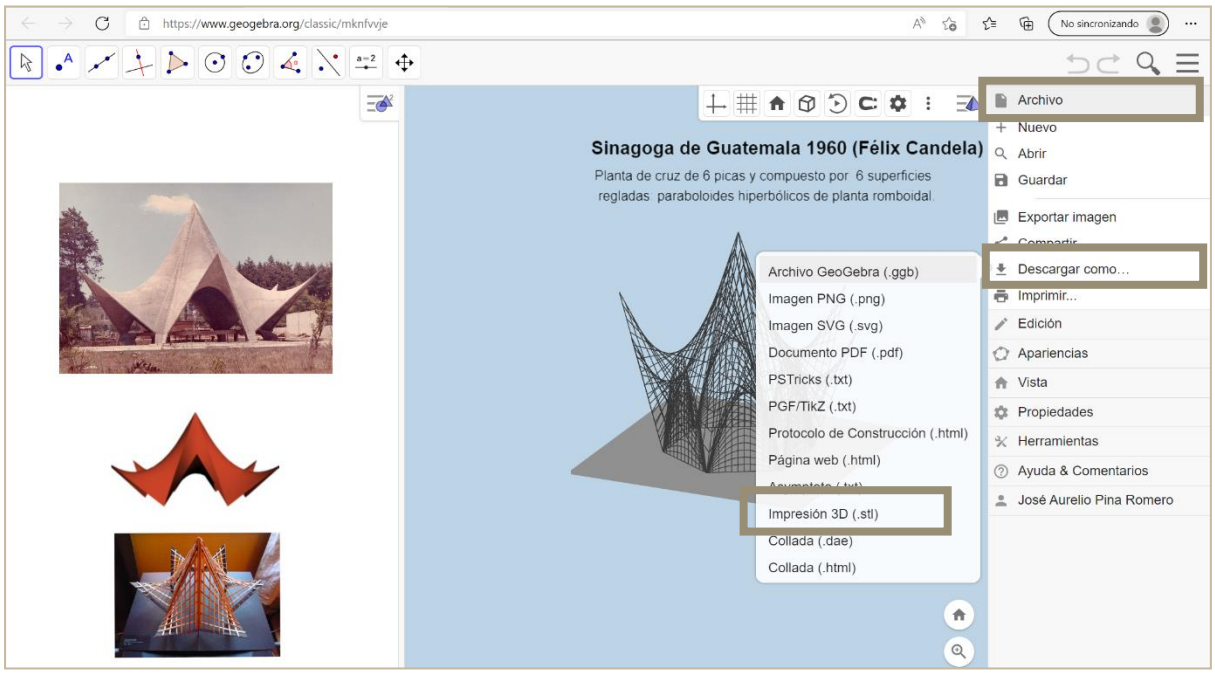
Paso 1: Accede a la construcción, pulsa en los tres puntos que aparecen en la parte superior derecha y después en Abrir con GeoGebra

Construcción: Sinagoga Guatemala 1960 (Félix Candela)



Nota: se puede descargar la construcción, y seguir los pasos mediante la versión 6 de escritorio (Descargas – GeoGebra)

Paso 2: Pulsa en Archivo → Descargar como → Impresión 3D (.stl)



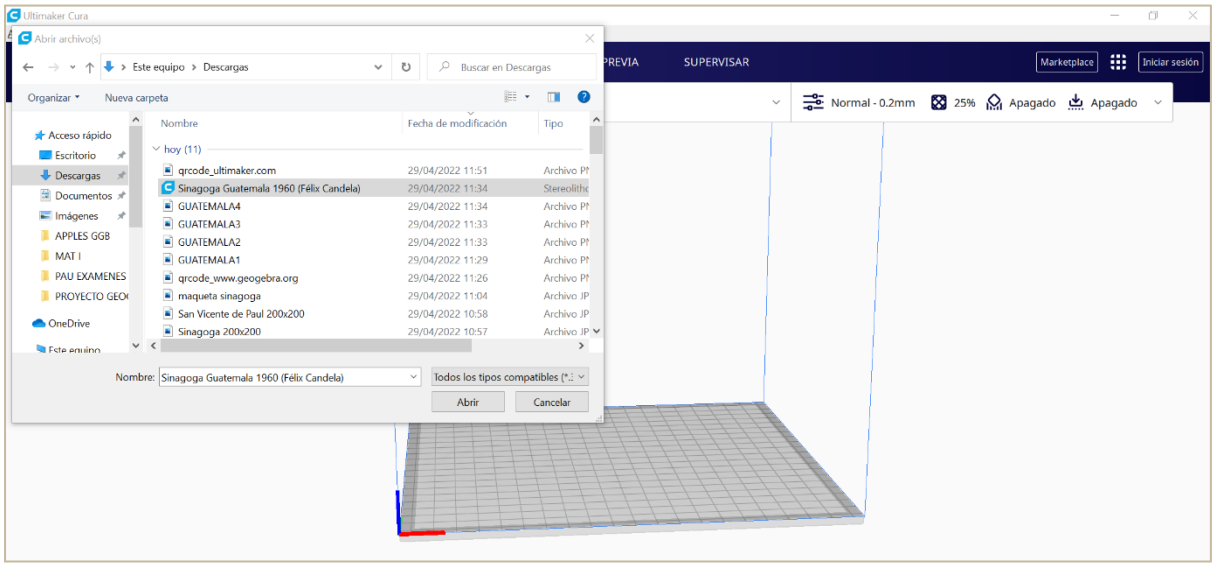
Se puede ajustar las dimensiones y el espesor del objeto (también existe la posibilidad de exportar el objeto con un relleno solido pulsando sobre la casilla, y determinar el grosor en mm)

Paso 3: Cargar el fichero en un laminador, en nuestro caso Cura versión 4.13.1

Dos posibles formas de cargar el fichero:

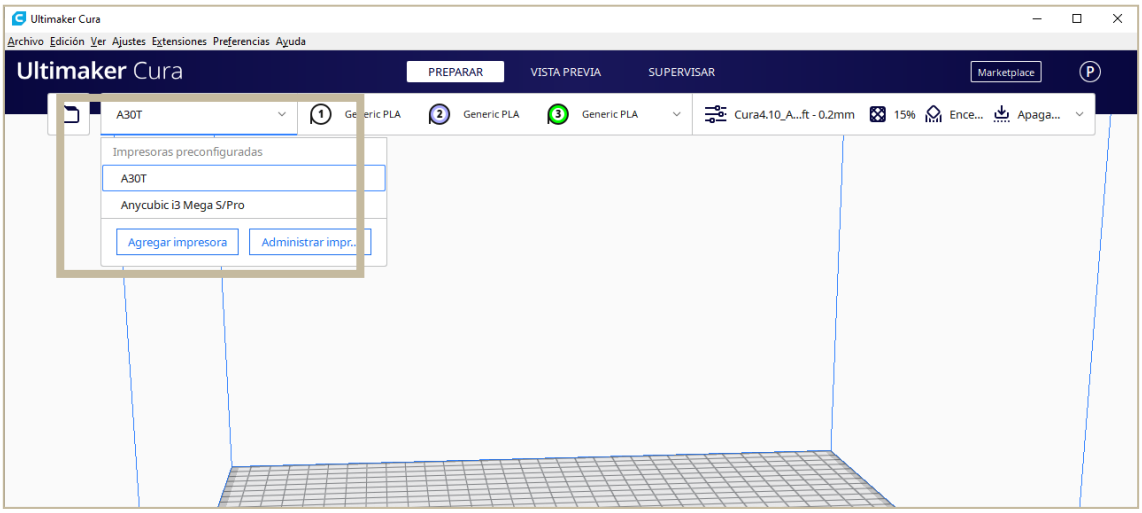
1. Arrastrar el fichero .STL al programa
2. Archivo → Abrir archivo(s)…

Descarga Cura

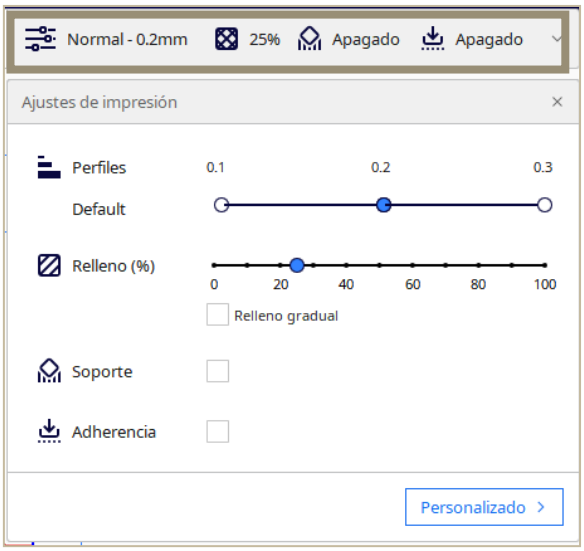


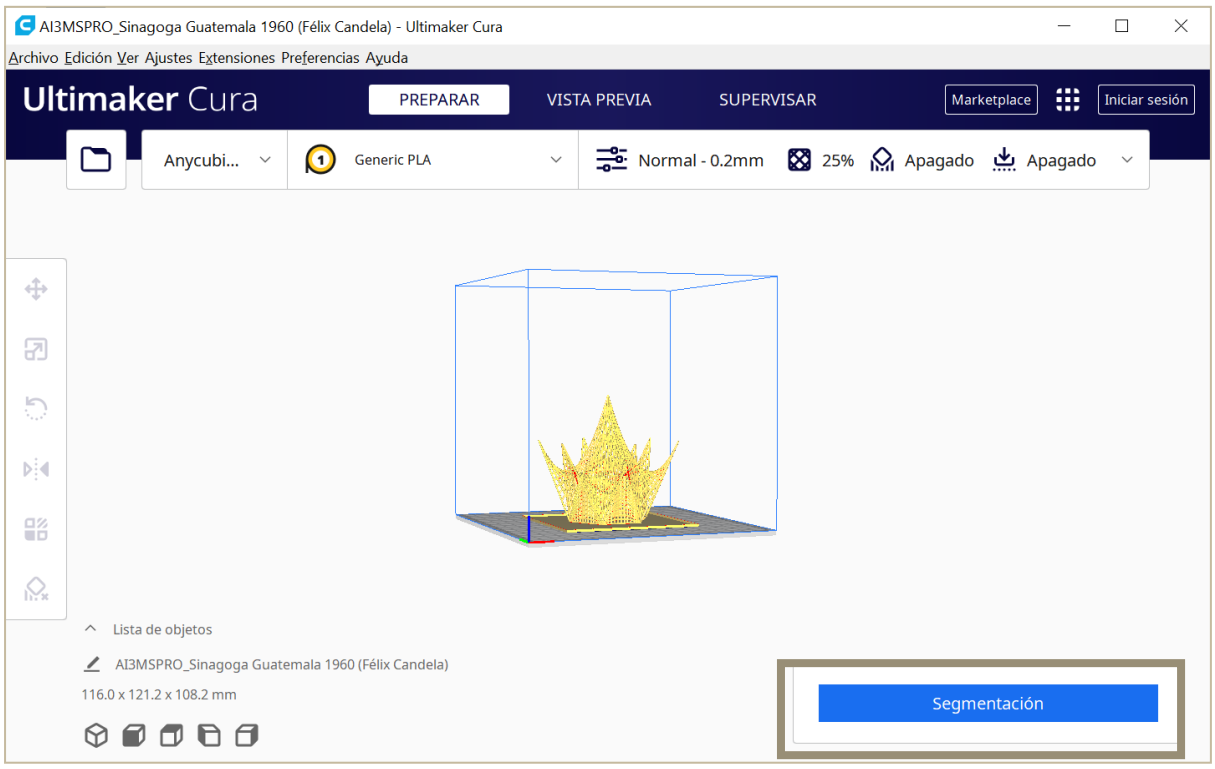
Paso 4: Ajustes en Cura

En primer lugar, hay que seleccionar la impresora con la que quieres imprimir tu pieza que te permitir seleccionar los ajustes de impresión básicos (altura de capa, densidad de relleno, soporte y adherencia).

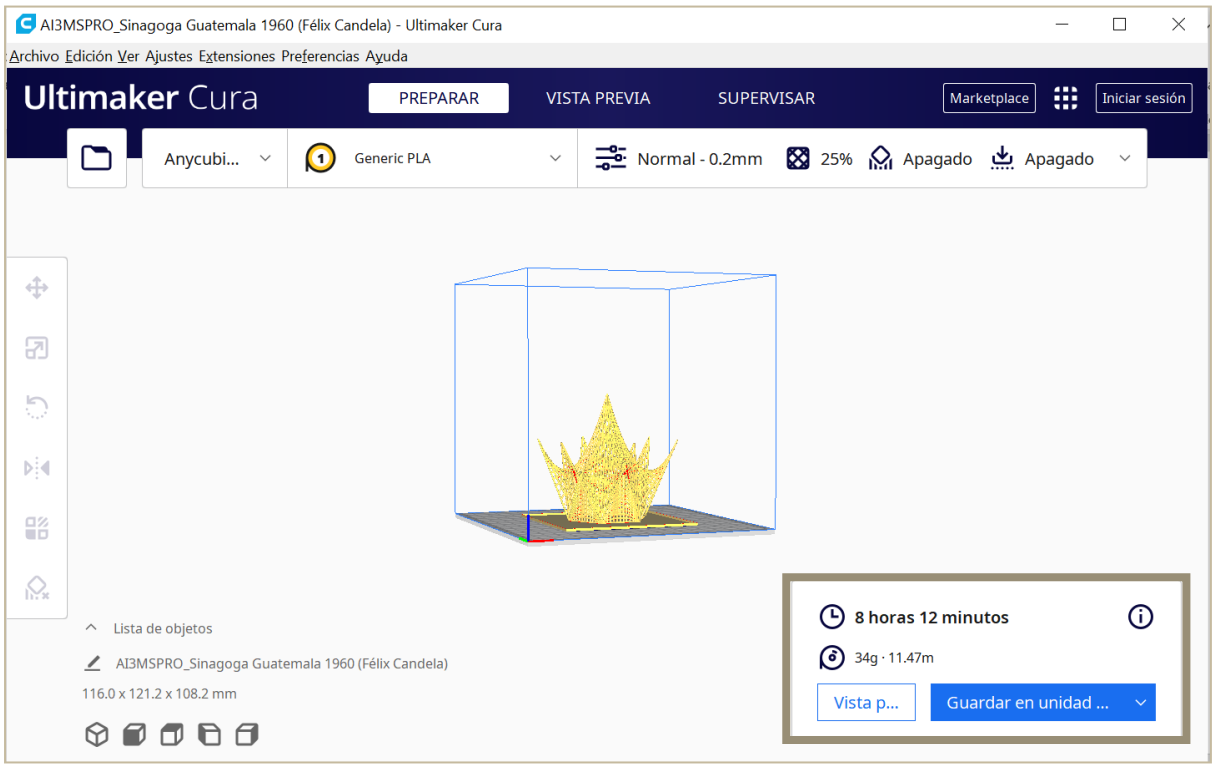


Si pulsamos en la parte superior aparecen los ajustes de impresión básicos (altura de capa, densidad de relleno, soporte y adherencia).

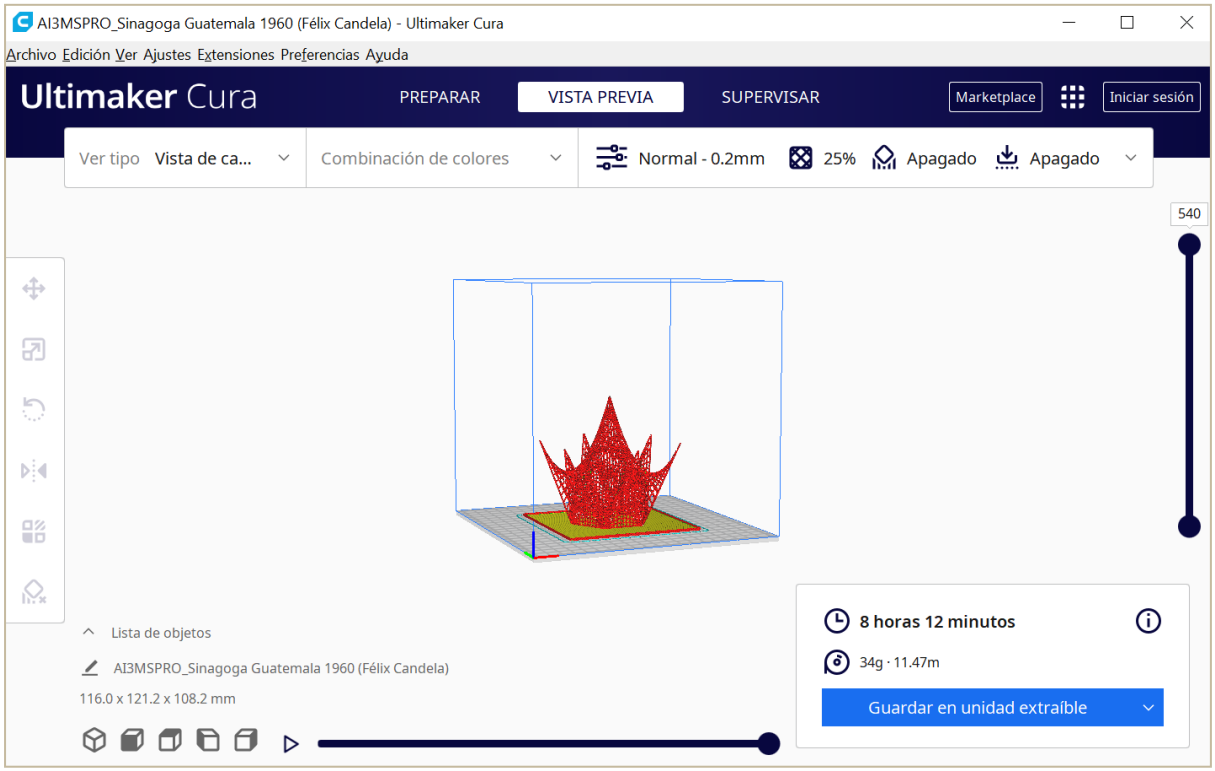




Una vez que se han modificado todos los ajustes oportunos, sólo nos queda segmentar/laminar la pieza en cuestión pulsando en SEGMENTACIÓN.



Nos indica el tiempo y la cantidad de material que necesitará.



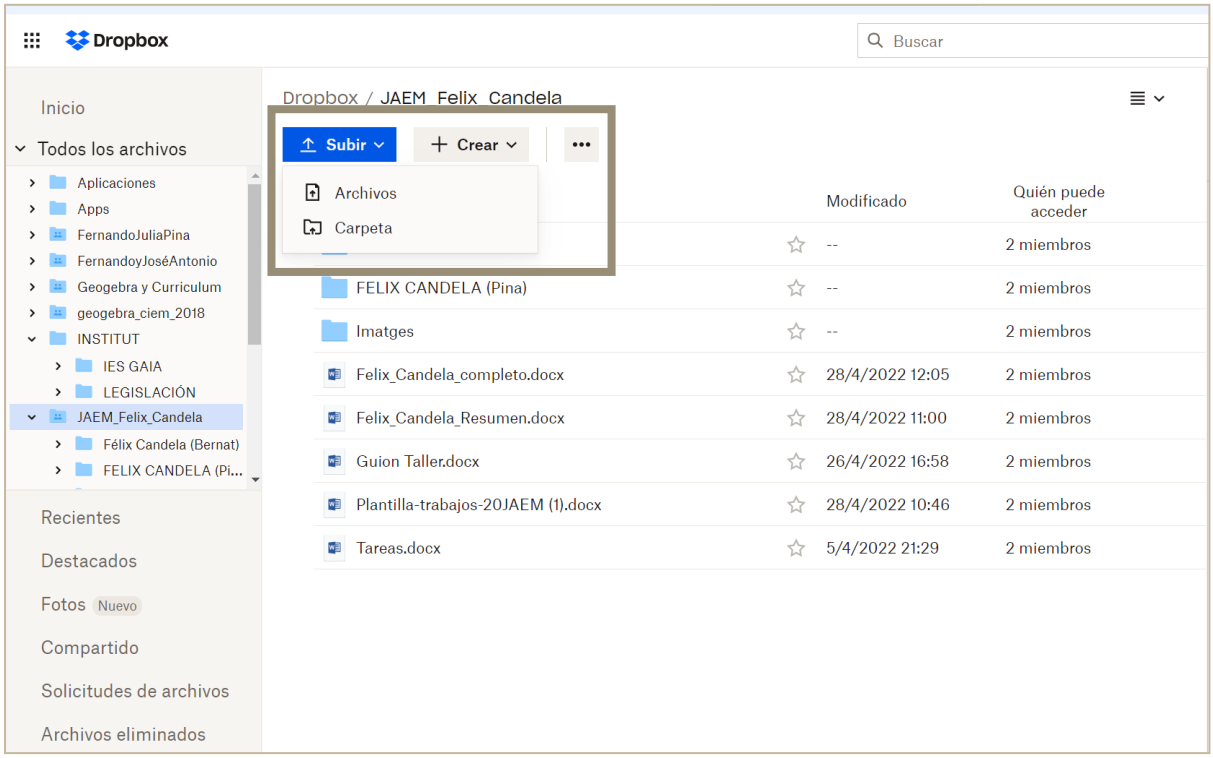
Si pulsamos en VISTA PREVIA, podemos observar como se construirá la pieza capa a capa.

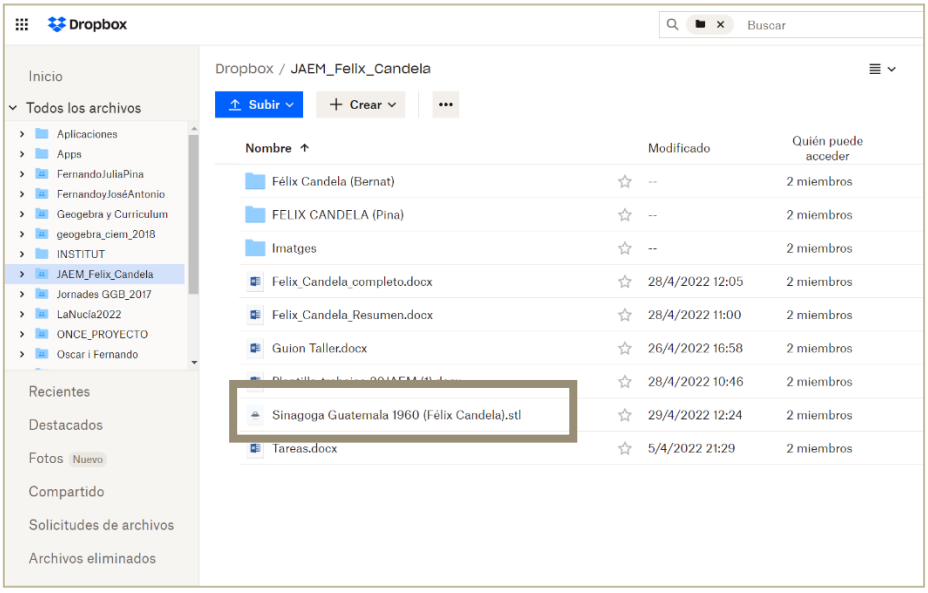
Puede consultar un manual extenso en Manual extenso Impresión 3D – GeoGebra (Mora et al 2020)

5.3. Realidad aumentada mediante la Graficadora 3D

Para poder visualizar la construcción en Realidad aumentada debes de seguir los siguientes pasos:

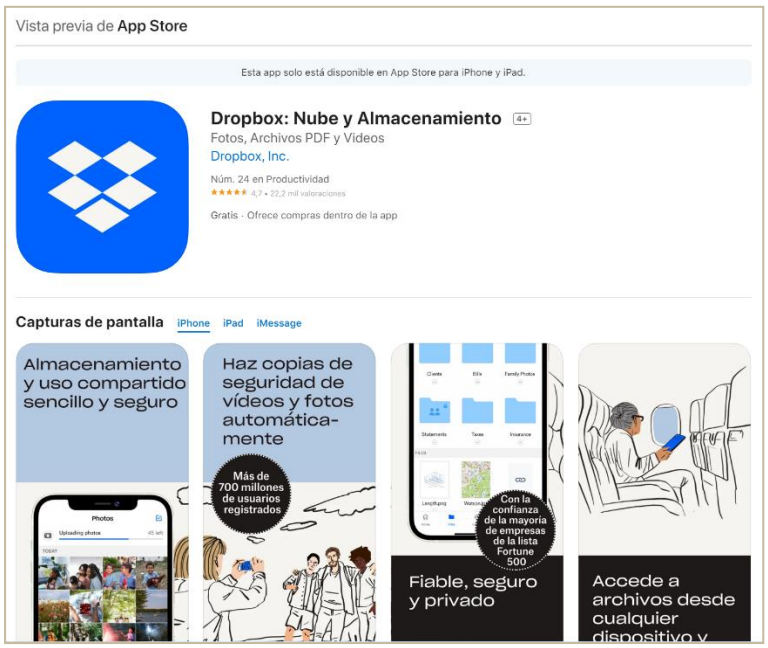
Paso 1: Descargar la construcción y alojarla en el sistema de almacenamiento en la nube, en nuestro caso se ha empleado Dropbox.





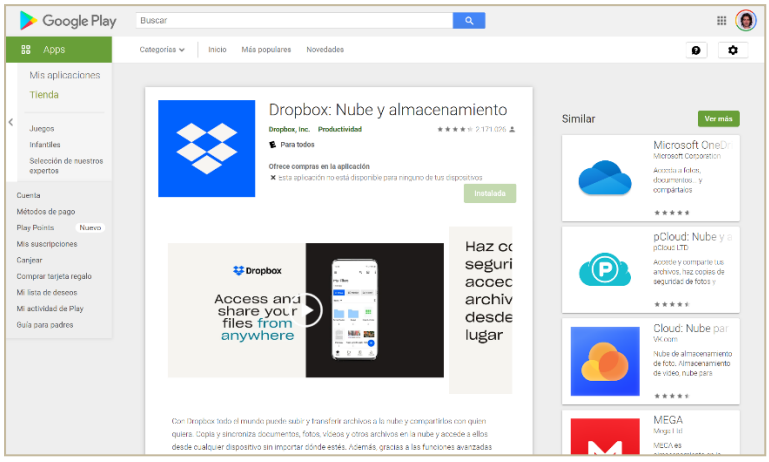
Paso 2: Instalar la aplicación en el dispositivo móvil.

iPhone: acceder a App Store e instalar Dropbox



https://apps.apple.com/es/app/dropbox-nube-y-almacenamiento/id327630330

Android: acceder a Play Store e instalar Dropobox

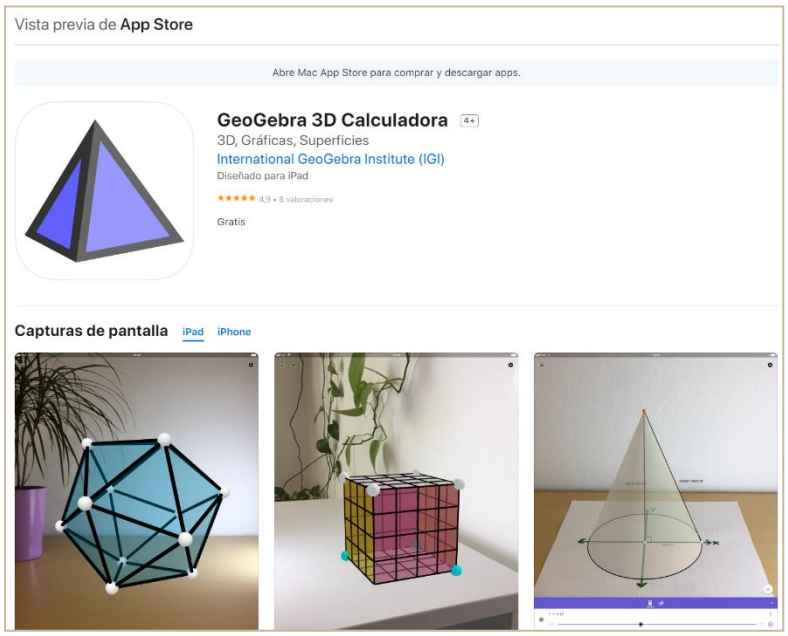


Dropbox: Nube y almacenamiento - Aplicaciones en Google Play

Paso 3: Instalar Graficadora 3D en el dispositivo móvil.

iPhone: acceder a App Store e instalar Dropbox

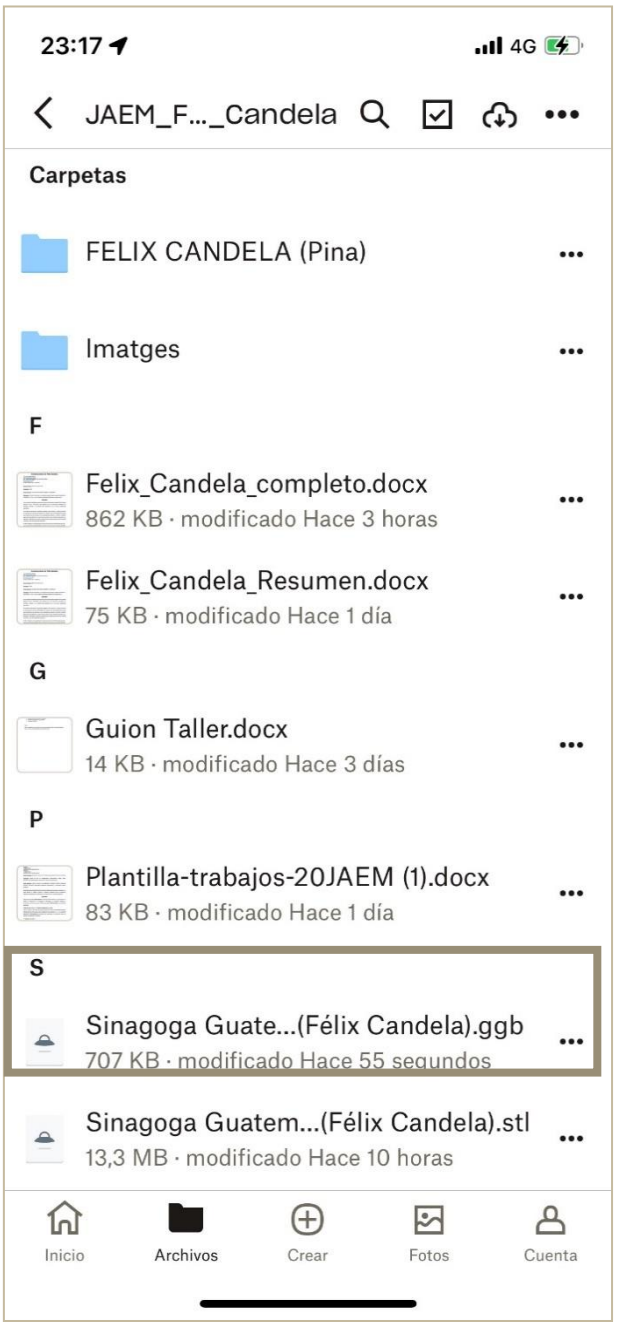
https://apps.apple.com/es/app/geogebra-3d-calculadora/id1445871976



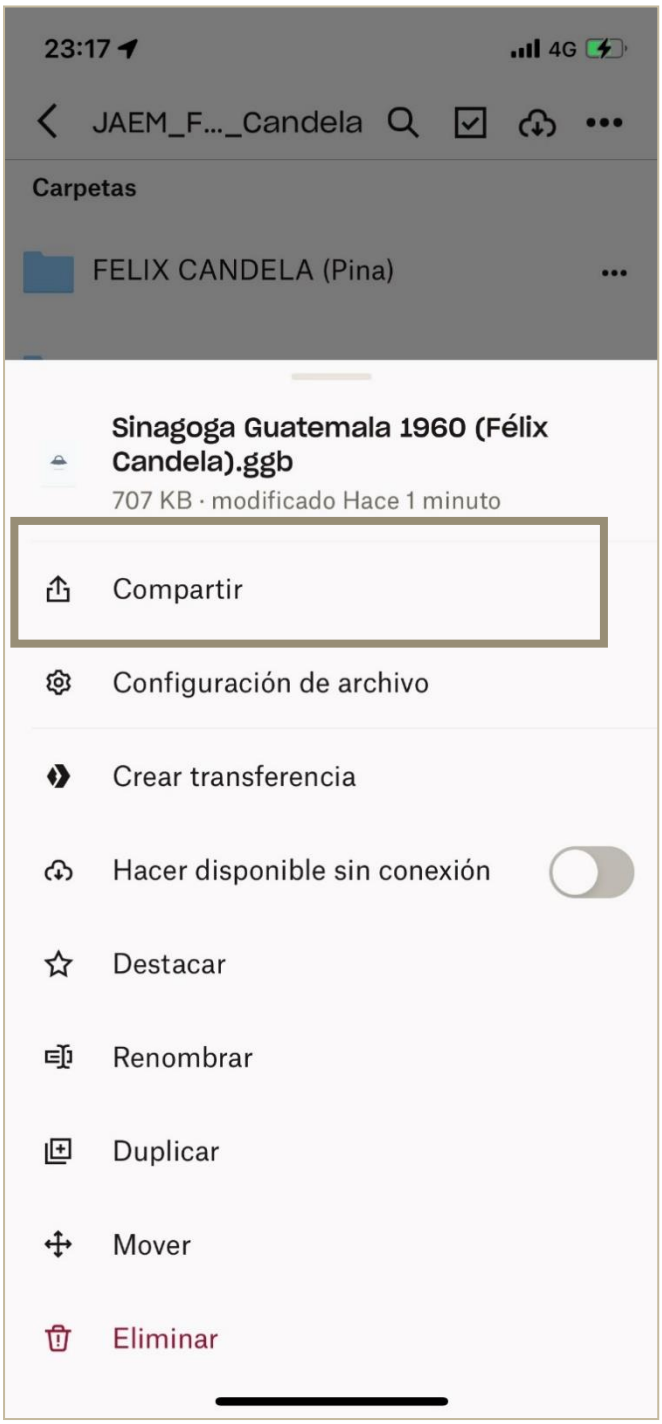
Android: acceder a Play Store e instalar la Graficadora 3D

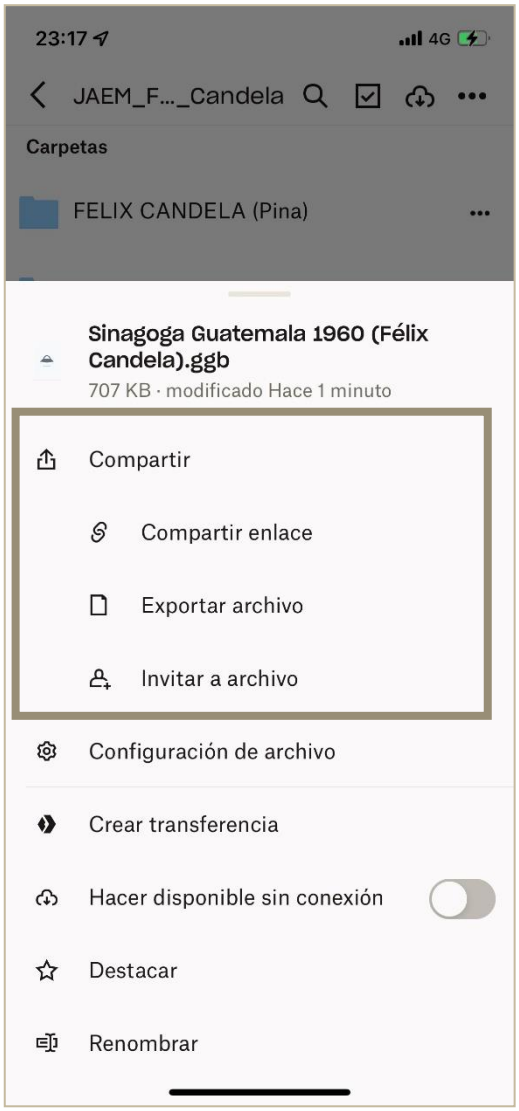
https://play.google.com/store/apps/details?id=org.geogebra.android.g3d

Paso 4: Acceder con el dispositivo móvil al sistema de almacenamiento en la nube, y pulsar en el Applet que quieres abrir con la Graficadora 3D.

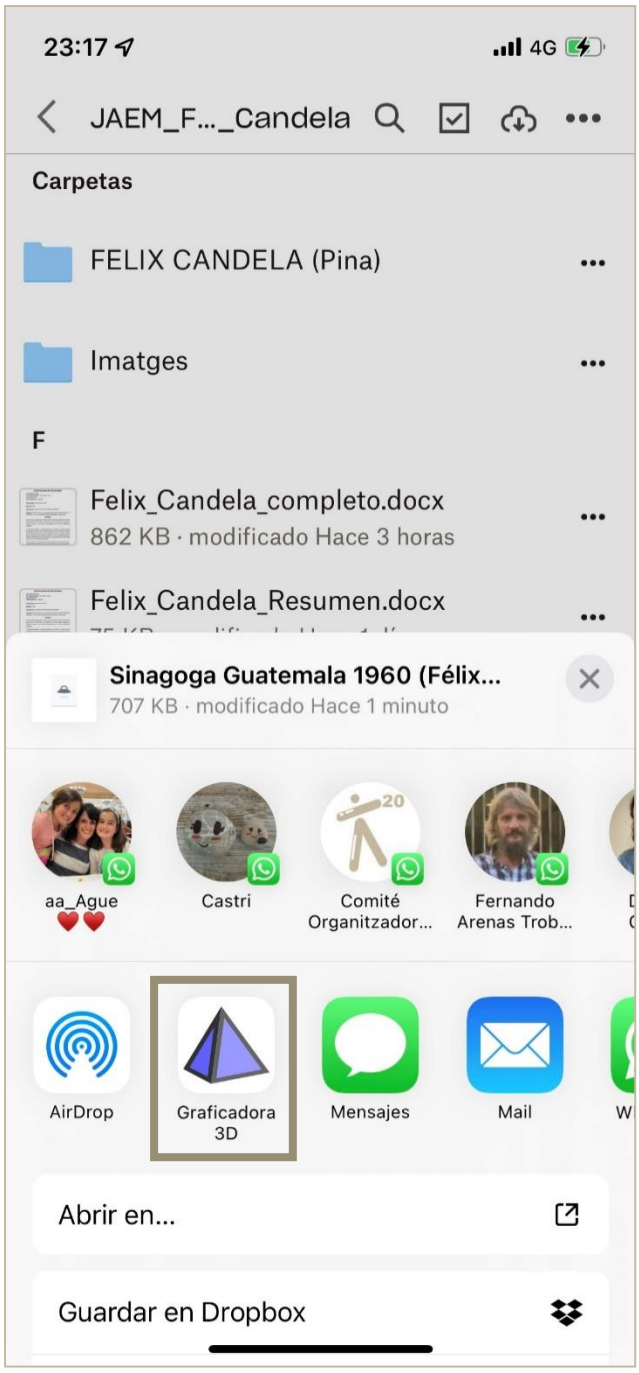


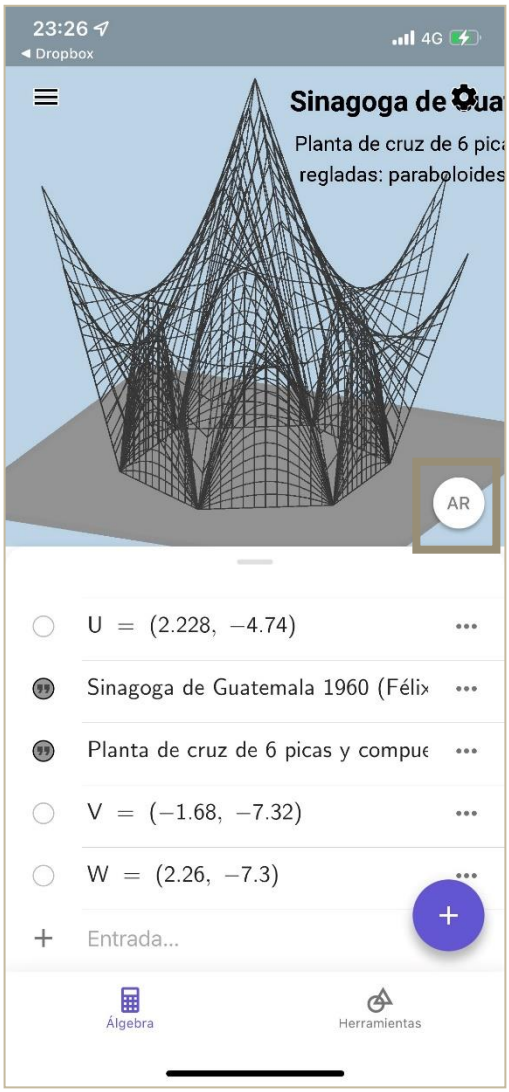
Paso 5: Pulsar en los tres puntos de la parte superior derecha y después en Compartir.



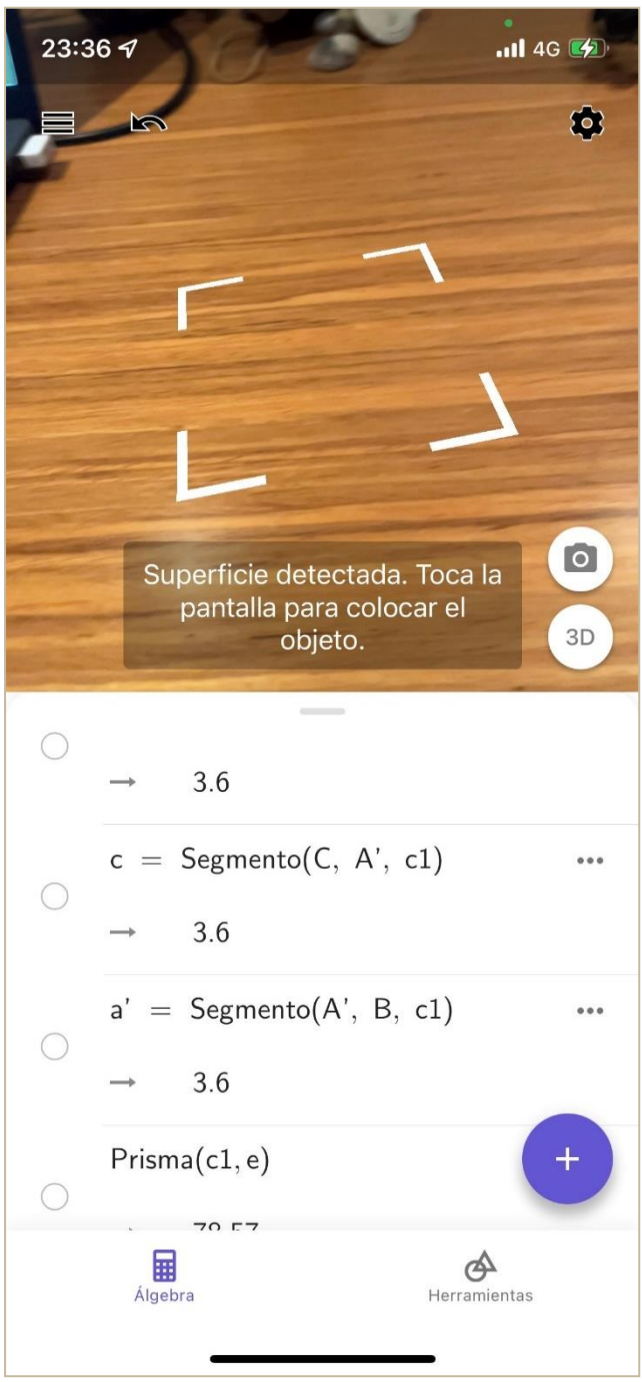


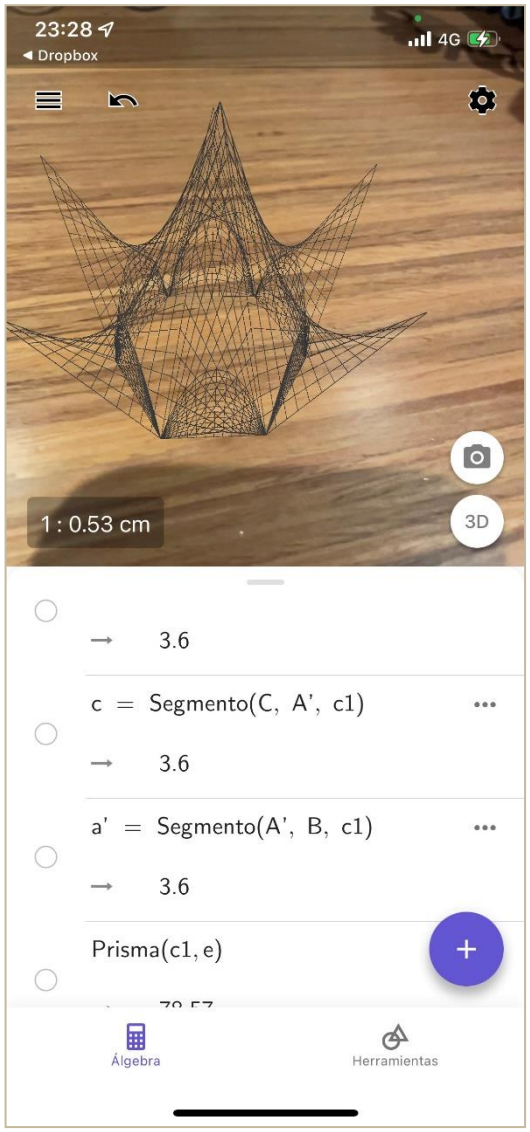
Paso 6: Pulsa en Exportar archivo, y después seleccionar la Graficadora 3D.





Paso 7: Pulsar en AR. A continuación, muévete lentamente para detectar superficies y en el momento que la detecta hay que tocar la pantalla del dispositivo.





Puede consultar una guía de Realidad aumentada en [Manual extenso Impresión 3D – GeoGebra](#) (Mora et al 2020)

6. Referencias

Aguilar, G. (2020). Modelos en GeoGebra para el plano y el espacio. Impresión de materiales 3D para su uso en el aula. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 9(1), 132-146. http://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p132-146

Ancochea Millet, B., Pina Romero, J.A. Construcciones de Félix Candela. Recursos para el aula de GeoGebra. Accesible en https://www.geogebra.org/m/sdebdrxa

Beltrán Pellicer, P., Rodríguez Jaso, C. Modelado e impresión en 3D en la enseñanza de las matemáticas: un estudio exploratorio. ReiDoCrea, 6: 16 - 28 (2017). [http://hdl.handle.net/10481/44193]

Mora, J.A.; Muñoz Casado, J.L. y Pina Romero J.A. (2021). La mitad del cubo. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, Nº 98, 2021, págs. 93-104.

Mora J.A. y Pina Romero JA. (2020). Calidoscopis polièdrics (Capítulo Guía para la impresión 3D). Recursos para el aula de GeoGebra. Accesible en https://www.geogebra.org/m/bm4heq77

Reichenberger, S., Lieban, D., Russo, C. & Lichtenegger, B. (2019). 3D Printing to Address Solids of Revolution at School. In S. Goldstine, D. McKenna, K. Fenyvesi & C.S. Kaplan (Hrsg.), Bridges Linz 2019 Conference Proceedings (S. 493-496). Phoenix: Tessellations.

TaR048 Medida en educación infantil

Ester Solves Garcia
solves_est@gva.es
CEIP Alejandra Soler

Núcleo temático: Recursos para el aula.

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Infantil.

RESUMEN

La tendencia en Educación Infantil para trabajar las matemáticas con las criaturas es hacer propuestas de numeración y cálculo. Quedan olvidados otros campos igual de importantes para la construcción del pensamiento lógico-matemático. En este caso hablaremos sobre la identificación de atributos y clasificación de objetos para pasar finalmente a la medida de estos con diferentes instrumentos.

Palabras clave: Recursos, Medida, Clasificación.

La tendencia en Educación Infantil para trabajar las matemáticas con las criaturas es hacer propuestas de numeración y cálculo. Quedan olvidados otros campos igual de importantes para la construcción del pensamiento lógico-matemático.

Entre ellos tenemos la parte del conocimiento de los objetos y su medida.
Esto nos ayuda a entender nuestro entorno y los elementos que nos rodean.

Como nos dice el Real Decreto de Educación infantil las criaturas deben “Establecer distintas relaciones entre los objetos a partir de sus cualidades o atributos, mostrando curiosidad e interés”.

Una vez son capaces de reconocer las cualidades y características de los elementos de su entorno, pueden ordenarlos, clasificarlos e identificar relaciones entre ellos, podrán pasar a la medida de uno de sus atributos.

Y con esto entraremos en la parte de la matemática que se encarga de los atributos medibles o magnitudes continuas (Alsina, 2006)

Y aquí propongo que presentemos las experiencias de manera cuidada, reflexionada y atractiva para así conectar con las emociones e interés de los/las infantes y provocar sus pensamientos.
Esto se recoge de esta manera en el Real Decreto como que el proceso de enseñanza y aprendizaje en Educación Infantil se plantea en un contexto sugerente y divertido en el que se estimula, desde un enfoque coeducativo, la curiosidad de niños y niñas por entender aquello que configura su realidad, sobre todo lo que está al alcance de su percepción y experiencia, respetando sus ritmos de aprendizaje. Con esta finalidad, se invita a observar, clasificar, cuantificar, construir, hacerse preguntas, probar y comprobar, para entender y explicar algunos fenómenos del entorno natural próximo, iniciarse en el aprecio por el medioambiente y en la adquisición de hábitos saludables. Para el desarrollo de esta competencia clave, se presta una especial atención a la iniciación temprana en habilidades numéricas básicas, la manipulación de objetos y la comprobación de fenómenos.
Y basándonos en esto crearemos nuestras propuestas en el aula.

La secuencia que propongo para el taller, en el camino para el entendimiento de la medida sería la siguiente:

- Identificar las cualidades y características de los objetos.
- Clasificar y ordenar objetos en grupos atendiendo a sus propiedades.
- Reconocer relaciones entre diferentes objetos.
- Provocar la necesidad de cuantificar la medida de los elementos.
- Crear instrumentos de medida universales y no personales.

Ejemplos de actividades en el taller

A. Identificación, clasificación y ordenación

Ofreceremos un juego libre con “Minimundos”.

Se les proporciona animales y elementos naturales para jugar poniendo un espacio donde se diferencien diferentes ecosistemas.

El/la adulto/a no intervendrá en el juego. Serà una guía y observadora del punto de entendimiento de los objetos que se le han ofrecido. Veremos si las criaturas, dentro de su juego libre, son capaces de entender las características (en el mundo real) de cada elemento y pasándolos al juego simbólico, los clasifican correctamente. Si no es así, provocaremos un espacio de conversación para que puedan explicar sus acciones.

Imagen orientativa de agora.xte.cat

B. Series y patrones

Ofreceremos frutas y frutos secos.

Realizamos una serie que sigue un patrón con las frutas y frutos secos y pediremos que continúen la serie.

Permitiremos la respuesta abierta dando pie a razonamientos.

Imágenes de posibles series

C. Transformaciones

Daremos un escenario construido que taparemos. Al destapar el escenario ha cambiado.

Generaremos un espacio de reflexión explicando que creemos que ha cambiado y porque. Podremos permitir que los infantes generen un cambio nuevo.

Imágenes antes y después

D. Experimentando volúmenes

Ofrecemos una mesa de experimentación con harina o arena y recipientes y cucharas de diferentes tamaños.

El adulto acompañante tendrá el rol de observador y guia de las ideas que se van generando a través de observar cómo los objetos tienes diferentes capacidades. (ej. hago castillos más grandes con cubos más grandes, hago más trasvases de agua con vasos más pequeños).

E. Cuento vivenciado

Representamos el cuento de “Ricitos de oro”.

Vivimos a través de los elementos que aparecen la diferencia de volúmenes, tamaños y capacidades de los objetos que van saliendo.

F. Construimos nuestro instrumento de medida

Después de un trabajo de medidas antropomórficas, pasaremos a observar la necesidad de tener un instrumento de medida de longitud. Cada infante decidirá cuál será su unidad de media y con cintas construirá su instrumento de medida de longitud propio.

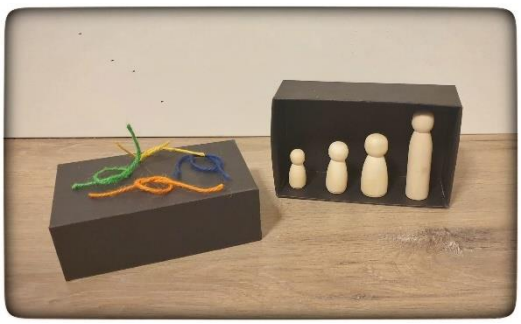
G. Resolución de problemas “Amigos de colores”

Presentamos una caja con 4 amigos de diferentes tamaños y 4 bufandas de colores.

Damos pistas de cómo coloras las bufandas para que cada amigo tenga su bufanda.

Pistas:

- Ordena a los amigos de menor a mayor.
- El de la bufanda naranja es el de menor tamaño.
- El de la bufanda amarilla no tiene a amigos a los dos lados.
- El de la bufanda azul está al lado del de la bufanda naranja.



TaR051 Geometría del doblado de papel: una propuesta para la enseñanza de la demostración en la clase de geometría

Camilo Sua Flórez
jeison.sua@uv.es
Universidad de Valencia

Núcleo temático: Recursos para el aula, Formación del profesorado.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria.

RESUMEN

En la enseñanza de la geometría a nivel escolar se ha dado un notable protagonismo a los ambientes de geometría dinámica dados sus beneficios y posibilidades. Sin embargo, el acceso a estos recursos digitales no es una realidad en muchas instituciones educativas, por lo que no se logra disfrutar de sus bondades en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Como respuesta a esta problemática, en este taller proponemos la geometría del doblado de papel como una alternativa para la enseñanza de la geometría. A través de algunos problemas mostramos la forma en que esta geometría puede ser incorporada en la clase de matemáticas y los tipos de preguntas que pueden formularse al respecto.

Palabras clave: Doblado de papel, Aprendizaje de la demostración, Geometría del doblado de papel, Creatividad matemática.

1. Introducción

En la actualidad es reconocida la presencia e impacto de los ambientes de geometría dinámica (GeoGebra, Cabri, entre otros) en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Sinclair y Robutti, 2013). La posibilidad de realizar construcciones geométricas con gran precisión y manipularlas libremente en la pantalla del ordenador a través de la función de arrastre, reconociendo relaciones

de dependencia que se enmarcan en el dominio de la geometría euclidiana, son las principales características de estos recursos digitales.

No obstante, apoyar la enseñanza y aprendizaje de la geometría a través de estos ambientes tecnológicos digitales requiere el acceso a los mismos en la clase de matemáticas. Esto no siempre es alcanzable debido, entre otros motivos, a la insuficiencia de los recursos tecnológicos de los que una institución educativa dispone, aspecto que determina una barrera de acceso a las bondades de la tecnología digital mencionadas anteriormente. Algunas propuestas que atienden a esta dificultad se pueden mencionar, entre las que se encuentra la geometría del doblado de papel.

La geometría del doblado de papel (Santa y Jaramillo, 2013) hace referencia al trabajo con doblado de papel en el que se realizan construcciones geométricas alternas e igual de precisas a las realizadas con regla y compás. Este es un recurso de fácil manipulación que permite representar algunos objetos geométricos y observar propiedades en las construcciones realizadas, con lo que se apoyan diferentes procesos de la actividad matemática por parte de los estudiantes a través de su uso, entre estos la justificación matemática.

Bajo este panorama, este taller tiene el objetivo de presentar la geometría del doblado de papel y ejemplos de problemas que apoyan el desarrollo de la justificación matemática. La resolución de diferentes problemas y la puesta en común de las estrategias empleadas para tal fin, por cada uno de los participantes, permitirá develar la facilidad de utilizar este material, la forma en que la creatividad para resolver los problemas toma un lugar privilegiado y la emergencia de explicaciones sobre los procedimientos y resultados obtenidos que se ciñen a un sistema teórico de referencia.

2. Geometría del doblado de papel

La Geometría del Doblado de Papel es propuesta por Santa y Jaramillo (2013) para referirse al trabajo con doblado de papel en el que se realizan construcciones geométricas alternas a las elaboradas con regla y compás. Estos autores afirman

que la esta geometría posibilita la asimilación de conceptos geométricos, dado que favorece procesos de visualización y experimentación al realizar construcciones precisas como las de regla y compás. En el trabajo con este medio se favorecen procesos de justificación ligados a acciones realizadas sobre el papel, al acudir a un sistema axiomático de referencia establecido previamente. Con el paso del tiempo se ha consolidado un sistema de axiomas similares a los de la geometría euclidiana (Huzita y Hatori, 2003; citados en Santa y Jaramillo, 2013), a través de estos se pueden justificar las construcciones realizadas con doblado de papel.

En la geometría del doblado de papel Santa y Jaramillo establecen una relación entre los conceptos primitivos de la geometría euclidiana con la del doblado de papel. La recta se representa en el papel con un doblez que, aunque limitado por las restricciones de la hoja, ostenta la similitud de una línea recta la cual es infinita. El punto tiene su representación en la intersección de dos o más dobleces o la huella del lápiz. Por su parte, a la hoja de papel se le adjudica la noción abstracta de plano.

3. Ejemplo de problemas

A continuación, presentamos algunos ejemplos de los problemas propuestos en el taller.

- Construye un doblez en la hoja de papel. Construye ahora un doblez que sea perpendicular al doblez inicial. ¿Cómo garantizas que se satisface la perpendicularidad entre ambos dobleces?

- Construye dos dobleces que se crucen en la hoja de papel y que no sean perpendiculares. ¿Es posible construir un doblez perpendicular a ambos dobleces?

- Construye un doblez en la hoja de papel. Construye un doblez que sea paralelo al primero. ¿Cómo justificarías que los dos dobleces son paralelos?

- Construye dos dobleces que no se crucen en la hoja. ¿Son paralelos esos dobleces? ¿cómo podrías justificar el paralelismo o no de estos dobleces?

3. Referencias

Santa, Z. & Jaramillo, C. (2013). Producción de conocimiento geométrico a través de la visualización de construcciones con doblado de papel. En: *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe CEMACYC*. República Dominicana: Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra PUCMM.

Sinclair, N., y Robutti, O. (2013) Technology and the Role of Proof: The Case of Dynamic Geometry. En M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, y K. F. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 571-596). Springer.

TaR053 Pensamiento computacional geométrico

Goyo Lekuona Muxika
glekuona@lasallezumarraga.eus
La Salle, Zumarraga

José Manuel López Irastorza
lopezirastorza@gmail.com
Berritzegune central, Lasarte-Oria

Núcleo temático: Recursos para el aula y Formación del profesorado.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

RESUMEN

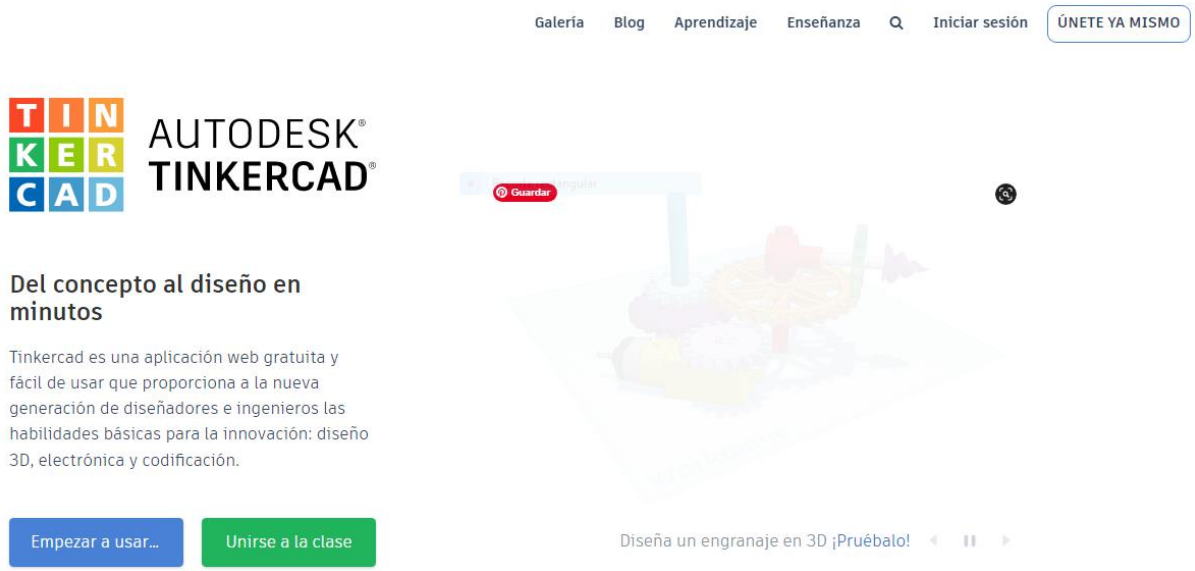
Con esta propuesta queremos trabajar la geometría plana y espacial, con posibilidad de impresión 3D, construyendo la misma figura de dos maneras: en primer lugar, diseñándola con el teclado y el ratón del ordenador para, a continuación, hacerlo mediante bloques de código. Construiremos diferentes cuerpos con elementos repetidos y ordenados según diferentes pautas y simetrías de cara al desarrollo de un pensamiento computacional basado en la gestión del espacio tridimensional. Lo haremos utilizando un software de acceso libre denominado TINKERCAD que ofrece ambas posibilidades y que nos permite obtener el mismo diseño por dos vías diferentes.

Palabras clave: TINKERCAD, Geometría_3D, Programación_por_bloques.

1. El desarrollo del pensamiento computacional geométrico

El desarrollo del pensamiento computacional es uno de los temas emergentes en el currículo de la LOMLOE, tanto en la etapa primaria como en la secundaria.

Por otro lado, cada vez son más los programas que ofrecen oportunidades para trabajar el desarrollo del pensamiento computacional en las aulas: Scratch, Code.org, Google Blockly… Uno de los primeros fue TINKERCAD que en la actualidad cuenta con diferentes posibilidades enfocadas al mundo educativo.



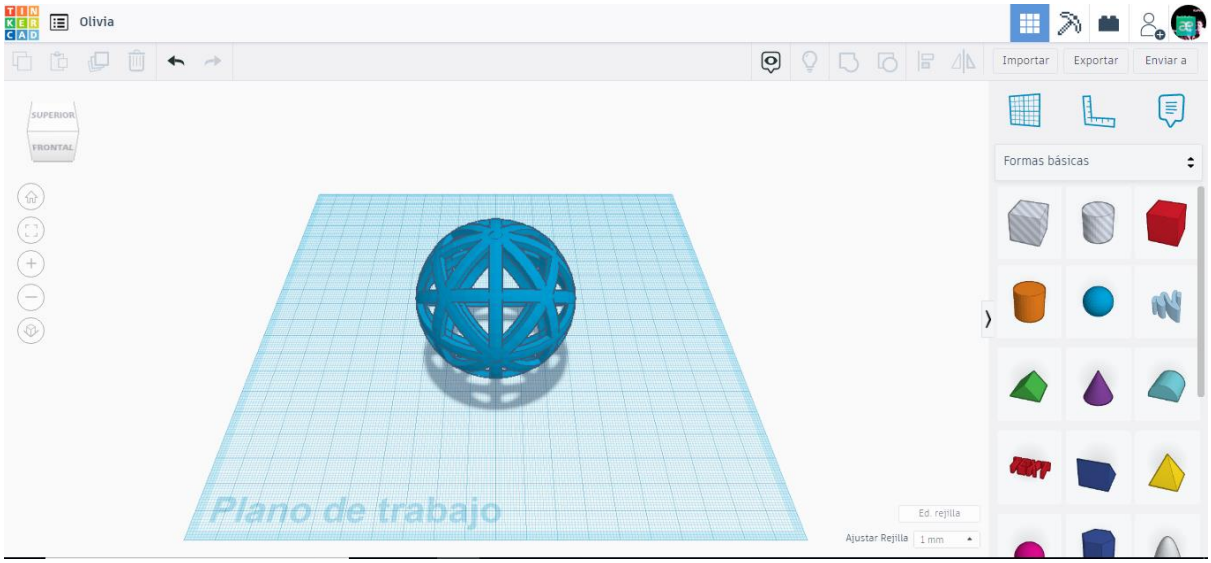
TINKERCAD Introducción

En efecto, TINKERCAD ofrece en su menú principal las siguientes opciones cuando accedemos como profesor(a): Diseños 3D, Circuitos, Bloques de código, Lecciones, Tus clases y Colecciones. En este taller conoceremos las opciones *Diseño 3D* y *Bloques de código* lo que nos posibilitara construir los mismos cuerpos geométricos desde diferentes concepciones. También exploraremos las posibilidades de organización de las sesiones en las aulas mediante la opción *Tus clases*.

Los contenidos matemáticos que se trabajarán estarán relacionados con diferentes sentidos matemáticos: numérico, de medida, espacial, algebraico y computacional… En la opción de diseño trabajaremos la localización en una trama espacial de objetos sólidos y vacíos, su desplazamiento, escala, simetría con respecto a un plano o punto, repetición siguiendo diferentes criterios… pudiendo exportar el resultado en un formato adecuado para su impresión 3D. En la opción de Bloques de código, en cambio, introduciremos conceptos de programación, desarrollando una secuencia lógica y ordenada de instrucciones, mediante el uso y aplicación de conexiones gráficas que nos permitan obtener el mismo resultado obtenido

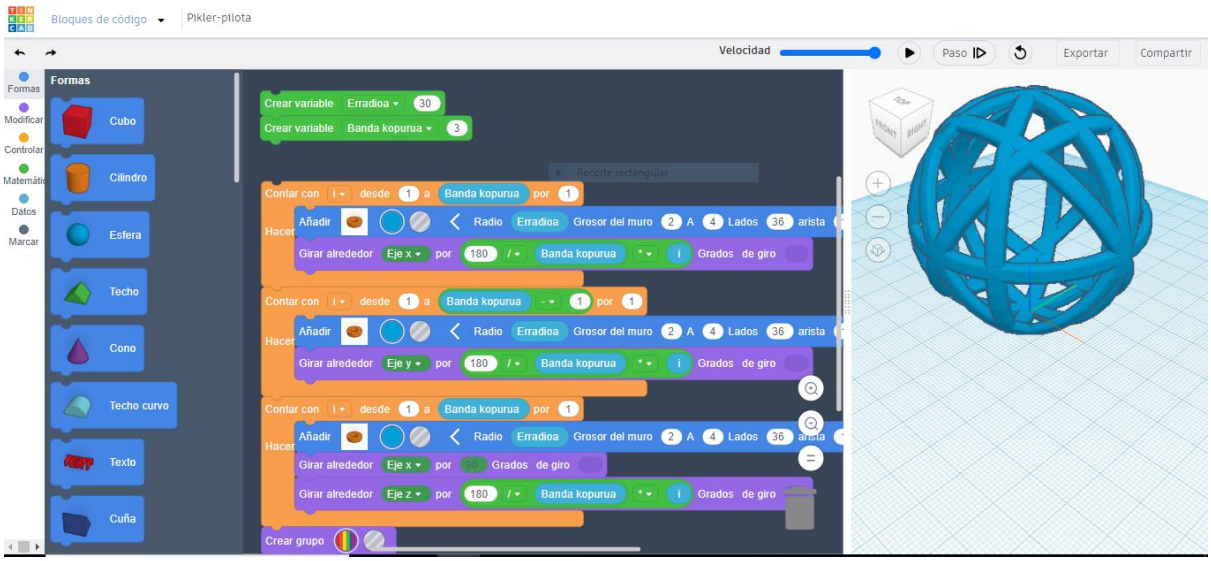
mediante el Diseño 3D. Simplificando mucho podríamos decir que la primera opción es manual o creativa y la segunda, en cambio, por computación o modelización.

El diseño 3D es un conjunto de técnicas que nos permiten proyectar objetos de tres dimensiones en la pantalla del ordenador e interactuar con ellos modificando sus características y visión antes de modelarlas o construirlas. Hoy en día el diseño 3D se realiza principalmente mediante el diseño asistido por ordenador.



TINKERCAD Diseño 3D

La programación por bloques se realiza mediante una lista comandos que se enlazan y ordenan para crear una secuencia o programa que tiene por objetivo, en este caso, la creación de un objeto tridimensional.



TINKERCAD Programación por bloques

2. Diseño 3D

TinkerCAD es una plataforma online que ofrece un paquete de herramientas gratuitas para diseñar modelos en 3D, simular circuitos eléctricos y diseño 3D por programación por bloques que permite a los estudiantes iniciarse en el pensamiento computacional y en su materialización mediante la construcción y localización de objetos en el espacio.

TinkerCAD Diseño 3D es la opción que nos permitirá diseñar de forma sencilla objetos y piezas. Es un software CAD basado en una geometría sólida constructiva (CSG), que permite crear modelos mediante la combinación de objetos más simples. Los archivos que genera pueden ser llevados a la impresora 3D para que puedan materializarse mediante las cada vez más accesibles impresoras 3D.

En nuestro taller conoceremos las instrucciones y posibilidades que ofrece el Diseño 3D con TinkerCAD, las construcciones compartidas por la comunidad que podemos reutilizar y adaptar y crearemos algunas figuras, como una pelota de Pikler partiendo de una esfera, que podremos guardar en la propia aplicación junto con todas nuestras otras construcciones.

3. Programación por bloques

La programación por bloques se desarrolló para introducir conceptos de programación a edad temprana. Esta metodología nos permite desarrollar una secuencia lógica y ordenada de instrucciones mediante comandos y conexiones gráficas para encontrar una solución a un determinado problema. Los bloques son figuras que representan eventos o funciones individuales que se conectan entre sí para crear la secuencia de instrucciones o programa.

En nuestro taller conoceremos las instrucciones y posibilidades que ofrece la programación por bloques con TinkerCAD, los programas compartidos por la comunidad que podemos reutilizar y adaptar y crearemos algunos programas para construir figuras, como una pelota de Pikler partiendo de una esfera, que podremos guardar en la propia aplicación junto con todos nuestros programas.

La clave del planteamiento del taller es hacer el mismo diseño 3D tanto de la forma tradicional con un software propio para ello como mediante la programación por bloques lo que llevará al desglose de los elementos y fases que se han de concatenar para realizar la construcción. Los objetos creados por cualquiera de las dos vías podrán imprimirse en una impresora 3D lo que abre posibilidades para el desarrollo de materiales manipulativos para el aprendizaje de las matemáticas.

4. Tus clases

TinkerCAD está enfocado hacia el trabajo colaborativo y dispone de herramientas para poder seguir el trabajo de los alumnos y tutorizar sus tareas. En su web se pueden encontrar gran cantidad de modelos accesibles y editables. También dispone de tutoriales paso a paso para aprender a manejar las diferentes opciones de la herramienta.

En el siguiente site se puede se recogen las opciones que se trabajarán en el taller y opciones, explicadas mediante vídeos, para construir diferentes elementos como geoplanos y rosetones:

https://sites.google.com/view/aprendiendo-con-tinkercad/introducci%C3%B3n

Referencias

López Irastorza, José Manuel (2021). Site: Aprendiendo con TinkerCAD. https://sites.google.com/view/aprendiendo-con-tinkercad

López Irastorza, José Manuel (2015). Repositorio de TinkerCAD:https://www.tinkercad.com/users/1DcYBpu6MED-kafesne

TaR101 Las Regletas Cuiseanire: desde las líneas poligonales hasta los problemas de optimización

Marcos Marrero Cárdenas
marcosmarrerocardenas@gmail.com
Ceip Isaac de Vega (San Isidro, Granadilla de Abona, Tenerife, Islas Canarias).

Núcleo temático: Recursos para el aula.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Primaria.

RESUMEN

Las Regletas de Cuisenaire, pese al paso del tiempo, siguen siendo un recurso extraordinario para plantear situaciones didácticas ricas y desarrollar conceptos matemáticos.

Este recurso es muy conocido por los docentes (principalmente en Educación Infantil y Primaria). Sin embargo, muchas veces las actividades quedan reducidas a juegos lúdicos y, esporádicamente, a la enseñanza de las operaciones básicas.

En este taller, los asistentes podrán descubrir a través de la manipulación del material, otras muchas posibilidades que ofrece este recurso para su práctica de aula. Una batería de actividades que, a través de las conexiones entre unos bloques de contenidos y otros, pemitirá a los participantes explorar relaciones, establecer conexiones y plantear hipótesis y conjeturas con otros bloques como la medida, la geometría o el tratamiento de la información.

El tallerista expondrá pequeños fragmentos de vídeos de aula (evidencias) para su análisis didáctico, intercalándolos constantemente con la práctica manipulativa de las actividades planteadas.

Palabras clave: Regletas, Cuisenaire, Primaria.

1. Organización

En pequeños grupos de 3-4 participantes (aunque dependerá del material disponible).

Las regletas cuisenaire se pondrán en cada grupo a disposición de los participantes para ir realizando las actividades y poder plantear preguntas a través de la manipulación.

2. Videos de aula

El tallerista irá exponiendo vídeos de aula (taller basado en evidencias de aula) para mostrar las ideas principales de cada actividad y, además, ir realizando un análisis didáctico de la situación expuesta:

¿Cuál es el objetivo de la actividad?

¿Cómo se ha organizado el aula?

¿Qué recursos se necesitan?

¿Qué situaciones se han planteado para conectar con el alumnado?

¿Qué preguntas se realizan para invitar al alumnado a participar, observar, relacionar, preguntar, etc?

¿Qué dificultades suele presentar la actividad desde el punto de vista matemático?

¿Qué variantes hay previstas para atender a la diversidad?

3. Parte práctica del taller

El elemento central del taller es la interacción y práctica de los participantes junto con el tallerista a través de la manipulación del material.

El objetivo principal de este taller es proponer actividades matemáticas interesantes que le permitan a los asistentes conocer en mayor profundidad las posibilidades que ofrece este material en todos los niveles de Primaria.

4. Actividades del taller

Durante el taller ser realizarán diversas propuestas para trabajar muchos conceptos matemáticos que forman parte del Curriculum básico de Educación Primaria:

- Segmento y Línea poligonal: polígonos y sus propiedades.

El alumnado de 3.º de Primaria investiga sobre las lineas poligonales

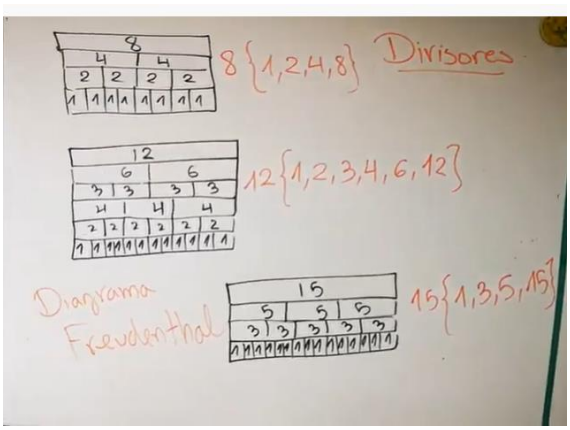
El alumnado de 4.º de Primaria investiga sobre la clasificación de los cuadriláteros y sus propiedades y los paralelogramos.

- Cuadrado vs Rectángulo: potencias al cuadrado, área y perímetro.

El alumnado de 5.º de Primaria investiga sobre el área y perímetro y la relación con las potencias al cuadrado.

El alumnado de 5.º de Primaria investiga sobre las potencias al cuadrado a través de las Pirámides de Egipto.

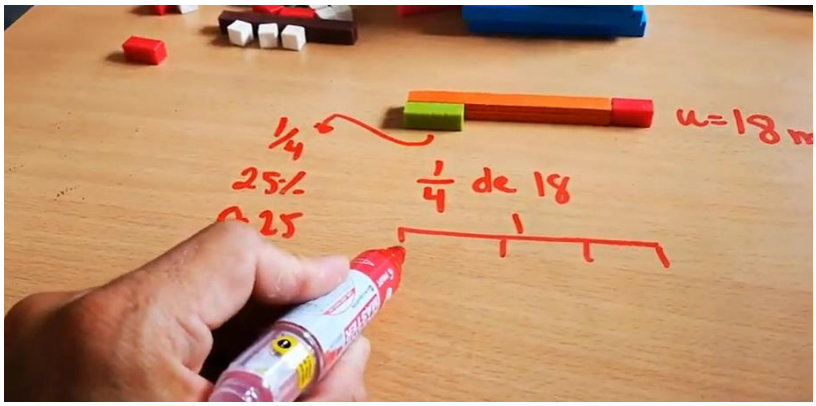
- Divisores, números primos y números compuestos.



El alumnado de 3.º de Primaria investiga sobre los divisores.

El alumnado de 3.º de Primaria investiga sobre los divisores del 24.

- Fracción-Decimal-Porcentaje: fracciones equivalentes, fracción de un número.

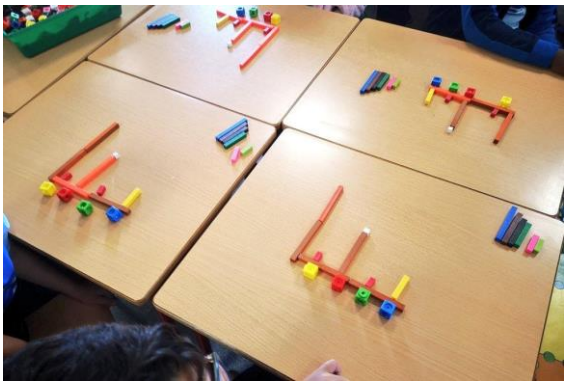


El alumnado de 6.º de Primaria modelizando con las regletas “Si vendo ¾ de 18 kg ¿Cuántos Kg me faltan por vender?”

- Medida: longitud, área, volumen y capacidad (desde el concepto hasta la optimización).

El alumnado de 6.º de Primaria trabajando volumen y capacidad: desde el cm^3, hasta el dm^3 y los cambios de unidad.

- Estadística y tratamiento de la información: diagrames de barras, media, moda, etc.



El alumnado de 1.º y 2º de Primaria recogen la información de una encuesta sobre la fruta: “¿Qué fruta creen que es más cara: plátano, fresa, kiwi o arándanos?”.

Referencias

BERMEJO, V. (2014). Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor. CCS. Madrid.

BLASCO et al, GRUPO CERO (1990). Materiales curriculares para la Educación Primaria. II Primer ciclo. Edelvives. Valencia.

BRISSIAUD, R. (1989). El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos. Visor. Madrid.

CANALS, M. (2011). Los dossiers de Maria Antònia Canals. Las Regletas. Octaedro. Barcelona.

CANALS, M. (2016). Los dossiers de Maria Antònia Canals. Medida y geometría. Octaedro. Barcelona.

CHAMORRO, M. (2005). Didáctica de las matemáticas para Educación Infantil. Pearson Educación. Madrid.

CONSTANCE, K. (1982). El número en educación preescolar. Visor. Madrid.

CONSTANCE, K. (1988). El pensamiento matemático en los niños. Visor. Madrid.

CONSTANCE, K. (1989). Reinventando la aritmética II. Visor. Madrid.

CONSTANCE, K. (1995). Reinventando la aritmética IIII. Visor. Madrid.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. (2007). Números en color. Acción y reacción en la enseñanza-aprendizaje de la matemática. CCS. Madrid.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. (2013). El número de 2 cifras. CCS. Madrid.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. (2014). La resolución de problemas matemáticos. Grupo Mayéutica. Madrid.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. (2014). Enséñame a contar y a no contar. Grupo Mayéutica. Madrid.

FERRERO, L. (2001). El juego y la matemática. La Muralla. Madrid.

GADINO, A. (1996). Las operaciones aritméticas, los niños y la escuela. Magisterio del Río de la Plata. Argentina.

GARCÍA MARTÍNEZ, S. (2010). Resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria. Trillas. México.

GATEÑO, C. (1962). Elementos de la matemática moderna con números en color. Cuisenaire de España. Madrid.

GATEÑO, C. (1966). Aritmética con números en color. Los números hasta el 100. Cuisenaire de España. Madrid.

GOUTARD, M. (1964). Catorce charlas sobre números en color. Cuisenaire de España. Madrid.

NCTM (2000). Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla.

POLYA, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Trillas. México.

TaR102 Algoritmos OAOA para el desarrollo del cálculo mental

Marcos Marrero Cárdenas
marcosmarrerocardenas@gmail.com
Ceip Isaac de Vega (San Isidro, Granadilla de Abona, Tenerife, Islas Canarias).

Núcleo temático: Recursos para el aula.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Primaria.

RESUMEN

Desde hace más de 40 años, las diferentes Sociedades de Profesores de Matemáticas llevan reclamando un cambio radical en el trabajo de las 4 operaciones básicas en Educación Primaria. Sin embargo, a día de hoy, la propuesta que sigue imperando en más de un 90% de las escuelas es la enseñanza de Algoritmos Tradicionales de las Operaciones Aritméticas (ATOA). Sigue siendo la tónica habitual: “me llevo una”, “cero al cociente y bajo la cifra siguiente”, “le pido prestado al vecino”

En este taller, los participantes podrán practicar Otros Algoritmos para las Operaciones Aritméticas (OAOA): algoritmos abiertos y flexibles, basados en las propiedades de las operaciones y que verdaderamente desarrollan un calculo mental con significado, sentido numérico y estimación. Estos algoritmos se vienen proponiendo desde los años 60, no son nuevos. No obstante, no forman parte del “ADN didáctico” de la mayoría de los docentes.

Palabras clave: Algoritmos, Cálculo, Operaciones.

1. Organización

En pequeños grupos de 3-4 participantes.

Se les repartirá a cada asistente una serie de fichas de trabajo para la parte práctica. Fichas para trabajar el cálculo mental y la estimación a través de las operaciones.

2. Videos de aula

El tallerista irá exponiendo vídeos de aula (taller basado en evidencias de aula) para mostrar las ideas principales de cada actividad y, además, ir realizando un análisis didáctico de la situación expuesta:

¿Qué procesos cognitivos se aprecian en esta propuesta de cálculo que no se observa eb los algoritmos tradicionales?

Desde el punto de vista de significado de las operaciones ¿Qué diferencias observan con los algoritmos tradicionales?

¿Qué importancia tiene la estimación previa en las operaciones y cómo trabajarla?

Desde el punto de vista de la atención a la diversidad ¿qué ventajas tiene enseñar, y por tanto saber resolver, una misma operación de varias maneras?

¿Qué papel tienen la calculadora en las operaciones básicas? ¿Qué actividades podemos plantear didácticamente?

¿Cómo se pueden contextualitzar las operaciones aritméticas para que cada número tengo un significado propio?

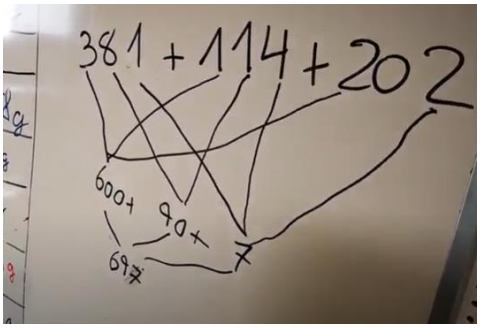
3. Parte práctica del taller

El elemento central del taller es la interacción y práctica de los participantes junto con el tallerista para practicar dialogar en relación a los algoritmos: validez, sentido y significado, importancia de la estimación, flexibilidad numèrica, desarrollo del cálculo mental (entendido este como aquel que no necesita ningún registro escrito).

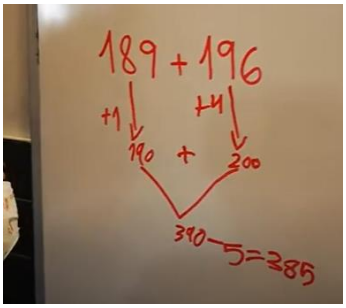
4. Actividades del taller

Durante el taller se realizarán 4 pequeñas prácticas:

- Práctica 1: Algoritmo de la suma (suma por descomposición, suma por redondeo).

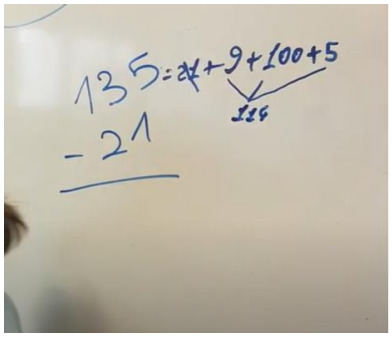


El alumnado de 3º de Primaria realizando la suma a través del diagrama en árbol.

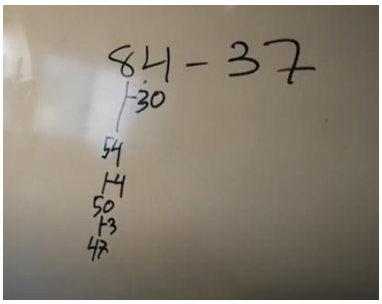


El alumnado de 2º de Primaria realizando la suma por redondeo.

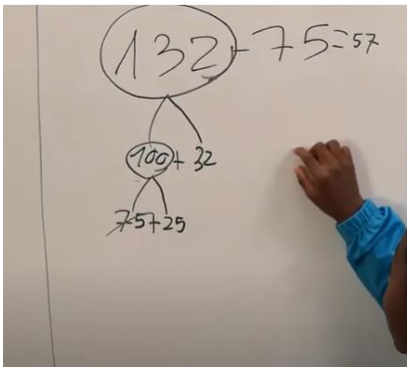
- Práctica 2: Algoritmo de la resta (resta completando, resta sucesiva parcial y resta compensando -propiedad fundamental de las operaciones-).



El alumnado de 3.º de Primaria resuelve la resta a través de la acción de completar para calcular la diferencia.

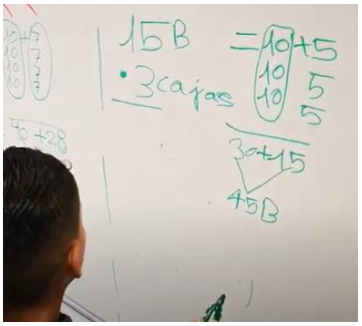


El alumnado de 4.º de Primaria resuelve la resta a través de restes sucesivas parciales.

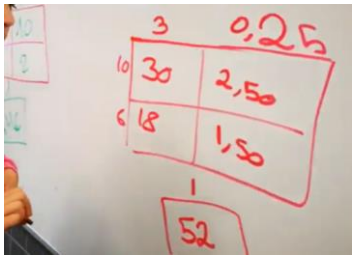


El alumnado de 5.º de Primaria resuelve la resta descomponiendo de forma óptima.

- Práctica 3: Algoritmo de la multiplicación (propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, equivalencia doble y mitad, multiplicación por redondeo).

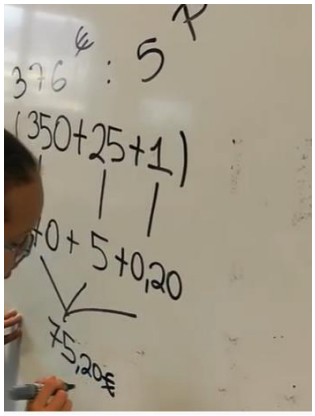


El alumnado de 3.º de Primaria resuelve una multiplicación descomponiendo previamente.



El alumnado de 5.º de Primaria resuelve la multiplicación con decimales, aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma (organización en tabla).

- Práctica 4: Algoritmo de la división (descomposición con múltiplos del divisor).



El alumnado de 6º de Primaria resuelve la división a través de la descomposición, aplicando la relación Fracción-Decimal en el resto.

Referencias

BERMEJO, V. (2014). Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor. CCS. Madrid.

BLASCO et al, GRUPO CERO (1990). Materiales curriculares para la Educación Primaria. II Primer ciclo. Edelvives. Valencia.

BRISSIAUD, R. (1989). El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos. Visor. Madrid.

CANALS, M. (2011). Los dossiers de Maria Antònia Canals. Las Regletas. Octaedro. Barcelona.

CANALS, M. (2016). Los dossiers de Maria Antònia Canals. Medida y geometría. Octaedro. Barcelona.

CHAMORRO, M. (2005). Didáctica de las matemáticas para Educación Infantil. Pearson Educación. Madrid.

CONSTANCE, K. (1982). El número en educación preescolar. Visor. Madrid.

CONSTANCE, K. (1988). El pensamiento matemático en los niños. Visor. Madrid.

CONSTANCE, K. (1989). Reinventando la aritmética II. Visor. Madrid.

CONSTANCE, K. (1995). Reinventando la aritmética IIII. Visor. Madrid.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. (2007). Números en color. Acción y reacción en la enseñanza-aprendizaje de la matemática. CCS. Madrid.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. (2013). El número de 2 cifras. CCS. Madrid.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. (2014). La resolución de problemas matemáticos. Grupo Mayéutica. Madrid.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. (2014). Enséñame a contar y a no contar. Grupo Mayéutica. Madrid.

FERRERO, L. (2001). El juego y la matemática. La Muralla. Madrid.

GADINO, A. (1996). Las operaciones aritméticas, los niños y la escuela. Magisterio del Río de la Plata. Argentina.

GARCÍA MARTÍNEZ, S. (2010). Resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria. Trillas. México.

GATEÑO, C. (1962). Elementos de la matemática moderna con números en color. Cuisenaire de España. Madrid.

GATEÑO, C. (1966). Aritmética con números en color. Los números hasta el 100. Cuisenaire de España. Madrid.

GOUTARD, M. (1964). Catorce charlas sobre números en color. Cuisenaire de España. Madrid.

NCTM (2000). Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla.

POLYA, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. Trillas. México.

TaR103 StatWars: Recursos para enseñar probabilidad

Anabel Forte Deltell
Anabel.forte@uv.es
Facultat de Ciencias Matemáticas. Universitat de València

Núcleo temático: Recursos para el aula / Comunicación y divulgación

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato

RESUMEN

La idea del taller será dar a conocer algunos recursos para enseñar probabilidad desde las edades más tempranas de una manera intuitiva y divertida. Desde el uso de gomets para estudiar visualmente las frecuencias al lanzamiento de chinchetas para profundizar en el modelo binomial, pasando por trabajar la definición conceptual de probabilidad.

Este taller deriva de los conocimientos adquiridos y los materiales desarrollados en el marco del proyecto *StatWars: El imperio de los datos*, promovido por la red Española de Bioestadística y financiado por la Fundación Española para Ciencia y Tecnología.

Palabras Clave: Probabilidad, Azar, Modelos Probabilísticos

TaR105 Los datos sugieren…

Lluís Mora Cañellas
lmora1@xtec.cat
INS Cabrils (Barcelona)

Núcleo temático: Recursos para el aula, Procesos

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

Los datos son, y siempre han sido, fundamentales para entender el mundo. Pero hacen falta herramientas y saber utilizarlas para obtenerlos e interpretarlos adecuadamente. Y está interpretación nos ayudará a tomar decisiones, a responder preguntas o a resolver problemas.
Formular preguntas, recoger y analizar los datos y finalmente, interpretarlos para elaborar conclusiones, son las herramientas que usaremos en el taller para ver que los datos sugieren caminos más que demostrar opiniones. Y también veremos como el trabajo con datos nos lleva a generar modelos matemáticos de situaciones donde el azar y la aleatoriedad tienen un papel relevante. Es a partir de estos modelos cuando podemos elaborar previsiones que nos ayuden a generar nuevo conocimiento. Este método de trabajo, que replicaremos en el taller, también es aplicable a resolución de problemas, a proyectos tecnológicos o a metodología científica. Por tanto, la metodología nos permitirá conectar ámbitos diversos.

Palabras clave: Experimentar, Datos, Analizar, Previsión, Modelizar

TaR106 Diseño de tareas para el desarrollo del pensamiento algebraico

Antonio Javier Moreno Verdejo
amverdejo@ugr.es
Universidad de Granada
Facultad de Educación

Núcleo temático: Recursos de aula, procesos.

Modalidad: Taller.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

RESUMEN

El taller se plantea como objetivo sugerir propuestas para abordar el desarrollo del sentido algebraico. La consideración del aprendizaje funcional, la noción de competencia y de sentido algebraico amplía la visión del álgebra en la que no solo se tiene que tener en cuenta la parte estructural simbólica, sino que se debe ampliar esta visión para presentar el álgebra como la generalización y la expresión de propiedades que hace uso de un sistema acordado de símbolos.

Palabras clave: Sentido Algebraico, Aprendizaje Funcional, Competencia Matemática.

TaD001 “Matemáticas en la calle”: materiales para enseñar divulgando

Mª Elvira García Montenegro
marielmates@gmail.com
IES José García Nieto. Las Rozas (Madrid)
Lorenzo Lozano Jiménez
lorenzo.lozanojimenez@educa.madrid.org
IES Las Américas. Parla (Madrid)
Victor Monterreal Blázquez
vmonterreal@gmail.com
IES Satafi. Getafe (Madrid)
Purificación Montesinos Comino
montesinos64@hotmail.com
IES Prado de Santo Domingo. Alcorcón (Madrid)
Miembros de la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas Emma Castelnuovo

Núcleo temático: Comunicación y divulgación. Recursos para el aula

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato

RESUMEN

Se trabajará con materiales de “Matemáticas en la calle” (Madrid) con el objetivo de ver la capacidad divulgativa de éstos. Se explicarán los materiales, reglas de uso y variantes posibles. Los asistentes realizarán las actividades propuestas con estos materiales y se sacarán conclusiones para su utilización en el aula así como su valor didáctico.

Palabras clave: Materiales, Divulgación, Aprendizaje, Aplicación, Aula

1. Justificación del taller

La Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas “Emma Castelnuovo” realiza en Madrid desde el año 2017 el evento “Matemáticas en la calle”. Consideramos muy importante para las JAEM de Valencia difundir la importancia de este evento para acercar las Matemáticas a todo el mundo y a su vez, ver algunos materiales que son aptos para este tipo de actividades. Muchos de los materiales que se

utilizan proceden de actividades de aula, pertenecen a la Sociedad o bien han sido creados para Matemáticas en la calle y se han adaptado para que sean asequibles a todo el público, pero sin perder su valor didáctico y los objetivos que se pretenden conseguir con ellos a nivel educativo y formativo.

Queremos animar a otras Sociedades de Profesores de Matemáticas a realizar en sus ciudades o pueblos la actividad Matemáticas en la calle ya que, además de su valor divulgativo, supone para nosotros como profesores una continua actualización de materiales didácticos y manipulativos que una vez utilizados en el aula, se adecúan para que sean también una herramienta útil para cualquier persona que tenga cierta curiosidad por las matemáticas.

Matemáticas en la calle

2. Desarrollo del taller

Para el desarrollo del taller se va a seguir el formato de una actividad que realizamos en la Sociedad y que llamamos “Entre maestros”. Se trata de exponer, en este caso, cómo se ha ideado ese material didáctico, sus objetivos fundamentales, su aplicación didáctica, sus puntos fuertes y si se ha detectado algún fallo. Después de la exposición de cada material, los asistentes desarrollarán una actividad de acercamiento al uso de ellos y sacarán sus propias conclusiones a la vez que se llegarán a posibles nuevas aplicaciones y ampliaciones de uso de los mismos.

En resumen:

- Exposición breve de cada material:

Explicación del material

Reglas de la actividad

Objetivos, nivel educativo y aplicación didáctica

- Realización por parte de los asistentes de las actividades propuestas
- Conclusiones generales y nuevas aplicaciones

3. Materiales del taller

Dado que las actividades de “Matemáticas en la calle” son muchas y muy amplias, hemos decidido aportar a las JAEM en este taller una muestra que recoja varios campos de actuación a nivel formativo, divulgativo y de aula que consideramos importantes:

- **Juegos numéricos.**

  Se presentarán diferentes actividades numéricas (juego de mesa de cálculo mental, cadenas de múltiplos y divisores, juego del 100, juego de divisiones). Estos juegos cubren un campo muy amplio de aplicación dada su adaptabilidad a diferentes niveles educativos. En un evento del tipo de “Matemáticas en la calle”, es fundamental que pueda participar el público en general partiendo de sus conocimientos previos.

Juegos numéricos

Juegos numéricos

- **Puzzles geométricos. Movimientos en el plano**

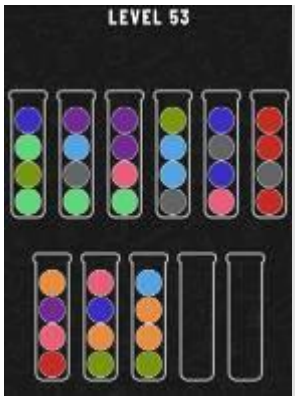
  Se presentarán diferentes puzzles en los que se obtienen unos polígonos a partir de la descomposición otros. También se presentará el puzzle del tablero de ajedrez.

  Se presentará el estudio que se puede hacer sobre movimientos en el plano con el uso de las baldosas de Truchet. Con ellas se puede iniciar un trabajo de investigación sobre la movimientos y llegar a diferentes niveles de dificultad y profundización.

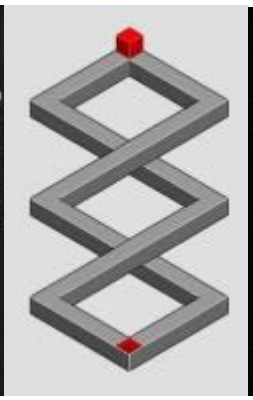
Puzzle del ajedrez y baldosas de Truchet

- **APPS Matemáticas.**

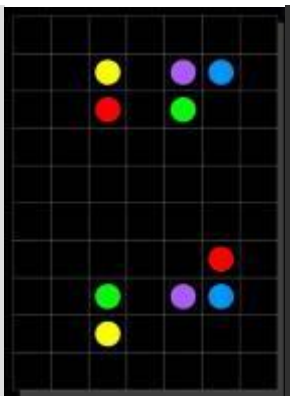
  Es indudable la presencia en nuestras vidas de teléfonos móviles y tablets, lo que se puede aprovechar para desarrollar nuestro talento matemático a través de las aplicaciones que podemos descargar. Expondremos una pequeña muestra y sus aplicaciones.



Ball Sort puzzle

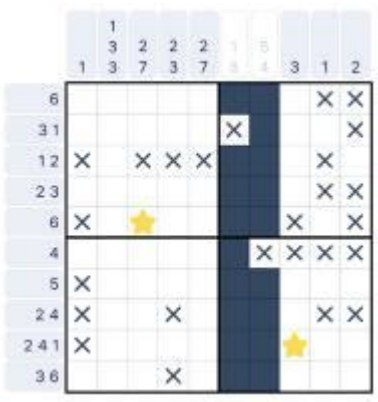


Hocus



Knots

Math games



Nonogram

One line

Pythagorea

Square paint

- **Lanas y Matemáticas.**

  A través del tejido se pueden observar, comprobar y tocar muchas de las propiedades de las matemáticas. Observamos los 5 poliedros regulares hechos con lana.

Poliedros regulares

Veremos la cinta de Möbius y sus características

Cinta de Möbius

Se expondrán corales de lana y se estudiará qué tienen que ver con las matemáticas

Corales

También se trabajarán con estos materiales propiedades de hexágonos, triángulos y visualización de fracciones, estudio de diagonales de polígonos y la veremos la bufanda π.

- **Combinatoria.**

  En esta mesa vamos a aprender jugando, dibujando y reflexionando conceptos y símbolos de combinatoria aplicándolos en diversas situaciones:

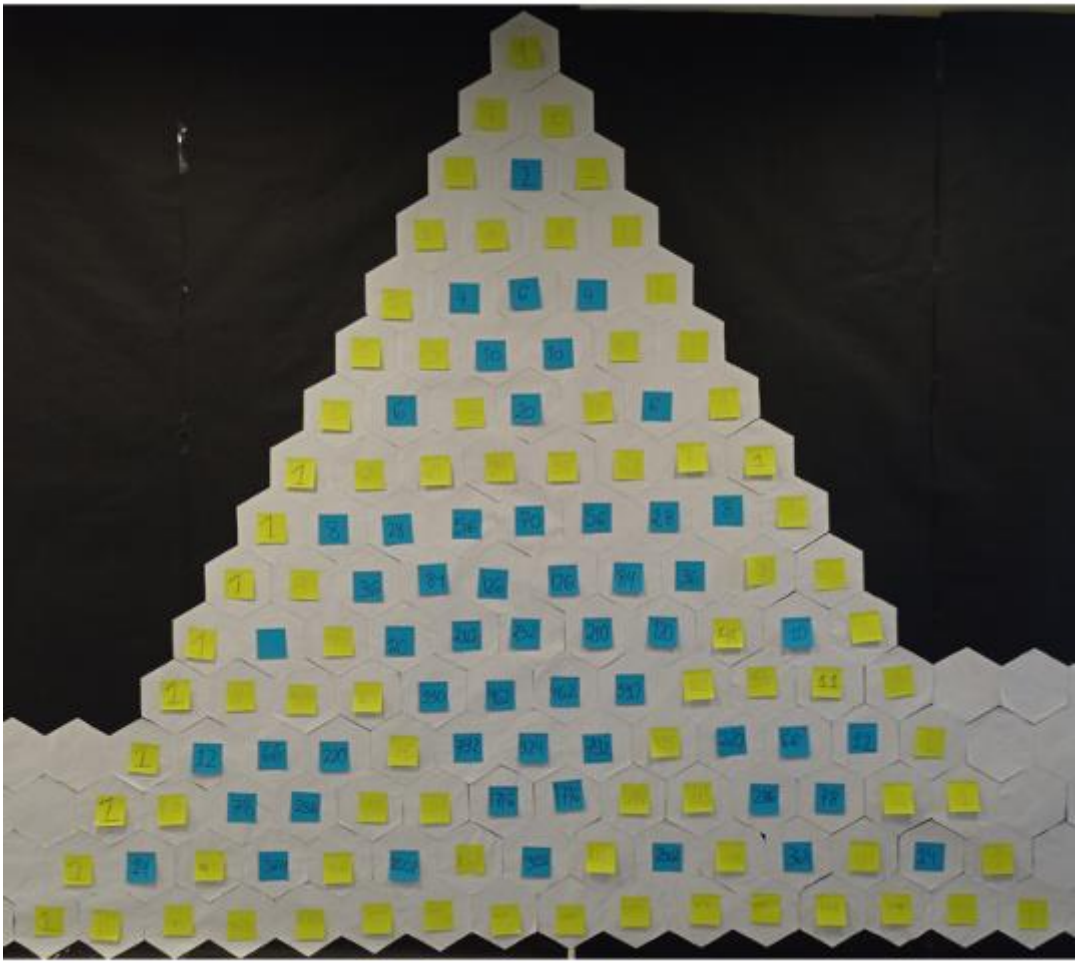
  a) Se presentará una actividad manipulativa para llegar al concepto de factorial de un número natural *n* junto con historia del símbolo de factorial.

  b) Juego para analizar permutaciones. Juego de las cuerdas.

  c) Relación entre las combinaciones y las diagonales de un polígono. Juego de los abrazos.

  d) Construcción del triángulo de Pascal con post-it de dos colores para ver los conceptos de combinatoria que aparecen en él y la relación con el fractal de Sierpinski

Triángulo de Pascal con post-it cuadrados amarillos y azules



Triángulo de Pascal con hexágonos blancos y post-it cuadrados amarillos y azules

4. Objetivos y conclusión

Aunque los materiales de este evento son muy numerosos, pretendemos que los asistentes vean algunos ejemplos, saquen ideas para sus aulas y también concienciar que la divulgación se debe convertir en una parte importante del trabajo de los matemáticos.

También pretendemos que los asistentes tengan un acercamiento a los materiales didácticos y a la creación de los mismos para sus aulas. Ees fundamental para conseguirlo, ser parte del proceso que se vive cuando se trabaja con actividades manipulativas. Es necesario probar los materiales, compartirlos con otros profesores y ver sugerencias de uso y ampliación.

TaD002 Con las matemáticas yo resuelvo situaciones

Lluís Bonet Juan
l.bonetjuan@edu.gva.es
CEFIRE Alacant

José Luis Gavilán Ortega
jl.gavilanortega@edu.gva.es
IES Jorge Juan Alacant

Domingo Rueda Morales
d.ruedamorales@edu.gva.es
IES La Mola Novelda (Alacant)

Núcleo temático: Procesos y conexiones.

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

Lanzando el reto ¿Y vosotros … qué pensáis de esto? finaliza cada una de las situaciones que se plantean a través de vídeos cortos donde el propio alumnado es el protagonista. En cada uno se presenta una situación accesible y cercana al alumnado sacada de la vida cotidiana y con datos reales. El desafío moviliza el uso de estrategias múltiples desde el mismo instante de su creación convirtiendo cada vídeo en un pequeño proyecto con el que potenciar múltiples de las competencias clave. Motivación y creatividad forman parte del éxito de estos materiales didácticos que proponen retos entre iguales.

Palabras clave: Situaciones de Aprendizaje, Trabajo Colaborativo, Creatividad

Con la nueva Ley Educativa LOMLOE el modelo educativo se adapta a una sociedad en continuos cambios donde las metodologías de enseñanza y aprendizaje deben hacer frente a los retos e intereses del siglo XXI.

Hace ya unos años, pusimos en marcha un proyecto de diseño, creación y resolución de situaciones reales de aprendizaje con una particularidad: ser problemas abiertos que lanzan el reto ¿y vosotros qué pensáis de esto?
Un trabajo colaborativo y creativo entre docentes y alumnado con el que movilizar múltiples competencias a lo largo de todo un proceso que finaliza con la producción de un vídeo con su material didáctico complementario.

Está demostrado que el rendimiento del alumnado mejora cuando trabaja con entusiasmo e ilusión afrontando unos retos en los que seran protagonistas directos. La resolución de las situaciones matemáticas que creamos requieren formular conjeturas, razonar, conectar con otras materias y con la realidad, resolver, comprobar y finalmente comunicar, todo ello con el apoyo de herramientas tecnológicas.

1. Objetivos

El diseño y creación de situaciones de aprendizaje a través de los vídeos para su posterior resolución ha determinado el objetivo de nuestro proyecto, para hacer descubrir unas matemáticas más cercanas a la realidad. Un procedimiento participativo y creativo capaz de ilusionar y de poner en valor las competencias del alumnado. Y sobre todo aprender y convencerse de que las matemáticas te ayudan en la toma de decisiones, acudiendo a una determinada oferta y no a otra, te ayudan a ser más crítico, prestando atención a la publicidad engañosa, te permiten entender las cosas que pasan en tu alrededor, con situaciones ridículas de anumerismo, o descubrir incluso si tu alimentación es o no saludable. En definitiva, te hacen ser más libre en la toma de decisiones que se presentan en todo momento.

Tomamos la decisión de hacer uso de todo aquello que pueda aportar un plus en el proceso de enseñanza-aprendizaje: medios audiovisuales, calculadora, GeoGebra, etc. en la creación de nuestras situaciones de aprendizaje. ¿Y por qué dejar los vídeos abiertos sin la solución? Porque esta línea de trabajo permite llevar a todas las aulas estos vídeos como material didáctico y trabajar con las propuestas que plantean.

Para nosotros es primordial encontrar un modelo de trabajo colaborativo y en equipo para investigar, desarrollar y resolver situaciones reales donde para ello se requiere movilizar múltiples estrategias. Posteriormente crear diálogos, grabar, montar y escribir los subtítulos de un vídeo con el que convencerse de cómo las aportaciones y fortalezas individuales enriquecen el resultado final del grupo de trabajo. Resaltar así el papel del alumnado como protagonista directo de las situaciones y a la vez cómplice, de todo el proceso creativo.

2 Resultados

A continuación, se describen los vídeos creados con el alumnado junto con los contenidos desarrollados. Todo este material se encuentra disponible en el Canal de Youtube INTEGRANT MATEMÀTIQUES junto con otros materiales audiovisuales: presentaciones de trabajos desarrollados por nuestro alumnado, tutoriales para el aprendizaje y uso de calculadora o proyectos vídeoMAT.

2.1 Problemas abiertos

- ¡Qué lio con las pizzas!

https://youtu.be/0bUlgRB1hT4

2º ESO. Operaciones y cálculo de porcentajes. Comparación de ofertas. Organización de la información y economía doméstica.

- ¿Y cuándo me compro la tableta?

https://youtu.be/EqWnH5Nfu5w

2º ESO. Comparación de descuentos.

- Rebajas de rebajas.

https://youtu.be/9GzeeivKEws

2º ESO. Descuentos sucesivos. Situaciones de anumerismo en las personas a la hora de realizar compras.

- No necesito Google Maps.

https://youtu.be/cxbIQCatJHE

4º ESO. Investigación sobre la geometría de La Tierra. Comparaciones entre las geometrías plana y esférica. Proporcionalidad y trigonometría.

- Contratiempos en la mudanza.

https://youtu.be/j33WY8nca-o

2º ESO. Teorema de Pitágoras. Funciones, facturas e impuestos.

- Códigos de barras estropeados.

https://youtu.be/vi8zs0mhgQo

2º ESO. Cálculo. Resolución de ecuaciones. Pensamiento computacional.

- Complicada elección del helado.

https://youtu.be/PStDKJpmUDk

3º ESO. Geometría. Cálculo de áreas y volúmenes.

- Pintamos un mural en el patio.

https://youtu.be/PStDKJpmUDk

3º ESO. Àreas y escalas.

- ¿En qué parking has dejado el coche?

https://youtu.be/b6P7E540iyM

3º ESO. Funciones a trozos.

Imagen 1. Problemas abiertos.

2.3 Proyectos vídeoMAT

Presentamos también nuestros proyectos vídeoMAT que se pueden encontrar en el mismo Canal de Youtube INTEGRANT MATEMÀTIQUES. A pesar de desarrollar la respuesta, siempre se dejan propuestas abiertas para seguir investigando sobre la pregunta que inicialmente se plantea.

Siempre se desarrollan situaciones matemáticas cercanas al alumnado y de actualidad y se crean diálogos para vídeos con una temática divertida que motiva al alumnado participante.

Algunas de estas ideas han sido las promotoras de proyectos interdisciplinares a nivel global de centro y además han sido galardonadas en el certamen vídeoMAT en Cataluña.

Imagen 2. Proyectos vídeoMAT.

3 Material didáctico

El material didáctico para cada una de las preguntas o retos es una posible forma de dar las respuestas que han surgido de la experiencia de aula. Tablas, gráficos, estrategias o nuevas preguntas que han aparecido en el desarrollo de la resolución

completan estos materiales que puede resultar al profesorado que las quiera plantear en sus aulas.

A continuación, se detalla un ejemplo con la propuesta ¿En qué parking has dejado el coche?

:

Imagen 3. Ejemplo de una de las situaciones.

Guillermo acude como cada sábado, al mercado central de Alicante. Hoy no ha encontrado un lugar en las calles que circundan el mercado por lo que ha decidido aparcar en el Parking La Lonja.

No ha dejado de sorprenderle la tarifa que tiene este parking, por la cantidad de decimales en el precio por minuto, ni tampoco le ha dejado indiferente, el hecho de que haya una tarifa máxima por día.

Pero le ha dejado completamente aturdido que la máquina indique que no acepta las monedas de 1 cts/€ ni las de 2 cts/€ y que por lo tanto, tampoco te devuelve estas monedas.

Imagen 4. Cartel con las tarifas del parking.

a) Construye la función que expresa la cantidad a pagar según el tiempo que se está aparcado a lo largo de un día.
b) ¿Qué te sugiere ese dato que indica que el máximo que se paga por día son 20,33 €?
c) ¿Cómo realiza la máquina los cálculos internamente para decirnos cuánto debemos pagar sin tener ningún conflicto como clientes?
d) ¿Cuánto se paga por 60 minutos de parking?

e) ¿Es correcto lo que nos han cobrado según el ticket de la imagen?

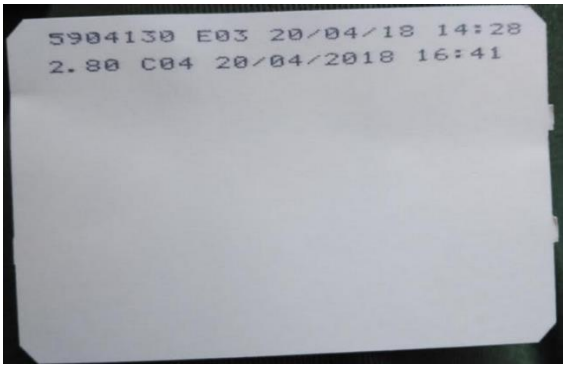


Imagen 5. Ticket del parking.

3.1 Material.

Calculadora científica, gráfica, hoja de cálculo.

3.2 Nivel educativo.

2º ESO – 3º ESO.

3.3 Orientaciones didácticas.

Con esta actividad el alumnado podrá resolver un problema real construyendo funciones y realizando aproximaciones conforme las realiza una máquina expendedora de tickets de parking. Cálculos con números decimales aprovechando las tarifas que tienen los parking y análisis de los resultados para fomentar el espíritu crítico.

3.4 Orientaciones técnicas.

Menú 1: Calcular.

Entrada y salida de datos predeterminados en formato de escritura natural.

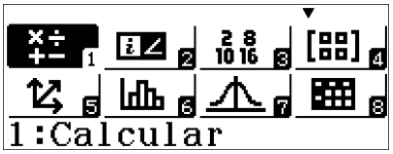


Imagen 6. Menú 1 de la calculadora.

3.5 Ejemplo de solución.

Una forma de resolver el problema puede ser la siguiente:

Para resolver nuestro problema se propone, como actividad de inicio, trabajar con la tarifa del Parking La Lonja del Mercado de Alicante, más sencilla para nuestro alumnado y que permitirá familiarizarse con aquello que ocurre a la hora de plantear la función que devuelve el precio a pagar en función del tiempo que se está aparcado así como los diferentes tramos existentes, para introducir las funciones a trozos.

Así pues, el precio a pagar *f(t)* en función del tiempo *t* (en minutos) que se está aparcado viene dado por:

$$f(t) = 0{,}021175 \cdot t\,, \quad t \geq 0$$

Se introduce el concepto de dominio de esta función, condicionado por la variable independiente *t* = tiempo y nos podemos ceñir a un día.

Se analiza, observando el ticket, si los cálculos que se realizan se ajustan a los datos que se proporcionan:

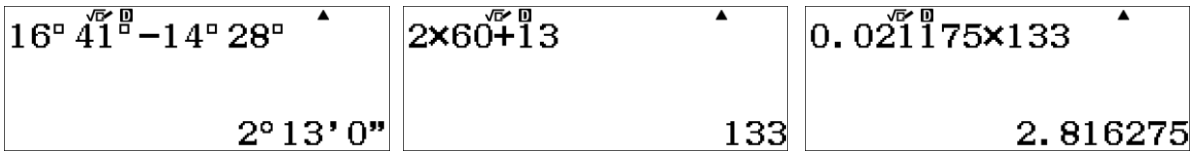


Imagen 7. Cálculos y verificaciones.

La máquina no admite monedas de 1 céntimo/€ ni de 2 céntimos/€, por lo que debe siempre realizar una aproximación por defecto en las centésimas con múltiplos de 5. Una aproximación por exceso supondría cobrar de más a los usuarios, lo cual podría acarrear problemas legales a la empresa.

Así pues, como se observa en el ticket de pago, el usuario ha abonado 2,80 €.

Se plantea si esta función se comporta de la misma forma a lo largo de las 24 horas ante el dato que proporciona el cartel de MÁXIMO DÍA: 20,33 €**.**

Se resuelve $f(t) = 20{,}33$

$$0{,}021175 \cdot t = 20{,}33 \;\rightarrow\; t = \frac{20{,}33}{0{,}021175} = 960{,}09\, min = 16\, horas$$

A partir de las 16 horas en el parking se paga 20,33 € hasta el final de la jornada.

Se puede entonces construir la correspondiente función a trozos que define la tarifa durante las 24 horas del día como:

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}021175 \cdot t & 0 \leq t < 960 \\ 20{,}33 & 960 \leq t \leq 1440 \end{cases}$$

Que también se puede expresar en función del tiempo en horas como:

$$f(t) = \begin{cases} 1{,}2705 \cdot t & 0 \leq t < 16 \\ 20{,}33 & 16 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

Se puede crear una clase donde compartir y ver los dos trozos de la función:

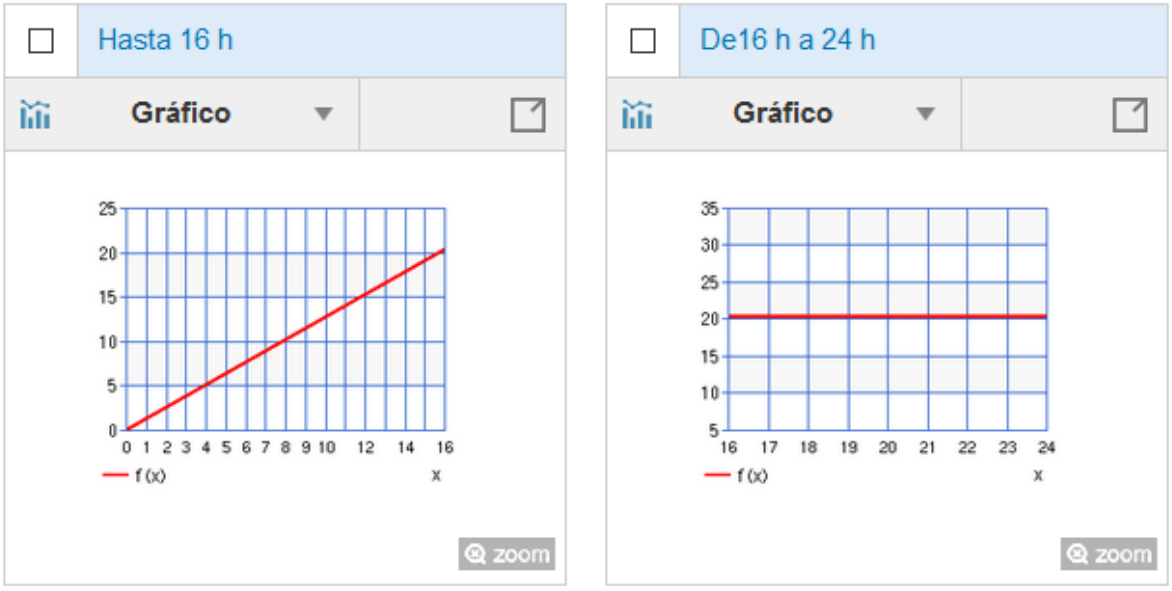


Imagen 8. Los dos trozos de la función que se construye.

Se ven ahora qué operaciones realiza la máquina para indicarnos el precio que se debe pagar, si no admite ni devuelve monedas de 1 céntimo/€ ni de 2 céntimos/€.

Imagen 9. Monedas que admite la máquina.

Se realiza la siguiente secuencia:

- Se multiplica el resultado por 100
- Se realiza la división entera entre 5
- Se multiplica ahora por 5 y se divide entre 100 (multiplicar por 0,05)

Se comprueba con el dato anterior de parking de 133 min:

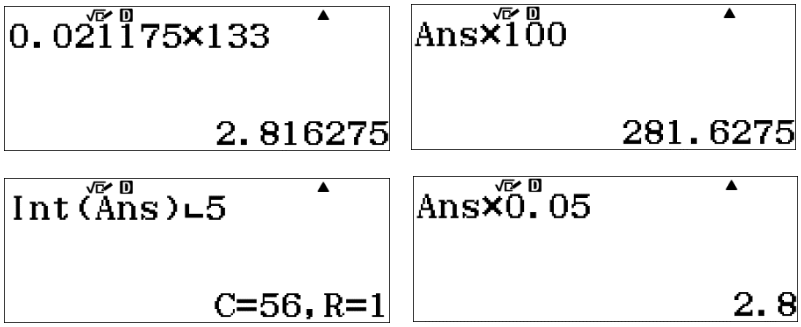


Imagen 10. Cálculos y verificaciones.

En la hoja de cálculo se pueden generalizar estos cálculos para diversos tiempos, bien sea en minutos o en horas.

Para ello se va al Menú 8: Hoja de calculo.

Imagen 11. Menú hoja de cálculo.

En la columna A se introducen diferentes valores para el tiempo (minutos en este caso)

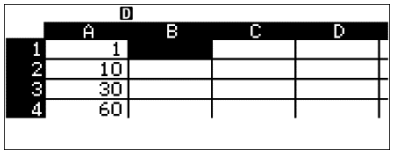


Imagen 12. Introducción de datos.

La columna B nos devuelve la tarifa que calcula la función $f(t) = 0{,}021175 \cdot t$

Para ello desde la tecla OPTN se selecciona la opción 1: Rellenar fórmula para rellenar las casillas deseadas.

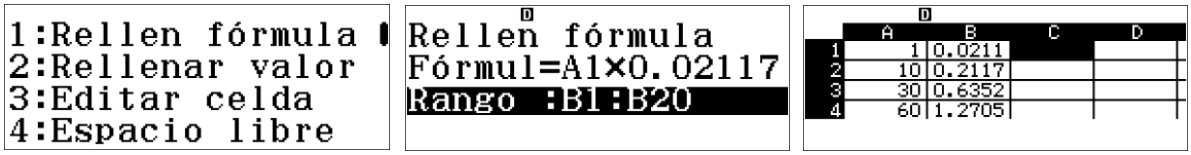


Imagen 13. Rellenar fórmulas para automatizar los resultados.

La columna C nos devuelve el importe ajustado que devuelve la máquina y que se simplificará con la fórmula siguiente:

$$Int(B1 : 0{,}05) \times 0{,}05$$

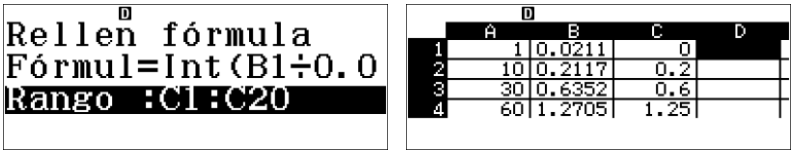


Imagen 14. Ajuste de las tarifas.

TaD10 La vida es una tómbola

Esther Roquette
esther.roquette@gmail.com
Colegio San Felipe Neri (Cádiz)

Tere Valdecantos Dema
matevalde@hotmail.com
SIPEP Entre dos aguas (Algeciras)

Núcleo temático: Comunicación y divulgación, Procesos

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria

RESUMEN

Dentro de las actividades que realiza el club de Ciencias del Colegio San Felipe Neri de Cádiz, dos días antes del sorteo se organizó una charla on line sobre la lotería de Navidad. Se habló de la historia de la lotería, del reparto de premios, de lo que recauda el Estado y de la probabilidad de ganar. En este taller pretendemos que el profesorado vuelva a la infancia para realizar las actividades que realizaron niños y niñas en el club de matemáticas del Colegio San Felipe Neri, dentro del taller de calculadora. La idea es que puedan hacer esa actividad en sus colegios cuando lleguen esas fechas cercanas a la navidad con *todo el pescado vendido*

Palabras clave: Lotería, Navidad, Problemas, Primaria

1. **La exposición y las preguntas**

   En el club de ciencias se hizo la exposición y fuimos lanzando preguntas que resolvieron días más tarde. En el taller la idea es que, cada vez que salga una pregunta, la vayan resolviendo en equipo.

1.1. Un poco de Historia

Aquí explicamos el comienzo de la lotería de navidad y las preguntas van sobre la *lotería de los números,* el primero sorteo de navidad.

La lotería entra en España en 1763 de la mano de Carlos III cuando abandona su reinado en Nápoles para asumir la corona Española. Cuando llega a nuestro país encuentra las arcas del estado muy mermadas a cuenta de tantas guerras sucesorias, por lo que tiene la *genial* idea de eliminar todo tipo de juegos de azar e instaurar la lotería italiana de manera que el 75 % de lo recaudado se lo quedara el estado, dejando el resto para premios.

Imagen 1. Carlos III.

El edicto decía: *Prohíbo que las personas estantes en estos reinos, de cualquier calidad y condición que sean, jueguen, tengan o permitan en sus casas los juegos de banca o faraón, baceta, carteta, banca fallida, sacanete, parar, treinta y cuarenta, cacho, flor, quince, treinta y una envidada, ni otros cualesquiera de naipes que sean de suerte y azar.* Había un total de 90 números posibles, de los que salían cinco premiados, llamados "extractos"

porque en el sorteo se extraían de un arca las bolas con números y los premios eran muy diversos, entre ellos:

- ***Extracto simple:*** *está el número que juegas*
- ***Extracto determinado:*** *está el número y en la posición que has dicho*
- ***Ambo:*** *dos números*
- ***Terno:*** *tres números*

1.1.1. Actividades

- Vamos a jugar al extracto determinado con un número primo de dos dígitos de modo que la suma de sus dígitos sea la posición que apostemos ¿Qué números pueden ser?
- En la Lotería primitiva actual hay un total de 49 números posibles, de los que se sacan 6 además del reintegro y el complementario. ¿Dónde hay más posibilidades: 5 de 90 o 6 de 49?

1.2. El Gordo

Explicamos cómo funciona la lotería de navidad actual y las preguntas van sobre el total de billetes, la máxima cantidad de dinero que se mueve y sobre el porcentaje de lo recaudado que se reparte en premios para compararlo con la primera lotería.

- Durante la invasión de Napoleón, Cádiz se convierte en capital de España. La incertidumbre en la administración estatal de lotería fue, junto con las estrecheces fiscales, uno de los factores que llevaron a las Cortes gaditanas de 1812 a aprobar una nueva modalidad de lotería, más previsible y de grandes posibilidades recaudatorias**: la lotería de billetes fragmentados en décimos,** conocida como "holandesa", "moderna" o simplemente "lotería nacional". A cambio de diez reales, el poseedor obtenía "cuarto de billete para el sorteo duodécimo, que se ha de celebrar en Cádiz el 18 de diciembre". Dos semanas antes, el 6 de diciembre, las Cortes habían autorizado al gobierno

de la regencia a hacer extensivo "a donde crea más útil y ventajoso al erario el establecimiento de la lotería nacional". **La nueva denominación indica que a partir de entonces no era el rey, sino la nación el sujeto pagador.** Al principio sólo se jugaba en Cádiz y San Fernando, pasando posteriormente a Ceuta e instalándose en Madrid el 28 de febrero de 1814.

En nuestros días, hay 100 000 números Los décimos son la unidad mínima del sorteo. Como su nombre indica, suponen la décima parte de un billete y es lo que se suele comprar en las administraciones y webs oficiales por un precio de 20 euros. Hay 1.720 décimos por cada número que se sortea; un billete son 10 décimos de la misma serie por lo que hay 172 billetes de cada número. En total se reparten 2 408 millones de euros.

Imagen 2 Décimo de 2022 con la imagen de *La virgen de la granada*

Además de los reintegros, los premios se distribuyen de la siguiente manera:

- El gordo: 400 000 € al décimo
- Segundo premio: 125 000 € al décimo
- Tercer premio: 50 000 € al décimo
- Dos Cuartos premios: 20 000 € al décimo
- Ocho Quintos premios: 6 000 € al décimo
- 1 794 pedreas: 100 € al décimo

1.2.1. Actividades

- ¿Cuánto valía un billete?
- ¿Cuántos décimos se ponen a la venta?
- ¿Cuánto dinero se pone en movimiento si se venden todos los décimos?
- ¿Qué porcentaje de lo recaudado se reparte en premios?

1.3. Los premios y Hacienda

Se explica cómo se tributa la ganancia y se pregunta por lo que hay que tributar por el segundo y tercer premio: los inferiores a 40 000 no tributan, todos los que superen dicha cantidad tendrán que darle el 20% a la Agencia Tributaria, descontando los primeros 40 000 €. Si se posee varios premios menores que superen los 40.000 euros, no hay que declararlos

1.3.1. Actividades

- ¿Cuánto paga a Hacienda un décimo con el segundo premio?
- ¿Cuánto paga a Hacienda un décimo con el tercer premio?

1.4. ¿Y qué dicen las matemáticas?

El cine ha hecho mucho daño con películas en las que cerebritos ganan un montón de dinero en las apuestas. Está el caso real de los Pelayos, pero se explica que era porque detectaban fallos físicos. Para evitar estos fallos, las bolas de navidad se revisan todos los años. Se hacen preguntas sobre las bolas y se propone una alternativa a la extracción con la calculadora científica y con geogebra. Hablamos de la esperanza matemática, haciendo un ejemplo donde sólo se cuenta con el gordo. En el taller hay que calcular la esperanza incluyendo todos los premios. Todas las bolas -100.000 correspondientes a todos los números que hay en el bombo y 1.807, al total de premios tienen el mismo peso y tamaño (3 gramos y 18,8 milímetros de diámetro).

Antiguamente solían ser talladas, proceso que modificaba el peso de la bola en cuestión. Sin embargo, en la actualidad se utiliza una técnica que no altera las características de las bolas y que consiste en grabar los números y letras en su superficie con láser.

1.4.1. Actividades

- ¿Qué volumen tienen las bolas del sorteo?
- Si se utiliza el comando *UniformeAleatoria* de Geogebra, hay un número que no tiene la misma probabilidad que los demás ¿cuál es? ¿cómo se te ocurre que lo arreglemos?
- Para ver si el juego es justo hay que ver su Esperanza Matemática: Calcular todos los premios con el descuento de hacienda (primero, segundo y tercero) y su probabilidad; calcular las probabilidades de cuartos, quintos y pedreas y calcular la esperanza matemática.
- Aun así, hay más premios: aproximaciones y reintegros. Hay que incluirlos para averiguar de manera exacta la esperanza matemática.

2. Conclusiones

El taller acaba explicando el peligro que hay en el juego con datos estadísticos sobre las apuestas por parte de adolescentes. Es cierto que el alumnado de quinto y sexto no están es esas estadísticas, pero no está de más ir concienciándolos sobre el peligro de las apuestas.

Referencias.

Lucena, Miguel. (2019). *La lotería en España: una fiebre del siglo XVIII* Historia National Geographic https://historia.nationalgeographic.com.es/a/loteria-espana-fiebre-siglo-xviii_13648

Montagut, Eduardo (2016). *La lotería Española fue creada por Carlos ///*. Nueva Tribuna https://www.nuevatribuna.es/articulo/historia/loteria-espanola-fue-creada-carlos-iii/20161122085500134047.html

Web oficial de loterías y apuestas del estado https://www.loteriasyapuestas.es/es/loteria-nacional

Tal004 La enseñanza estructurada en la resolución de problemas desde la perspectiva inclusiva

Ángeles Chico Gómez
angeles.chico@ddi.uhu.es
Universidad de Huelva

Nuria Climent Rodríguez
climent@ddcc.uhu.es
Universidad de Huelva

Inmaculada Gómez Hurtado
inmaculada.gomez@ddcc.uhu.es
Universidad de Huelva

Núcleo temático: Procesos, Inclusión

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria

RESUMEN

Como parte del desarrollo de una tesis doctoral, se han desarrollado un conjunto de talleres de Resolución de problemas con heurísticos con 4 niños diagnosticados con Síndrome de Asperger. Los problemas se trabajan atendiendo a dificultades de aprendizaje vinculadas al síndrome, fundamentalmente la afectación de la coherencia central y de la función ejecutiva. Los resultados refieren cómo aplicar los heurísticos puede reducir dificultades de organización o de atención sostenida; y desarrollar habilidades como la percepción de los detalles, la visualización y la tendencia al aprendizaje secuenciado. La metodología seguida en los talleres muestra potencial para trabajar con otros alumnos con dificultades en la resolución de problemas. En el taller con los profesores reflexionaremos sobre el uso del material, el papel de los heurísticos y el aprendizaje de los estudiantes.

Palabras clave: Resolución de Problemas, Heurísticos, Matemática Inclusiva, Material TEACHH, Diseño Universal de Aprendizaje

1. Introducción

La inclusión debe entenderse desde el método de enseñanza, la interacción en el aula, los materiales y herramientas que se emplean y la instrucción (Roos, 2013). Es por ello que los docentes requieren de dominio de contenido, pero también flexibilizar su metodología con el fin de no aplicar una diferenciación en el momento que se encuentra una necesidad específica o necesidad (Scherer, 2019), puesto que en un aula caben diversidad de estrategias, modos de pensamientos y habilidades. Nos situamos así en la perspectiva pedagógica de las relaciones del alumnado y su entorno de aprendizaje, con el objetivo de indagar cómo afectan ciertas estrategias de enseñanza de la matemática en el proceso de aprendizaje (Roos, 2013), concretamente en la resolución de problemas.

2. Marco teórico

2.1. Resolución de problemas y Síndrome de Asperger

El estudio que contextualiza este taller se focaliza en la resolución de problemas (en adelante, RP) con alumnado Síndrome de Asperger (en adelante, SA). Partimos de la RP por la oportunidad de abordar un conjunto de contenidos a través de una historia en la que pueden ser partícipes y contextualizar su propio proceso de aprendizaje, teniendo en cuenta la teoría de la coherencia central (Happé y Frith, 2010) y la consecuente afección de la capacidad para extraer información global de un contexto y de comprensión verbal. El síndrome de Asperger también se caracteriza por sufrir alteraciones en las funciones ejecutivas, tales como la flexibilidad de pensamiento, la autorregulación y la habilidad de organizar y predecir (Bae et al., 2015).

En este sentido, la estructuración de la resolución de problemas en fases (en el sentido de Polya, 1945) se aproxima a un aprendizaje secuencial (Klaren et al., 2017), que mejora la capacidad de ordenar objetivos y la consecución de estos a la hora de resolver un problema, y que por lo tanto influye también en la memoria de trabajo, también afectada por el SA (de Giambattista et al., 2019). Teniendo en cuenta las habilidades de visualización y de percibir detalles asociadas al SA (de Giambattista, 2019), la representación adquiere un rol decisivo al trabajar la RP (Llorca et al., 2009; Delisio et al., 2018). Diversos estudios han evidenciado la

eficacia didáctica de incluir la instrucción visoespacial cuando el alumnado presenta necesidades específicas de aprendizaje (Kribbs y Rogowsky, 2016). La representación resulta útil en las fases de identificación y comprensión de un problema, desde el punto de vista de reducir las dificultades derivadas de errores en la interpretación de los enunciados, usando para ello imágenes y pictogramas (Polo-Blanco et al., 2018; Polo et al., 2018). Por otro lado, la implementación de organizadores gráficos (Delisio et al., 2018) y diagramas (Llorca et al., 2009; Van Garderen et al., 2014) en las fases de planificación, ejecución y comprobación, favorece la organización y la autorregulación, al ir construyendo el proceso de resolución a través de la manipulación gráfica de los datos.

Destacamos, en concordancia con la perspectiva visual de la enseñanza, la aplicación de métodos transversales de carácter aumentativo, como el método TEACCH (*Tratamiento y Educación de niños/as con Autismo y problemas de Comunicación*). La incorporación de este método facilita dotar de claves visuales a cada una de las fases de resolución usando pictogramas e imágenes. En el contexto de enseñanza con alumnado SA, facilita el orden, la organización y el aumento de la autonomía del niño/a (Schoppler et al., 2013).

Otro enfoque didáctico que puede influir en el desarrollo de la RP es el Diseño Universal de Aprendizaje (DUA). Este se centra en diseñar y construir recursos, objetos, productos… que permitan a todas las personas desarrollar sus conocimientos, motivación e implicación con el aprendizaje (Alba et al., 2014).

> “El marco DUA estimula creación de diseños flexibles desde el principio, que presenten opciones personalizables que permitan a todos los estudiantes progresar desde donde ellos están y no desde donde nosotros imaginamos que están” (CAST, 2011, p. 3 cit. por Alba et al., 2014).

Los principios en los cuales se sustenta la aplicación del DUA a la enseñanza son: proporcionar múltiples medios de representación, proporcionar múltiples medios de acción y expresión y proporcionar múltiples formas de implicación (Rose y Meyer, 2002). El DUA, por tanto, justifica el diseño y construcción de diferentes recursos, objetos, etc. que aumentan la accesibilidad a la RP al máximo número de personas (Rose y Gravel, 2010).

2.2. Heurísticos y resolución de problemas

La habilidad de resolver problemas implica mucho más que seguir un simple algoritmo (Novotná, 2014). Ante cualquier enunciado, surgen diferentes cuestiones: ¿qué nos preguntan? ¿Cuáles son los datos? ¿Qué condiciones se describen? ¿Hay algún problema similar que ya se haya resuelto? Las respuestas a estas preguntas pueden organizarse en las distintas fases de resolución y son las que marcan el desarrollo de la habilidad de resolver problemas. Es por ello que durante el proceso de resolución pueden surgir muchas dificultades relacionadas con la comprensión e interpretación de los datos, la organización de los elementos del problema o la selección del método de resolución más idóneo. Polya (1945) y Schoenfeld (1985) son referentes en la RP, al plantear algunas estrategias necesarias para llegar a la solución de un enunciado. Estas estrategias o heurísticos (figura 1) son guías para comprender el problema e interpretar, ordenar y organizar los datos y recursos para alcanzar una solución (Schoenfeld, 1985; Carrillo, 1998).

Frente a la tendencia hacia la aritmética de los estudios sobre RP con alumnado con Trastorno del Espectro Autista (TEA) y SA, en nuestra investigación nos centramos en el uso de algunos heurísticos desde la perspectiva de gestión en la RP, y a la posible ayuda que proporcionan en relación a algunas dificultades específicas del SA.

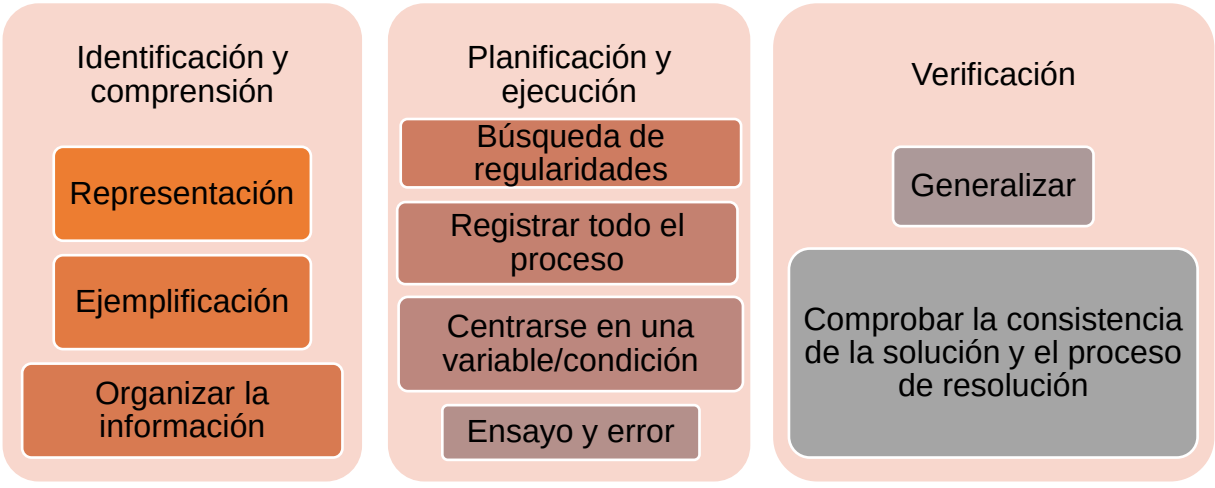


Figura 1: Relación de fases de resolución y heurísticos asociados (Carrillo, 1998)

Los heurísticos se convierten en herramientas que, por un lado, impulsan las habilidades y elementos que fomentan el aprendizaje matemático, pero también

minimizan los efectos de las dificultades que lo impiden (Roos, 2013). La aplicación de heurísticos en RP favorece la creación de un contexto que permite la incorporación de tablas, dibujos y gráficos y otros materiales manipulativos de carácter visual, siguiendo el método TEACCH, que favorecen la organización y el desarrollo de la flexibilidad mental (Liljedahl et al., 2016), y por lo tanto pueden ser extrapolables a otros contextos.

Planteamos así una propuesta de enseñanza a través de la que se diseña un escenario para la diversidad de pensamiento mediante la aplicación de diferentes heurísticos. Al centramos en la metodología, más que en las necesidades del alumnado (Roos, 2019), cualquier niño o niña podría beneficiarse de las estrategias heurísticas en la RP, trabajando en base a los principios del DUA, y atendiendo al alumnado en base a sus potencialidades (Rose y Gravel, 2010).

3. Taller con estudiantes con Síndrome de Asperger

Como parte de un proyecto asociado al desarrollo de una tesis doctoral, se lleva a cabo un estudio cualitativo que describe y analiza talleres de RP realizados en colaboración con el proyecto INCLUREC[1] y la Asociación Onubense del Síndrome de Asperger (AOSA), siguiendo una metodología de estudio de caso, enmarcada en el paradigma interpretativo. Los participantes del estudio son 4 estudiantes de 3er ciclo de educación primaria, vinculados a la asociación. Colaborando con las familias y AOSA, se tiene acceso al diagnóstico psicológico y al informe psicopedagógico, con el fin de acercarnos a la realidad de los participantes.

Las sesiones abarcan dos problemas cada una relacionados con 1 o 2 heurísticos, junto con un pequeño “break” entre ellos, en el que se pone en marcha un juego que fomenta ciertas habilidades como la atención, la organización, el respeto por las normas y los turnos, la estrategia y la velocidad de reacción. Al comienzo de la sesión se les proporciona un esquema con pictogramas (figura 2) que describe los problemas que se trabajarán en el taller, con el objetivo de fomentar la organización, la atención focalizada y sostenida en cada estadío del taller.

[1] El proyecto INCLUREC es una iniciativa de aprendizaje servicio de la Universidad de Huelva orientada a un aula taller que cuyo objetivo es elaborar y adaptar recursos didácticos dirigidos a alumnado con necesidades educativas especiales.

Figura 2: Estructura del taller con los estudiantes de 3er ciclo de primaria

Los problemas de las sesiones se contextualizan en temas de interés cercanos al alumnado, como videojuegos, personajes de comics, animales o dinosaurios. Se plantean con dibujos y pictogramas, que pretenden recalcar los elementos más importantes de los enunciados, puesto que la inclusión del lenguaje aumentativo favorece la comprensión de los datos (Polo et al., 2018). Se les proporciona, además de los enunciados, materiales manipulativos y tablas para que se utilicen según el grado de necesidad y en cualquiera de las fases de resolución. La representación del enunciado favorece el empleo de los diferentes heurísticos, que se desarrollan de manera gráfica. La intervención del docente, aunque intenta minimizarse para favorecer la autonomía y la aparición de estrategias propias, se adapta a la actuación de los estudiantes.

Los datos se obtienen a través de las producciones de los niños y las vídeo y audio-grabaciones y posterior transcripción de las sesiones. Se categorizan y relacionan con los elementos de una rúbrica, que evalúa el grado de adecuación del material y la metodología, el desarrollo de los heurísticos y qué influencia tienen estos dos elementos respecto a las características asociadas al SA (relacionados con la función ejecutiva y la Teoría de la Mente).

4. Propuesta de taller para el profesorado

Este taller está orientado a la enseñanza de RP en el último ciclo de educación primaria, bajo la premisa de abordar estrategias desde la perspectiva inclusiva.

Nuestra propuesta se divide en tres partes: identificación de dificultades en RP en el aula, resolución de problemas para la inclusión y una última parte que refiere a ejemplos de la experiencia de RP con alumnado Asperger.

4.1. Objetivos

Los objetivos que planteamos con el desarrollo del taller son:

Parte 1: Dificultades en RP

- Ahondar en las dificultades más comunes en las diferentes fases de resolución de problemas, muchas de ellas relacionadas con la función ejecutiva sin que el alumnado tenga un diagnóstico en sí.

Parte 2: Inclusión y RP

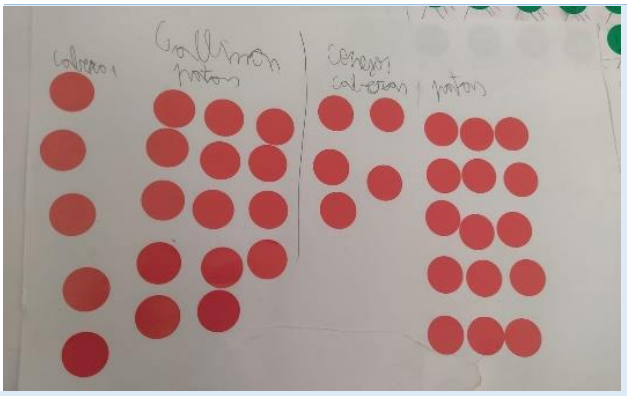
- Resolver problemas aplicando heurísticos junto con materiales manipulativos basados en el DUA
- Ahondar en las posibilidades que nos ofrece la conjunción de estos dos elementos
- Profundizar en las necesidades de formación como docentes

Parte 3: RP y Síndrome de Asperger

- Discutir cómo llevar el material TEACCH y los heurísticos al aula

4.2. Desarrollo del taller

Dificultades en RP	
TAREA 1: Discusión de dificultades en la resolución de problemas asociadas a las diferentes fases de resolución	
Material: Pizarra, presentación powerpoint	Tiempo: 15 minutos
TAREA 2: Análisis de un problema con heurísticos resuelto por un alumno, con el fin de identificar qué elementos pueden haber causado el error, desde el punto de vista del diseño y desde el reconocimiento de dificultades que denote el alumno.	
Material: Presentación powerpoint, hoja de análisis	Tiempo 20 minutos



Figuras 3 y 4: Ejemplo de error en la resolución de problemas utilizando gomets siguiendo el enunciado de un problema sobre una granja en la que viven gallinas y conejos.

Inclusión y Resolución de Problemas

TAREA 3: Resolución de problemas con heurísticos: problema de las nueces, problema de la arqueóloga.

a) Sin materiales
b) Con materiales

Material: Enunciados de los problemas, material manipulativo, tablas, rotuladores	Tiempo 20 minutos

Figura 5: Ejemplo de materiales para resolver problemas mediante el heurístico ensayo y error

TAREA 4: Análisis de los problemas anteriores: Adaptación a alumnado de educación primaria: Enunciado y materiales. Vinculamos los heurísticos y material visual/manipulativo. Ventajas y necesidades del diseño

Material: Enunciados de los problemas, materiales	Tiempo: 25 minutos

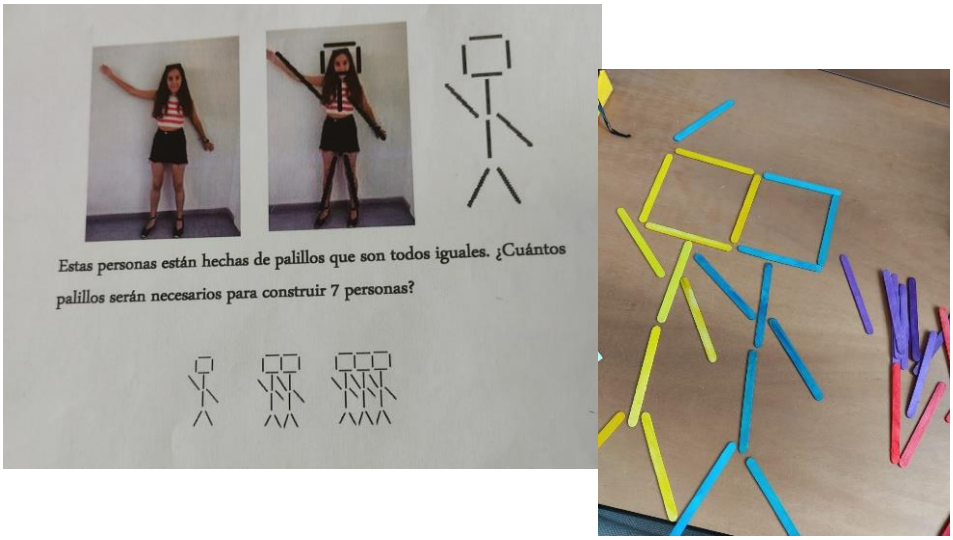


Figura 6: Ejemplo de adaptación de un enunciado usando imágenes y materiales

RP y Síndrome de Asperger	
TAREA 5: Para cerrar el taller visualizamos vídeos que demuestran cómo se puede llevar a cabo con alumnado con SA. Discusión final y valoración.	
Material: Vídeos	Tiempo: 10 minutos

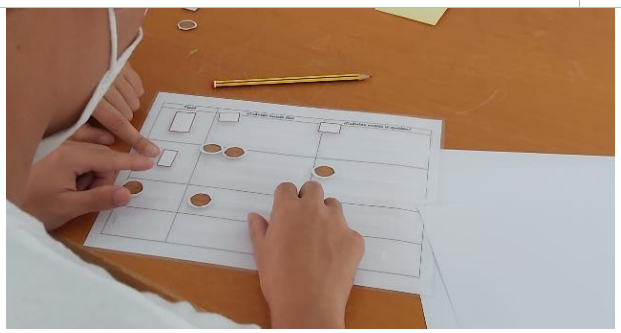


Figura 7: Taller de RP, en el que se resuelve un problema usando materiales y heurísticos

Referencias:

Alba, C., Sánchez, J.M. y Zubillaga, A. (2014). *Diseño Universal de Aprendizaje. Pautas para su introducción en el currículum.* https://www.educadua.es/doc/dua/dua_pautas_intro_cv.pdf

Bae, Y.S., Chiang, H.M., y Hickson, L. (2015). Mathematical Word Problem Solving Ability of Children with Autism Spectrum Disorder and their Typically Developing Peers. *Journal of Autism and Developmental Disorders, 45*(7), 2200–2208. https://doi.org/10.1007/s10803-015-2387-8

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Universidad de Huelva.

Delisio, L., Bukaty, C., y Taylor, M. (2018). Effects of a Graphic Organizer Intervention Package on the Mathematics Word Problem Solving Abilities of Students with Autism Spectrum Disorders. *The Journal of Special Education Apprenticeship, 7*(2), article 4. https://scholarworks.lib.csusb.edu/josea/vol7/iss2/4/

de Giambattista, C., Ventura, P., Trerotoli, P., Margari, M., Palumbi, R., y Margari, L. (2019). Subtyping the Autism Spectrum Disorder: Comparison of Children with High Functioning Autism and Asperger Syndrome. *Journal of autism and developmental disorders, 49*(1), 138–150. https://doi.org/10.1007/s10803-018-3689-4

Happè, F., y Frith, U. (2010). *Autism and Talent*. Oxford University Press.

Klaren, M., Pepin, B., y Thurlings, M. (2017). Autism and mathematics education. En A. Bikner-Ahsbahs, M. Haspekian, A. Bakker y M. Maracci (Eds.), *CERME 10: Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 629–636). CERME.

Kribbs, E., y Rogowsky, B. (2016). A Review of the Effects of Visual-Spatial Representations and Heuristics on Word Problem Solving in Middle School Mathematics. International Journal of Research in Education and Science, 2, 65–74. https://doi.org/10.21890/ijres.59172

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., y Bruder, R. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2_1

Llorca, M., Plasencia, I., y Rodríguez-Hernández, P. (2009). Diagramas para la comprensión matemática. Estudio de caso en personas con trastorno del espectro

autista. *Revista Educación Inclusiva, 2*(1), 79-90. https://doi.org/10.35376/10324/35103

Novotná, J., Eisenmann, P., Přibyl, J., Ondrušová, J., y Břehovský, J. (2014). Problem Solving in School Mathematics Based on Heuristic Strategies, Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science, 7(1), 1–6. https://doi.org/10.7160/eriesj.2014.070101

Polo, I., Bruno, A., y Gónzalez-López, M.J., (2018). Errores en la resolución de problemas de división por un estudiante con trastorno del espectro autista. En L.J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodriguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F.J. García García, A. Bruno (Eds*.). Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 467-476). SEIEM.

Polo-Blanco, I., Bruno, A., González, M.J., y Olivera, B. (2018). Estrategias y representaciones en la resolución de problemas aritméticos de división en estudiantes con trastornos del espectro autista: Un estudio de caso. *Revista de Educación Inclusiva, 11*(2), 161-180.

Polya, G. (1945*). How to solve it*. Princeton University Press.

Rose, D.H., y Gravel, J.W. (2010). Universal Design for Learning. En *International Encyclopedia of Education (Third Edition*) (pp. 119-124). Elselvier.

Rose, D. H., y Meyer, A. (2002). *Teaching every student in the digital age: Universal design for learning.* Association for Supervision & Curriculum Development. ASCD

Roos, H. (2013). Inclusive Mathematics from a special education perspective - how can it be interpreted? En B. Ubuz, Ç. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *CERME 8: Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2860–2869). CERME.

Roos, H. (2019). Inclusion in mathematics education: an ideology, a way of teaching, or both? *Educational Studies in Mathematics, 100*, 25–41. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9854-z

Schoenfeld, A.H. (1985). *Matematical Problem Solving*. Florida Academic Press.

Schoppler, E., Mesibov, G., y Hearsey, K. (2013). Structured teaching in the TEACCH system. En E. Schoppler y G. Mesibov (Eds.), *Learning and cognition in autism: Current issues in autism* (pp. 243-268). Universidad de North Carolina.

Scherer, P. (2019). The potential of substantial learning environments for inclusive mathematics – student teachers' explorations with special needs students. En U.T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, y M. Veldhuis (Eds.), *CERME 11: Congress of the European Society for Researchin Mathematics Education* (pp. 4680–4687). CERME.

van Garderen, D., Scheuermann, A., y Poch, A. (2014). Challenges students identified with a learning disability and as high-achieving experience when using diagrams as a visualization tool to solve mathematics word problems. *ZDM, 46*, 135–149. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0519-1

Tal008 Paseo inclusivo por el mundo 3D: del modelado a la RA pasando por la RV.

Lucía Rotger García
lucia.rotger@unirioja.es
Universidad de La Rioja

Juan Miguel Ribera Puchades
juan-miguel.ribera@unirioja.es
Universidad de La Rioja

Mª Luisa Cuadrado Sáez
luisa.cuadrado7@gmail.com
Profesorado Conselleria Educació Comunitat Valenciana

Núcleo temático: Procesos, Inclusión.

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad (Máster en formación al profesorado y Grado en Educación Primaria).

RESUMEN

Para mejorar la accesibilidad de los recursos educativos para la enseñanza de la geometría tridimensional se puede encontrar, entre las recomendaciones del Diseño Universal de Aprendizaje, la necesidad de buscar diferentes representaciones de los objetos de estudio. El objetivo de este taller es el de presentar diferentes alternativas para la generación de propuestas educativas para la enseñanza-aprendizaje de los contenidos de geometría tridimensional usando aplicaciones móviles. Para ello, se estudiarán las posibilidades que ofrece la realidad virtual y aumentada con marcas planas o mediante cubo holográfico, el modelado tridimensional y la impresión 3D. Así, con el uso del dispositivo móvil, los asistentes al taller podrán analizar en grupos las ventajas que pueden ofrecer estas tecnologías en los procesos de aprendizaje de la geometría. Todo esto, con el interés de que el profesorado asistente pueda ofrecer al estudiantado múltiples herramientas para mejorar sus habilidades de visualización en las actividades de geometría.

Palabras clave: Modelado Tridimensional, Realidad Aumentada, Realidad Virtual, Visualización, Diseño Universal de Aprendizaje.

1. Introducción

Uno de los saberes básicos que presenta para los primeros cursos de secundaria la LOMLOE (2022), dentro del sentido espacial en Matemáticas, es la "Construcción de figuras geométricas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada…)". En línea con lo que comentó Parzysz (1988), una de las problemáticas que presenta la enseñanza de este contenido es la usual representación plana de estos conceptos. Es por ello que, como indican Kondo et al. (2014), una forma de prevenir estos errores y dificultades es el uso de herramientas para la visualización y manipulación de las figuras tridimensionales con el interés de observarlos desde diferentes realidades. Por todo esto, para profundizar en este saber básico de forma efectiva y, a la vez, desarrollar competencias de representación de datos y resultados matemáticos a través de tecnologías, puede ser de interés conocer las posibilidades que nos brindan las herramientas tecnológicas que disponen los centros educativos o los propios estudiantes.

Además, dentro del Marco Europeo de la Competencia Digital del Profesorado (Redecker, 2020), conocido como el DigComEdu, se encuentra, en el área 6, un bloque de competencias destinadas a facilitar la competencia digital del alumnado entre las que se encuentra: el desarrollo de destrezas de búsqueda de información, mejora en la comunicación, fomento de la creación, uso responsable y aplicación en la resolución de problemas. En el área de matemáticas esta última competencia toma un especial interés en las propuestas educativas. Así mismo, bajo este mismo marco, se encuentra el papel que presentan estas competencias para el empoderamiento del estudiantado a través de la mejora en la accesibilidad y la inclusión.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos asociados a la geometría tridimensional, puede ser de interés buscar diferentes formas de representación que proporcione opciones para la mejora de la visualización de los objetos geométricos y que, a la vez, ofrezca alternativas. Para ello, y siguiendo las directrices del Diseño

Universal de Aprendizaje (DUA) (CAST, 2011), se pretende facilitar la accesibilidad al contenido educativo a todo el alumnado. Atendiendo a estas directrices, se quiere destacar el papel que toman estas herramientas para elaborar actividades de resolución de problemas de matemáticas en las que se facilite el acceso a tecnologías de asistencia que minimicen las amenazas y errores que pueden generar las representaciones planas y estáticas de las figuras tridimensionales.

Por todo esto, el objetivo de este taller es el de aportar diferentes tecnologías 3D tanto para mejorar las habilidades de visualización como para diseñar propuestas docentes con diferentes formas de representación de los objetos geométricos tridimensionales en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva inclusiva.

2. Tecnologías 3D

En los últimos años ha habido una gran revolución en cuanto a las tecnologías que implican la creación, modificación y visualización de objetos tridimensionales, aunque la mayoría de ellas están vinculadas al mundo del diseño, la ingeniería o la arquitectura.

Esta evolución ha hecho que el software con el que se trabaje tenga cada vez una interfaz de usuario menos compleja, siendo así más idóneo para ámbitos educativos. Además, la bajada del coste de las impresoras 3D propicia que cada día en centros educativos se trabaje más en esta línea.

Dentro de las tecnologías 3D encontramos:

- Herramientas digitales para creación y modificación de objetos: Basados en software profesional de ingeniería tipo AutoCAD y que, además, permite la impresión 3D después del modelado. Estos programas de diseño asistido por ordenador (CAD) posibilitan el modelado tridimensional y el diseño industrial; sin embargo, existen alternativas de uso educativo como *TinkerCAD* o *BlocksCAD*.

- Herramientas de Realidad Aumentada (RA): La realidad aumentada podría definirse como aquella información adicional que se obtiene de la observación de un

entorno, captada a través de la cámara de un dispositivo que previamente tiene instalado un software específico (Blázquez-Sevilla, 2017). El software reconoce una marca en el entorno y "lanza" la imagen, objeto, video... para que sea visualizado. El objeto quedará integrado con la realidad del que visualiza. Dentro de esta categoría se puede distinguir: la RA con marcas planas, tipo QR, y la RA con objetos, como los cubos holográficos.

- Herramientas de Realidad Virtual (RV): Permite tener una experiencia inmersiva. La persona que visualiza se integra en el medio donde está el objeto, ya sea con gafas o sin ellas.

A lo largo del taller se proporcionarán 4 maneras de visualizar dos tipos de objetos matemáticos uno por medio de modelado 3D (*Tinkercad*) y su posterior impresión, dos de realidad virtual, uno con marcas planas (*Assemblr*) y otra con un cubo holográfico (Merge) y por último realidad virtual (*CoSpacesEdu*).

2.1 Modelado e impresión 3D (Tinkercad)

El modelado matemático de un objeto es un procedimiento en el cual se describe, crea o construye una representación del objeto mediante elementos matemáticos (Montejo-Gámez et al., 2018). Mediante los programas de diseño asistido por ordenador (CAD) se puede crear un modelo digital de los objetos. Estos objetos virtuales pueden estar definidos a partir de elementos bidimensionales, composición de objetos básicos o incluso definidos paramétricamente.

Tinkercad (https://www.tinkercad.com/) es una aplicación de modelado 3D gratuita, en la que basta crear una cuenta de usuario para poder acceder a la creación sin límite de diferentes diseños, modificar los existentes o incluso importar objetos 3D. Esta es una aplicación web por lo que se puede ejecutar desde un ordenador o desde un dispositivo móvil.

Una vez iniciada la sesión, se puede acceder a la opción de crear un nuevo diseño y, desde ahí, visualizar la ventana con el plano de trabajo y diferentes herramientas (Imagen 1). El uso de esta aplicación es bastante intuitivo y es apto para alumnado desde Educación Primaria.

Además, Tinkecad dispone de una amplia biblioteca de formas predefinidas tanto simples como otras más complejas, que son modificables en tamaño y forma.

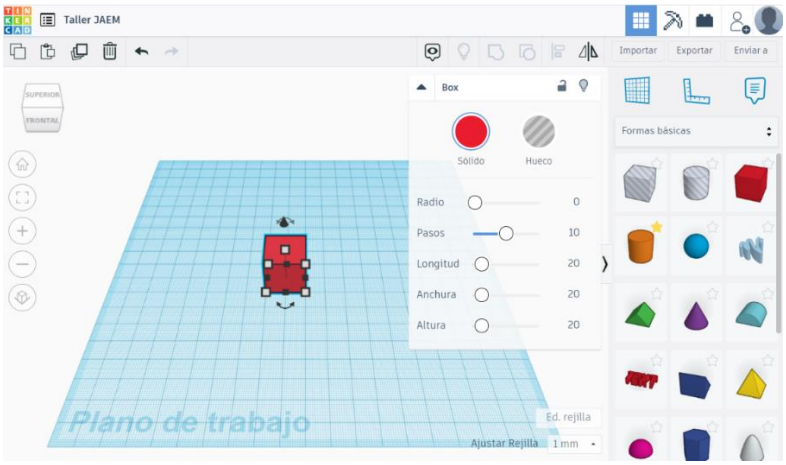


Imagen 1.El área de diseño de Tinkercad.

Una de las posibilidades de Tinkercad es que permite plantear actividades desde la geometría sólida constructiva, ya que se pueden unir diferentes objetos, incluidos los objetos tipo “huecos” (que posibilita la opción de realizar intersecciones o restas de objetos).

Con el interés de ejemplificar las diferentes opciones de herramientas que se pueden encontrar en Tinkercad para la elaboración de objetos tridimensionales se muestra la construcción del fractal de la esponja de Menger de nivel 1. Esta se puede construir a partir de la unión de 18 cubos iguales más pequeños (ver Imagen 2 izquierda) o como el vaciado de un cubo del tamaño considerado (Imagen 2 derecha). Para ello, se pueden utilizar las herramientas que alinean dos objetos, la herramienta de rotación, además de seleccionar el modo “hueco” de la parte del objeto que se quiere eliminar (en el segundo caso).

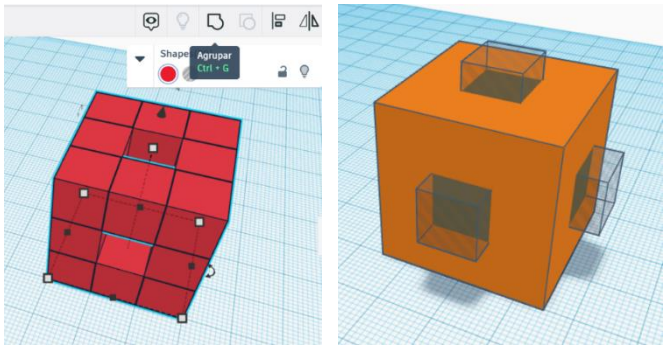


Imagen 2. Dos formas de construir el nivel 1 de la esponja de Menger en Tinkercad.

Una vez realizado un nivel de la esponja de Menger, se puede generar un nivel superior a partir de cualquiera de las alternativas del proceso recursivo anterior.

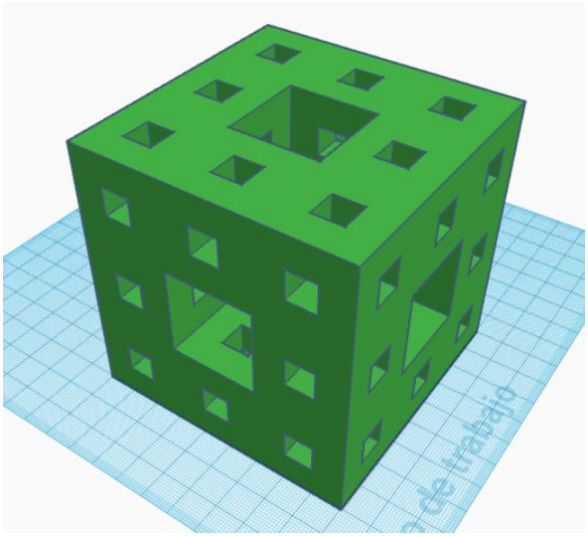


Imagen 3. Una esponja de Menger de nivel 2 construida en Tinkercad.

Tinkercad dispone la opción de importar objetos ya creados o exportar los diseñados en la aplicación. La exportación en formato stl permite imprimir el objeto mediante impresoras 3D. En los últimos años la tecnología de impresión 3D ha mejorado su accesibilidad y muchos centros educativos disponen de una impresora, aunque no siempre se extrae su potencial desde el departamento de matemáticas. Estas impresoras generan los objetos tridimensionales en capas horizontales que se van superponiendo. Existen una gran cantidad de figuras matemáticas que se pueden crear en programas como Tinkercad que después pueden ser utilizados como recurso docente. De hecho, todo el proceso de impresión (modelado, parámetros y uso del material) puede ser incorporado como secuencia didáctica ya que cada una de las tres partes implica diferentes componentes matemáticos.

También existe la posibilidad de buscar en repositorios como Thingiverse (https://www.thingiverse.com/) que disponen de objetos creados por otros usuarios, permiten descargar los archivos gratuitamente y ser impresos en 3D.

Los repositorios además suelen contener información útil para poder imprimir con éxito los objetos 3D, ya que en ocasiones se necesitan ajustar los parámetros de impresión o dividir en varias partes para poder tener una impresión válida. En el caso de la esponja de Menger la dificultad radica en los diferentes “puentes”

(aquellas partes que no tienen base y el filamento no tiene apoyo en la capa anterior) que, dependiendo de la impresora y los parámetros de impresión, pueden hacer que no se obtenga una impresión válida. En este caso, se recomienda imprimir la esponja de Menger de manera que el cubo esté en diagonal, eliminando los puentes mencionados. En esta entrada del repositorio Thingiverse (https://www.thingiverse.com/thing:240739/files) se dispone del stl en esta posición que además aporta soportes para la base. En la Imagen 3 se puede observar una impresión de este objeto realizada por los firmantes del taller.

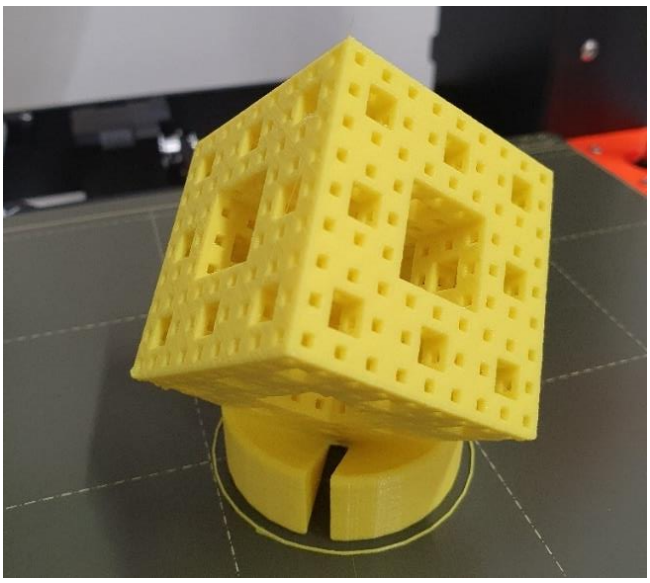


Imagen 3. Una esponja de Menger (nivel 3) creada con impresora 3D en posición diagonal.

2.2 Realidad Aumentada con marcas planas (*Assemblr*)

Assemblr es una herramienta que combina una aplicación para dispositivos móviles, una plataforma online y un software de sobremesa y que permite crear objetos de realidad aumentada en los que se pueden visualizar objetos 3D, videos, imágenes...

Con el interés de utilizar dicha tecnología en diferentes dispositivos, se realizará la experiencia desde la versión online: https://www.assemblrworld.com/studio

El proceso de creación es sencillo, en primer lugar, se debe descargar el objeto 3D que se desea visualizar, puede hacerse desde la herramienta de modelado, la única

restricción es que debe estar en formato .fbx. Desde la web se crearía un nuevo proyecto donde insertaríamos el objeto 3D descargado (ver Imagen 4).

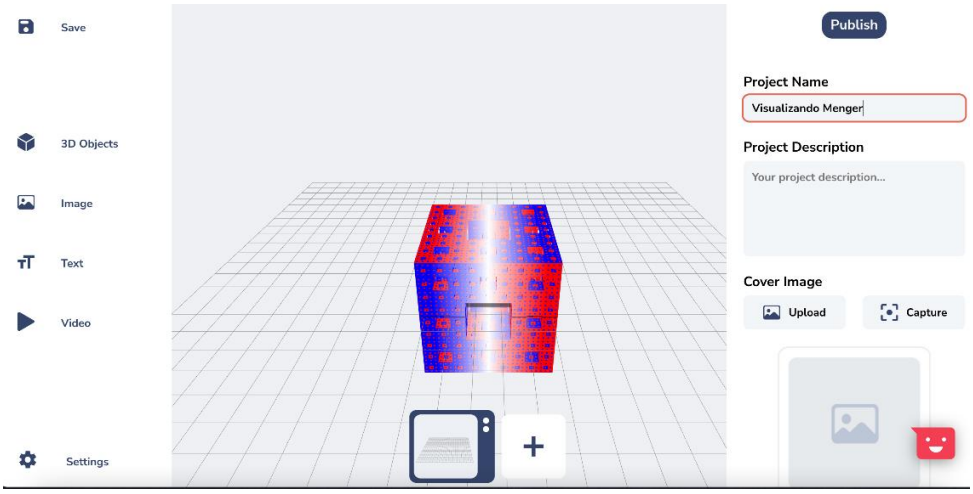


Imagen 4. Creación objeto 3D en RA.

Como parte final se compartiría de manera pública para que se pueda visualizar desde cualquier dispositivo. Una vez generado se debe dar a la opción de compartir, existiendo tres maneras de hacerlo: generando para ello un código como el que se muestra en la Imagen 5, compartiendo un link para abrir un navegador o insertándose en una web.

Imagen 5. Generación de Marca de RA.

Después de creado el objeto y compartido, se debe emplear un dispositivo para visualizarlo, para ello es necesario descargarse la aplicación *Assemblr*. La opción más habitual es imprimir en papel el marcador que se ha generado, pero existe la opción de proyectar directamente el objeto en una superficie plana como muestra la Imagen 6, esto permitirá la visualización del objeto.

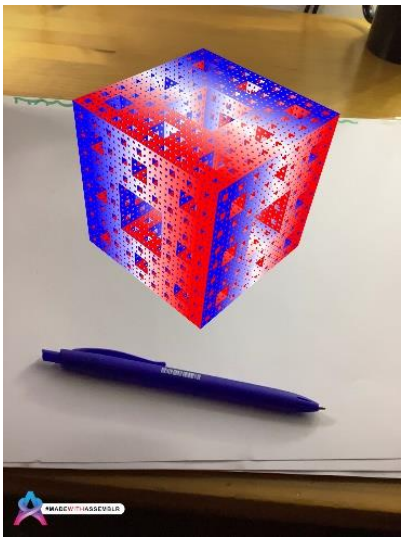


Imagen 6. Objeto 3d en RA sin marca.

A lo largo del taller se mostrarán las ventajas e inconvenientes de esta herramienta para la visualización.

Entre los inconvenientes que presenta esta herramienta destaca la dificultad de realizar rotaciones con facilidad alrededor del objeto, ya que este simplemente se "posa" encima de una superficie. Además, siempre se debe sujetar en la mano el dispositivo para visualizar el objeto con lo que, en ocasiones, se generar incomodidades. Por otra parte, la facilidad de creación de composiciones de RA, incluyendo objetos complicados de construir de manera manual, la convierte en una buena opción.

2.3 Realidad Aumentada con objetos holográficos (*Merge*)

Para llevar a cabo este tipo de experiencia con RA necesitamos el *cubo Merge*. Dicho cubo hace de marcador tridimensional del objeto que se quiere visualizar, por lo que la experiencia es más realista. Será necesario comprarlo o construirlo con

una plantilla, la información se puede encontrar en la siguiente web https://mergeedu.com/cube

Imagen 7. Objeto 3d en RA con Merge Cube.

Una vez se disponga del cubo será necesario usar las aplicaciones adaptadas a él para poder crear y visualizar las composiciones de RA. La aplicación que se quiere usar en el taller será *Object Viewer.*

Para crear la composición de RA se debe, desde un ordenador y registrándose previamente, entrar a la siguiente página www.mergeedu.com. En esa plataforma se puede alojar online hasta 5 creaciones de manera gratuita. Estas mismas creaciones se pueden realizar desde la aplicación Ob*ject Viewer* pero resulta más complicado. De la misma manera que en la otra herramienta de RA, sería necesario tener el objeto 3D descargado, pero en este caso son compatibles diferentes formatos (como se puede ver en la Imagen 8).

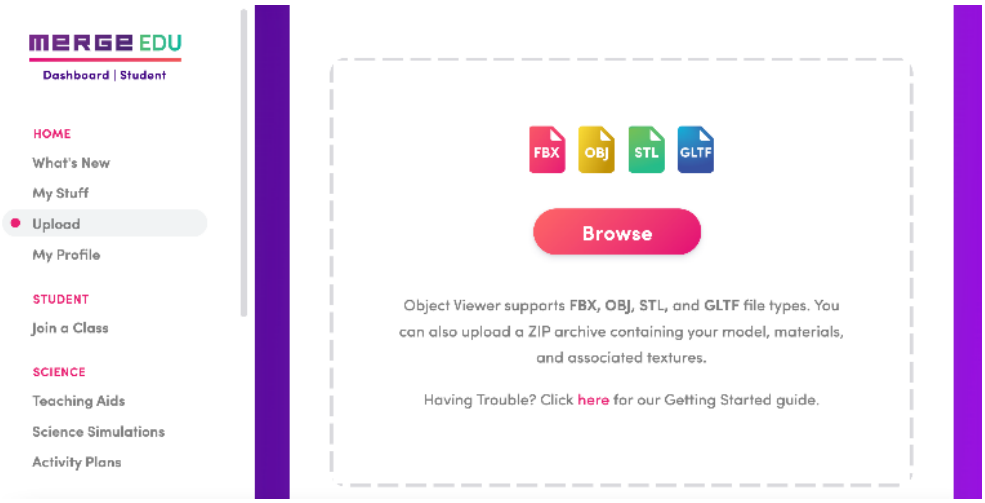


Imagen 8. Formatos de Objetos 3d para Merge Cube.

Una vez seleccionado el objeto, se sube a la plataforma, dando la posibilidad de hacer mejoras y cambios en dicho objeto. Una vez realizadas las modificaciones pertinentes, será necesario compartirlo, las opciones serán las que se muestran en la Imagen 9.

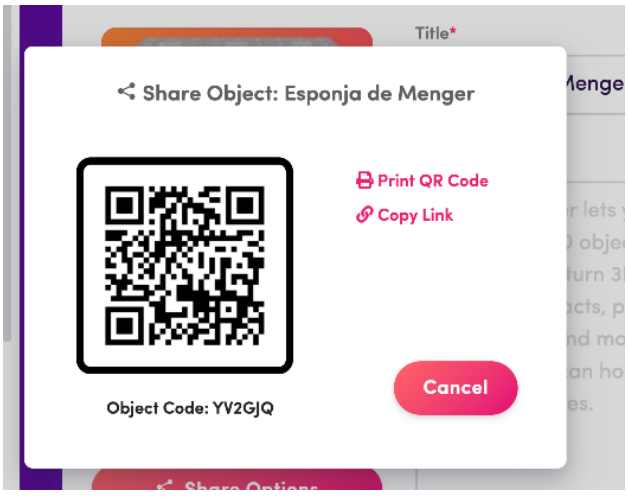


Imagen 9. Formatos de compartir Objetos 3d con Merge Cube.

Después de crear y compartir la creación, la visualización de dicho objeto requerirá de un dispositivo con la aplicación *Object Viewer* y el *Cubo Merge*. El resultado es una composición que se puede manipular, rotar con la mano, ya que se proyecta en el cubo.

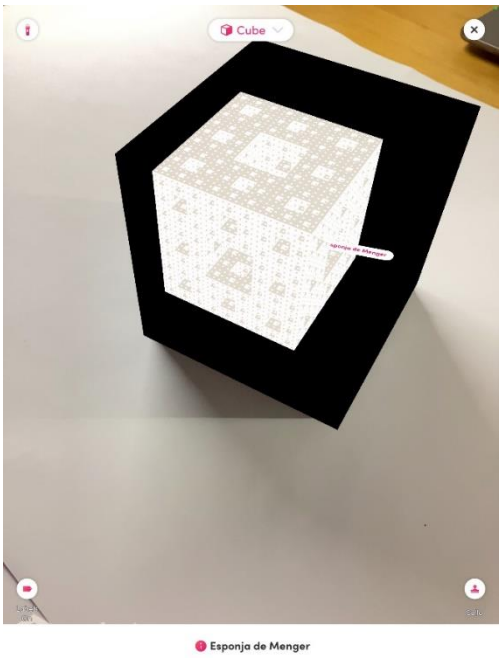


Imagen 10. Visualización de un Objeto 3d con Merge Cube.

El uso del Cubo ofrece una ventaja evidente dentro de las dos tecnologías que usan RA, produce una mejora en la visualización ya que se puede rotar, voltear y da la sensación más táctil de tridimensionalidad. Pero obviamente añade la desventaja de tener que usar ambas manos, una para el dispositivo móvil y otra para el cubo, debiendo elegir una pantalla más pequeña para su mejor manejo.

2.4 Realidad Virtual (CoSpaces)

Se define realidad virtual como la forma más avanzada de la relación entre una persona y un sistema informático, dicha relación permite una interacción directa entre el usuario y el ambiente generado artificialmente, ambiente que está destinado a estimular alguno o todos los sentidos humanos, caracterizándose principalmente por crear una ilusión a nivel cerebral de participación directa en dicho ambiente (Brudniy y Demilhanova, 2012).

Dentro del recorrido por las diferentes tecnologías 3D esta es la que supone un cambio sustancial en la visualización. Si bien la RA proporciona una visión del objeto con tridimensionalidad, tiene una interacción más limitada; en cambio, la RV supone que la persona que observe se “introduzca en un mundo” donde podrá encontrar el objeto.

Para tener una experiencia con RV, será necesario un dispositivo que permita una visión 360º como un smartphone. La experiencia se puede complementar con unas gafas de RV. Dichas gafas pueden llevar el dispositivo integrado, como las gafas Oculus o se les puede insertar como las Cardboard de Google.

Cabe decir que la experiencia con las gafas es más realista, pero también se puede construir una experiencia de RV sin ellas, donde el alumnado “pasee” por un entorno como lo hace con los videojuegos.

La plataforma que se pretende usar en el taller para crear la experiencia de RV es Cospaces https://cospaces.io/edu/. Dicha plataforma está orientada a educación y cuenta con infinidad de posibilidades. Después de su registro se puede crear un espacio donde insertar el objeto 3D a visualizar (Imagen 11).

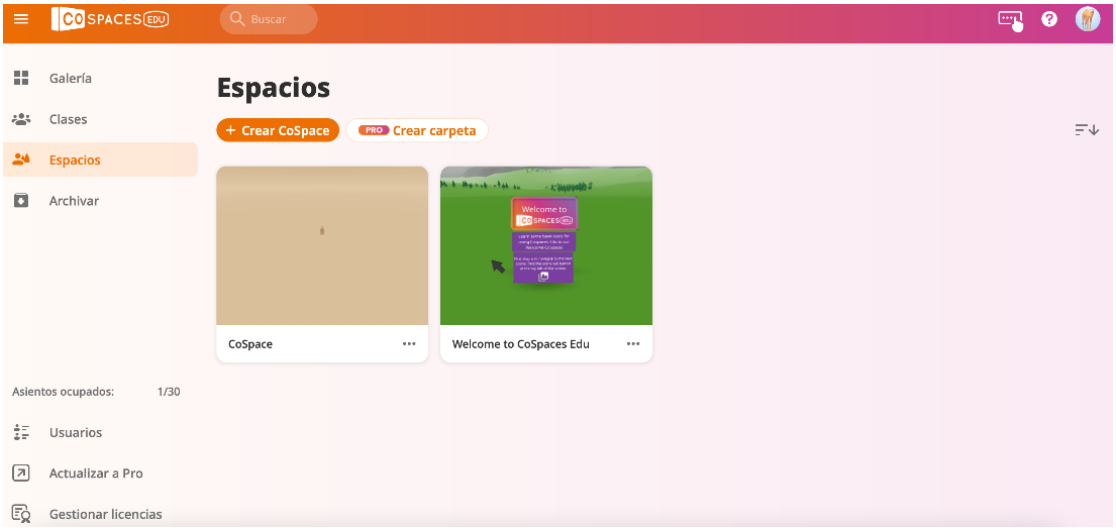


Imagen 11. Página inicial Cospaces.

Dentro de cada uno de los espacios se pueden insertar objetos predefinidos en el programa, pero también objetos 3D creados desde cualquier programa de modelado, objetivo de este taller.

Después del recorrido por las diferentes tecnologías se nos plantean si el alumnado tendrá una preferencia sobre la elección de cada una de ellas, si esto dependerá del objeto elegido para visualizar.

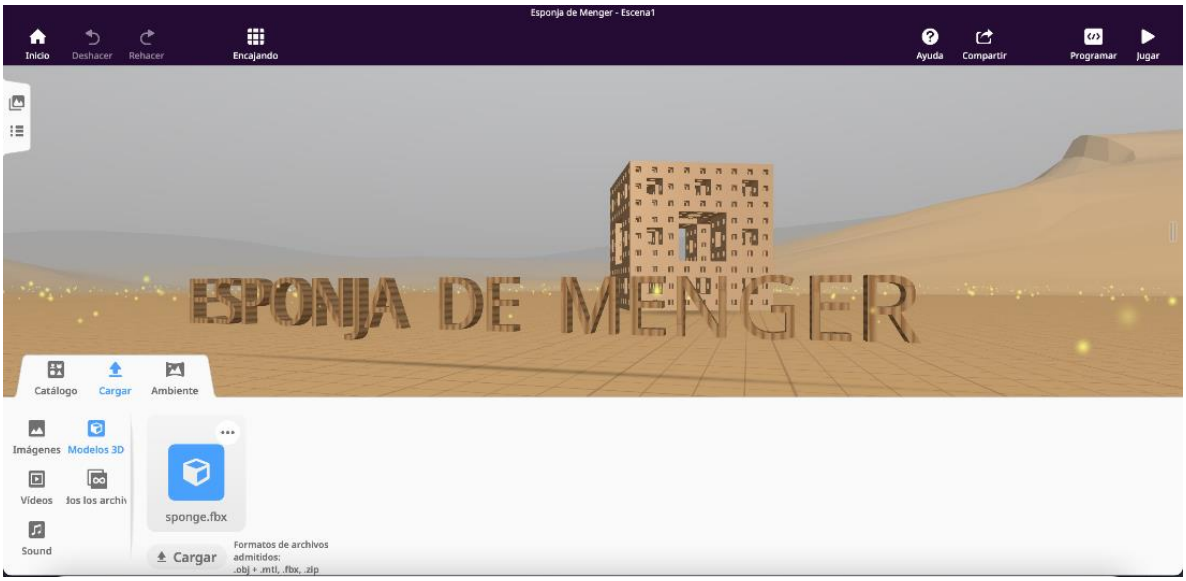


Imagen 12. Inserción Objeto 3D Cospaces.

Una vez se crea la experiencia se comparte por tres vías como se muestra en la Imagen 13.

Imagen 13. Opciones de compartir 3D Cospaces.

La experiencia del alumnado será un paseo por un mundo donde el objeto 3D está en el centro, pudiendo "caminar" alrededor e incluso introducirse, teniendo una visión 360º, un ejemplo se puede apreciar en la Imagen 14.

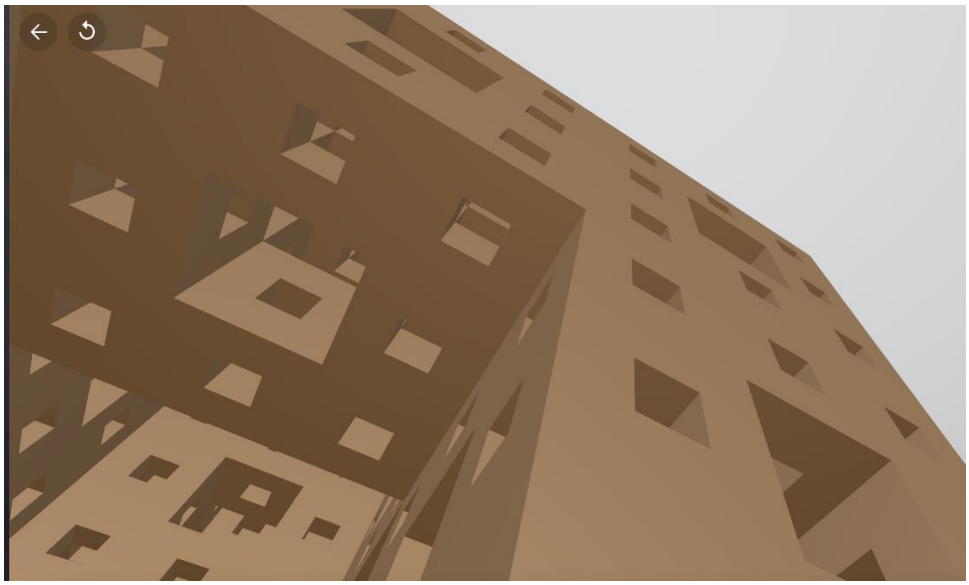


Imagen 14. Vista desde “abajo” Cospaces.

En cuanto a las ventajas que puede suponer el uso de RV aunque parece evidente que la visualización será más efectiva no es así lo que, en experiencias realizadas, considera el alumnado (Rotger et al., 2021). Por otra parte, como inconveniente se puede añadir que además de las gafas se requeriría de un mando para poder moverse por el espacio virtual lo que limita un poco la experiencia, a no ser que se pueda disponer de unas gafas con sistema operativo integrado como Oculus.

Una vez realizado el recorrido por diferentes herramientas y experiencias de visualización quedarían abiertas varias cuestiones. ¿Dependerá del objeto que se desea observar la elección de una tecnología u otra? Suponiendo que el alumnado dispone de toda la tecnología ¿dependerá de cada persona la elección de una u otra? ¿cuál será el criterio de elección?

3. Conclusiones

En este taller esperamos mostrar el potencial que disponen los dispositivos móviles y para la mejora en las habilidades de visualización. Las herramientas presentadas permiten la manipulación virtual de los objetos tridimensionales de diferente forma: a partir de su construcción/modelización, de la interacción con el medio que les rodea o desde el mundo virtual. Esta variedad de representaciones facilita, a su vez, la

variedad de problemas que se pueden plantear; por ejemplo, asociados a su construcción o a las relaciones con el mundo que los rodea.

Además, desde la mirada del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA), la propuesta que se presenta trata de explotar las múltiples formas de representación que nos brindan los dispositivos móviles. Pero este tipo de propuestas van más allá y proporcionan, a su vez, múltiples opciones para captar el interés del alumnado, así como la participación. En concreto, la autonomía del alumnado en la selección de las herramientas tecnológicas preferidas para el modelado tridimensional o la facilidad en el acceso a estas mismas herramientas, son factores que muestran el matiz inclusivo que tiene la propuesta presentada.

En conclusión, las herramientas utilizadas en este taller pretenden prevenir las posibles dificultades que presenta el estudiantado, donde su pensamiento en la resolución de problemas está directamente influenciado en las representaciones bidimensionales, con el interés de que utilicen las propiedades y manipulen las figuras tridimensionales correctamente.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco del Proyecto de Innovación Docente: “Evaluación de la mejora de las habilidades de visualización en el alumnado a partir de los materiales educativos generados en el proyecto 3DMates (Evalua3DMates)” financiado por la Universidad de La Rioja.

Referencias

Blázquez-Sevilla, A. (2017). *Realidad aumentada en Educación*. Monografía (Manual). Rectorado (UPM).

CAST (2011). Universal Design for Learning Guidelines, version 2.0. Wakefield, MA: Center for Applied Special Technology. Traducción al español: Alba Pastor, C., Sánchez Hípola, P., Sánchez Serrano, J. M. y Zubillaga del Río, A. (2013). «Pautas sobre el Diseño Universal para el Aprendizaje, versión 2.0». http://www.educadua.es/html/dua/pautas-DUA/dua_pautas.html

Brudniy, A. y Demilhanova, A. (2012). The Virtual Reality in a Context of the “Mirror Stage”. *International Journal of Advances in Psychology, vol. 1*, 6–9.

Kondo, Y., Fujita, T., Kunimune, S., Jones, K., y Kumakura, H. (2014). The influence of 3D representations on students´ level of 3D geometrical thinking. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol, y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting PME 38 and PME-NA 36*. (Vol. 4, pp. 25–33). Vancouver: PME.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E. y Adamuz-Povedano, N. (2018). Modelización matemática en el proceso de resolución de problemas contextualizados. ¿Cómo surge un modelo? En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. MuñizRodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 368-377). Gijón: SEIEM.

Parzysz, B. (1988). “Knowing” vs “seeing”. problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics, 19*(1), 79–92.

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 76*, de 30 de marzo de 2022, 1–198. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con

Redecker, C. (2020). *Marco Europeo para la Competencia Digital de los Educadores: DigCompEdu*. (Trad. Fundación Universia y Ministerio de Educación y Formación Profesional de España). Secretaría General Técnica del Ministerio de Educación y Formación Profesional de España (Original publicado en 2017).

Rotger, L., Ribera, J. M. y Cuadrado, M. L. (2021). Visualizando la tercera dimensión desde diferentes realidades. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 673). Valencia: SEIEM.

TaI101 Taller de creación de actividades Matemáticas inclusivas[1]

Concha Barceló
conbarlop1@gmail.com
SDG de Formación del Profesorado

Begoña De la Iglesia Mayol
bego.delaiglesia@uib.es
Universitat de les Illes Balears

Núcleo temático: Inclusión y procesos

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad.

RESUMEN

Este taller práctico pretende que las personas participantes tengan la oportunidad de reflexionar y crear actividades matemáticas teniendo en cuenta, tanto los parámetros de la accesibilidad universal, como los principios de una escuela inclusiva: la presencia, la participación y el progreso de todo el alumnado.

Para ello, el itinerario creativo se ha de enmarcar dentro de las dimensiones del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) que ofrece al alumnado, en las diversas fases del proceso de enseñanza-aprendizaje, múltiples opciones para la implicación y el compromiso, diferentes formas para la representación de los contenidos y diversas maneras para la acción y la expresión de los aprendizajes matemáticos.

Palabras clave: Matemáticas inclusivas, Diseño Universal para el aprendizaje, accesibilidad universal, paisajes de aprendizaje, programación multinivel.

1. ¿Qué características debe de tener una actividad matemática para que sea inclusiva?

[1] Taller creado a partir del trabajo de reflexión y análisis llevado a cabo en el Seminario Federal de Matemáticas Inclusivas, llevado a cabo en Castro Urdiales, en noviembre del 2021.

Bajo el paradigma del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) y el Index for Inclusion (Booth, Ainscow y Dyson, 2006), se establece que las actividades, en la enseñanza de las matemáticas, deben proporcionar múltiples formas: de representación de la información y los contenidos (el qué del aprendizaje), ya que los alumnos son distintos en la forma en que perciben y comprenden la información; de expresión del aprendizaje (el cómo del aprendizaje), puesto que cada persona tiene sus propias habilidades estratégicas y organizativas para expresar lo que sabe y de implicación (el porqué del aprendizaje), de forma que todos los alumnos puedan sentirse comprometidos y motivados en el proceso de aprendizaje.

Pero una actividad por sí sola no puede ser inclusiva. Solo se convierte en inclusiva si va acompañada de una buena gestión. Siguiendo así los indicadores de buenas prácticas inclusivas (Booth, Ainscow y Dyson, 2006), una actividad debe asegurar la presencia, la participación y el progreso (aprendizaje) de todo el alumnado en su grupo de referencia. Ello no significa que todos los alumnos deben participar de la misma manera, sino que debe ofrecerse un abanico suficientemente amplio de posibilidades, que permita esta participación a todos ya cada uno de los alumnos respetando sus capacidades. En este sentido, es importante considerar que todos y todas alcancen un aprendizaje óptimo, aunque no sea necesariamente el mismo para todos y cada uno de los alumnos.

Otros indicadores a tener en cuenta en la creación de actividades y situaciones de aprendizaje son la autorregulación, la consciencia sobre el proceso y la evaluación formadora para lograr la **autonomía** del alumnado en la realización de las tareas. Paralelamente, las preguntas que nos hacemos para ver si una tarea es competencial pueden ayudarnos también a analizar si ésta es inclusiva (Indicadores competenciales: un instrumento para la mejora del desarrollo de la competencia matemática, Torra, 2014).

A modo de resumen, consiste en saber diseñar actividades de “Suelo bajo y techo alto” (https://nrich.maths.org/10345) asegurando que sean accesibles para todos y todas, pero que no limiten a ninguno y puedan suponer un reto para todos.

2. ¿Qué gestión de las tareas promueve una enseñanza matemática inclusiva?

En la misma dirección planteada, proponemos las siguientes buenas prácticas a tener en cuenta en una gestión inclusiva de las tareas matemáticas:

- una actitud del profesor en el aula que genere un entorno de confianza donde el foco esté en los procesos y no en juzgar la corrección de las respuestas, donde se escuchen todos los planteamientos que hacen los alumnos y no se penalicen los errores, si no que se analicen para aprender
- una propuesta rica en recursos, donde los materiales manipulables se puedan utilizar con diferentes intenciones: para iniciar, facilitar, desarrollar o evaluar (La pirámide de la educación matemática Alsina, 2009)
- crear agrupaciones dinámicas y generadas a partir de criterios que aseguren la heterogeneidad en los grupos
- generar buenas preguntas que favorezcan la participación y el progreso de todos: (https://nrich.maths.org/2473)

3. ¿Qué tipo de producciones cabe pedir al alumnado?

Las producciones que se pidan al alumnado en la elaboración de la tarea deben ser diversas y deben favorecer la autonomía, la metacognición y la autorregulación del alumnado. Además, servirán para su evaluación.

Para su gestión y acompañamiento, proponemos herramientas como:

- Bases de orientación para la resolución de problemas

- Rutinas de pensamiento: Veo-pienso-me pregunto; ¿Qué observo? ¿Qué puedo saber? ¿Qué me gustaría saber? Compara y contrasta; Organizadores gráficos…

- Herramientas de autoevaluación y coevaluación

Así, intentaremos **evitar** las tareas que se presentan en un solo formato y luego necesitan muchas adaptaciones, las que piden repeticiones sin cambios, las que solo admiten un tipo de respuesta, las que evalúan sólo la corrección de la

respuesta y no el proceso, y las que explican y no construyen el conocimiento del alumnado.

Referencias y recursos utilizados durante la preparación y desarrollo del taller se encuentran recogidos en:
https://padlet.com/RECURSOSCV/647vhiodmcprz48

TaE201 Arte cinético con Realidad Aumentada. Los móviles de Eusebio Sempere

José Aurelio Pina Romero
ja.pinaromero@edu.gva.es
IGV – SEMCV Al-Khwarizmi- IES Sant Blai. Alicante
Adrián Cuenca Avi
adrian.profedemates@gmail.com
IGV – SEMCV Al-Khwarizmi – IES Figueras Pacheco. Alicante
José Antonio Mora Sánchez
jmora7@gmail.com
IGV – SEMCV Al-Khwarizmi

Modalidad: Exposición - Taller

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

RESUMEN

Se ha utilizado GeoGebra para reproducir nueve obras de Eusebio Sempere (Onil, Alicante, 1923-1985) y una de Andreu Alfaro (Valencia 1929-2012), dos de los escultores más relevantes del siglo XX que juegan con la innovación de los materiales, la luz y con el movimiento de la obra e incluso el desplazamiento del mismo espectador y todo ello a partir deun pequeño módulo que se repite. La mayoría de las obras estudiadas se encuentran en el Museo de Arte Contemporáneo de Alicante (MACA) o son esculturas en espacios públicos. Nos encontraremos una de ellas en el Museu Campus Escultòric de la UPV, sede de las JAEM.

En el taller veremos la forma de descargarlos archivos de GeoGebra 3D en nuestro móvil con Realidad Aumentada para interaccionar con las imágenes que resultan al desplazarnos alrededor de la construcción, introducirnos en su interior o modificar algunos de los parámetros que intervienen.

Palabras clave: Poliedros Regulares, GeoGebra, Realidad Aumentada.

Espacio de realización: en algún espacio abierto en el que se vaya a colocar la exposición de los posters que quedarán durante las jornadas.

Desarrollo del trabajo:

Aportaremos dos o tres roller de 2mx1m con los contenidos de la exposición.

Además, se facilitará un manual en formato PDF enriquecido con acceso a los archivos descargables y con las indicaciones de uso. En el siguiente enlace se puede acceder a dicho manual.

https://www.geogebra.org/m/xdbmvxbc

A continuación desarrollamos el material del taller que se recogerá en los formatos indicados anteriormente.

1. **Arte Cinético. Eusebio Sempere**

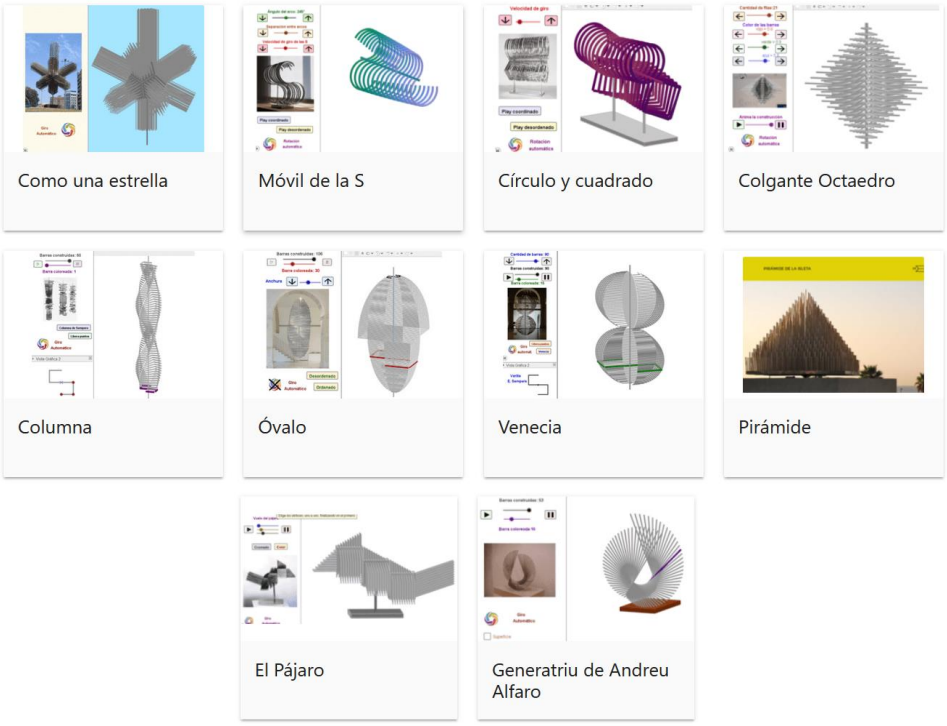


Imagen 1. Imágenes de los móviles del taller.

Esculturas de Eusebio Sempere realizadas con varillas de acero cromado ensartadas en móviles que el espectador puede alterar cambiando la configuración. Se han construido con GeoGebra y las recreamos por medio de la Realidad Aumentada con el móvil. Podremos movernos a su alrededor o introducirnos en su interior para explorar la obra.

1.1 Como una estrella

Como una estrella es una escultura al aire libre situada en la Plaza de la Estrella de Alicante. Fue una donación del autor a la ciudad en 1978 junto a su colección particular que dio origen al Museo de Arte Contemporáneo de Alicante (MACA) en la Asegurada

Como una estrella, conocida popularmente como *La estrella varada* está concebida como un dodecaedro de acero inoxidable que gira alrededor de uno de sus ejes de rotación. De cada una de las doce caras salen perpendicularmente 51 barras de acero de longitudes entre 60 y 235 cm.

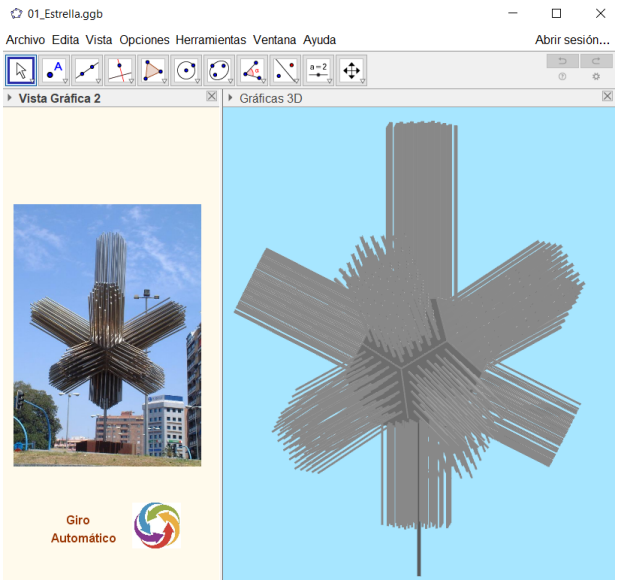


Imagen 2. Como una estrella.

En el archivo de GeoGebra solo se han construido once barras de la cara inferior, el resto hasta las 51 barras de cada cara del poliedro se ha hecho utilizando cinco rotaciones de 72º alrededor del centro del pentágono. Las barras de las otras once caras se han generado por rotación de las barras de la cara adyacente a la ya construida alrededor de la arista común.

Imagen 3. QR de descarga de Como una estrella.

Elementos manipulables:

a indica el tamaño del dodecaedro

b, d, e alargan y acortan cada un grupo de barras

1.2 Móvil de la S

Móvil en acero cromado de Eusebio Sempere. 1972-73. Pertenece a la Fundación Caja del Mediterráneo. Fue expuesto en la retrospectiva dedicada al artista en el Museo Reina Sofía de Madrid en 2018.

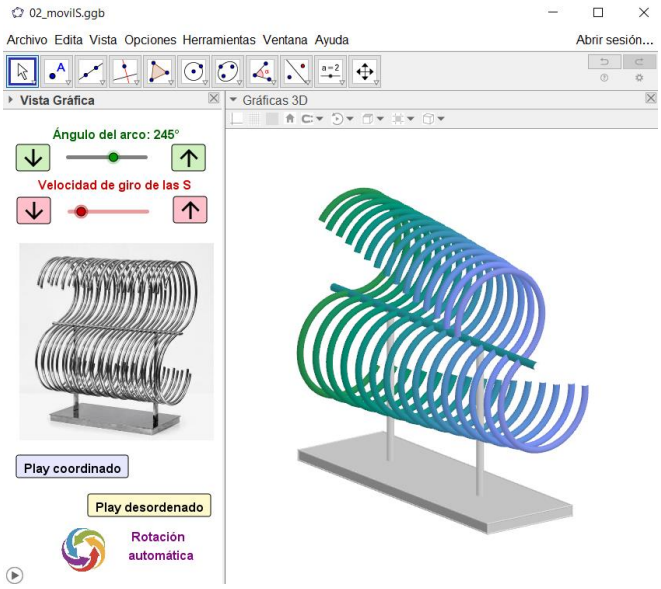


Imagen 4. Móvil de la S

Imagen 5. QR de descarga de Móvil de la S.

Elementos manipulables:

Incorpora dos tipos de movimiento en el applet:

- **Giro coordinado,** (**n**=0) como si moviésemos todos los arcos de forma ordenada uno detrás de otro desde el que nos queda más cerca hasta el más lejano
- **Giro desordenado**, (**n**=1) queremos simular que a cada arco le hemos dado un impulso distinto.

α modifica la longitud de los arcos

b separa las S unas de otras

h cambia la velocidad de giro

El color de las S es variable y depende del ángulo que haya girado cada arco, es por esto que en el giro coordinado se aprecia una graduación del color

1.3Círculo y cuadrado

Móvil en acero cromado de Eusebio Sempere realizado en 1974. Museo de Arte Contemporáneo de Alicante, MACA.

Se ha utilizado la misma construcción de GeoGebra que se ha realizado para el Móvil de la S cambiando los arcos del anterior por un círculo y un cuadrado.

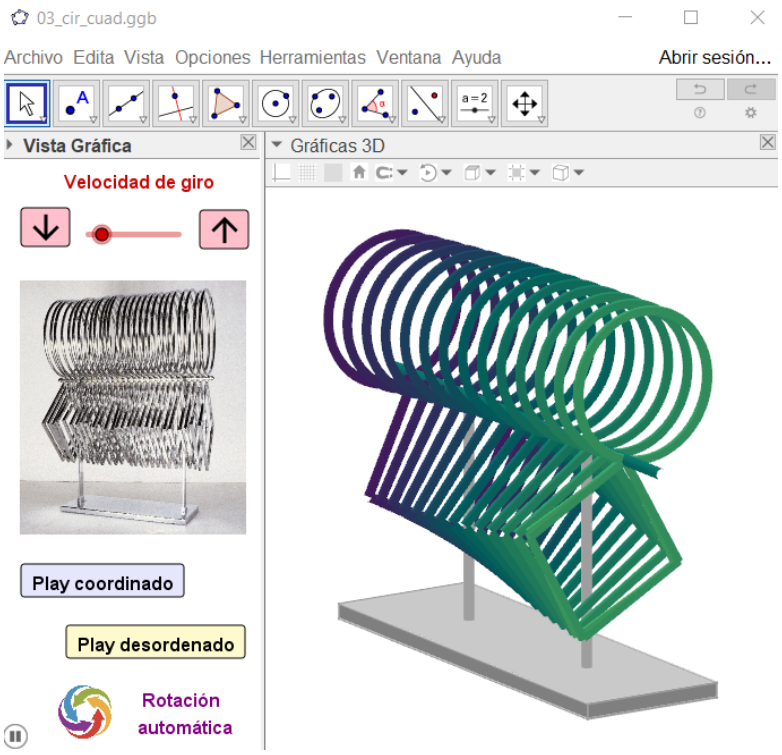


Imagen 6. Círculo y cuadrado

Imagen 7. QR de descarga de Círculo y cuadrado

Elementos manipulables:

Incorpora dos tipos de movimiento en el applet con **n**:

- **Giro coordinado,** (**n**=0)
- **Giro desordenado**, (**n**=1)

α modifica la longitud de los arcos

b separa unas varillas de otras

h cambia la velocidad de giro

El color de las varillas es variable se ha dejado fijo el color azul (0.5) y los colores rojo y verde cambian según el ángulo que ha girado cada pieza respecto de la vertical

1.4 Colgante Octaedro

Móvil colgante en acero cromado. 1971. Museo de Arte Contemporáneo de Alicante. MACA. Colección del Ayuntamiento de Alicante.

Utiliza barras de acerocromado de sección circularunidas a un eje central de forma cilíndrica. Las distintas longitudes de las barras horizontales conforman el octaedro.

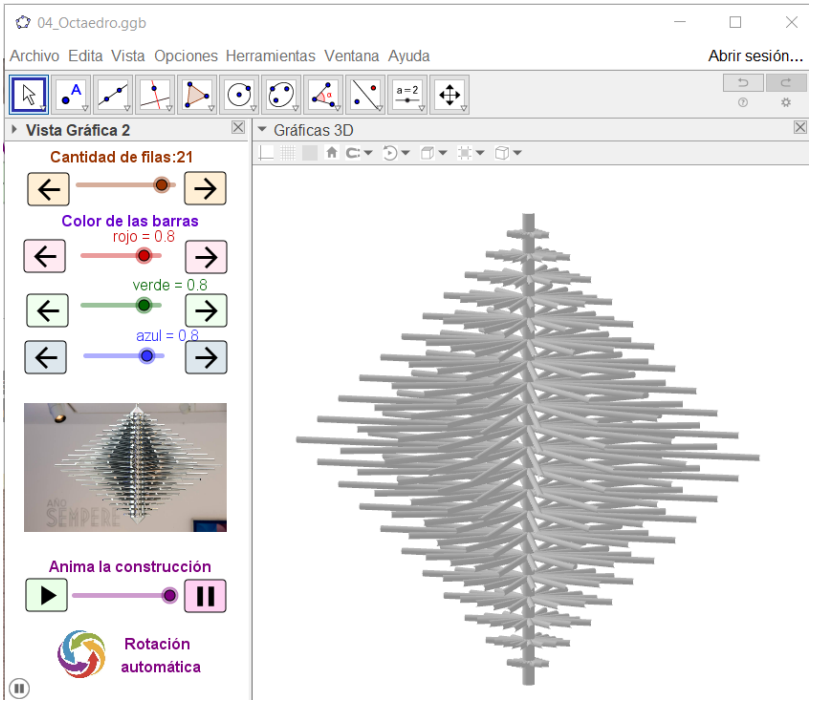


Imagen 8. Colgante Octaedro

Imagen 9. QR de descarga de Colgante Octaedro

Elementos manipulables:

t muestra la secuencia de construcción, primero la estructura del octaedro, los extremos de las barras de una cara, las barras que van a esa cara y las rotaciones para conseguir las demás caras.

m es la cantidad de columnas de barras

n es la cantidad de filas de barras (siempre impar)

1.5 Columna

Móvil colgado del techo formado por varillas de acero inoxidable. 1974. Colección Eusebio Sempere. Museo de Arte Contemporáneo de Alicante. MACA.

Las varillas son todas iguales, cada una está girada 6º respecto de la anterior respecto de un eje vertical por lo que 60 varillas suponen un giro completo. Se ha creado una animación que genera el móvil desde su base y, al acabar, comienza una segunda animación que activa una varilla de color morado que sube y baja recordando el efecto luminoso que se produce en el MACA. En el museo una línea de luz penetra en la sala con el reflejo del sol en una lámina de canicas moradas que se ha colocado en la terraza que se encuentra junto al móvil.

En la construcción de GeoGebra han participado Manuel Sada y Rafael Losada.

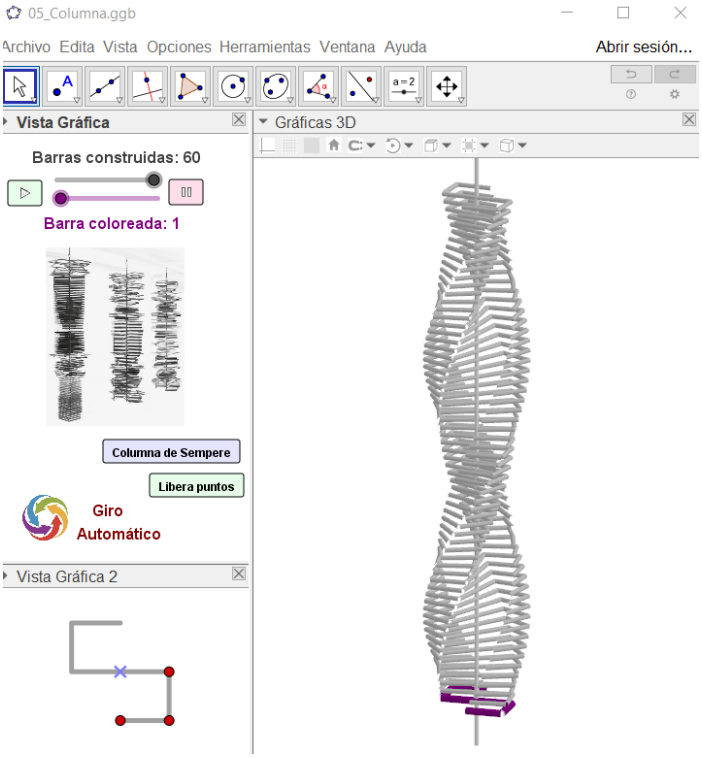


Imagen 10. Columna

Imagen 11. QR de descarga de Columna

Elementos manipulables:

a modifica la altura de la columna

m desplaza y gira verticalmente la varilla coloreada

1.6 Venecia

Móvil suspendido con varillas de acero cromado de 2 metros de alto. 1976. Museo de Arte Contemporáneo de Alicante. MACA.

La varilla mantiene la forma que ha utilizado en otros casos como Óvalo o Columna. En este caso va modificando el tamaño para que dos de los vértices se encuentren primero en la superficie de una primera esfera y después en la superficie de una segunda esfera colocada sobre la anterior. Al pasar de una esfera a otra la varilla sufre dos transformaciones: primero se le hace una simetría especular y después una rotación de 90º El móvil tiene 45 varillas en cada esfera aunque el applet permite modificar esa cantidad.

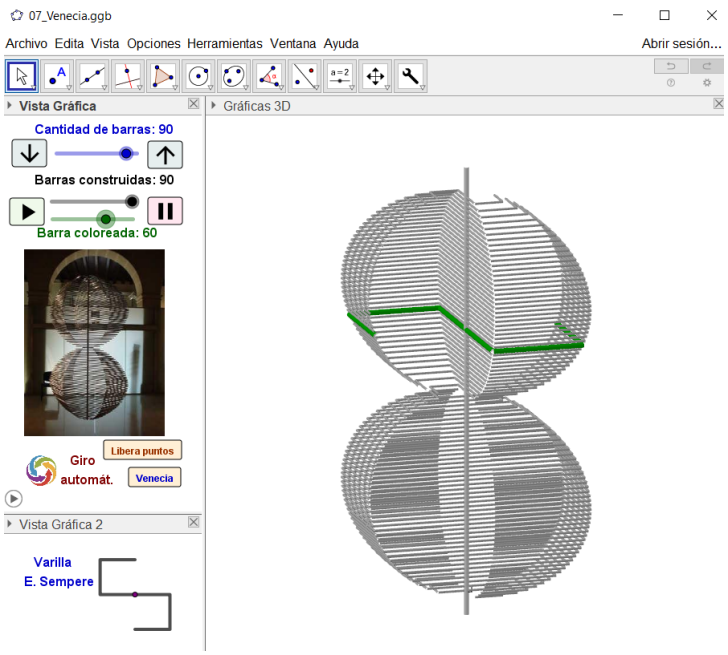


Imagen 12. Venecia.

Imagen 13. QR de descarga de Venecia.

Elementos manipulables:

j construye el móvil varilla a varilla y comienza la animación de la varilla coloreada en verde.

a modifica el tamaño de la construcción.

n es la cantidad de varillas de cada una de las dos esferas.

i es un interruptor, si vale 0 es la varilla original del autor. Si es igual a 1 cambia a otra distinta con la misma simetría.

d es la longitud del segmento central.

hh marca la posición de la varilla coloreada contando desde la parte inferior.

1.7 Pirámide

Pirámide es una escultura de carácter público situada en Alicante como motivo central de la fuente de la Isleta en playa de la Albufereta. Tiene unas dimensiones de 3x3x3 metros. Realizada en 1993 sobre un boceto original de 1968. Cromada, y asentada sobre un prisma de base cuadrangular de 10 x 300 x 300 cm con un movimiento mecánico que le confiere una gran ligereza.

Dispone de una serie de orificios donde se ensartan cada una de las varillas que componen la forma. El volumen se consigue a través de la repetición de un módulo:

una varilla de acero cromado de sección base circular de tres centímetros de diámetro, y cuya base superior es una elipse. Este módulo se repite en 685 ocasiones, y aumenta gradualmente en altura hasta su cota máxima en el centro de la pieza.

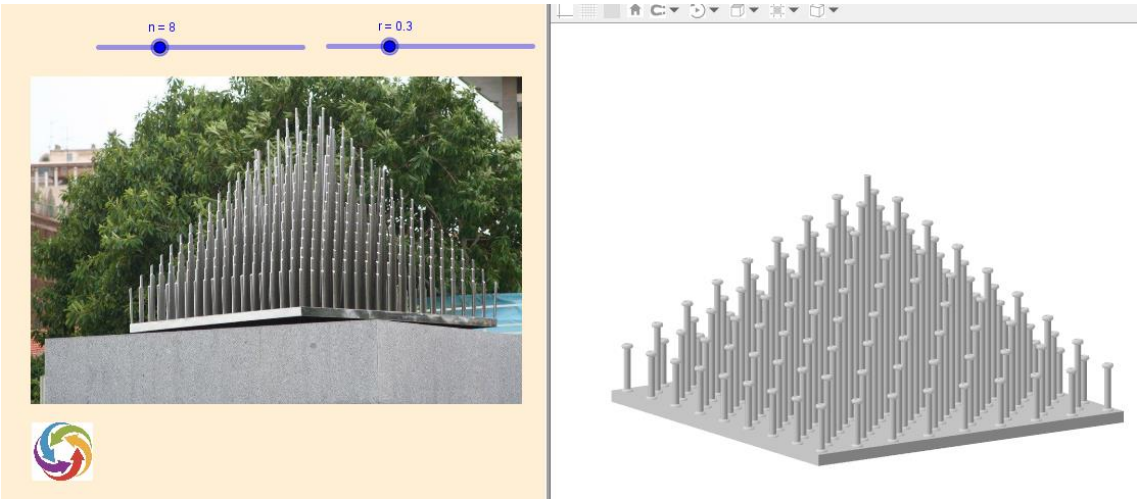


Imagen 14. Pirámide

Imagen 15. QR de descarga de Pirámide

Elementos manipulables:

n cantidad de cilindros. A cada arista llegan n+1 cilindros

r grosor de los cilindros

1.8 Pájaro

De esta escultura se conservan varios bocetos. Fue concebida en 1975. Eusebio Sempere realizó varias obras de un metro de altura. Más adelante Abel Martín se encargó de supervisar la reproducción a gran tamaño en 1987 para el Puente de Fernando Reig en Alcoi.

La construcción de GeoGebra intenta seguir las ideas de los bocetos pero se han introducido dos elementos que no estaban incluidos en las ideas de Eusebio Sempere: En primer lugar se dota de movimiento a las barras que salen de las caras laterales para simular el aleteo del pájaro. Por otra parte, podemos elegir dos versiones: la que simula en gris el color de las varillas de acero cromado que utilizaba el autor y la versión de un pájaro con gran colorido.

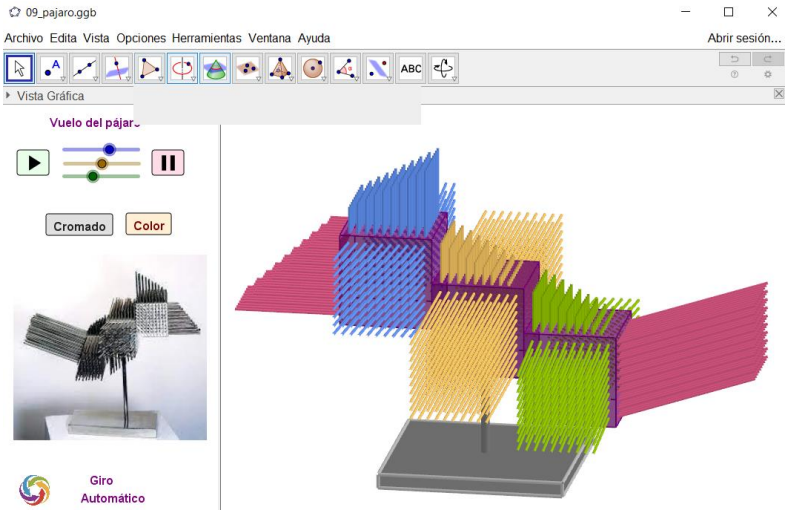


Imagen 16. Pájaro

Es la escultura elegida por la Asociación para la Recuperación de la Memoria Histórica de Alicante para homenajear a las personas que salieron del puerto de Alicante en el Stanbrook, último de los barcos que trasladó a 2638 pasajeros hacia el exilio. En el puerto quedaron atrapadas 15000 personas que fueron conducidas a campos de concentración. Será en el Puerto donde se coloque esta nueva versión de El Pájaro de Sempere como homenaje al triste episodio allí ocurrido.

Imagen 17. QR de descarga de Pájaro

Elementos manipulables:

t1, t2 y t3 permiten el movimiento de las parejas de alas delanteras, centrales y traseras respectivamente. Admiten animación para simular un aleteo

i es un interruptor (0=gris, 1=coloreado)

1.9 Generatriu. De Andreu Alfaro

Andreu Alfaro (Valencia, 1929 - 2012). Generatriu, 1972. Varillas de acero inoxidable rectas de sección cuadrada de uso industrial. Museo de Arte Contemporáneo de Alicante, MACA.

La Está formado por 53 varillas rectas iguales que se engarzan por un eje. Cada una proviene de la anterior al desplazarla en el eje y girarla 4.5º alrededor del eje de engarce.

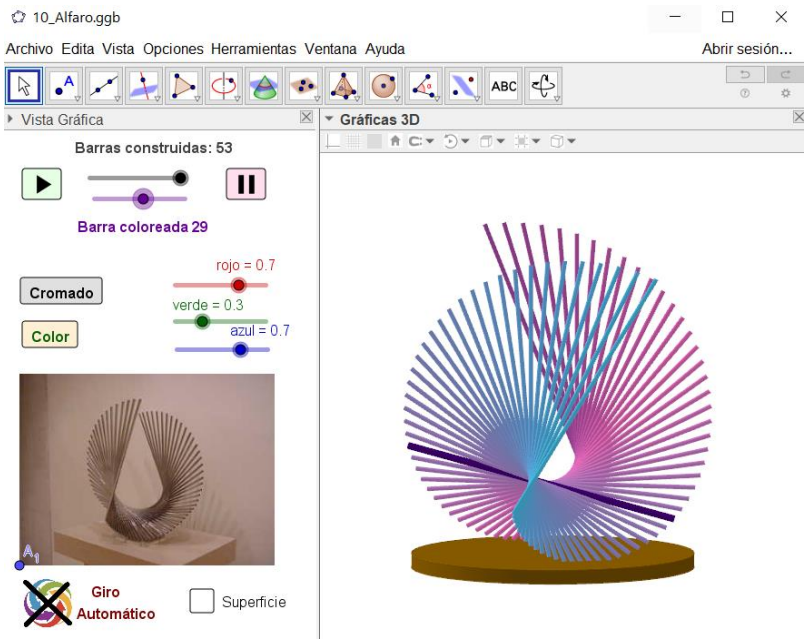


Imagen 18. Generatriu. De Andreu Alfaro

Había que elegir los materiales apropiados a la medida de sus sueños, buscar un punto entre la estética y la producción industrial para conquistar el espacio público, las plazas, los parques, los grandes vestíbulos. Su amigo Raimon ha definido a Alfaro como un "intérprete de metales", otros han señalado sus varillas generatrices como una forma de música. (**Manuel Vicent. Diario El País 28 Sept 2018**)

Imagen 19. QR de descarga de Generatriu. De Andreu Alfaro

Elementos manipulables:

m cantidad de varillas. Para hacer la construcción una a una, llevar m a 1 y pulsar sobre animación

n desplaza y gira la varilla coloreada

Referencias

Castells, R.M. (2016) . Ruta Sempere. Lugares públicos de Alicante donde encontrar al artista Eusebio Sempere. Concejalía de Cultura del Ayuntamiento de Alicante.

Mora (2020). Arte y matemáticas https://www.geogebra.org/m/stzw77gs

Mora (2020). Arte Cinético. Eusebio Sempere. https://www.geogebra.org/m/aqsfqvwc

Museo de Arte Contemporáneo de Alicante. MACA. https://maca-alicante.es/

Eusebio Sempere. https://www.eusebio-sempere.com/

TaE202 Construcción de un omnipoliedro

José Antonio Mora Sánchez
jmora7@gmail.com
IGV – SEMCV Al-Khwarizmi. Alicante
José Aurelio Pina Romero
ja.pinaromero@edu.gva.es
IGV – SEMCV Al-Khwarizmi- IES Sant Blai. Alicante
Fernando Arenas Planelles
fernando.arenas61@gmail.com>
IGV – SEMCV Al-Khwarizmi – IES Allusser. Mutxamel. Alicante

Modalidad: Exposición - Taller

Nivel educativo: Educación Secundaria Obligatoria

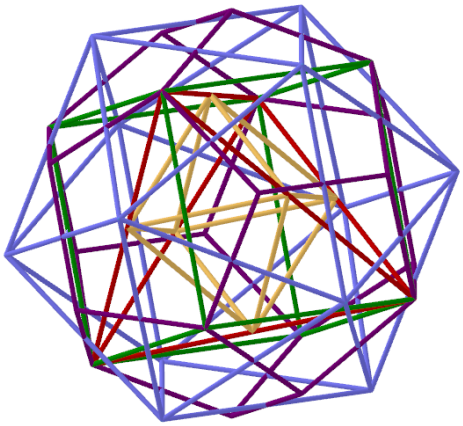
RESUMEN

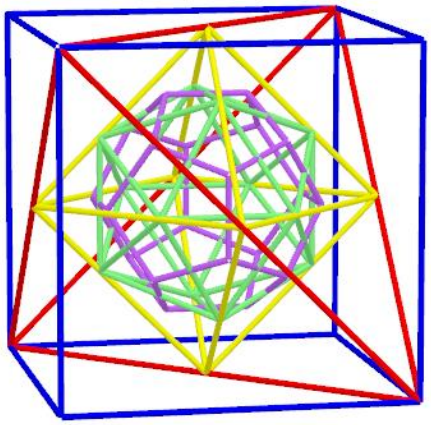
Construiremos varios omnipoliedros de gran tamaño, uno con varillas de aluminio que se conecta con hembrillas cerradas y bridas de plástico, otros con varillas de madera con conexiones de plástico fabricadas con una impresora 3D. También utilizaremos dos secuencias distintas para introducir unos poliedros en otros.

Las construcciones realizadas quedarán como exposición en el recinto donde se celebran las Jornadas junto a unos paneles con indicaciones para trabajar este proyecto en clase.

Apoyaremos la construcción de los poliedros con la manipulación de los cinco calidoscopios poliédricos para los que hemos construido 40 piezas de plástico con impresora 3D mediante el software matemático GeoGebra. Esas piezas se introducen en el calidoscopio correspondiente para ver el poliedro completo.

También utilizaremos la Realidad Aumentada con los móviles para ofrecer nuevas formas de acercarnos a la enseñanza y aprendizaje de la geometría del espacio.

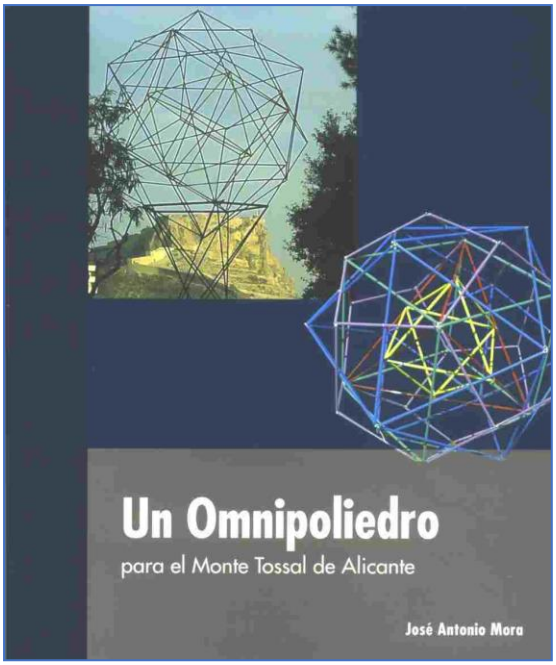




Palabras clave: Poliedros Regulares, GeoGebra, Realidad Aumentada

1. El Omnipoliedro en el Tossal

El Omnipoliedro fue un proyecto de la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana Al-Khwarizmi dentro de los actos conmemorativos del 2000 como Año Mundial de las Matemáticas. Se instaló uno de grandes dimensiones (arista del cubo 1.67 m. la media de la población española) en el Parque Temático del Tossal de Alicante como escultura al aire libre. La instalación se acompañó de varias actividades complementarias: página web, la guía didáctica y una serie de montajes escolares.



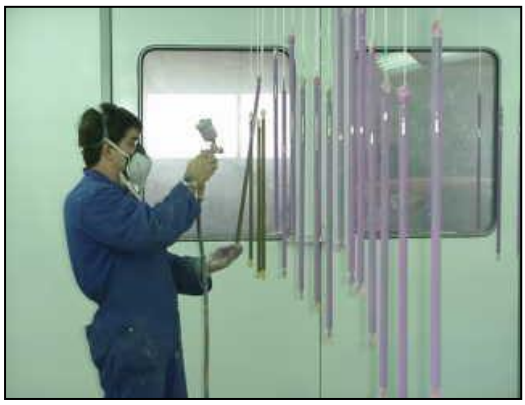
Además del omnipoliedro del Tossal, se construyeron otros más pequeños (arista del cubo 1 m) en los institutos Leonardo da Vinci y Sant Blai de Alicante y Allusser de Mutxamel organizada por la SEMCV y dos más que permiten que el omnipoliedro sea reconstruido como actividad didáctica ofertada a los departamentos de matemáticas de los centros escolares. Estas actividades estaban financiadas por el Ayuntamiento de Alicante, organizadas por

la SEMCV y apoyadas por monitores formados por nuestra Sociedad. A lo largo de 5 años legó a implicar a más de 4000 alumnas y alumnos de secundaria de muchos centros de Alicante.

2. Con barras de aluminio

El I.E.S. Leonardo da Vinci acordó la construcción de un omnipoliedro de grandes dimensiones por el alto significado que tenía para el instituto, especialmente por su conexión con la obra de este genio que nos dio nombre. Como otros artistas del Renacimiento, Leonardo utilizó diseños en perspectiva de los poliedros en sus obras y los plasmó en la creación de dibujos de gran originalidad para los armazones de los poliedros en el libro La divina proporción de Luca Pacioli.

Los cálculos se realizaron en el Departamento de Matemáticas, algunas fases del montaje de las varillas en el Departamento de Tecnología. En los Talleres de Carrocería del I.E.S. Leonardo da Vinci se realizó la pintura de los tubos de aluminio. En la construcción del omnipoliedro participaron los estudiantes de 3º de ESO de la fotografía.

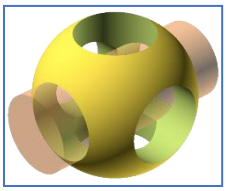


El omnipoliedro conecta con la obra de Leonardo da Vinci, con los trabajos de matemáticos como el profesor Puig Adam y con artistas alicantinos como Eusebio Sempere en especial con la escultura Estrella Varada (Glorieta de la Estrealla, Alicante capital). https://goo.gl/maps/Qf4pNH5sfd3GQhFSA

3. Otros materiales

Hemos trabajado con otros materiales como la madera que es más fácil de cortar y otras formas de encajar unos poliedros en otros. Aquí tenemos el omnipoliedro en el IES l'Allusser de Mutxamel en el que el icosaedro se inscribe en el interior del octaedro colocando sus vértices en un punto que es la proporción áurea de su arista.

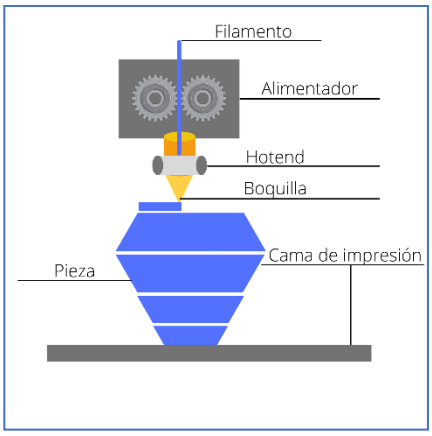
También hemos investigando nuevas formas de realizar las conexiones entre las varillas, diseñadas en OpenSCAD



(https://openscad.org), aplicación libre con licencia GPL versión 2 que permite crear objetos sólidos asistidos por ordenador, basados en un lenguaje de programación que nos posibilita controlar el diseño en su totalidad.

Funciona en los sistemas operativos GNU/Linu, MacOS X, Solaris y Microsoft Windows. En la red de redes encontrarás abundante material, tanto ingés como en español, con propuestas de actividades.

- Documentación en Inglés en la página oficial http://openscad.org/documentation.html
- Curso de iniciación al diseño 3D (Obijuan) http://diwo.bq.com/course/curso-de-iniciacion-al-diseno-3d-con-openscad-por-obijuan/



Los conectores han sido impresos en PLA (Ácido poliacético) mediante una impresora 3D de tipo FDM (Modelado por Deposición Fundida) que se basa en tres elementos: una cama de impresión, una bobina de filamento y una cabeza de extrusión. El filamento se funde cuando el fusor (Hotend) alcanza alrededor de 200ºC (en función del tipo de material), que permite extruir el material de 1,75 mm de diámetro sobre la una cama de impresión a través de una boquilla que deposita el material capa a capa.

Pueden descargar los conectoresen formato scad, y construir tu propio Omnipoliedro Pasos a seguir:

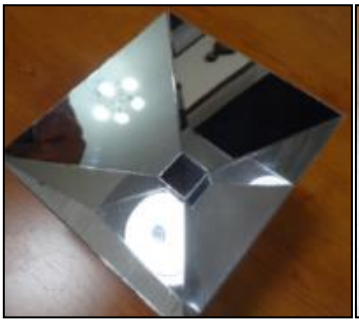
1. Descagar los conectores en formato scad desde https://cutt.ly/qFATzHO
2. Descargar e instalar OpenSCAD desde https://openscad.org/downloads.html
3. Descargar CURA v 4.31.11 https://ultimaker.com/es/software/ultimaker-cura
4. Segmentar el conector

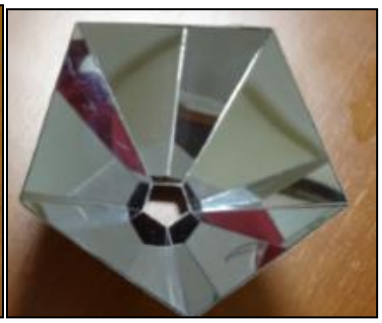
5. Imprimir en la impresora 3D.

Conectores	Uso básico OpenSCAD	Uso básico CURA

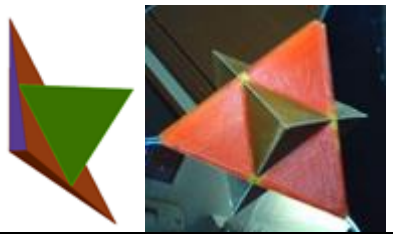
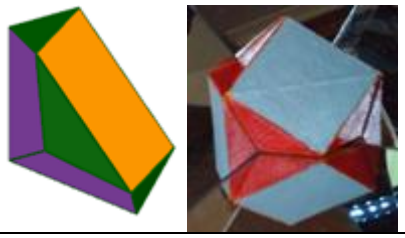
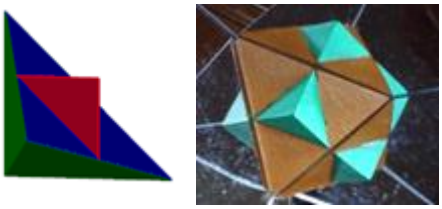
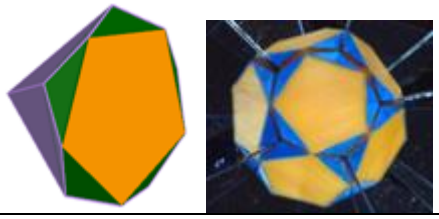
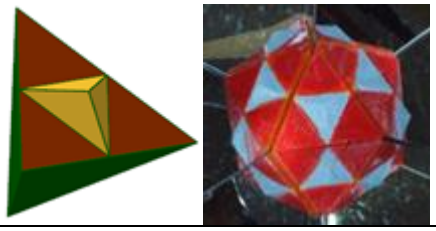
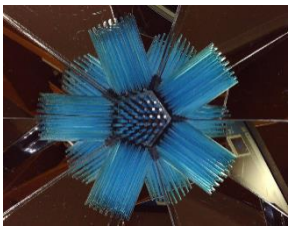
4. Los calidoscopios poliédricos

El estudio de los poliedros se completa con la manipulación de los espejos poliédricos, Estan formados por pirámides cuyas paredes son espejos y se forman con la altura de los triángulos en el centro de cada poliedro y las caras laterales son los triángulos que van desde el centro hasta cada una de las aristas de una cara.





Hemos utilizado GeoGebra para construir las piezas que se introducen en el interior. Con ellas hemos diseñado las piezas correspondientes a los cinco poliedros regulares, poliedros truncados y composiciones de poliedros. Aquí tenemos algunos de los 42 módulos construidos:

	
La estrella octángula en el tetraédrico	El cuboctaedro en el cúbico
	
Cubo+octaedro en el octaédrico	Icosidodecaedro en el dodecaédrico
	
Icosaedro+ Dodecaedro en icosaédrico	Estrella de E. Sempere en dodecaédrico

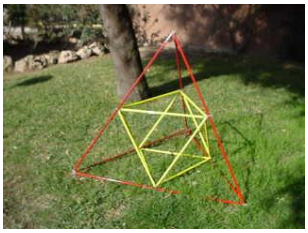
Los calidoscopios y las piezas están disponibles para ser manipuladas en el taller. La información más completa se encuentra en el libro de GeoGebra Calidoscopis Polièdrics https://www.geogebra.org/m/bm4heq77

5. Guía de construcción

Las 90 barras tendrán distintas medidas según el orden de las inclusiones que vayamos a hacer y los cálculos que provienen de la geometría han de ajustarse al proceso físico de las conexiones que hagamos.

Las 6 aristas del tetraedro, 12 del octaedro y el cubo y 30 del dodecaedro y el icosaedro se pueden construir por separado. Esto da pie a discutir sobre la rigidez de los polígonos unidos por los vértices y las diferencias entre los triángulos los demás al construir el cubo o el dodecaedro.

Cuando se construye uno dentro de otro, los poliedros de caras triangulares dan rigidez al de cara cuadrada y al de cara pentagonal en la secuencia que reflejan las fotografías:



La ciudad de Alicante tiene varias muestras de poliedros como esculturas al aire libre, como muestra tenemos La estrella varada de Eusebio Sempere (derecha) y el icosaedro en el aire de Buckmister Fuller (abajo) que podemos llevar a nuestras clases como visita, exploración de un applet con realidad aumentada.

6. Realidad aumentada

La realidad Aumentada ofrece una nueva posibilidad al tratamiento de la geometría del espacio en la escuela. Ofrece la posibilidad de capturar con el móvil la construcción de una figura geométrica e interactuar con ella, observarla desde distintos puntos de vista o modificar algunos parámetros para interactuar con ella y ello redunda en una mejor comprensión de las ideas y las relaciones geométricas por los estudiantes.

Aquí tenemos algunos archivos que podemos capturar con el móvil. Es necesario tener instalado en el móvil una app para escanear códigos qr, aunque en la actualidad la mayoría de los dispotivos móviles te permite abrir los mismos con camara fotográfica.

Pasos a seguir:

1. Instalar la graficadora 3D.

   https://play.google.com/store/apps/details?id=org.geogebra.android.g3d

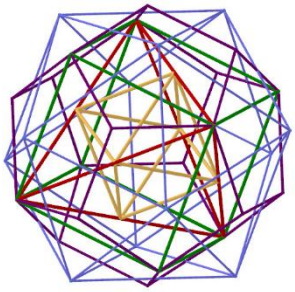
   https://itunes.apple.com/us/app/geogebra-3d-graphing-calc/id1445871976

2. Descagar el fichero ggb a tu dispositovo desde un repositorio en la nube o una página web.

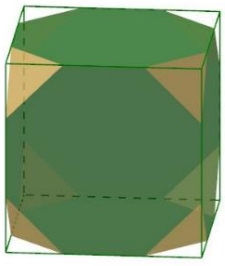
3. Abrir el archivo desde tu dispositivo móvil mediante la graficadora 3D.

Omnipoliedro (o1, o2, o3, o4, o5)

Los deslizadores **o1** hasta **o5** hacen que las barras del poliedro del color correspondiente aparezcan (1) o se oculten (0)



Truncamientos del cubo (t, r1)

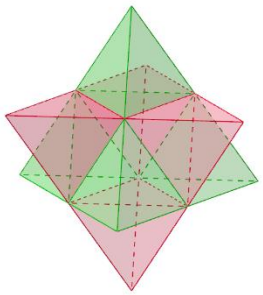


0<t<1.2 hace que los cortes en los vértices del cubo profundicen más o menos (en todos por igual a la vez)

r1=0, r1=1 oculta o deja ver el octaedro cuyas caras contendrían los cortes que damos al cubo

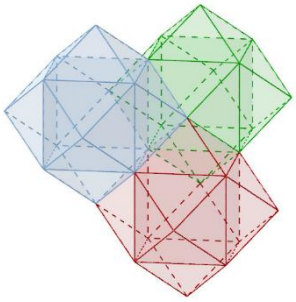
Del Octaedro estrellado a la Estrella Octángula (t)

El deslizador **t** hace que cambiemos la altura de las pirámides sobre las caras del octaedro. La mayor altura se alcanza en la estrella octángula



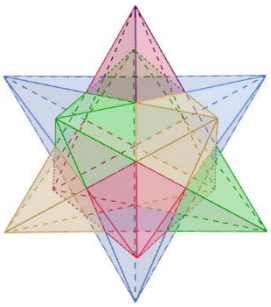
Dodecaedro Rómbico (t)

-1<**t**<6 eleva o hunde los vértices de las pirámides de cada cara y despliega dos dodecaedros rómbicos más para comprobar que rellenan el espacio sin huecos



Dodecaedro Estrellado (t)

-2<**t**<1 eleva o hunde los vértices de las pirámides de cada cara



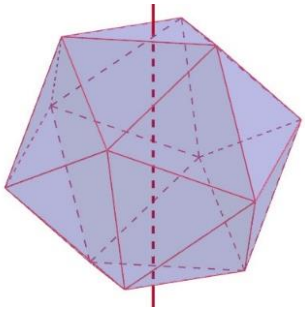
Cinco cubos en un Dodecaedro (t1)

Podemos introducir el móvil en el interior de esta composición para ver las caras que quedan en su interior.

La animación de **t1** coloca cada uno de los cubos por separado haciendo coincidir sus aristas sobre las aristas del dodecaedro. Después coloca los cinco cubos uno tras otro para completar la composición

Las simetrías del Icosaedro (o)

El deslizador **o** puede tomar valores 1, 2, 3 y 4 para cada número aparece un



plano de simetría o un eje de rotación distinto. En los ejes de rotación aparecen deslizadores angulares que hacen una rotación del icosaedro hasta que vuelve a coincidir consigo.

Las simetrías de los otros cuatro sólidos platónicos

7. Referencias

Cundy, H. y Rollet, A. (1978). Modèles Mathematiques. CEDIC. Paris.

O'Daffer, P. G. y Clemens S. R. (1977). Geometry: an investigative approach. Addyson Wesley. California

Mora, J.A. (2015). Los poliedros Regulares https://www.geogebra.org/m/gga7YxpU

Pacioli, L. (1987). La Divina proporción. Akal. Madrid

Pina, J.A. y Mora, J.A. (2020) Calidoscopis polièdrics. https://www.geogebra.org/m/bm4heq77

Puig Adam, P. (1956). Didáctica de la matemática moderna.

Weyl, H. (1991). La Simetría. Mc Grawn Hill. Madrid.

TaE203 Las cúpulas de Leonardo

Guido Ramellini
Guido.ramellini@mmca.cat
MMACA- Museu de Matemàtiques de Catalunya

Modalidad: Exposición

- Breve descripción del taller:

Se inicia con una pequeña explicación sobre la actividad y la forma de colocar los bastones.

La construcción comienza paso a paso con la participación de todos, en cuestión de 10 minutos ya es visible cómo va creciendo y levantándose.

Una vez construida, los participantes pueden entrar dentro. También se puede levantar la estructura, si hay suficientes participantes para sujetar todos los bastones del perímetro. Es un momento álgido de trabajo coordinado que permite ver la trama de bastones desde debajo.

Como los bastones se sostienen mutuamente, al fallar uno, todo cae toda la estructura.

Descripción del material:

El taller consiste en la construcción colectiva de una o más cúpulas de unos 4 m de diámetro y un metro de altura aproximadamente.

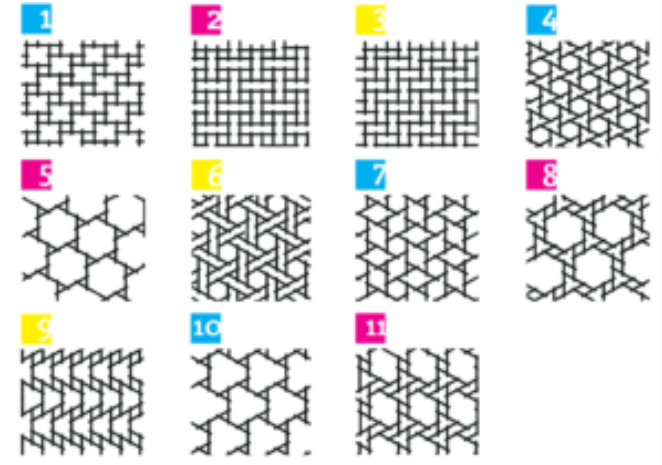
Estas estructuras tridimensionales con bastones que se sostienen mutuamente aparecen en los escritos del genial Leonardo da Vinci

El escultor contemporáneo Rinus Roelofs redescubrió estos dibujos, los ha estudiado y creado a partir de ellos magníficas derivaciones escultóricas.

Inspirándose en ellos, el MMACA ha desarrollado el diseño LEONARDOME de estos bastones con 4 muescas.

No es necesario ningún otro elemento de unión, el mismo peso de las piezas es suficiente para mantener su estabilidad.

Aunque existen infinitos patrones posibles de construcción, por el taller proponemos 11 modelos simples



TaE204 Made in MMACA: nuevas ideas

Guido Ramellini
Guido.ramellini@mmca.cat
MMACA- Museu de Matemàtiques de Catalunya
Carlos Luna Mota
Carlos.luna@mmca.cat
IES Oriol Martorell- MMACA

Modalidad: Exposición

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato

RESUMEN

Presentaremos en la exposición las últimas investigaciones del MMACA:

- Nueva propuesta de módulos, especialmente las relacionadas con matemáticas y arte (proyecto Bridges)
- Puzles de simetría: versiones del MMACA de puzles de difícil solución y alto interés
- Viejos módulos y nueva tecnología: la irrupción de las impresoras 3D
- Maleta didáctica para Infantil, del museo a las escuelas: una pop-up exhibition

Las líneas de investigación siguen siendo las mismas: cómo ayudar el aprendizaje de las matemáticas con propuestas que vienen del punto de vista de la educación no formal; cómo proponer actividad con fuerte aspecto lúdico, pero con contenidos consistentes. Se ha incrementado el interés hacia los aspectos de la elaboración artística y las modalidades de pensamiento y comunicación que comportan.

Los visitantes pueden escoger libremente los materiales que más le interesan. La presencia de los educadores ayuda la conversación y nos permitirá recoger vuestras sugerencias.

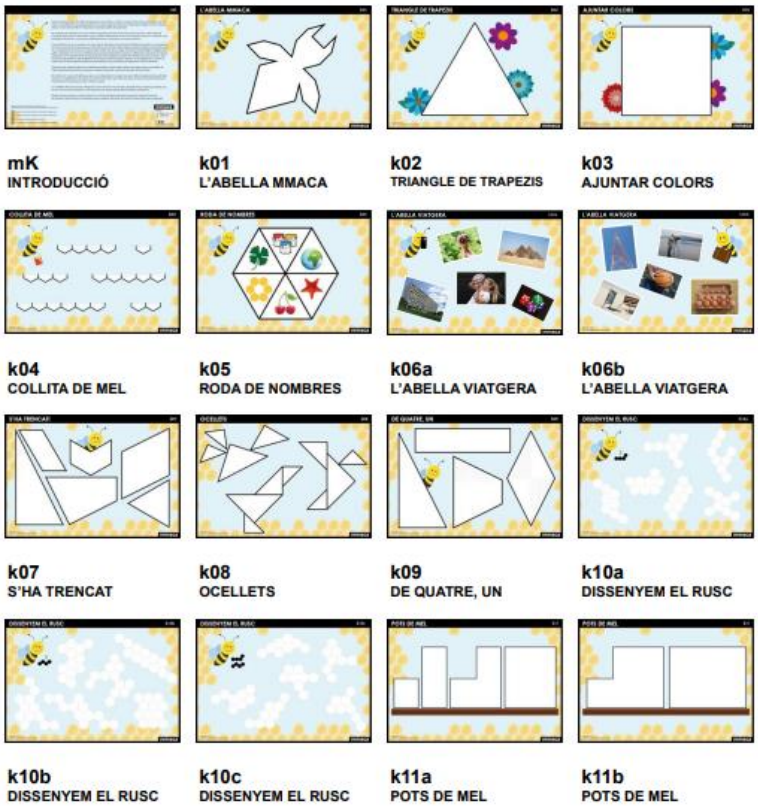
Palabras clave: Acción; Emoción; Pensamiento; Conversación

Referencias

En los últimos cuatro años, el MMACA ha mantenido una colaboración permanente con SUMA y NOU BIAIX, publicando las experiencias que nos parecían tener mayor recaída en la didáctica escolar.

Creemos que en estos artículos se pueden encontrar las claves para leer y profundizar en las propuestas que presentamos en la exposición y que, por las características de las dinámicas típicas de una exposición, allí sólo se pueden experimentar rápidamente.

Ejemplo de materiales de la maleta mK



Ejemplo de puzles de simetría

Dos trencaclosques de simetries

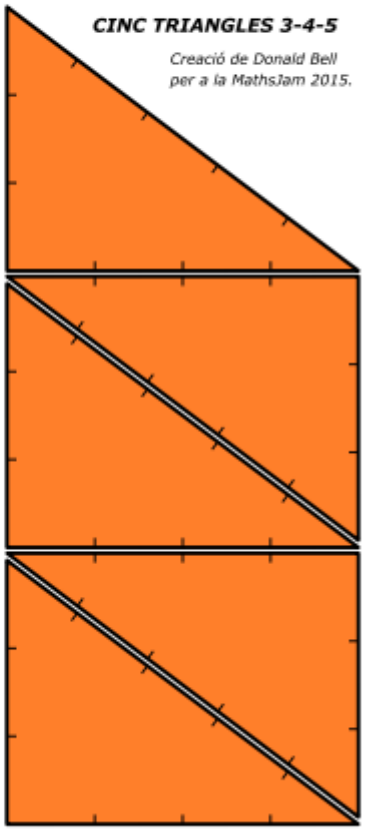
L'objectiu d'aquests dos trencaclosques és el mateix, formar una figura simètrica. Cal juxtaposar les peces sense sobreposar-les per aconseguir un polígon, sense forats, amb **un eix de simetria.**
Són reptes aparentment senzills. Però... retalleu les peces i prepareu les neurones.

SYMMETRICK

Creació de Vesa Timonen.

CINC TRIANGLES 3-4-5

Creació de Donald Bell per a la MathsJam 2015.



TaE209 Taller de criptografía de clave pública

Damián López
direccio.museu@etsinf.upv.es
Museo d'Informàtica ETSINF
Eliseo Marzal
didactica.museu@etsinf.upv.es
Museo d'Informàtica ETSINF

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Bachiller y Universidad

RESUMEN

El taller muestra el fundamento matemático de los sistemas de cifrado asimétrico usado en los sistemas informáticos actuales. A través de actividades prácticas explicaremos el principio de Kerckhoffs, la diferencia entre clave pública y privada, examinaremos las bases del algoritmo de Diffie-Hellman basado en los números primos e intentaremos romper el cifrado de mensajes. Este taller requiere una mínima base matemática (factorización, números primos), por lo que está indicado para el alumnado de Bachillerato.

- Fecha: El taller sólo se puede realizar el lunes 4 de julio

- Ubicación del taller: El taller se realiza en una de las aulas del museo en la Escuela Técnica Superior de Informática siendo el punto de encuentro la puerta del edificio 1E

- Número máximo de asistentes al taller. 40 personas

- Duración del taller. Entre 60 y 90 minutos

- Preferencia horaria: Indiferente.

Palabras clave: Criptografía, Clave Pública, Algoritmo.

MESAS DE EXPERIENCIAS

MeP020 Problemas ambientados

Juan Lebrija Vega
juanlebrija66@gmail.com
IES La Marina (Bezana, Cantabria)

Núcleos temáticos: Procesos, Recursos para el aula.

Modalidad: Mesa de experiencias.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato.

RESUMEN

La desmotivación y la falta de confianza de los alumnos es uno de los principales obstáculos en el aprendizaje de las Matemáticas y, en concreto, en lo que se refiere a la resolución de problemas. El objetivo de esta *Mesa de experiencias* es exponer una serie de problemas cuyos enunciados han sido ambientados en series televisivas, películas, videojuegos, personajes famosos, populares entre los adolescentes, etc. a fin de *enganchar* al alumno y hacer que se sienta motivado y capaz de resolver el problema que tiene delante.

Palabras clave: Problemas Ambientados, Motivación, Interés.

1. Objetivo

El mayor problema de impartir la asignatura de Matemáticas es que muchos alumnos la conciben como difícil y aburrida. La consideran difícil porque no llegan a entenderla, lo que conlleva que no sepan hacer los ejercicios y problemas y les acabe aburriendo. Pero este hecho es fácil de cambiar. Sólo hay que fijarse en los gustos de cada uno. Y esto es aplicable a cualquier asignatura. Por ejemplo, puede ser que, a mí, alumno, no me guste la literatura y, por tanto, si un profesor asume que voy a realizar la lectura voluntaria de unos cuantos poemas de Machado, probablemente se equivoque. Sin embargo, sí me gusta el judo y, si me hablan de un poema que verse sobre el judo, sí que lo leería…

El uso de entornos de ficción para el planteamiento de tareas matemáticas es una metodología que se está popularizando. Por ejemplo, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) es uno de los socios del proyecto Europeo Erasmus+ MoMaTrE, *Mobile Mathematics Trails in Europe*, EC Project Number: 2017-1-DE01-KA203-003577, que ha desarrollado la gamificación de las rutas matemáticas planteando su realización en determinados contextos (e.g. en el ambiente de las historias de piratas) novelescos, véase (Gurjanow y otros, 2019).

La propuesta para esta *Mesa de experiencias* es mostrar una serie de problemas matemáticos ambientados (a título de ejemplo, aunque la ambientación podría acomodarse en función de los gustos del alumnado) en series televisivas, personajes famosos, series *anime*, videojuegos, películas, etc. populares entre el alumnado. En los libros de texto suele aparecer una página dedicada a una Autoevaluación. Se estima que, en este contexto, sería oportuno que apareciera una página con 2 o 3 *problemas ambientados* (con imágenes para hacerlos más atractivos) al final de cada unidad didáctica y dedicar una sesión a resolverlos. El interés y la motivación son los principales motores del aprendizaje y se entiende que esta metodología podría servir para lograrlo, aunque es también evidente que para conseguir un aprendizaje más eficiente es necesaria la concurrencia de diversas metodologías, no únicamente la que aquí se presenta.

1.2 Algunos *Problemas Ambientados*

A continuación, se exponen ejemplos de problemas ambientados, con dibujos para hacerlos aún más atractivos y conseguir una mayor contextualización (los dibujos son creación propia).

1. Problema ambientado en el vídeo juego *Assassin´s Creed*; nivel 3º- 4º ESO. Contenidos trabajados: sucesiones.

Ezio está siendo vigilado por los templarios y necesita reunirse con su amigo Leonardo Da Vinci. Para decirle dónde se ubica, le envía un mensaje con un enigma que sólo mentes brillantes como Leonardo podrían resolver. Resolviendo el enigma conocerás el nombre de la calle. Enigma: C-13, A-8, C-21; N-5, I-1, F-1, O-3, I-34,

B-2. Una vez descubierto el nombre de la calle, el número coincide con el término 11.

Imagen 1. Ezio Auditore.

2. Problema ambientado en la saga de *Harry Potter*; nivel 3º-4º ESO. Contenidos trabajados: raíces de un polinomio (Ruffini).

Estaba Harry caminando por el Bosque Prohibido cuando se encontró al gigante Hagrid petrificado. Rápidamente trató de buscar mandrágora por el bosque para devolver al gigante a su estado normal y vio que había 3 raíces de esta planta ancladas al polinomio P(x)=x^3-2x^2-5x+6. Extrae las raíces para salvar a Hagrid.

Imagen 2. Hagrid, personaje de la saga de Harry Potter.

3. Problema ambientado en la serie *The Big Bang Theory*; nivel 1º ESO. Contenidos trabajados: máximo común divisor.

Sheldon Cooper tiene 10 cómics de Spiderman, 25 de Superman y 15 del Capitán América. Quiere meterlos en cajas iguales, cada una con el mayor número de cómics, pero sin mezclarlos. ¿Cuántos cómics tendrá cada caja?¿Cuántas cajas habrá en total?

Imagen 3. Sheldon Cooper.

1.3 Nota final

Se dispone de más de 80 *problemas ambientados* como los anteriores, con sus planteamientos, ilustraciones y soluciones. La propuesta final es llevar un amplio número de estos a la mesa de experiencias para que los asistentes puedan ojearlos y, si les interesan, considerarlos para su utilización en el aula.

Referencias

Gurjanow, I., Oliveira, M., Zender, J., Santos, P.A., Ludwig, M. (2019). Shallow and Deep Gamification in Mathematics Trails. In: Gentile, M., Allegra, M., Söbke, H. (eds) Games and Learning Alliance. GALA 2018. Lecture Notes in Computer Science, vol 11385. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11548-7_34

MeP037 Las estimaciones y su relación con las Matemáticas

Pedro Berjas Sepúlveda
pedroberjas@hotmail.com
CEIP Ramón Laporta. Quart de Poblet

Núcleo temático: procesos, recursos para el aula.

Modalidad: Mesa de experiencias.

Nivel educativo: Educación Infantil, Educación Primaria.

RESUMEN

El incorporar las estimaciones en los procesos habituales utilizados en la matemática, debería ser una constante pues incorporan una parte cualitativa, de aproximación, de lógica y coherencia en los resultados. Esta visión se aparta de planteamientos tradicionales de corte aritmetista, como es la práctica intensiva de operaciones, o de la aplicación de algoritmos basados en la resolución de problemas donde esta cuestión es ignorada. La mejor metodología que se puede aplicar es la experiencial, donde determinados materiales didácticos nos pueden ayudar, pero también, cualquier elemento de nuestro alrededor, ya que este tipo de cálculos que realiza nuestro cerebro es de uso muy común. La cuestión es que también se aplique a procedimientos y problemas de corte matemático formal. La neurología nos ofrece información de gran relevancia que nos ayuda a comprender cómo funciona nuestro cerebro, mostrándonos el camino de cómo diseñar nuestras actividades.

Palabras clave: Estimaciones, Aproximaciones, Comparaciones, Problemas, Número

Las estimaciones y su relación con las matemáticas

1. Tipos de estimaciones

Tal vez debido a la precisión que buscamos en la aplicación de las matemáticas, especialmente en lo que se refiere al ámbito académico, nos alejamos de otros

procesos cognitivos, como es el caso de las estimaciones, que nos aportan información de corte cualitativo.

Esta información es de gran utilidad en el día a día de las personas pues lo hacemos de manera natural, automática y poco consciente. Así, estimamos el tiempo que tardaremos en llegar a un lugar; la cantidad de dinero que necesitaremos para una compra, un viaje; el peso de un objeto, de una persona; altura de un árbol, edificio; velocidad de un vehículo… y un largo etcétera.

Estas aportaciones cualitativas, aproximativas a cantidades, nos sitúan en el camino de respuestas más precisas, si fueran necesarias, otorgándoles lógica al resultado. Así pues, en el caso de la resolución de problemas, las estimaciones nos ofrecen la posibilidad de determinar si los cálculos realizados son lógicos o simplemente no tienen sentido, y por tanto, hemos equivocado los algoritmos elegidos o nos hemos equivocado en algún cálculo.

Las estimaciones pueden ser de diferentes tipos, dependiendo de la vía de entrada de la información, siendo las visuales y las táctiles las más utilizadas.

Normalmente las estimaciones se realizan confrontando dos magnitudes entre sí, por ejemplo comparando en nuestras manos dos pesos para determinar en cuál de ellas hay más, o asociándolo a cantidades (de peso, longitud, tiempo…)

Para poder acceder a esa habilidad cognitiva, Dehaene, Spelke, Pinel, Stanescu, y Tsivkin (1999), mostraron que si bien algunas operaciones aritméticas son recuperadas directamente del lenguaje, las estimaciones son independientes, ya que se encuentran localizadas en dos estructuras neurológicas diferentes, dependiendo de si se realizan tareas exactas o aproximativas.

Así, vemos que al recuperar la información exacta de operaciones sencillas de suma, resta, multiplicación o división, no hemos de realizar ninguna clase de cálculo o estimación, simplemente se recupera de la memoria. Ante este tipo de situaciones no existe apreciación de cantidad, encontrándonos con un tipo de información un tanto “fría”, mecánica.

Dicha recuperación de la información se realiza a partir de la asociación de palabras, directamente de la memoria, desde circuitos neuronales que se encuentran en la región inferior izquierda del lóbulo frontal.

Asimismo, dichos autores mostraron cómo entran en juego otras estructuras cognitivas diferentes cuando realizamos operaciones aritméticas no memorizadas o cuando realizamos tareas de lectura o escritura de números.

No obstante, independientemente de dichos mecanismos, Dehaene (1997), demostró que existe un mecanismo cognitivo diferente para asignar "valor" a un número o que nos permite compararlos poniéndolos en relación. Asimismo, dicho mecanismo es el responsable de permitirnos aproximarnos de manera estimativa a un resultado, normalmente cuantitativo, desde diferentes magnitudes (peso, longitud, tiempo…).

Para Dehaene et al. (1999), el área cerebral en cuestión se encuentra ubicada a la izquierda y derecha del surco intraparietal, siendo estas regiones cerebrales muy activas en tareas visoespaciales. Ello nos lleva a la conclusión de que las estimaciones, que emplean una representación cuantitativa a partir de redes visoespaciales de los lóbulos parietales transformándolos en símbolos numéricos, se encuentran estrechamente relacionadas con representaciones espaciales. Toda esta información que nos aporta la neurología nos resulta de gran valía para diseñar nuestras actividades, de manera que potenciemos los mecanismos que nos conducen a ciertas habilidades matemáticas.

A nivel matemático, de tareas sencillas con las que iniciar y desarrollar ese mecanismo que nos otorga un cierto sentido cuantitativo, de corte aproximativo, podemos hablar de cuantificadores como (más / menos, muchos / pocos, algo / nada), así como de la subitización.

En lo que se refiere a los cuantificadores, claramente vemos que se trata de aproximaciones muy básicas, con poca precisión.

Si lo que buscamos es mayor precisión en la aproximación, entraremos en la puesta en relación de "cantidades" de peso, longitud, tiempo… respecto al número. El punto

de partida se encuentra en mecanismos como la subitización, proceso por el cual identificamos cantidades pequeñas de elementos, hasta unos seis elementos, de manera directa, sin necesidad de recurrir al conteo. Si vamos incrementando la cantidad de ellos, comenzarán las inexactitudes, entrando en marcha el mecanismo de las estimaciones.

Hay que destacar que la subitización no está exenta de controversia, pues autores como Gallistel y Gelman (1991) y Mandler y Shebo (1982), afirman que no existe, que se trata de un recuento que se realiza a gran velocidad. Por su parte Starkey y Cooper (1995), ofrecen una visión muy diferente, afirmando que los niños de dos años ya son capaces de determinar con exactitud cantidades de elementos (hasta tres), sin que hayan adquirido el conteo. Recordemos que el conteo requiere del dominio de cinco grandes principios según Gallistel y Gelman (1991): orden estable, abstracción, correspondencia uno es a uno, irrelevancia de orden y cardinalidad.

De cualquier modo, no perdamos de vista ese paso que damos, tanto los niños como los adultos, de la determinación exacta de cantidades a partir de una visión rápida de cantidades pequeñas (hasta unos ocho elementos en el caso de los adultos), pasando inmediatamente a aproximarnos al resultado exacto de manera estimativa.

Este sentido cualitativo de cantidades, puesto en relación con el número o directamente entre sí, es el que hemos de intentar cultivar, desarrollar, a partir de las actividades matemáticas que diseñemos, poniéndolo en valor especialmente en la resolución de problemas.

Otra cuestión a tener en cuenta es que son diferentes los tipos de estimaciones que podemos realizar en función del canal de entrada y salida de la información, cuestión que conecta directamente con el Diseño Universal de Aprendizaje.

El D.U.A., tiene su origen en la arquitectura, con el fin de anticiparse a posibles barreras que nos dificultan acceder, en el caso de la enseñanza, a los aprendizajes. Se ha adoptado desde la enseñanza como un planteamiento didáctico que busca la inclusión educativa de todo tipo de alumnado, especialmente del que presente necesidades educativas especiales. Se basa en tres grandes pilares. El primero de

ellos es el facilitar la entrada de la información al individuo a través de diferentes canales sensoriales, principalmente el visual, auditivo y táctil. El segundo, la proyección al exterior de la información procesada por la persona también a través de diferentes modos: gráfica, oral, plástica, motora… Por último, el tercero y también de gran relevancia, el motivacional. Cada actividad debe contemplar en su diseño este tercer aspecto.

La realización de actividades que tienen en cuenta el D.U.A. conectan a la perfección con aquellas de corte estimativo, pues estas parten en gran medida de la participación de los diferentes sentidos.

Veamos a continuación diferentes tipos de estimaciones en función de aquellos sentidos que tienen una relación más directa con las matemáticas.

1.2 Estimaciones visuales

Se trata de un tipo de estimación en el que entra en juego el procesamiento espacial, de la información que nos llega desde el canal visual. Solemos utilizarlas en el caso de aproximaciones de medidas de longitud. Un ejemplo sería cuando hipotetizamos cuántos metros, centímetros, pasos… hay en un determinado objeto, distancia…

Por otro lado también el canal visual nos permite aproximarnos a una determinada cantidad de objetos, bien directamente o en comparación con otro conjunto de elementos. Este tipo de estimaciones son de gran relevancia en la construcción del concepto de número, tal y como se ha demostrado desde la neurología, Dehaene (1997).

Asimismo, se pueden estimar volúmenes, o bien comparándolos entre sí, o respecto a cantidades. Como ejemplos de trabajo podemos encontrar el determinar entre dos objetos cuál de ellos tiene mayor volumen siendo de aspecto diferente, y la comparación de elementos de dos conjuntos a partir del volumen ocupado. También podemos ponerlos en referencia a una determinada cantidad.

Otra posibilidad que nos ofrece este tipo de estimaciones es la de ponderar, visualmente, distribuciones espaciales en las que entran en juego tanto el espacio

como el peso. En este caso, se trata de un proceso más complejo que los anteriores puesto que hay que poner en relación estas dos magnitudes. La riqueza de procesos cognitivos es de gran relevancia, movilizándose al unísono y estableciendo puentes neuronales entre sí, para aproximarse a una determinada solución. Es el caso de los móviles de Calder, donde podemos ver un ejemplo de cómo trabajarlo.

1.2 Estimaciones táctiles

El tacto es otra vía sensorial que nos puede aportar información a partir de la comparación de magnitudes como el peso o las longitudes, y al igual que el resto de estimaciones, comparándose entre sí o respecto a cantidades numéricas.

Las regletas numéricas son un ejemplo de cómo desarrollar este canal sensorial poniendo, por ejemplo, una, dos, tres… regletas de longitudes diferentes en una mano dentro de una bolsa opaca (a más cantidad mayor dificultad en la estimación), y con la otra teniendo la posibilidad de tocar la que se desee entre las dispuestas en escala.

En el caso de comparaciones de peso, también podemos hacerlo de muchos modos, por ejemplo comparando el peso de una determinada cantidad de objetos en cada mano, y sin mirar, determinar en qué mano hay más e incluso, cuántos más.

1.2 Estimaciones relativas al tiempo

También realizamos estimaciones relativas al tiempo cuando hablamos de que será una determinada hora, si es pronto, tarde… Siendo estas las más abstractas por tener referentes visuales o táctiles externos más imprecisos y por necesitar también de unos referentes internos en determinados tipos de estimación. En el caso de los referentes externos entran en juego aspectos perceptivos como la cantidad de luz, calor, y otros derivados de rutinas (hora de la comida, cena…), etc. En cuanto al paso del tiempo, necesitamos tener en cuenta otra variable: la velocidad. Así, si contamos los segundos de un minuto, hemos de hacerlo con una determinada cadencia permitiéndonos interiorizar ese paso del tiempo. En el caso de niños de

infantil, no comprenden esas magnitudes, si bien, pueden comenzar a ser trabajadas a partir de la verbalización de la serie numérica a una determinada velocidad.

Referencias

Dehaene, S. (1997) ¿Cómo calcula nuestro cerebro? *Revista Investigación y ciencia, 253*, 46 – 53.

Dehaene, S., Spelke, El, Pinel, P. Stanescu, R. y Tsivkin, S. (1999). Sources of Mathematical Thinking: Behavioral and Brain Imaging Evidence. *Science, 284,* 970-974.

Gallistel, C.R. y Gelman, R. (1991). The what and how of counting. En W.F. Kesser A. Ortony y F. Craik (eds), *Essays in Honor of George Mandler.* Erlbaum.

Mandler, G., y Shebo, B.J., (1982). Subitizing: An analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology: General, 111,* 1-22.

Starkey, P. y Cooper, R.G. (1995). The development of subitizing in young children. *British Journal of Developmental Psychology.*

MeA001 Evaluación formativa en matemáticas, resolución de problemas y coherencia

Pablo Beltrán-Pellicer (1)
pbeltran@unizar.es *(1)*
Universidad de Zaragoza (1)

Ana Isabel Martínez Pérez (2)
amartinez@cpivaldelaatalaya.es *(2)*
CPI Val de la Atalaya, María de Huerva (2)

Núcleo temático: Evaluación. Procesos.

Modalidad: Mesa de experiencias.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria,

RESUMEN

En la enseñanza a través de la resolución de problemas, el contenido matemático emerge de tareas y situaciones-problema. De esta manera, el alumnado trabaja en primer lugar sobre esas tareas, normalmente en pequeños grupos, sin haber sido introducidos explícitamente en la «teoría» necesaria. El profesor adopta un papel dinamizador y facilitador, proporcionando un andamiaje que permite ir progresando en el aprendizaje. En las puestas en común, que suelen ser al final de cada sesión, o de una serie de tareas, el docente gestiona las producciones del alumnado e institucionaliza el conocimiento cuando es necesario y se «formaliza» al nivel correspondiente. La evaluación es formativa por necesidad, dada la cantidad de interacciones que tienen lugar. En esta mesa mostramos una propuesta de evaluación formativa implementada en el CPI Val de la Atalaya (María de Huerva, España). Esta propuesta da valor al trabajo de aula, reservando el empleo de calificaciones numéricas únicamente al momento final de cada período trimestral, cuando la administración lo requiere (en nuestro caso). Como veremos, el proceso que se describe proporciona un abundante sustrato de evidencias como para poder justificar esta calificación final. Esta manera de evaluar repercute positivamente en las creencias del alumnado y en la faceta metacognitiva, situando a la actividad de

resolución de problemas en el centro de las matemáticas, como medio para la construcción de estas.

Palabras clave: Evaluación Formativa, Resolución de Problemas, Educación Primaria, Educación Secundaria, Práctica de Aula.

MeR047 Nueva versión de Neotrie VR para el dispositivo de realidad virtual Meta Quest

Rodríguez Blancas, José Luis
jlrodri@ual.es
Universidad de Almería

Hernández Sánchez, Rubén
rhs271@inlumine.ual.es
Universidad de Almería, Virtual Dor

Cangas Moldes, Diego
diegocangas6@gmail.com
Virtual Dor

Núcleo temático: Recursos para el aula.

Modalidad: Mesa de experiencias.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad.

RESUMEN

Presentamos una nueva versión de Neotrie VR adaptada al dispositivo de realidad virtual Meta Quest. Entre las novedades más importantes, destaca la incorporación de un menú universal, que hace más amigable la interacción con el usuario, con acceso a configuración, guías de ayuda, galerías de figuras y herramientas, y bloques de actividades educativas distribuidas por la escena.

Palabras clave: Realidad Virtual, Software de Geometría Dinámica, Geometría 3d, Neotrie VR.

1. Uso de Neotrie VR en educación

Neotrie VR (o Neotrie) es un software de geometría dinámica en realidad virtual totalmente inmersiva, desarrollado por la spin-off Virtual Dor, en colaboración con la Universidad de Almería. En octubre de 2018, se publicó la primera versión en la popular plataforma de videojuegos STEAM. Dicha versión, compatible con anteriores sistemas de realidad virtual, tales como HTC Vive, Oculus Rift/S,

Windows Mixed Reality o Valve Index, requería de un ordenador de videojuegos, lo que ha supuesto un hándicap, por su alto coste de adquisición, para muchos centros educativos, que no han podido implementar la RV en las aulas de matemáticas. En (Rodríguez, Romero, Codina, 2021) se exploran los efectos producidos, tanto en el profesorado como el alumnado, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, gracias al uso de Neotrie. Puede verse también un resumen de los resultados en el aprendizaje de los estudiantes, llevados a cabo por un equipo de trabajo colaborativo, en la plataforma europea Scientix (Cangas y otros, 2021).

Desde marzo de 2021, venimos adaptando el software para las Oculus Quest 2 (actualmente Meta Quest). Este dispositivo, basado en Androide, es un producto de Facebook Reality Labs, que se lanzó en octubre de 2020, y en la actualidad es sin duda el más extendido, por su relación calidad-precio. Una versión beta de Neotrie para este dispositivo, se publicó el pasado noviembre de 2021, y es accesible de forma gratuita desde la web de Neotrie (véase Rodríguez, 2021).

Imagen 1. Neotrie ahora disponible en dispositivos Quest.

Este trabajo de adaptación y desarrollo de nuevas funciones en el software, se produce en el marco de un proyecto Erasmus KA2 plus “Geometrician’s Views’’ (marzo 2021-febrero 2023), en el que se están elaborando actividades interactivas de geometría, relacionadas con el trabajo artístico-científico de los estudiantes participantes. En paralelo, se está llevando a cabo un proyecto de investigación UAL-FEDER (2021-2023), titulado “Realidad virtual inmersiva en el aula de matemáticas con NeoTrie VR”, que tiene como objetivo introducir su uso, con los

nuevos dispositivos Quest, en aulas reales de últimos niveles de Educación Primaria y primeros niveles de Educación Secundaria, para trabajar contenidos de geometría plana y espacial. Se espera que Neotrie constituya una herramienta accesible para el alumnado y susceptible de estimular habilidades visuales y aplicaciones del razonamiento espacial. Al mismo tiempo, se espera que tenga un impacto favorable a nivel afectivo en el alumnado y que repercuta positivamente en su aprendizaje.

Los usuarios pueden acceder a las primeras versiones de estas actividades directamente en el juego, gracias al nuevo interfaz que hemos implementado y que describimos a continuación.

2. Nuevo interfaz para el usuario

El nuevo menú que aparece en la escena RV, está pensado para proporcionar al usuario una experiencia más amena a la hora de navegar por las numerosas opciones que ofrece Neotrie. En él no sólo hemos incorporado las típicas funciones de un menú de configuración, sino que hemos dado acceso a opciones que ya estaban implementadas en el juego y a las que el usuario accedía de manera externa, siguiendo manuales y videos de instrucciones en nuestra web. A continuación, mostramos algunas opciones de este nuevo menú, disponible tanto en la versión de PC como en la de Quest.

Una vez registrados en la web de Neotrie, podremos acceder a nuestro usuario y contenido, desde dentro del juego, como se muestra en la Imagen 2.

Imagen 2. Acceso al usuario de la web de Neotrie.

En cuanto a personalización, podemos cambiar todos los parámetros de nuestro avatar, guía, idioma y entorno gráfico. Como podemos observar en la Imagen 3, ahora disponemos de un teclado genérico, que nos acompañará en todos los textos editables del juego.

Imagen 3. Personalizando tu avatar. Nuevo teclado en el entorno RV.

En la Imagen 4, vemos que algunas de las opciones del menú de anteriores versiones para PC, se encuentran ahora en este menú universal, de forma más clara. Podemos modificar variables tales como ocultar ciertos componentes de las figuras o seleccionar el tipo de arista, con la que queramos trabajar.

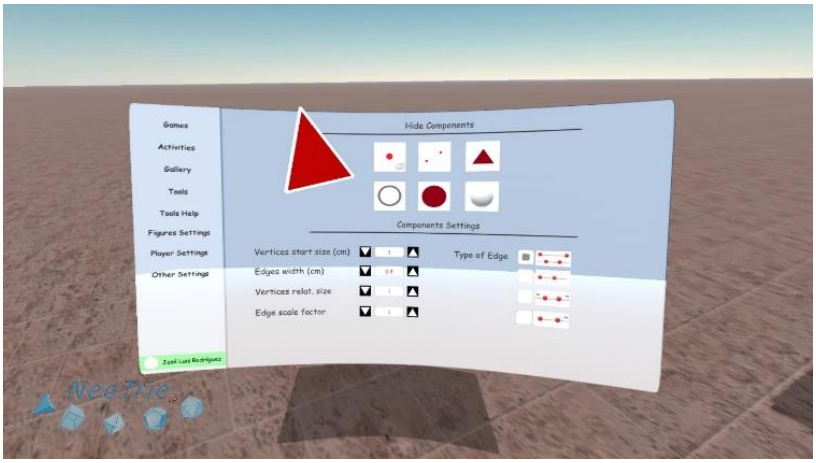


Imagen 4. En ajustes de figuras podemos ocultar, por ejemplo, los vértices.

Una de las actualizaciones más esperadas, incorporadas en este menú, es sin duda una galería que recopile figuras de las familias habituales (prismas, pirámides, solidos platónicos y arquimedianos, etc.). Con solo tocar el correspondiente botón con la mano, se creará la figura seleccionada, lista para ser manipulada. Además,

algunas de estas cuentan con algoritmos para generar la figura deseada, como por ejemplo prismas y antiprismas, de cualquier número de aristas en las bases, tal y como se observa en la Imagen 5.

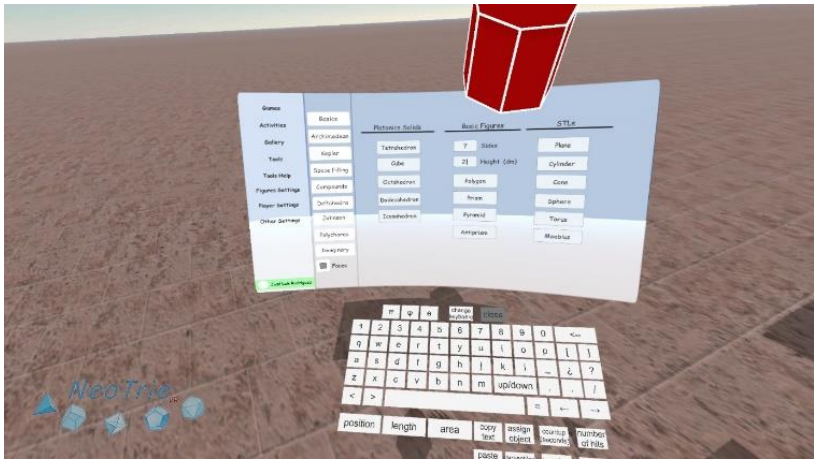


Imagen 5. Creando un prisma regular de 7 lados y 2 dm de altura.

Otra novedad es que ahora disponemos de una lista de herramientas, accesible desde el menú. Al pulsar sobre la imagen de la herramienta, aparecerá en escena para poder utilizarla, como se muestra en la Imagen 6.

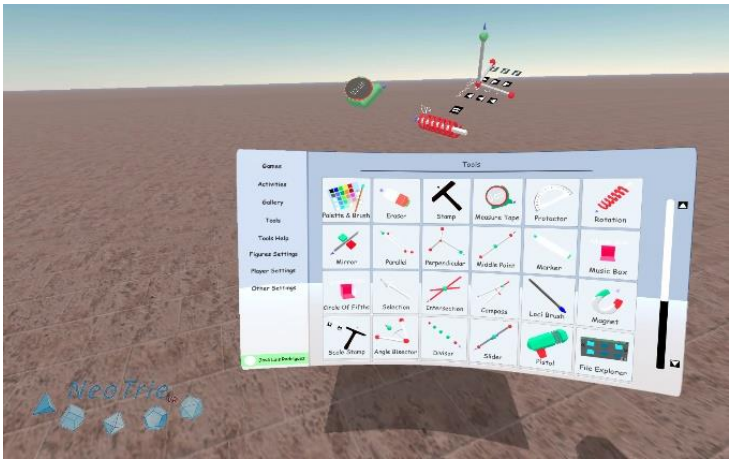


Imagen 6. Escogiendo las herramientas necesitadas.

Ahora, un breve texto de ayuda de cada herramienta aparecerá en la pestaña de ayuda de la Imagen 7. Sólo es necesario agarrar la herramienta correspondiente para que se muestre un texto de ayuda.

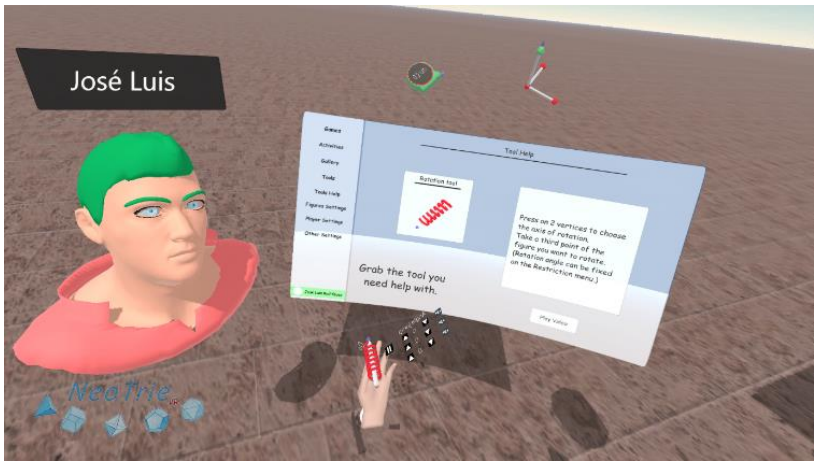


Imagen 7. Aprendiendo a usar una herramienta.

En los casos en los que no sea suficiente el texto de ayuda, pulsando el botón de vídeo de la Imagen 7, accederemos a un video explicativo de esa herramienta, como vemos en la Imagen 8.

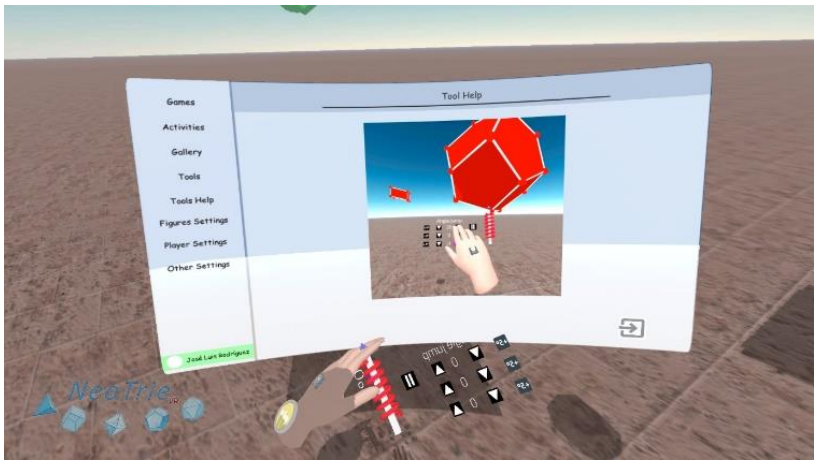


Imagen 8. Videos explicativos de uso de las herramientas.

Para finalizar, hemos incluido una pestaña de otros ajustes, a petición de los usuarios. Estos ajustes eran accesibles anteriormente modificando un archivo de configuración del juego y copiándolo en el dispositivo a través de un cable USB, lo que era un poco engorroso. En la Imagen 9, podemos observar cómo ahora, bastantes opciones de configuración están disponibles para cambiarlos dentro del juego, pudiéndose guardar además en cada escena.

Imagen 9. Otros ajustes disponibles en Quest.

Planeamos seguir añadiendo más características, para que sea más amigable interactuar con el menú. Para acabar, hablaremos de una de las últimas novedades: los bloques de actividades.

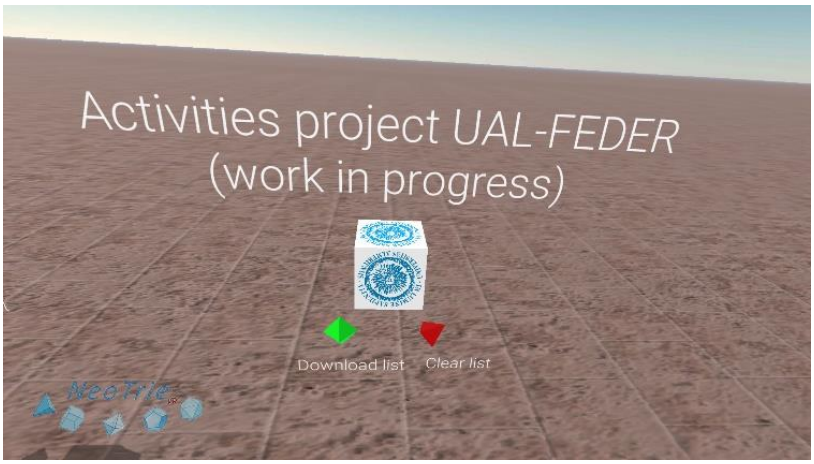


Imagen 10. Bloque de acceso a actividades en preparación.

Estos pequeños cubos (ver Imagen 10) repartidos por la escena, sirven de enlace directo a la web Neotrie. Al tocarlos, se descargan automáticamente de la web, las actividades correspondientes. Esto supone una gran ventaja para el usuario, que antes debía utilizar un cable USB para conectar las Quest con el ordenador.

Imagen 12. Acceso a actividades de la web desde dentro de la escena.

Las actividades se presentan de forma ordenada, en la pestaña de actividades del menú universal, como podemos ver en la Imagen 12. Luego, una vez cargado, se accede a cualquiera de ellas tan solo pulsando la imagen correspondiente, desde cualquier parte de la escena.

En el futuro, mediante estos bloques se podrá acceder a actividades personalizadas y guardadas en su usuario de nuestra web o en la pestaña de comunidad, y se podrán publicar para que otros usuarios puedan descargarlas también.

Conclusiones

La popularidad de las Quest 2 a nivel global, está permitiendo el uso de la realidad virtual de calidad, no sólo para ocio, sino también para educación. En particular, el software de geometría dinámica Neotrie VR, adaptado ya a este nuevo dispositivo, cubre temáticas relacionadas con la Geometría, que se imparten desde niveles de Educación Primaria en adelante. En este zoco, los participantes podrán sumergirse en el mundo de Neotrie, navegar por el nuevo menú y probar algunas de las actividades ya disponibles de los proyectos educativos, en los que estamos participando.

Referencias

Cangas, D. et al. (2021). Using NeoTrie VR for STEM Education in Virtual Reality. *Filodiritto Editore – Proceedings of the 11th International Conference the Future of Education – Virtual Edition, 511-517*.

Rodríguez, J.L. (2021). *Neotrie VR - Quest Edition*. https://www2.ual.es/neotrie

Rodríguez, J.L., Romero, I. y Codina, A. (2021). The Influence of NeoTrie VR's Immersive Virtual Reality on Teaching and Learning of Geometry. *Mathematics,* 9(19), 2411.

Rodríguez, J.L. (2022). Exploring dynamic geometry through immersive virtual reality and distance teaching. *Capítulo en libro "Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence", de la serie "Mathematics Education in the Digital Era". Berlin, Germany: Springer*.

MeR104 Una fracción inesperada.

José Ángel Murcia Carrión
Joseangelmurcia@gmail.com
Facultad de Educación. Centro de Formación del Profesorado. Universidad Complutense de Madrid

Núcleo temático: Recursos para el aula, Procesos

Modalidad: Mesa de experiencias.

Nivel educativo: Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria y Universidad (formación de maestros).

RESUMEN

Las tiras de fracciones son un material conocido en educación primaria. Son muchos los contenidos para los que este material permite establecer analogías: concepto de fracción, fracciones equivalentes, suma de fracciones con mismo denominador, división de fracciones... A pesar de ello, no se utilizan tanto como se podria. En esta mesa de experiències se presentarán varias actividades aptas para primaria y secundaria, incluyendo un reto y una reflexión al hilo de este reto.

Palabras clave: Aprendizaje por Analogia, Fracciones, Número Racional

PECHAKUCHAS

PeP016 La mirada matemàtica a la escola Bressol

Amanda Figuerola Garcia
amanda.figuerola@gmail.com
Escola Bressol Municipal Cobi (Institut d'Educació de Barcelona)
Maria Roca Parpal
mrocap@bcn.cat
Escola Bressol Municipal Cobi (Institut d'Educació de Barcelona)

Núcleo temático: processos, recursos para el aula,

Modalidad: PechaKucha

Nivel educativo: Educación Infantil,

RESUMEN

Nuestra presentación pretende mostrar a la comunidad educativa que desde la escuela infantil es posible trabajar matemáticas de una manera informal y lúdica a través de los hábitos y rutinas, espacios, propuestas y materiales.

Estos momentos permiten que se establezcan los primeros aprendizajes matemáticos, intuitivos, pero absolutamente necesarios para poder hacer conexiones con las matemáticas más formales que aprenderán en niveles superiores.

El educador sugiere, acompaña y pone palabras a las situaciones y da relevancia a los conceptos matemáticos que aparecen. Estos conocimientos matemáticos están relacionados con la lógica, la numeración y el cálculo, la geometría desde la espacio, la posición y la forma y la medida.

Palabras clave: Conceptos Matemáticos, Escuela Infantil, Intuitivo y Lúdico

Referencias

Alsina, A. i Xarxa d'Escoles Bressol Municipals de Girona (2015). La descoberta del pensament matemàtic a l'escola bressol. Barcelona: Rosa Sensat

Generalitat de Catalunya (2015), Departament d'Ensenyament Currículum i orientacions. Educació infantil primer cicle Barcelona

Saavedra Gandia , Merce i Torrent Tort, Goretti (2020) La mirada matemàtica a l'Escola Bressol Revista Guix Infantil 103 Barcelona Ed Graó

Bueno Torrens (2017), David Neurociència para educadores Barcelona Ed Octaedro

“Jo no ensenyo res, sinó que acompanyo en la reflexió, en el coneixement d’ells mateixos i de les seves criatures. Cal compartir experiències, no jutjar” Carme Thió

PEC EBM Cobi

Llibre vermell ebm cobi

tereMagem

escola bressol Judit cucala mercè Saavedra

Neurociència i educació D Bueno

PeR030 El lenguaje matemático en el primer ciclo de educación infantil (0-3 años)

Mercè Saavedra Gandia
mercesaavedrag@gmail.com
Institut Municipal d'Educació de Barcelona
Goretti Torrent Tort
gttgoretti59@gmail.com
Institut Municipal d'Educació de Barcelona

Núcleo temático: Recursos para el aula. Conexiones.

Modalidad: PechaKucha

Nivel educativo: Educación Infantil de Primer Ciclo (0-3 años).

RESUMEN

Esta PechaKucha complementa, con imágenes, la comunicación con el mismo título que hemos presentado.

En las Escoles Bressol tenemos materiales comerciales que seleccionamos y que tienen su objectivo pedagógico. Pero muchas veces este tipo de materiales son cerrados, solo tienen un objectivo.

Des de hace años, hemos comprobado, que los objetos de la vida cotidiana atraen el interés de los niños de estas edades, posibilita la investigación, la creación y motiva la imaginación.

El material inespecífico está formado por objetos de la vida cotidiana, elementos naturales y de reciclaje. Es un material abierto y que permite al niño crear pequeños proyectos e hipótesis aprendiendo de su propio interés. A la vez que favorece la descubierta y la adquisición de conceptos matemáticos.

Es por ello que ponemos el material inespecífico a disposición de los niños, a veces también combinado con los objetos y materiales comerciales.

Estas imagenes quieren mostrar ejemplos de este tipo de material y de las posibilidades que da a los niños. Creemos que también puede ser un material válido para tener al alcance en edades posteriores.

El adulto que acompaña los procesos que realiza el niño, observa su acción, propone nuevos retos, pone palabras a sus descubrimientos. Está abierto a descubrir las posibilidades de otros materiales.

Palabras clave: Educación Infantil, 0-3 años, Lenguaje Matemático, Material Inespecífico.

PeR031 ¿Hacen relaciones matemáticas los bebés?

Iolanda Torralba Palmero
adnaloi71@yahoo.es
Institut Municipal d'Educació de Barcelona
Mercè Saavedra Gandia
mercesaavedrag@gmail.com
Institut Municipal d'Educació de Barcelona

Núcleo temático: Recursos para el aula. Procesos.

Modalidad: PechaKucha

Nivel educativo: Educación Infantil de Primer Ciclo (0-3 años).

RESUMEN

Los bebés descubren el mundo que les rodea a través de los sentidos, de la manipulación espontánea y de la interacción con su entorno.

Y con las propuestas que les ponemos a su alcance, los niños captan las características de los objetos y de los materiales, pudiendo descubrir las cantidades y las cualidades como: peso, texturas, temperaturas, forma, color, consistencia, sonido, tamaño, superficie y establecer relaciones matemáticas como: comparaciones, emparejamientos y agrupaciones.

Esta PechaKucha es una muestra en imágenes de esta manipulación de objetos y las relaciones que el bebé establece según su propia experiencia e interés.

Complementa la Comunicación que presentamos, *"¿Hacen relaciones matemáticas los bebés?"* y en la que explicamos este proceso.

Palabras clave: Aula de 0-1 Año, Cesta de los Tesoros, Exploración, los Sentidos.

PÓSTERES

PoP005 Modelización del step back de Luka Doncic

Roberto Cerrato Ortega
Cerrato.roberto@gmail.com
M. Carmen Escribano Ródenas
escrod@ceu.es
Gabriela M. Fernández Barberís
ferbar@ceu.es

1. Resumen

Propuesta didáctica para la enseñanza de Matemáticas basada en el modelo de aprendizaje invertido y en las metodologías de aprendizaje basado en la indagación y aprendizaje cooperativo.

La actividad consiste en la aplicación del proceso de modelización matemática a un caso de interés de los alumnos. En concreto se modeliza el lanzamiento a canasta de un famoso jugador de baloncesto. Incluye material audiovisual con simulaciones realizadas con Geogebra y formularios de cuestiones que los alumnos han de trabajar tanto de forma individual como en grupo, los cuales permiten la evaluación de lo aprendido.

2. Objetivos

- Desarrollo de la Competencia Matemática a través de la Resolución de Problemas de la vida real, trabajando de forma cooperativa.

-Transversalidad entre los distintos saberes de las Matemáticas y de la Física (álgebra, geometría, análisis y funciones, pensamiento computacional, cinemática).

- Aplicación a situaciones de interés de los estudiantes.

3. Desarrollo de la actividad

- Un total de 8 sesiones: 5 en ámbito grupal (en clase), 3 en individual (en casa).
- Tres formularios para guía y evaluación del trabajo individual de los alumnos.
- Entregables: formularios, modelización de otro caso real.
- Formulario de encuesta para evaluación del docente y de la propia actividad.

4. Material audiovisual elaborado

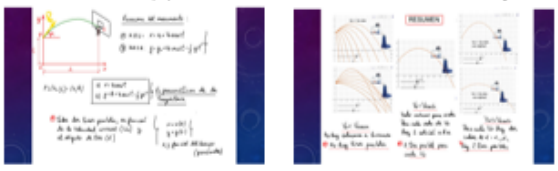
- La Física de Luka Doncic: análisis de su famoso *step back* con la física y las matemáticas del colegio.

- Tres vídeos: entradilla, modelo matemático y resultados.

https://www.youtube.com/watch?v=BsSeqId1Bb8

https://www.youtube.com/watch?v=ZJHUdnRgATA

https://www.youtube.com/watch?v=ZMklzCK-7Nc



5. Evaluación y calificación

- Del trabajo de los alumnos: ítems para su evaluación y calificación, tanto de la parte individual como de grupo.

- De la labor realizada por el docente: encuesta final anónima a rellenar por los alumnos. Valoración final de la actividad. Propuestas de mejora.

Criterios de evaluación y calificación

Concepto a evaluar	Peso sobre la nota de la actividad
- Respuestas del formulario 2	10%
- Respuestas del formulario 3	10%
- Participación individual en debates	20%
- Cuaderno de notas y apuntes	10%
- Trabajo final de grupo:	
- Informe escrito con el modelo matemático:	40%
- Presentación y exposición en clase:	10%

PoP028 Movilización del pensamiento estadístico en maestros. Propuesta de lectura más allá de los datos.

Belén Palop
Belen.palop@uva.es
Juan José Santaengracia
juanjosesantaengracia@gmail.com

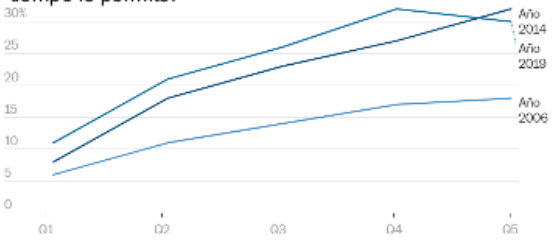
"Comprender un gráfico" es la capacidad de inferir el sentido que tiene un gráfico creado por uno mismo o por otros.

1. Introducción

Aprender a leer gráficos se puede comparar con aprender un nuevo idioma y, de la misma manera que con un idioma, tenemos que asegurarnos de que:

1) Proporcionamos numerosos ejemplos y situaciones del uso correcto de cada elemento.
2) Permitimos al alumno desarrollar un nivel de comprensión del idioma muy superior al nivel de producción.

La Educación Estadística forma parte del currículo español desde la Educación Primaria, el contenido suele reducirse al mínimo, trabajándolo únicamente cuando el tiempo lo permite.



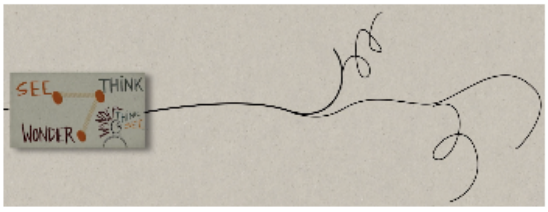
Porcentaje de familias que gastan en clases particulares por quintiles de gasto total. Fuente: El País, a partir de los datos elaborados por EsadeEcPol extraídos de la encuesta de presupuestos familiares, INE.

2. El objetivo

A través de las actividades de lectura de gráficos, nuestro objetivo es:

1) (Re)aprender los conceptos básicos de la lectura de gráficos que no hayan aprendido en sus años escolares.
2) Promover una cultura basada en la evidencia donde la argumentación se base en los datos disponibles.
3) Aprender a interpretar y comprender los resultados cuantitativos en la investigación educativa.
4) Reflexionar sobre prácticas educativas comunes como los deberes, la repetición, la segregación, la perspectiva de género etc., que se entienden como parte de nuestro currículo transversal (u oculto).

¿Cómo contribuye la comprensión del contexto a la interpretación de los datos que se representan en un gráfico?



3. La propuesta

La "enseñanza de los gráficos" en el contexto del análisis de datos debe promover una comprensión de alto nivel que incluye una comprensión flexible, fluida y generalizable de los gráficos y de su uso.

En *Fundamentos de la Medida, del tratamiento de la información y del azar: Estrategias didácticas para su enseñanza*, 4o curso del Grado de Educación Primaria en la Fac. Educación, UVa) hemos utilizado la clasificación de comprensión de gráficos de Friel et al. (2001): leer los datos, entre los datos y más allá de los datos.

La rutina de pensamiento del Proyecto Zero de Harvard Veo-Pienso-Me pregunto (Ritchhart & Perkins, 2008) tienen un paralelismo natural de estos tres niveles de lectura, con los que tienen una correspondencia uno a uno.

4. Resultados

- 10/70 no responden; 13/70 no comprenden el gráfico
- 47/70 alcanzan el nivel L3 propuesto por Friel et al.
  - 3 preguntan sobre la tendencia de la serie
  - 10 realizan preguntas inferenciales
  - 23 desearían profundizar en la investigación pidiendo detalles adicionales
  - 11 se conmueven por la situación y sus preguntas se relacionan con cómo revertir la tendencia.

Referencias bibliográficas

Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. Journal for Research in mathematics Education, 32(2), 124-158.

Ritchhart, R., & Perkins, D. (2008). Making thinking visible. Educational leadership, 65(5), 57.

PoC005 Geometría y arquitectura histórica

Mónica Soler Montaner
Msoler40@gmail.com
IES Francesc Gil (Canals)
Manuel Antonio Cerdá Larrosa
Macl27@gmail.com
IES Sivera Font (Canals)

El objetivo de esta propuesta didáctica es diseñar rutas matemáticas contextualizadas históricamente para estudiar los elementos geométricos característicos de cada período artístico.

DISEÑO DE LA RUTA
En primer lugar, se clasifican los edificios históricos de una ciudad y se diseña una ruta siguiendo la cronología histórica de estos.

ENLACE AL LIBRO GEOGEBRA CON LAS CONSTRUCCIONES

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD
El alumnado sigue la ruta propuesta, fotografía los elementos geométricos destacados y después los representa con GeoGebra.

Elementos arquitectónicos representados con GeoGebra.

Románico (s. XII) Arco de medio punto Iglesia Sant Feliu Xàtiva

Gótico (s. XIII) Arco ojival Iglesia de Sant Francesc Xàtiva

Gótico (s. XIII) Bóveda de crucería Catedral de Valencia

Renacimiento (s. XV) Proporción áurea Hospital Real Xàtiva

Siglo XX Paraboloide hiperbólico Oceanográfico Valencia

Modernismo (principios s. XX) Arco catenario Mercado de Colón Valencia

Neoclásico (s. XIX) Cúpula semiesférica Iglesia Sant Antoni Abat Canals

Barroco (s. XVII) Vidriera elíptica Catedral de Valencia

Esta actividad ofrece al alumnado la posibilidad de visualizar las matemáticas en un entorno cercano fuera del aula y establecer conexiones con otras disciplinas como la arquitectura, el arte y la historia en general.

PoC010 Construcción de una pirámide holográfica para el alumnado de secundaria

José Jaime Noguera Noguera
josejaimenn@gmail.com
Natividd Risueño Bañuls
natirisueno@gmail.com

1. Introducción.

Denominamos pirámide holográfica a un tronco de pirámide de 4 caras construido en algún material que refleje la luz. Se coloca sobre la base pequeña en el centro de un vídeo que tiene 4 imágenes duplicadas planas (puede conseguirse en internet, buscando "vídeos pirámide holográfica") que, al reflejarse sobre las caras de la pirámide, crean una ilusión óptica similar a un holograma tridimensional, aunque en realidad no es más que una imagen en dos dimensiones. En la **Figura 1 (izquierda)** podemos ver cómo se coloca la pirámide sobre un dispositivo móvil.

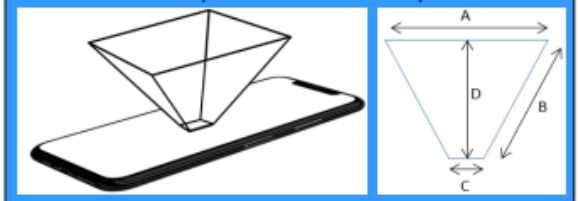


Figura 1: Posición pirámide (izq.); Medidas (der.)

2. Construcción de la pirámide.

2.1. Materiales.

Láminas plásticas transparentes (o de acetato), tijeras, cinta adhesiva, papel cuadriculado y regla.

2.2. Tamaño de las caras según el dispositivo.

Según la **Figura 1 (derecha),** podemos utilizar A=6cm, D=3.5cm, C=1cm para un móvil, o bien A=14cm, D=10cm, C=2cm para una tableta. Si queremos ser más exactos (Silva, 2017) podemos medir el lado menor de la pantalla de proyección (M) y utilizar las medidas A=1.23xM, B=0.91xM, C=0.194xM, D=0.74xM.

2.3. Construcción paso a paso.

Recortamos 4 caras iguales sobre la lámina transparente y unimos las esquinas de las caras con celo transparente, ver la **Figura 2**.

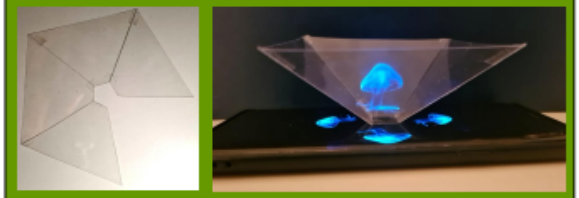


Figura 2: Caras (izq.); Uso de la pirámide (der.)

3. Actividades de geometría para el alumnado.

Según los contenidos impartidos, podemos plantear las actividades: localizar aristas, vértices, caras y bases del tronco de pirámide; calcular el área de una cara; calcular el volumen del tronco de pirámide; calcular el ángulo que forma una cara con la base mediante trigonometría (idealmente debería ser de 45º), etc.

4. Experimentos. Formación de la imagen.

Planteamos el experimento de ir tapando una o más proyecciones, o bien introducir objetos en la pirámide. Antes de realizarlo, preguntamos a los alumnos qué creen que va a ocurrir, ver la **Figura 3 (izquierda)**.

El resultado es que el supuesto holograma sigue visualizándose igual, ya que lo que vemos simplemente es la reflexión de la luz sobre la cara más cercana a nuestro ojo, ver la **Figura 3 (derecha).**

Figura 3: Experimento (izq.); Reflexión de la luz (der.)

5. Conclusiones.

La construcción de una pirámide holográfica es un proceso sencillo que podemos utilizar con alumnado de secundaria para trabajar conceptos geométricos.

6. Referencias.

Orcos, L., Jordán, C., Magreñán, A. *Uso del holograma como herramienta para trabajar contenidos de Geometría en Educación Secundaria.* Pensamiento Matemático. Vol. VIII, Núm. 2, pp. 95-100.

Silva, T., et al. (17-29 July 2017). *The Holographic Pyramid as a Didactic Tool in the Teaching of Chemistry.* IUPAC 2017, São Paulo, Brazil.

Sulton, Prihatmoko, Y. *Student Perception About 3D Object from Hologram Pyramid for Learning.* Advances in Social Science, Education and Humanities Research, ICITE2020, volume 508.

DESCARGA EL PÓSTER

PoR014 Los virus nos enseñan geometría: cápsidas de virus de papiroflexia

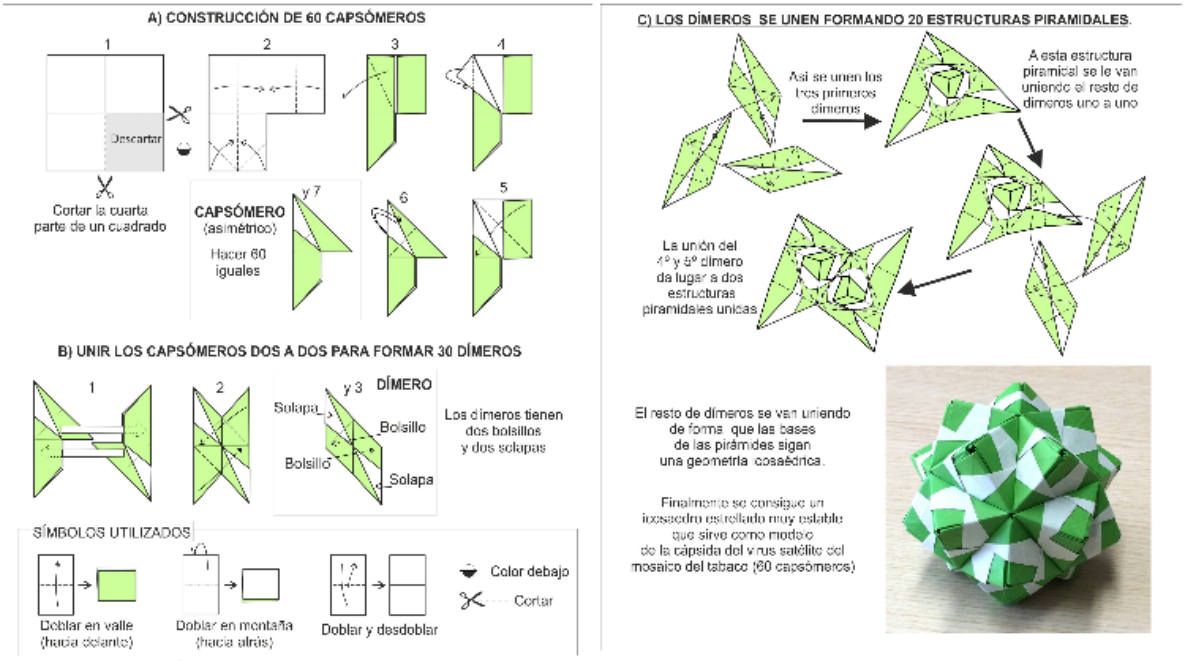
Belén Garrido Garrido
belengarrido@gmail.com
Colegio Guadalaviar. Valencia

Los virus son agentes infecciosos microscópicos sin estructura celular formados por una cápsida proteica que encierra una o varias moléculas de material genético. Las cápsidas de los virus icosaédrico o esféricos son un ejemplo de una arquitectura molecular perfecta. Impresiona comprobar cómo en un proceso natural de síntesis y ensamblaje espontáneo de proteínas, se forman este tipo de estructuras con tan alto grado de simetría.

En un momento dado puede ser interesante presentar a los estudiantes este ejemplo de simetría que aparece en la naturaleza y proponerles modelizar una cápsida viral. En este trabajo presentamos un modo de construir una cápsida viral utilizando la técnica de la papiroflexia (origami).

La cápsida del Virus Satélite de la Necrosis del Tabaco (STNV) está formada por 60 subunidades proteicas idénticas. Esta cápsida presenta una simetría icosaédrica perfecta en la que las 60 subunidades proteicas se colocan en las 60 regiones simétricamente equivalentes de un icosaedro. (Khalid, M. 2020).

La papiroflexia (origami) modular ha resultado ser un recurso muy apropiado para construir modelos de cápsidas icosaédricas. Presentamos un módulo de papiroflexia asimétrico que se encaja de modo estable y sin utilizar pegamento para formar una estructura icosaédrica de 60 módulos cumpliendo la simetría de la cápsida del STNV. Su construcción asemeja de un modo muy ilustrativo el proceso natural de formación de esta estructura biológica (Garrido, B. 2016).



PARA SABER MÁS:

Garrido Garrido,M.B. (2016). *Orisangakus. Desafíos matemáticos con papiroflexia.* Editorial SM. Madrid
Khalid, M. (2020). Geometric architecture of viruses. World Journal of Virology, nº. 9(2), 5–18.
https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7459239

PoR049 Jugando con el sentido algebraico:una experiencia con Hurry Count en 5º y 6º de primaria

Rocío Garrido Martos
Rocio.garrido@uam.es
Rocío Blazquez
Rocio.blazquez@crasierraoeste.es
Andrea de la Fuente
Delafuente.andrea@gmail.com

1. Introducción. Trabajo con juegos.

El trabajo con juegos a menudo se justifica solo con una valoración cualitativa sobre percepciones de aprendizaje y de la experiencia o como una simple actividad lúdica (Franco-Mariscal y Sánchez, 2019), pero nuestra propuesta sugiere definir bien los saberes básicos a trabajar.

2. Hurri Count para trabajar el Sentido Algebraico.

En el Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria, se nos insta a trabajar para en el desarrollo del sentido algebraico, en particular en 3er ciclo en las relaciones de igualdad y desigualdad y uso de los signos < y >, algo claramente mejorado desde el estudio de Mejías y Alsina (2020). Proponemos estas dos versiones del juego Hurri Count (Mental Counting y Foundations of Algebra) para trabajar en el aula estos saberes básicos. Una vez vistas las reglas del juego, destacamos como potencia del mismo, que entre las 2 versiones contamos con 6 niveles de dificultad y algunos subniveles que podemos ir creando debido a que no solo se cuenta con 3 "animales" de referencia, también con alguna característica diferenciada de los mismos en el nivel avanzado. Además, también se trabajan las estrategias variadas de conteo. Por otro lado, es un juego que se explica muy rápido, muy dinámico y con una duración corta por partida, con lo que se pueden trabajar perfectamente los diferentes niveles en la misma sesión (hasta donde cada grupo llegue).

REGLAS DEL JUEGO

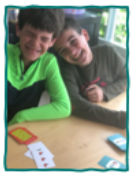
3. Desarrollo de la experiencia

La experiencia se llevó a cabo en marzo de 2022 en un Colegio Rural Agrupado de la Sierra de la Comunidad de Madrid en una clase con alumnado de 5º y 6º con una gran diversidad de niveles. No habían trabajado previamente con < y >. Fue una sesión conjunta en codocencia, una investigadora y una docente de primaria, dentro de un convenio de cooperación para la formación continua del profesorado.

Se realizó la experiencia con grupos heterogéneos de 4-5 estudiantes en una única sesión de duración de hora y media. Se fueron introduciendo diferentes niveles de dificultad, a medida que los iban requiriendo. Se emplearon estrategias de conteo diversas y, algún grupo, creó alguna regla añadida como dejar 5 segundos antes de que nadie pudiera tapar la carta. Fue generalizado el uso de explicaciones los unos a los otros. Se definieron rápidamente los roles de cada integrante con una dosis de competitividad y, también, muchas risas.

4.Resultados y conclusiones

Destacar en primer lugar el trabajo de codocencia que consideramos es vital para introducir la investigación en el aula y que fue una experiencia completamente satisfactoria. El alumnado mantuvo la atención durante toda la sesión y no tenían la percepción de haber pasado tanto tiempo, tan solo 2 personas necesitaron cambiar de actividad. Con respecto a los saberes, todos consiguieron responder a la propuesta del nivel inicial y la mayoría demostró la adquisición de las relaciones de igualdad, desigualdad y uso de los signos < y >.



EDMAVOE:
EDucación MAtemática: VOlver a la Escuela
Proyecto UAM-INNOVA: FPYE_018.21

PoD006 Árbol matemático para una navidad responsable

Ana M. Pilar Martín Puebla
ammartinp01@educantabria.es
Gema Rosa Quintana Portilla
grquintana5@educantabria.es

El proyecto

Construcción de un árbol de Navidad matemático: una pirámide de Sierpinski de más de tres metros de altura formada por 1024 tetraedros. Fue montado en el centro del vestíbulo del instituto.

Objetivo

Familiarizar a los alumnos con los conjuntos fractales y, a la vez, pedir responsabilidad y concienciar a la comunidad educativa para la situación a vivir durante la difícil Navidad de 2020 tras el confinamiento por el Covid-19.

El triángulo de Sierpinski

Fractal que se puede construir a partir de cualquier triángulo. Se obtiene dividiendo un triángulo en cuatro triángulos iguales, eliminando el triángulo central y repitiendo el proceso infinitas veces.

Desarrollo

El procedimiento es el mismo que el usado para construir un triángulo de Sierpinski pero empleando tetraedros en lugar de triángulos.

Más de 300 alumnos de ESO confeccionaron los tetraedros usando folios de colores. Expresaron un deseo para el año 2021 en cada uno de ellos, haciendo especial hincapié en la responsabilidad de todos en el cumplimiento de las medidas higiénico-sanitarias para impedir que las navidades se convirtieran en foco de expansión de la pandemia.

PoD008 Comprobación viviente del teorema de Pitágoras

Gema Rosa Quintana Portilla
grquintana5@educantabria.es
Ana M. Pilar Martín Puebla
ammartinp01@educantabria.es

El proyecto

Construcción de una comprobación geométrica viva del teorema de Pitágoras. Fue realizada en el patio del IES Montesclaros durante un recreo dentro de las actividades enmarcadas en la Semana Cultural.

Objetivo

Familiarizar a los alumnos de primero de ESO con el teorema de Pitágoras que aprenderán durante el tercer trimestre del curso.

Teorema de Pitágoras

Es una relación fundamental en geometría euclidiana entre los tres lados de un triángulo rectángulo. Afirma que el área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos. Es uno de los teoremas más antiguos que se conoce. En 1927, E. S. Loomis publica "The Pitagorean Proposition" donde aparecen 367 demostraciones del mismo.

Desarrollo

Se seleccionaron un total de 100 alumnos de 1º y 2º ESO, para hacer dos grupos de 36 y 64 alumnos que confeccionaron los cuadrados sobre los catetos y que después se colocaron el el cuadrado sobre la hipotenusa, comprobando así el teorema.

Cada alumno portaba una cartulina verde o amarilla, por ser los colores del logo del instituto.

Las fotos se realizaron con la ayuda de un dron, y durante la demostración se animó al alumnado con la canción de Mr. Doods titulada Pythagorean Theorem.

PoI007 Quizziz en talleres para estudiantes de talento matemático con distinto nivel

Pablo Gutierrez Jaime
pablogj_1992@mail.ucv.es
Universidad Católica de Valencia

Jeison Camilo Sua Florez
jeison.sua@uv.es
David Ariza Ruiz
david.ariza@uv.es
Adela Jaime Pastor
adela.jaime@uv.es
Universidad de Valencia

INTRODUCCIÓN

Los estudiantes de talento matemático necesitan recibir instrucción adecuada a su nivel y que les permita desarrollar su potencial. En contra de la creencia de parte de la población, sí necesitan recibir instrucción. El Modelo Diferenciado de Dotación y Talento (MDDT) de Gagné (2015) hace una formulación interesante del talento: hay una predisposición natural, pero para que se plasme en talento deben desarrollarse favorablemente ciertas condiciones. Interpretando estas condiciones, podemos decir que es necesario que se les ayude intelectualmente a desarrollar su potencial.

NUESTRA EXPERIENCIA

- Trabajamos en talleres extraescolares (AVAST) con estudiantes de ese colectivo, en los que coinciden en el tiempo diversos cursos y control matemático.
- Una herramienta de la que nos hemos servido ha sido el programa Quizziz.

IMPLEMENTACIÓN

Diseñamos cuestionarios Quizziz de *tres niveles de complejidad* y sugerimos a los estudiantes responder al que les resulte más atractivo. Si acaban un quizziz pasan al de mayor nivel y/o rehacen el Quizziz. De esta forma conseguimos:

- Atender a todos los estudiantes con un nivel adecuado.
- Identificar rápidamente las debilidades y las fortalezas de cada estudiante.
- Identificar rápidamente las debilidades y las fortalezas del grupo en general.
- Motivar a los estudiantes a participar activamente.

- En relación a las debilidades matemáricas grupales, podemos dar refuerzo sobre ellas en la misma sesión. Si son individuales, en la modalidad presencial es más fácil la atención y mejora que en la modalidad virtual.
- Sobre la motivación, tras tres cursos utilizando Quizziz, este programa ha tenido gran acogida en primaria por la mayoría de los niños, que lo demandan para todas las sesiones.
- Para la variación del nivel de los Quizziz, ampliando su dificultad, podemos optar por:
  - » Plantear problemas distintos, más difíciles.
  - » Eliminar los más sencillos y añadir más complejos.
  - » Modificar las preguntas para hacer su enunciado más complicado.

CARACTERÍSTICAS

Quizziz es un programa gratuito, en el que el profesor diseña las preguntas, determina el tiempo de respuesta y controla cuándo parar el programa si algunos estudiantes no finalizan en un tiempo razonable.

PUNTOS FAVORABLES

- Cada estudiante responde a su propio ritmo.
- El espíritu de competitividad que genera es atractivo para muchos estudiantes.
- El profesor tiene información de las respuestas correctas e incorrectas de cada estudiante, así como las preguntas que han resultado difíciles y/o fáciles.

Proyecto de Investigación PID2020-117395RB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033

Bibliografía
Gagné, F. (2015). *De los genes al talento: la perspectiva DMGT/CMTD. Revista de Educación, 368*, 12-39.