



**Distancia entre dos puntos:
cómo influye el contexto y las condiciones
en la resolución de un problema**
Una breve investigación matemática

Xavier Vilella Miró

xvilella@xtec.cat

Grup Vilatzara

ICE-UAB

3 componentes del currículum

- El currículum de Matemáticas está formado por tres componentes (Bishop, 1999):
 - El componente simbólico: basado en **conceptos**
 - Sistemas de numeración, lenguaje geométrico, orientaciones, pautas y diseños, juegos, medidas, clasificaciones de fenómenos...
 - **Ideas matemáticas que vale la pena conocer**
 - El componente social: basado en **proyectos**
 - Con gran participación personal, usando fuentes diversas, conectando los valores y las ideas matemáticas con otros ámbitos y asignaturas, en base a un análisis crítico de la aportación de las matemáticas a la sociedad
 - **Cómo se utilizan las ideas matemáticas**
 - El componente cultural: basado en **investigaciones**
 - También gran participación personal, en contextos matemáticos, imitando actividades de los/as matemáticos: exploración, análisis y desarrollo de ideas matemáticas en base a retos. Muestra qué es ser matemático
 - **Cómo se generaron y se generan las ideas matemáticas**

Dos cuestiones iniciales

- Una respuesta *correcta*, ¿sirve para todos los casos posibles? ¿Tiene limitaciones?
- Las condiciones concretas, ¿determinan dicha respuesta?

Puntos a reflexionar en cada actividad

- Herramientas matemáticas usadas en cada situación
- Intuición => conjetura => prueba
guíate por la intuición, elabora una conjetura, pruébala
- Papel de la **creatividad**, la **imaginación**, el **pensamiento divergente**, al afrontar y resolver esa situación
- Condiciones a tener en cuenta en el proceso de **generalización**

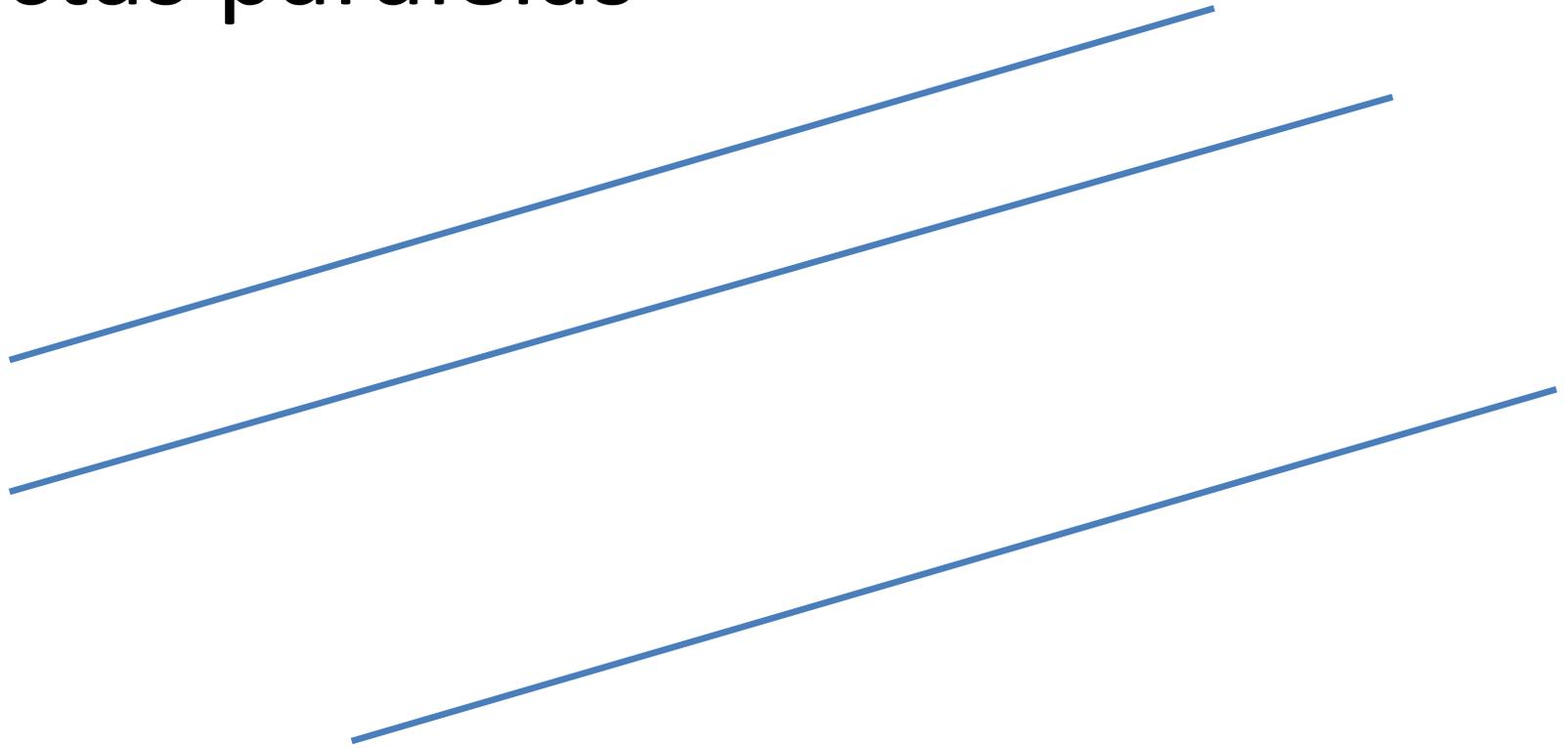
Entre dos puntos de un plano

“La menor distancia entre dos puntos es la recta que los une”

Euclides (circa -300): Elementos

- Compruébalo
 - con la regla
 - La regla, ¿debe colocarse de alguna forma concreta?
 - con el compás
 - El compás, ¿cómo debe usarse?
- “La menor distancia entre dos puntos es la recta que los une” ¿Crees que SIEMPRE es así?
 - Si lo aplicamos a la distancia entre Barcelona y Nueva York, ¿por dónde pasaría esa recta?

Rectas paralelas

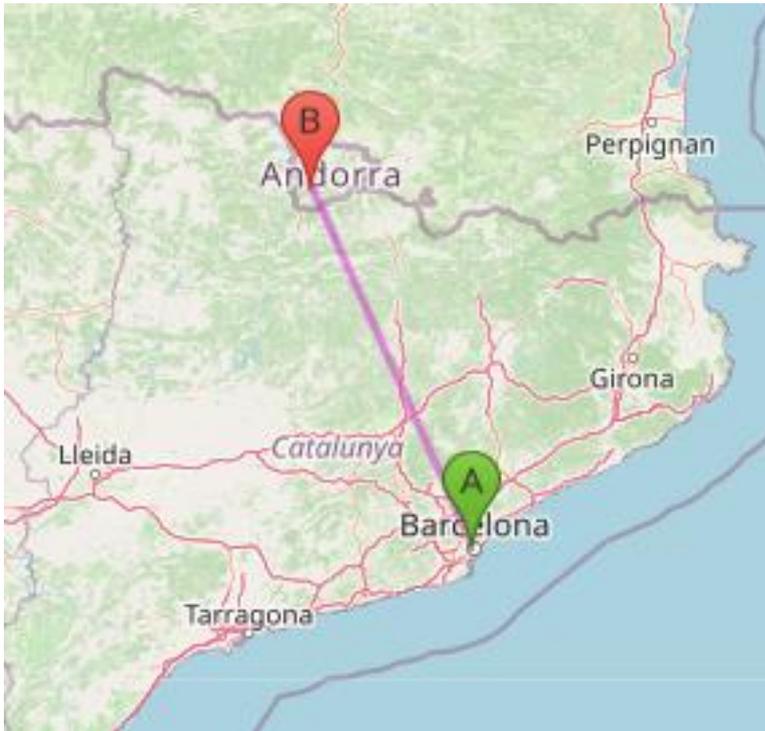


- Parecen paralelas. Muestra que *realmente* son paralelas: ¿cómo lo harías?

Cambio de escala

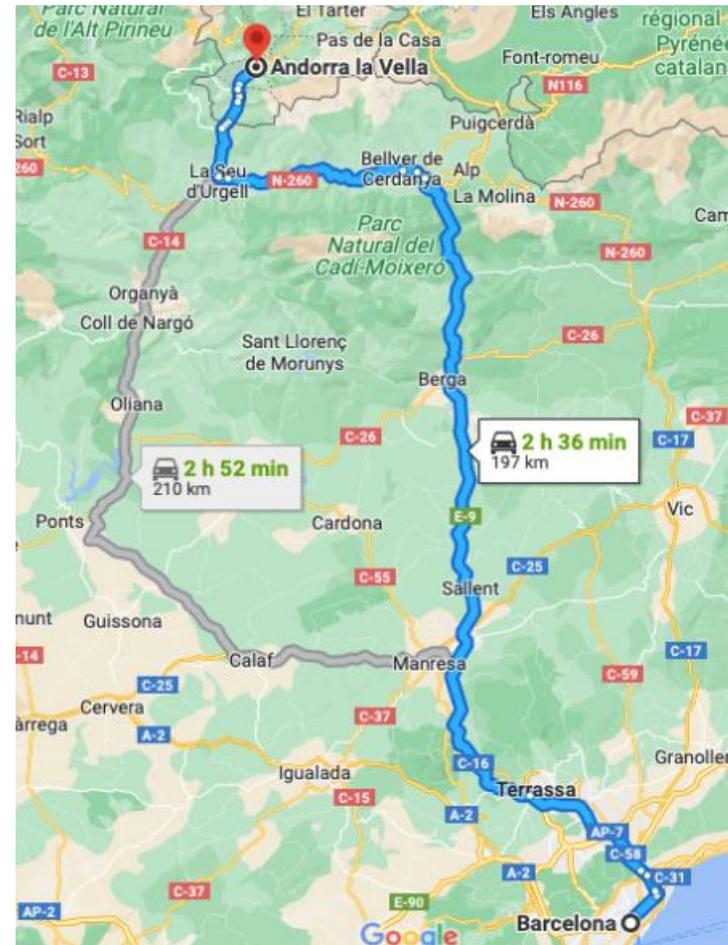
- Las paredes de esta aula, ¿son paralelas?
¿Cómo podrías comprobar que es cierto?
- Si intuyes que las fachadas de dos edificios son paralelas, ¿cómo podrías comprobarlo?
- ¿Y si son perpendiculares?

Distancias y distancias...



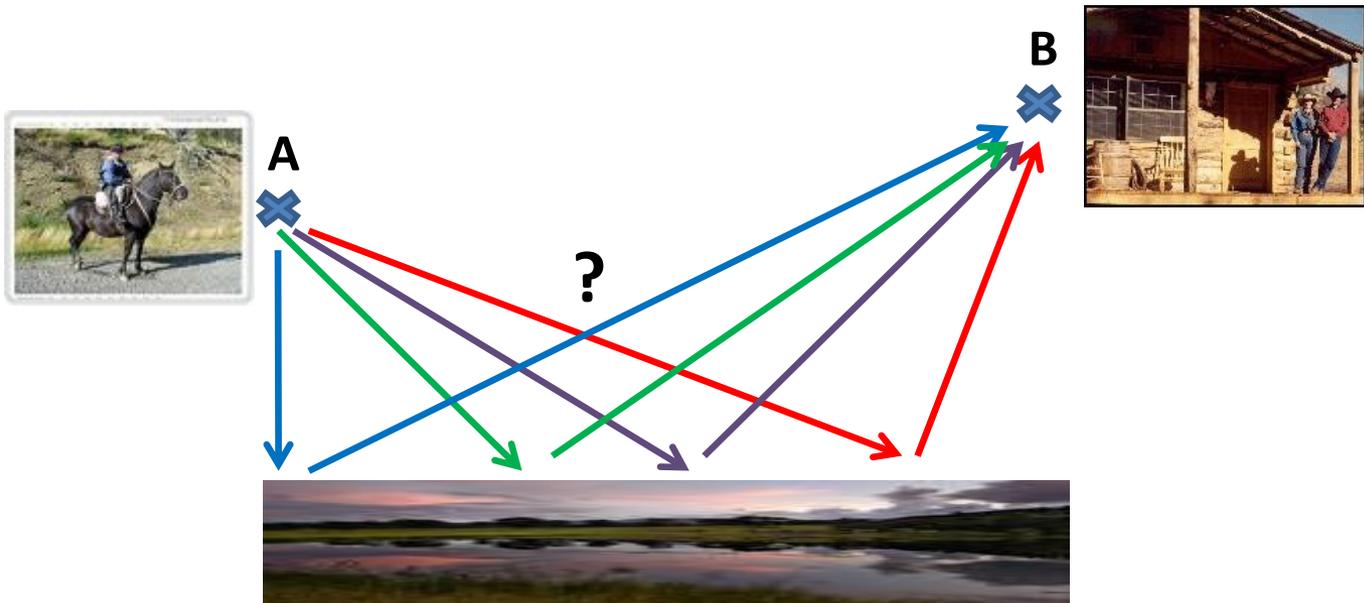
Hay **134.69 km** de distancia entre Barcelona, España y Andorra la Vella, Andorra.

¿Es estrictamente cierto que esa línea que mide 134,69 km es la distancia entre Barcelona y Andorra?



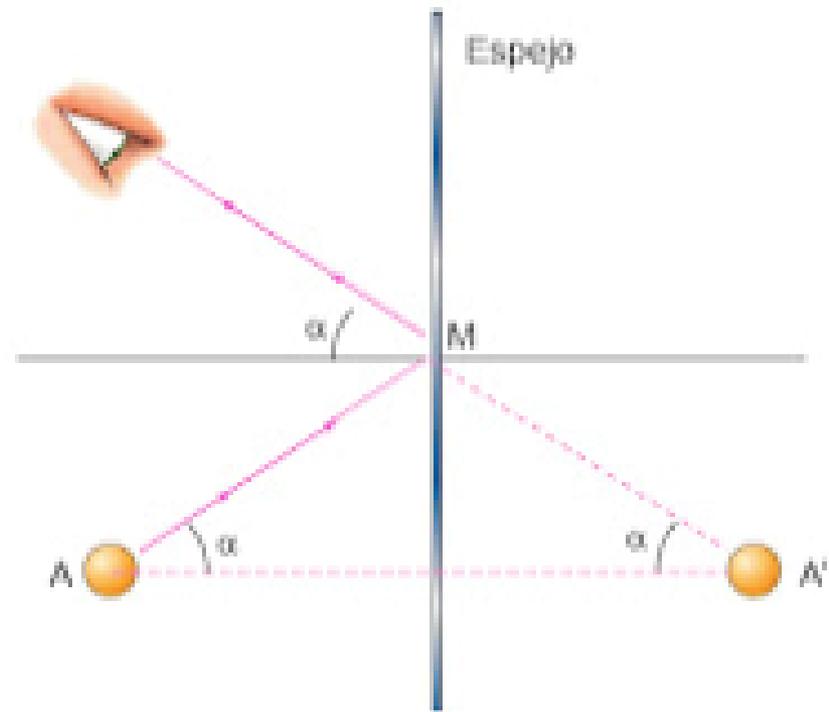
El caballo tenía sed

Al volver hacia el rancho, después de una dura jornada de trabajo, un vaquero se da cuenta de que su caballo está muerto de sed. Decide ir primero al río, dejar que el caballo beba, y entonces dirigirse a su casa. El rancho se encuentra en el mismo lado del río que él, y lo que desea es seguir el camino más corto posible para ir primero al río y después a su casa. ¿Le puedes ayudar? ¿Cuál debe ser el camino más corto?



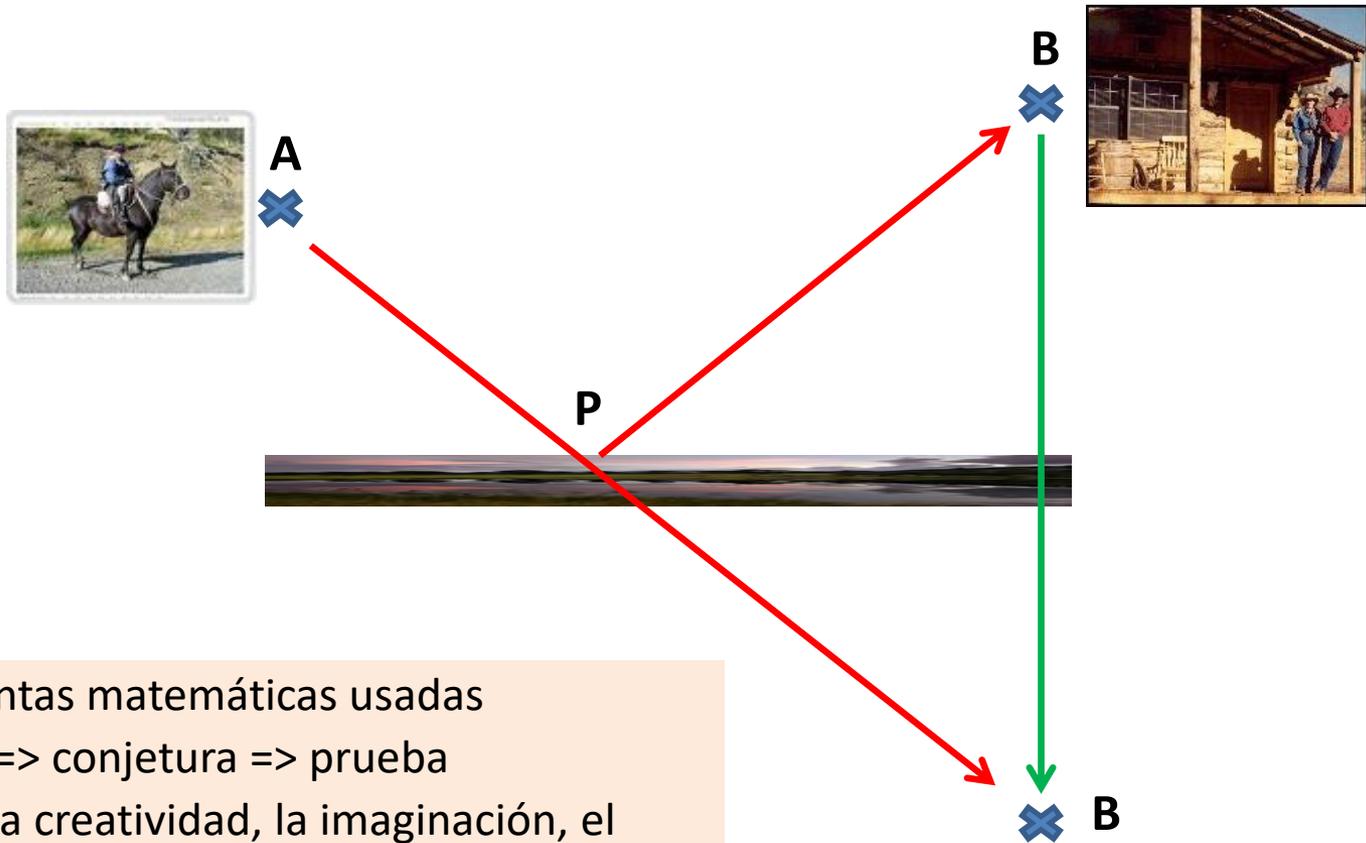
La luz nos ayuda a resolver el problema

- En la reflexión, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión
- La luz ha de tomar siempre el camino más corto => La luz siempre viaja en línea recta
Herón de Alejandría, +100



El caballo tenía sed

¿Cuál debe ser el camino más corto?



- Herramientas matemáticas usadas
- Intuición => conjetura => prueba
- Papel de la creatividad, la imaginación, el pensamiento divergente
- Condiciones en el proceso de generalización

Otras soluciones

- Cuerda fijada en A y en B, tercer vértice del triángulo en la orilla del río, C
 - Movemos C por la orilla hasta que *ángulo de incidencia = ángulo de reflexión*

¿Dónde construimos el puente?



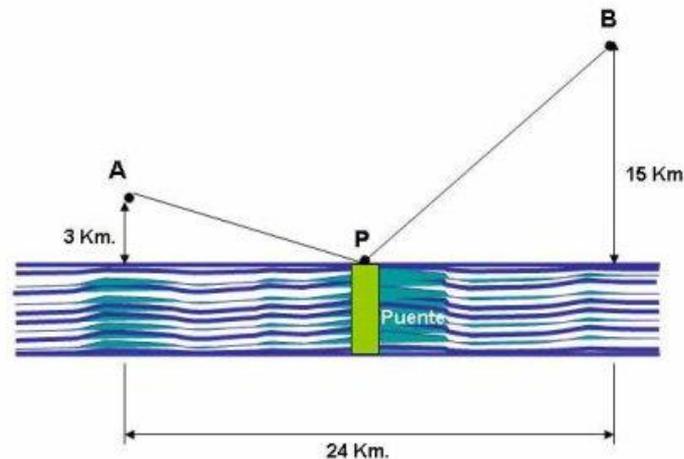
Un puente para dos pueblos

Dos pueblos, A y B, están situadas en una planicie, próximas a un río que discurre prácticamente en línea recta. Tal y como se indica en la figura, se encuentran al mismo lado, aunque a distinta distancia de la orilla.

Con el fin de disminuir gastos, ambos pueblos deciden construir un solo puente para poder pasar al otro lado del río, así como un camino que los lleve hasta él, que sirva al mismo tiempo para mejorar sus comunicaciones.

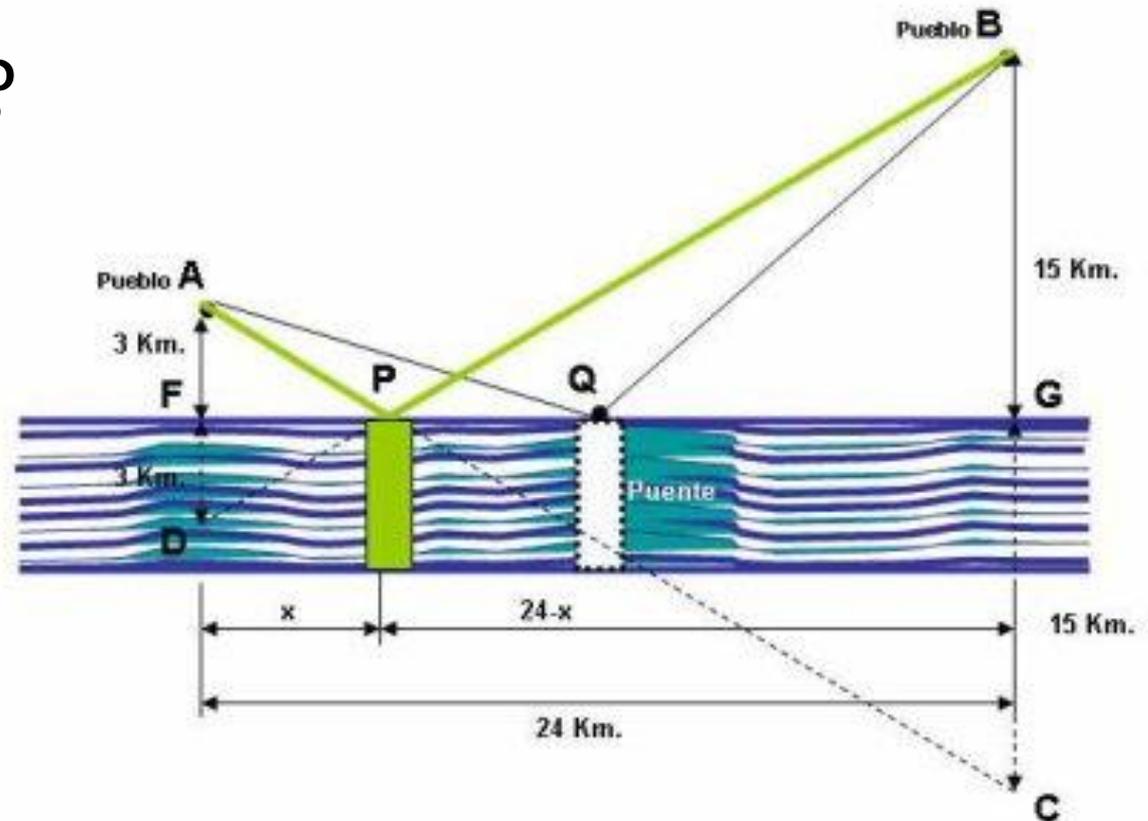
A la hora de elegir el punto del río en el que se ha de construir el puente, y dado que acercarlo a un pueblo supone alejarlo del otro, sus representantes acuerdan que se ejecute en aquel punto que haga mínimo el camino total entre ambas poblaciones.

¿Cómo podremos determinar fácilmente el punto del río en que debe estar ubicado el puente para cumplir que la longitud del camino de A al puente y del puente a B, o viceversa, sea mínimo? ¿Cuál sería el valor de esa distancia según los datos indicados en la figura?



El puente y el camino más corto

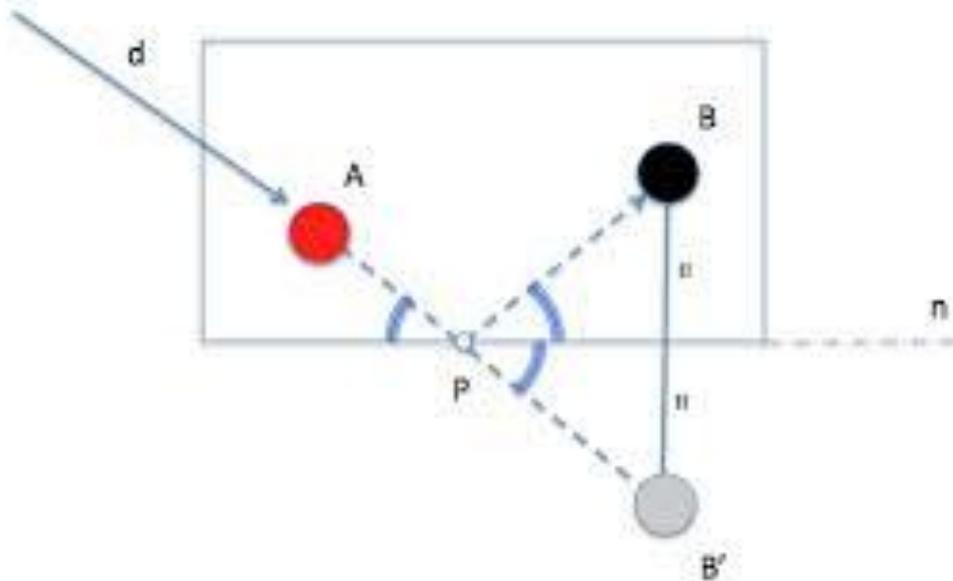
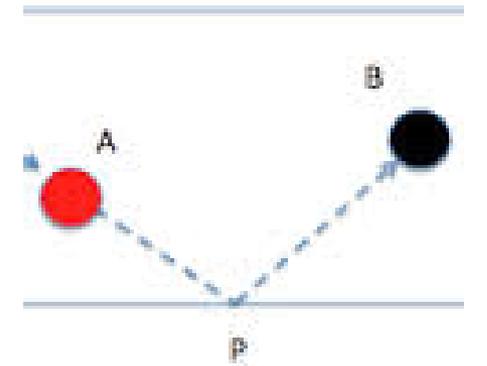
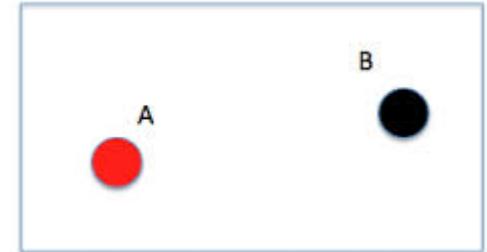
¿APB mínima?
¿Dónde debe
construirse el
puente?



¿Acierta el pueblo A al aceptar que el criterio para decidir la posición del puente sea que la distancia APB sea mínima?

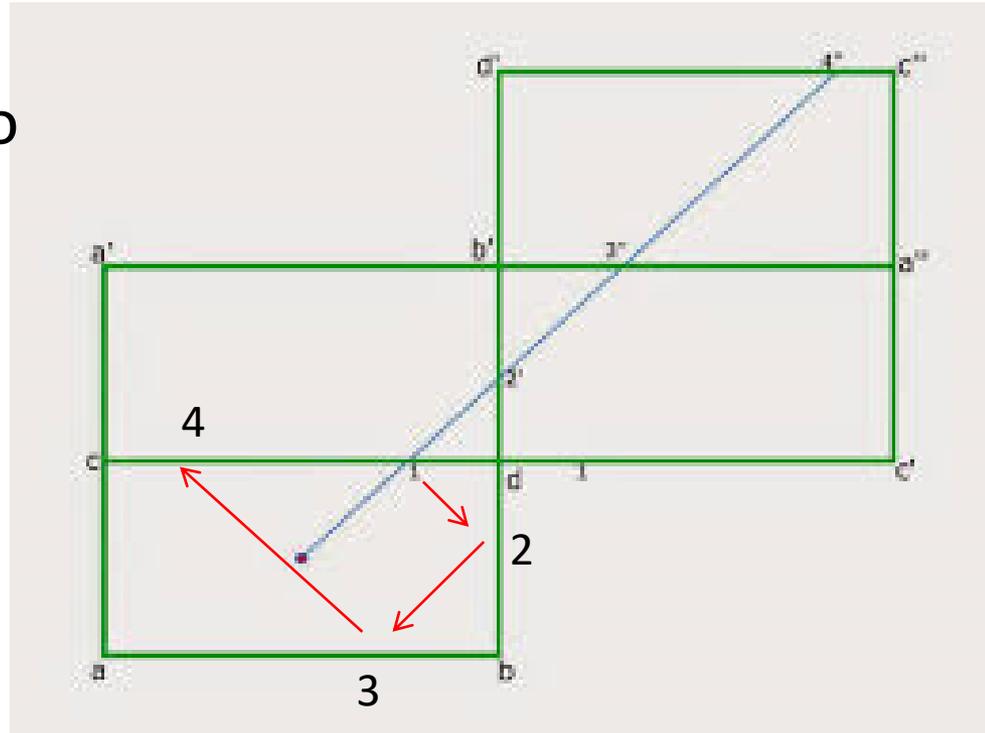
La mesa de billar

¿Dónde debe rebotar la bola A para que impacte en la bola B?



Nuevamente, la línea recta

- Podemos imaginar la mesa simétrica tantas veces como necesitemos, según el número de bandas en las que deba rebotar la bola
- En el dibujo, 3 bandas, y acaba *tocando* la cuarta banda en 4'': visualizamos los segmentos usando 3'' y 2' y encontramos el punto 4



La araña y la mosca

Mary Howitt (1799-1888) publicado en 1829

La primera línea del Poema dice:

*“Will you walk into my parlour?”
said the Spider to the Fly“*

The Lobster Quadrille (Carroll, 1865)

“Will you walk a little faster?” said a whiting to a snail “

Cuando resolvemos problemas acostumbramos a imponernos **autolimitaciones**. Una muy habitual, en éste, es obligarnos a pasar por las aristas.

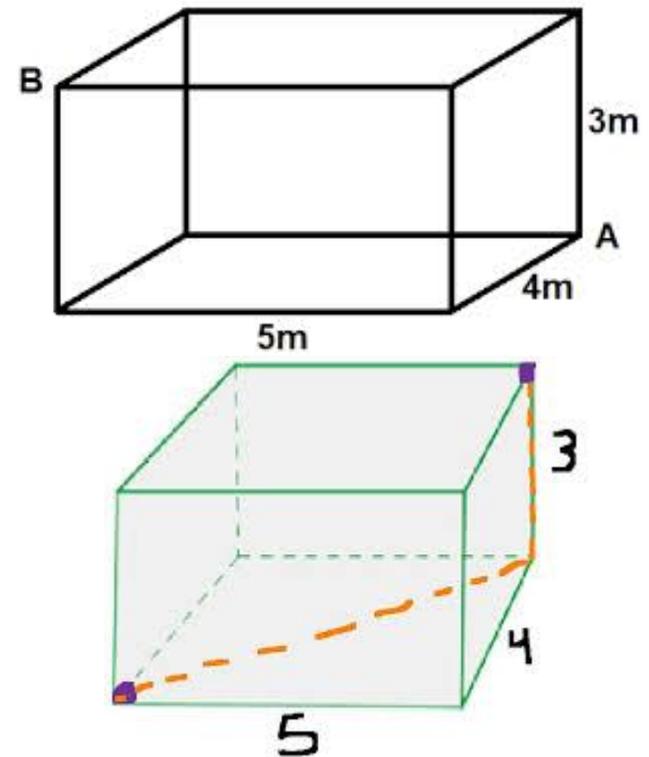
Otra limitación es *no pensar* en aplicar lo que dice Euclides...

Pista: en el aula, hay que trabajar el problema con un ortoedro que pueda desplegarse

¿Cuál es la **menor** distancia que debe caminar la araña desde A para cazar a la mosca en B?

¿Cuál es la **menor** distancia que debe volar la mosca desde B para llegar al salón de la araña en A?

¿Dónde deben estar para que la distancia sea **máxima**?

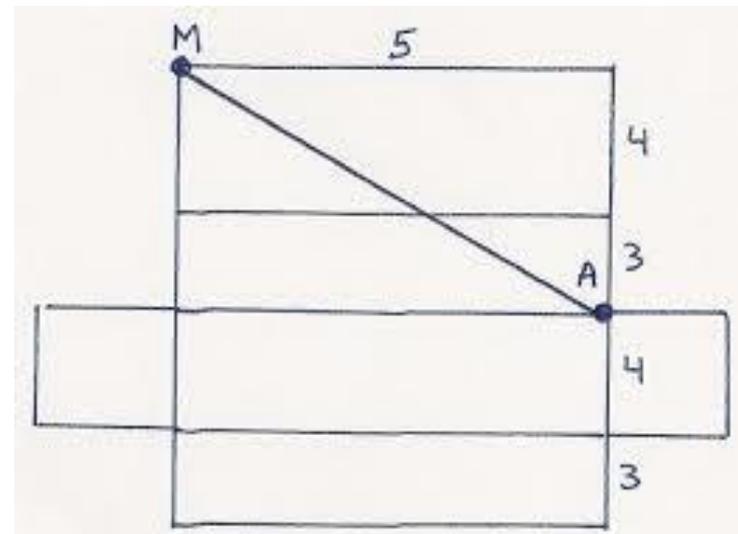
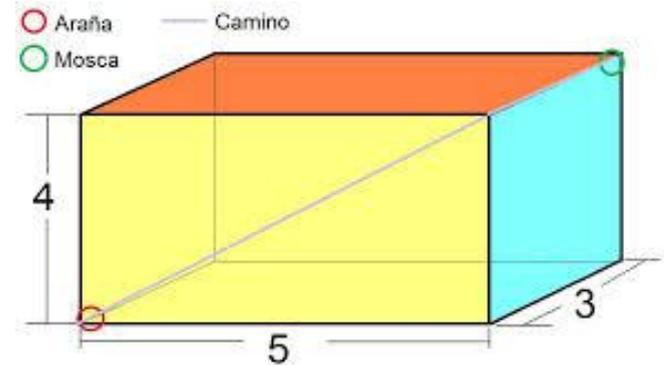


Tomemos un ortoedro

- Señalemos dos puntos y busquemos la línea que nos marca la distancia más corta entre ellos dos pasando por la superficie del ortoedro.
- ¿Habría alguna manera de hacerlo aplicando lo que dijo Euclides?
 - Pista: el desarrollo plano del ortoedro...

La araña y la mosca

- La mosca y la araña tienen maneras distintas de moverse
- Una vez resuelto el problema, dibujar la línea y ***volver a montar*** el ortoedro, para ver la forma que adquiere sobre las caras
- Atención: sobre el desarrollo plano, algunas posiciones de A y B pueden confundirnos...
- Resolver un problema, Representar, Razonar, Conectar, Comunicar
Todos los procesos involucrados



Ahora con un cilindro

- ¿Podemos usar la estrategia del ortoedro para resolver el problema de la distancia más corta entre dos puntos de la cara lateral?
- ¿Y si uno de los puntos se encuentra en una base?
- ¿Cuál es la forma que toma la línea más corta entre dos puntos de la cara lateral cuando armamos de nuevo el cilindro?

¿Y con un cono?

- ¿Servirá la misma estrategia?
- ¿Se sigue cumpliendo lo que dijo Euclides?

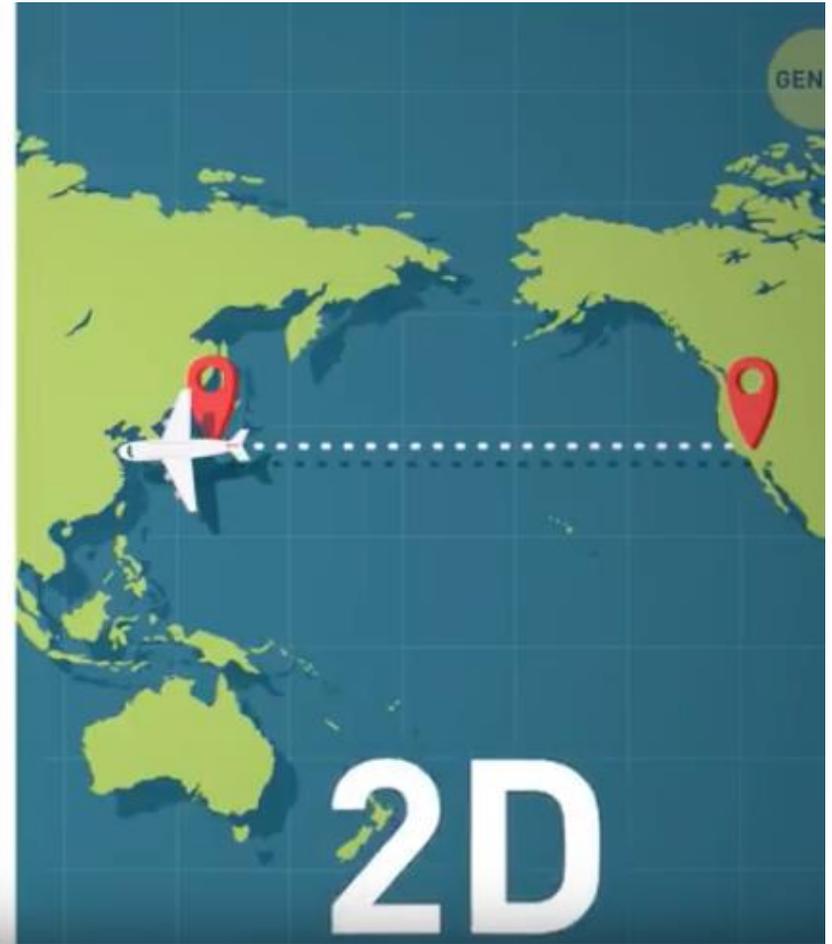
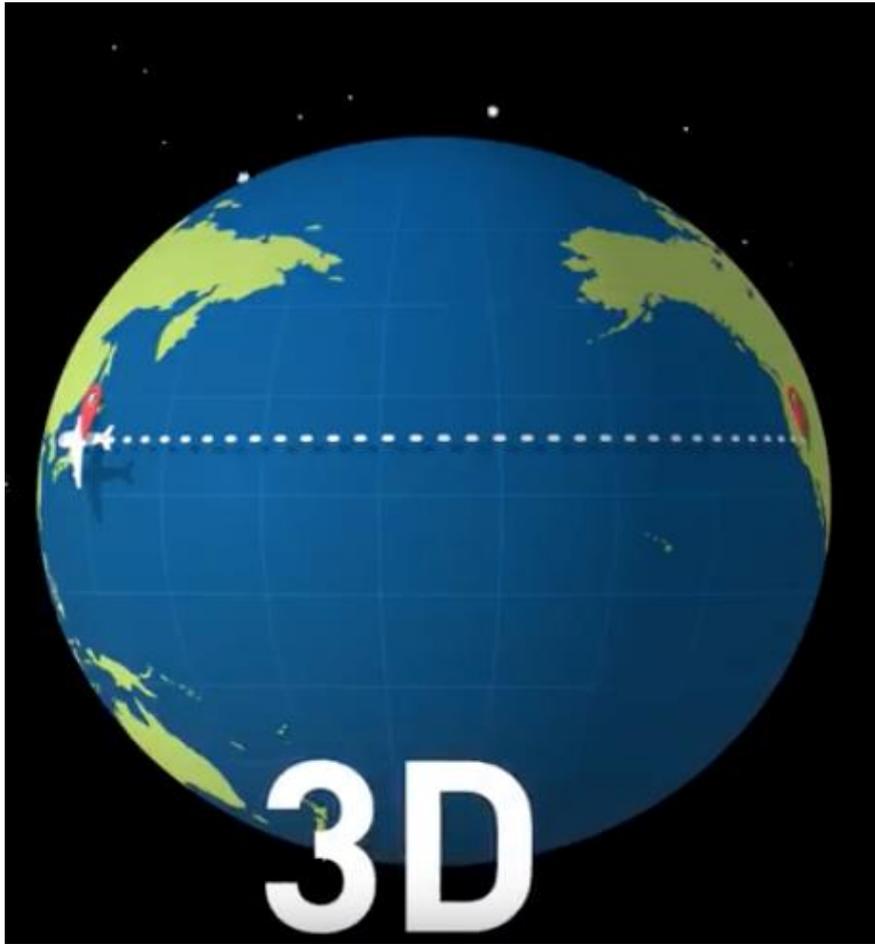
Para acabar, más difícil todavía... ¡una esfera!

- ¿Qué nos dice la intuición?
- Escribamos lo que intuimos, dibujémoslo, y ahora lo comprobamos
- Tomemos la esfera y usemos un trozo de cordel



¿Seguro que es la más corta?
¿Seguro que es una línea recta?

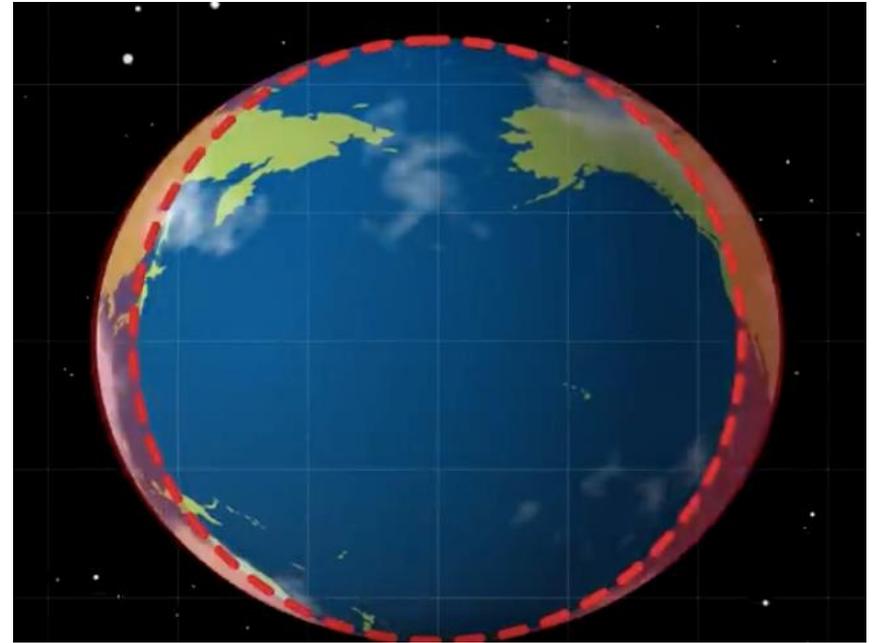
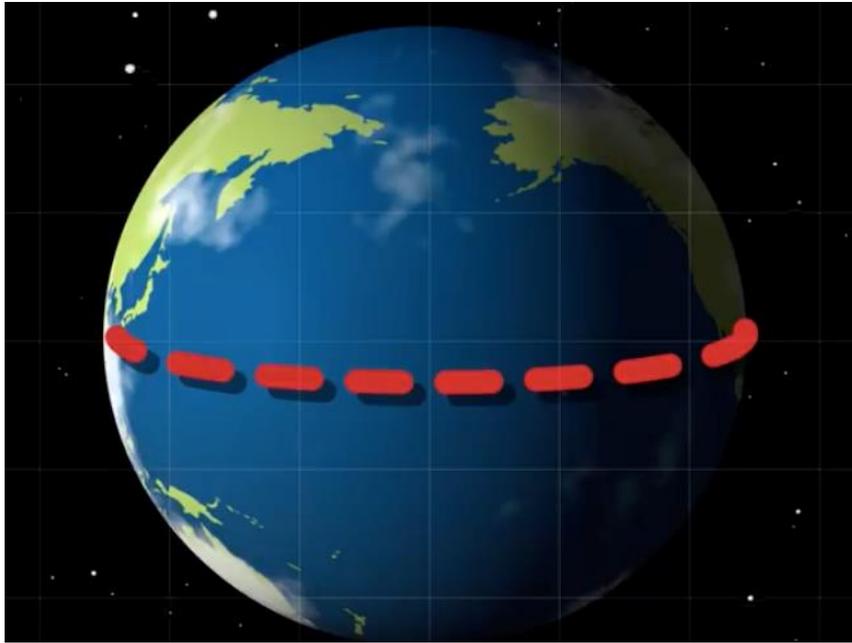




Mucha más longitud que en 2D

La ruta que escogen los aviones





Un nuevo término: la geodésica

Puntos a reflexionar en cada actividad

- Herramientas matemáticas usadas en cada situación
- Intuición \Rightarrow conjetura \Rightarrow prueba: guíate por la intuición, elabora una conjetura, pruébala
- Papel de la creatividad, la imaginación, el pensamiento divergente, al afrontar y resolver esa situación
- Condiciones a tener en cuenta en el proceso de generalización

Las dos cuestiones iniciales

- Una respuesta *correcta*, ¿sirve para todos los casos posibles? ¿Tiene limitaciones?
- Las condiciones concretas, ¿determinan dicha respuesta?