

20 JAEM

Cazadores de sombras

Eugenia Torres Martín eugetor@gmail.com

Instituto Serra de Miramar (Valls, Tarragona)

Valencia, 4 de julio de 2022

ÍNDICE

- Enunciados 6 actividades
- Algunas observaciones a partir del trabajo al aula curso 2021-22 (dos niveles: ESO y Bachillerato)
- Algunas reflexiones y “revisitaciones” de las actividades.

Competencias matemáticas

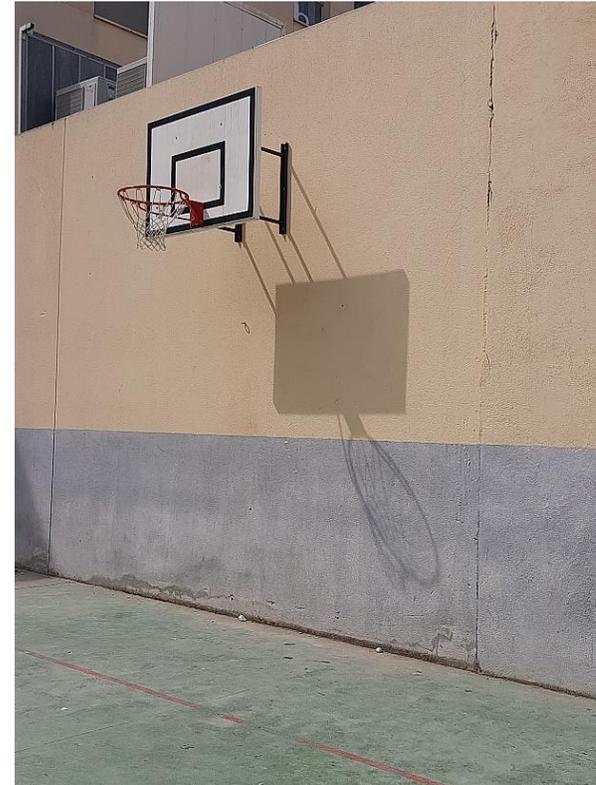
- Generar preguntas de carácter matemático y plantear problemas (n.4).
- Construir, expresar y contrastar argumentaciones para justificar y validar las afirmaciones que se hacen en matemáticas (n.5).
- Expresar ideas matemáticas con claridad y precisión y comprender las de los demás (n.10).
- Utilizar la comunicación y el trabajo colaborativo para construir y compartir conocimiento a partir de ideas matemáticas (n.11).

Actividad 1 (Introdutoria)

Observa atentamente las siguientes fotografías. Corresponden al tablero de una cesta de baloncesto como las que habrás visto tantas veces.



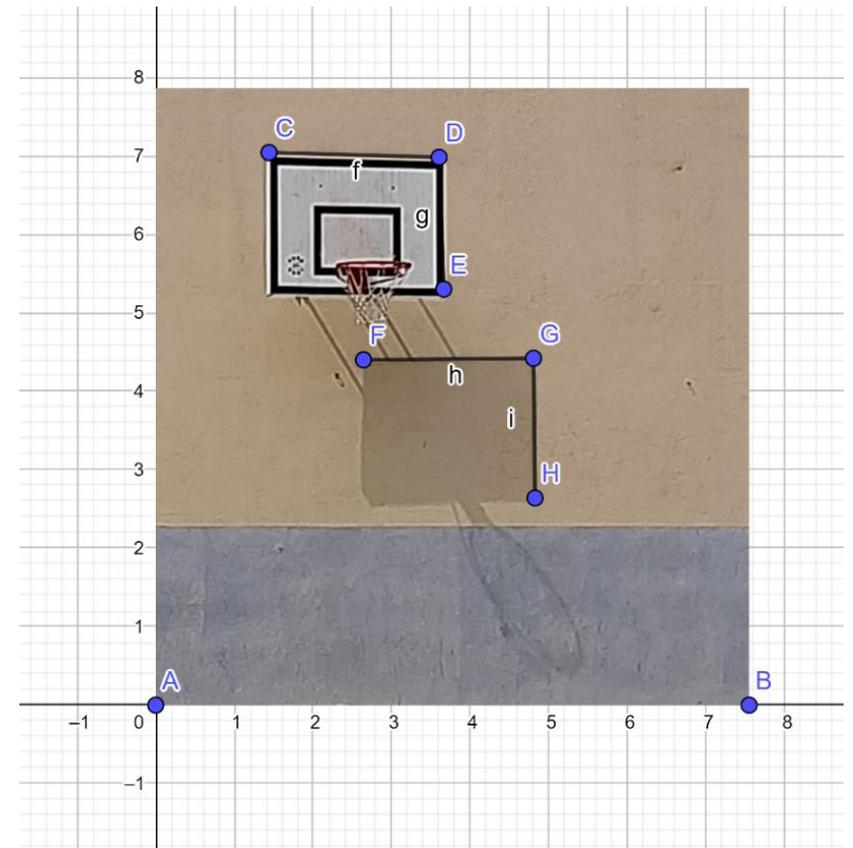
Cesta 1

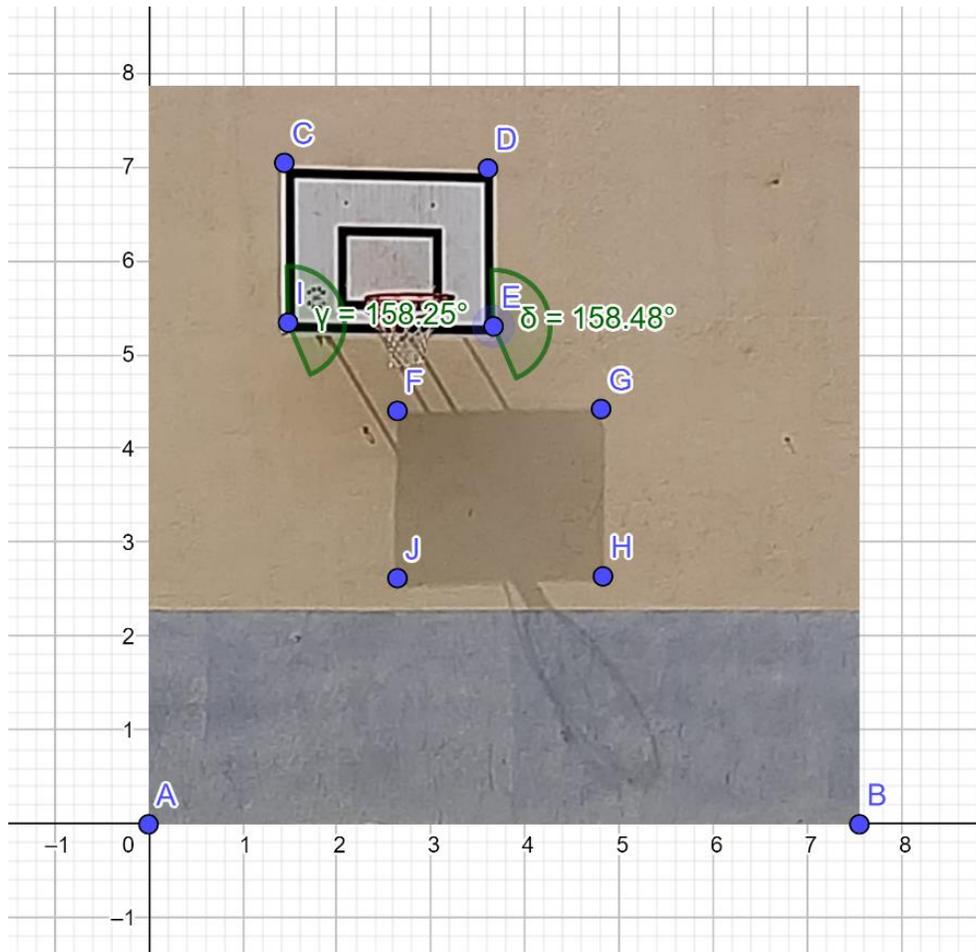


Cesta 2

a) Fíjate en el tablero y en su sombra, ¿qué diferencias encuentras entre las dos fotografías?

b) En la fotografía cesta 1, ¿el tablero y su sombra tienen la misma área? Para comprobarlo necesitas tomar las medidas de algunas longitudes. Podrías utilizar el *geogebra*, aunque no es obligatorio (si no lo has utilizado nunca sería una buena forma de introducirte). Inserta la foto, marca los puntos que necesites y mide los segmentos. Obtendrías, con *geogebra*, una imagen como la siguiente:





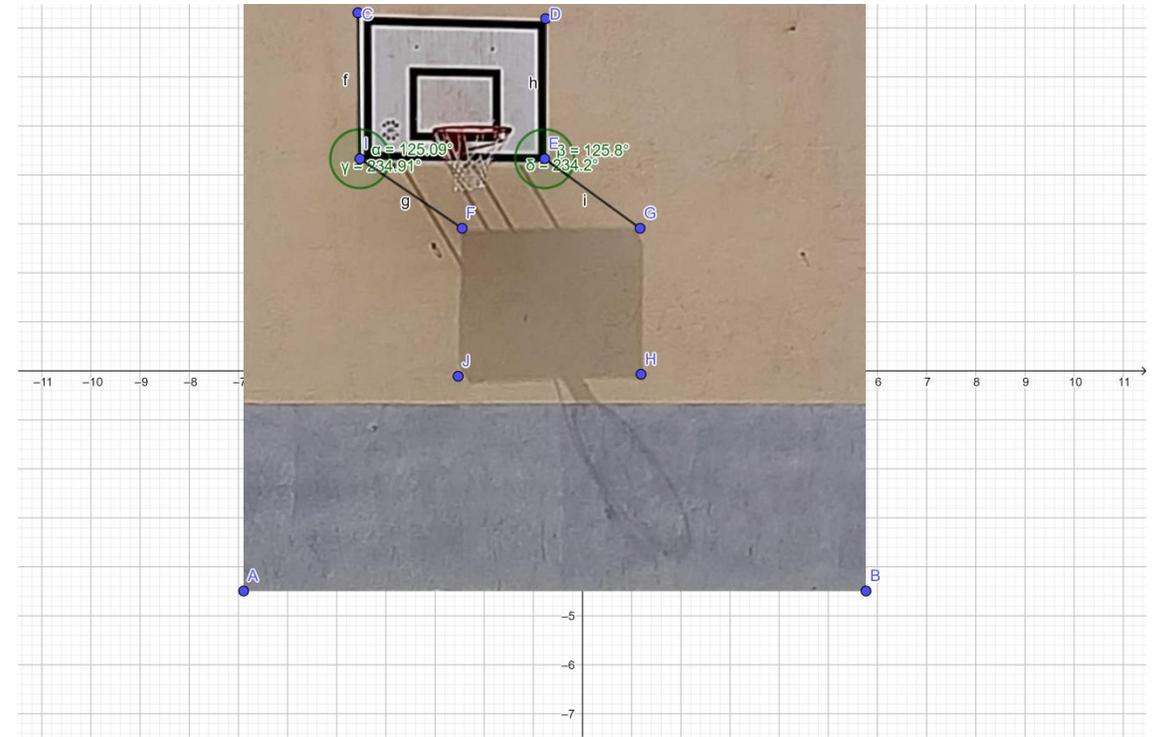
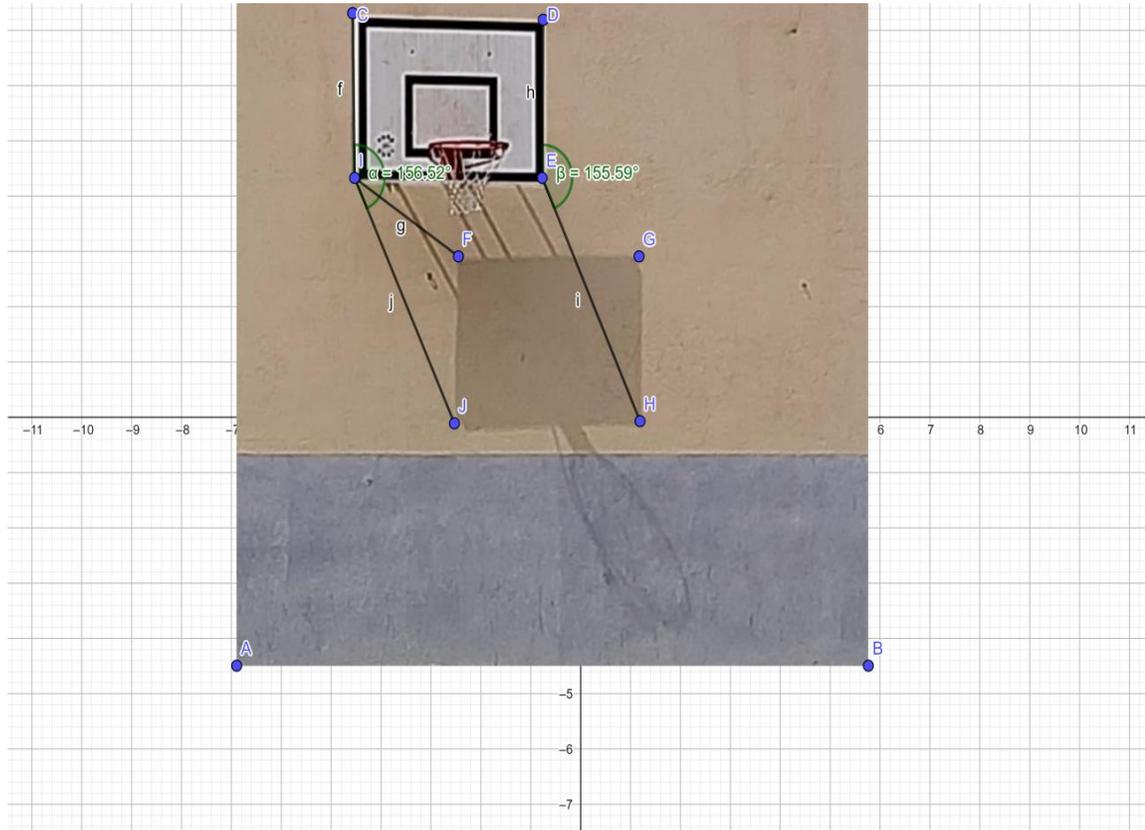
c) c) Habrás comprobado que la base de la sombra del rectángulo que forma el tablero conserva la misma longitud que la base del tablero, pero ¿por qué las alturas no se conservan? Vamos a medir ángulos ya ver qué descubrimos. Fíjate en la siguiente imagen. Hemos medido los ángulos C I F = 158,250 y D E G = 158,480. Redondeando, ambos miden 1580. Podemos considerar que son iguales. Mide los ángulos C I J y D E H. ¿Qué sucede?

OBSERVACIONES y REFLEXIONES ACTIVIDAD 1, CESTA 1 (1)

- Actividad planteada como introductoria.
- Se trabaja la geometría plana pero también la espacial.
- Se puede adaptar a diferentes niveles según los conceptos que se quieran trabajar (o más bien "revisitar") y sus niveles de profundización: cuadriláteros, paralelismos, ángulos, prismas...
- Puede servir para constatar qué queda en el alumnado, pasado el tiempo, sobre geometría plana y qué ha pasado con algunas "creencias" de los alumnos, por ejemplo, sobre áreas y perímetros que tanto cuestan de eliminar.

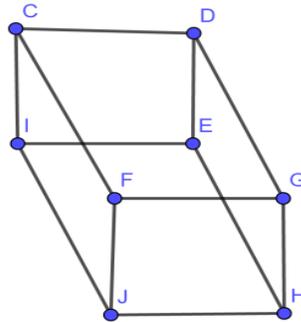
OBSERVACIONES y REFLEXIONES ACTIVIDAD 1, CESTA 1 (2)

- Se puede introducir (o repasar) el *geogebra*.
- ¿Preguntas abiertas o cerradas? Interpretación de las preguntas y justificación de las respuestas.
- Surgieron cuestiones relativas a hacer la fotografía en diferentes momentos de un día y desde la misma posición de manera que el área de la sombra fuera igual, el doble, el triple del área del tablero, o una fracción concreta de la misma. En el caso de 1Bachillerato, se apuntó a la existencia de una función continua que pudiese dar todas las proporciones área de la sombra/área del tablero.



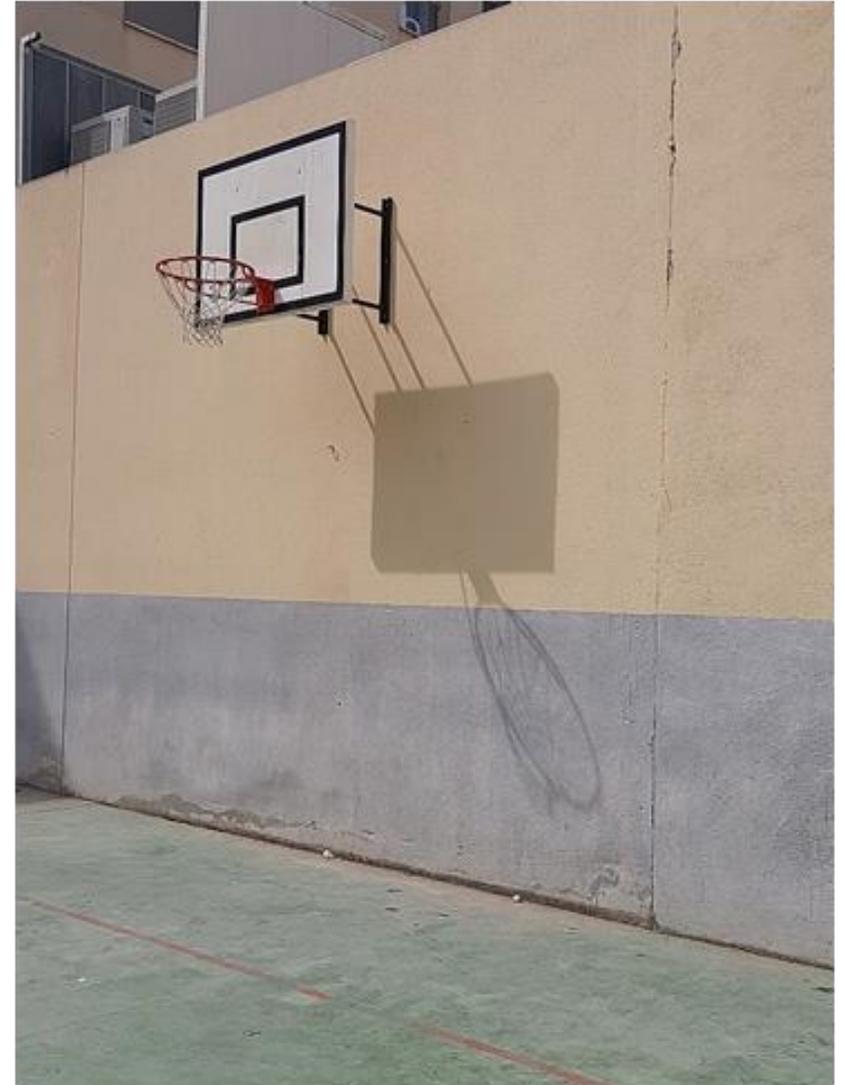
- Se trabaja el concepto de aproximación: ¿ángulos iguales o no?
- La situación de los vértices con *geogebra* provoca errores de medida → Medir siempre comporta un margen de error que hay que considerar.

- Enunciados equivalentes a algunos de los planteados en los apartados b) y c). Por ejemplo, en el siguiente prisma formado entre el tablero y su sombra, si las aristas correspondientes fuesen paralelas, el prisma sería regular y se conservarían los ángulos.



d) Coge ahora la segunda fotografía la que hemos llamado cesta 2, que está tomada en el mismo momento del día que la primera. Respecto a la primera, ¿qué observas?

e) ¿El tablero de la cesta 2 y su sombra tienen la misma área?



OBSERVACIONES y REFLEXIONES ACTIVIDAD 1, CESTA 2

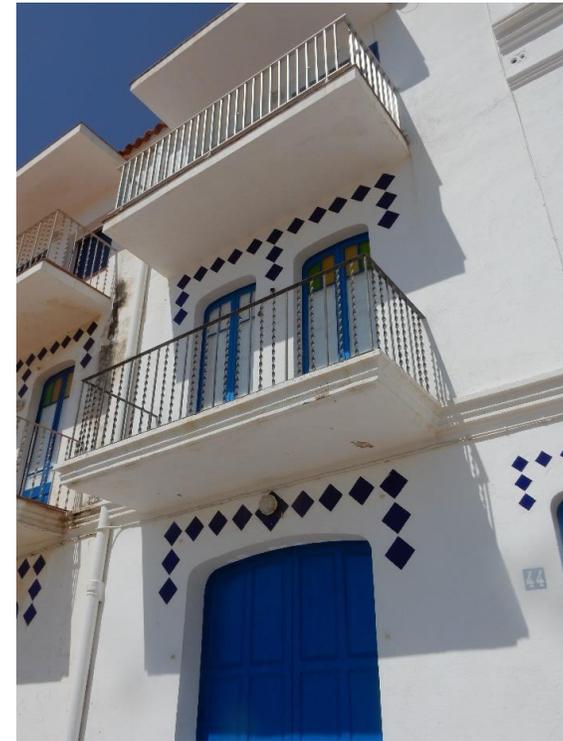
- Discusión: la cesta 2 y su sombra no son rectángulos sino trapecios. ¿Qué hay que medir?
- Conceptos erróneos sobre cuadriláteros: creencias sobre áreas, perímetros, etc que tanto cuestan de eliminar.
- Carencias en la expresión matemática y la precisión. Se trabajan poco.
- Reflexión sobre la segunda fotografía: lo que se ve (cesta como trapecio) y la realidad (cesta como rectángulo).

Actividad 2 (menos cálculo que a la 1 y más reflexión)

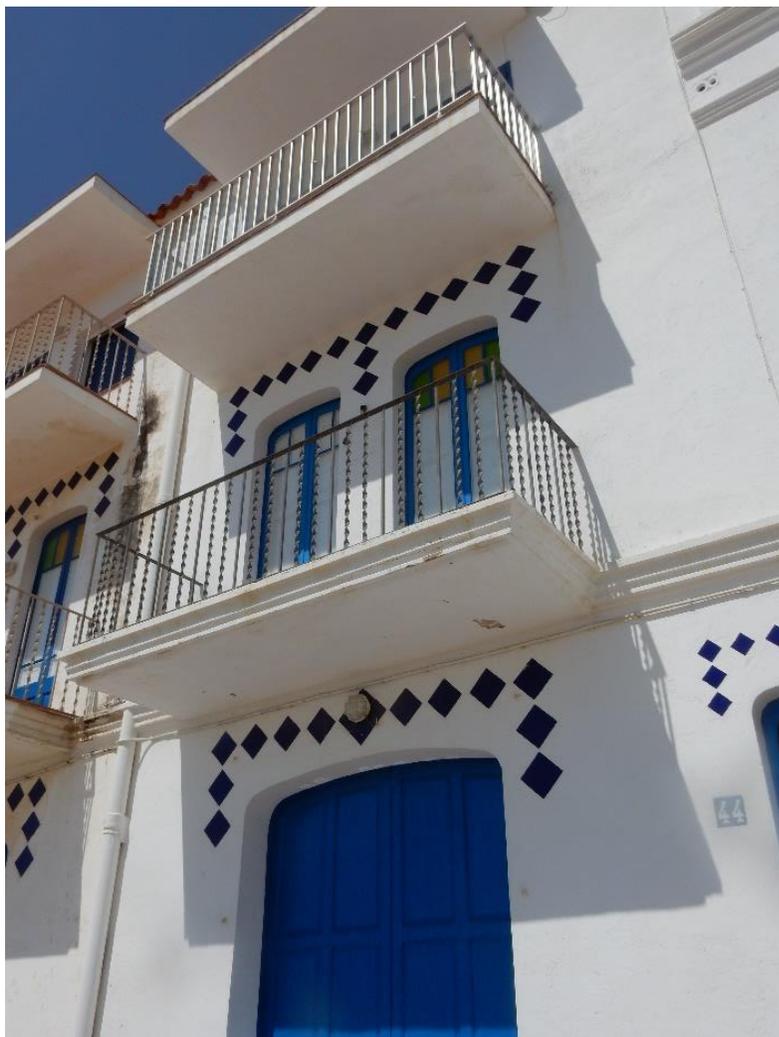
Si das un paseo por la costa puedes encontrar fachadas de casas de pescadores realmente pintorescas. Observa con detenimiento las siguientes fotografías, una de unas casas de vista más general y la otra con uno de los balcones de las casas de cerca.



Fachada playa



Detalle balcones



a) Continua "cazando" sombras. Fíjate en la segunda fotografía, concretamente en el suelo del balcón (cualquiera de los dos) y su sombra. ¿Qué debería ocurrir para que tengan la misma área?

b) ¿Habrá algún momento del día en que el suelo del balcón y su sombra coincidirían en superficie? Justifica la respuesta diciendo qué condición debería cumplirse.

c) ¿Habrá algún momento del día en que el suelo del balcón y su sombra coincidan en perímetro? Justifica la respuesta.

d) ¿Habrá algún momento del día en que el suelo del balcón y su sombra coincidan en ambas cosas, área y perímetro? ¿Por qué? Justifica la respuesta.

OBSERVACIONES y REFLEXIONES ACTIVIDAD 2

- Actividad más reflexiva, con el objetivo de trabajar la expresión matemática y la justificación de lo que se hace.
- El alumnado no es preciso al utilizar el lenguaje para justificar sus respuestas. Las expresiones del alumno muestran sus carencias a nivel de conceptos, principalmente en 4ESO.

Ejemplo: ¿Qué debería ocurrir para que el suelo del balcón y su sombra tengan la misma área? “tendrán que estar **colocadas igual**, tanto la sombra como el suelo del balcón (¿?)” o “la sombra tenía que estar a la **misma altura y estar recta**”.

- Fijémonos cómo después de cursos trabajando la geometría plana, el alumnado no tiene bien comprendidos conceptos como la perpendicularidad.
- Ejemplo: ¿Habrá algún momento del día en que el suelo del balcón y su sombra tengan el mismo perímetro? ¿qué condición se tendría que dar? “no, porque la sombra estará **más estirada** que la original resultando que nunca tendrá el mismo perímetro”.
- ¿Cómo expresar que la sombra estará más estirada en términos de longitudes, segmentos, etc.?

- Carencias en la expresión de sus justificaciones. No se acostumbra a trabajar.
- Actividad como una oportunidad para empezar a trabajar
- la conversación matemática,
- la expresión y la comunicación
- precisa de lo que se sabe.
- El hecho de trazar algunos segmentos y dibujar sobre la fotografía los polígonos implicados
- ayudaría a visualizar la situación
- con más claridad: "Como suelo y sombra comparten la base, para coincidir en área tendría que pasar que...".



Actividad 3 (reflexión de conceptos)

Cambiamos ahora de entorno y paseamos por el campo. Aquí tienes dos fotografías en las que aparecen una farola y unos palos de madera, todos con sus sombras proyectadas.



Farola 1



Palos de madera

a) Podemos considerar el triángulo formado por cada palo y su sombra, como puedes ver aquí. Los triángulos que recogen las fotografías, ¿son rectángulos?



Farola 2

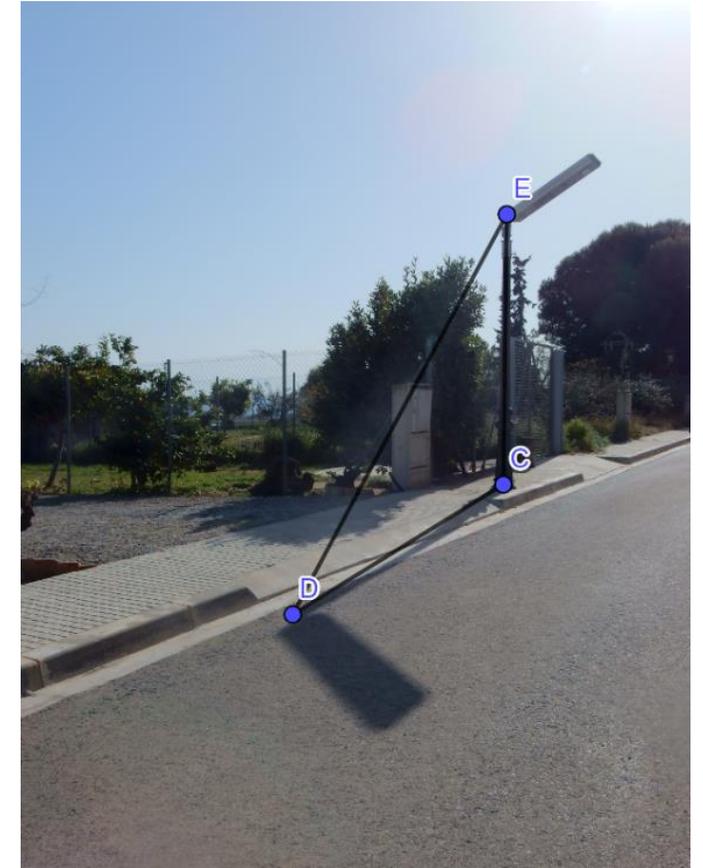


Palos de madera 2

b) ¿Y los triángulos, en la realidad, son rectángulos? Justifica si se dan diferencias entre la realidad y lo que reflejan las fotografías y por qué.

c) Supongamos ahora que el triángulo ECD, en la fotografía de la farola, es recto. ¿Cómo debería ser el triángulo para que la farola y su sombra midieran lo mismo?

d) ¿Qué debería pasar con los ángulos de este triángulo para que la farola y su sombra midieran lo mismo?



e) Supongamos ahora que el triángulo en la fotografía de los palos es rectángulo. Mide los demás ángulos y deduce a partir de sus medidas si el triángulo es escaleno o isósceles.

f) Cualquiera de los dos triángulos, ¿podría ser equilátero? ¿Por qué? Justifica la respuesta.



OBSERVACIONES y REFLEXIONES ACTIVIDAD 3

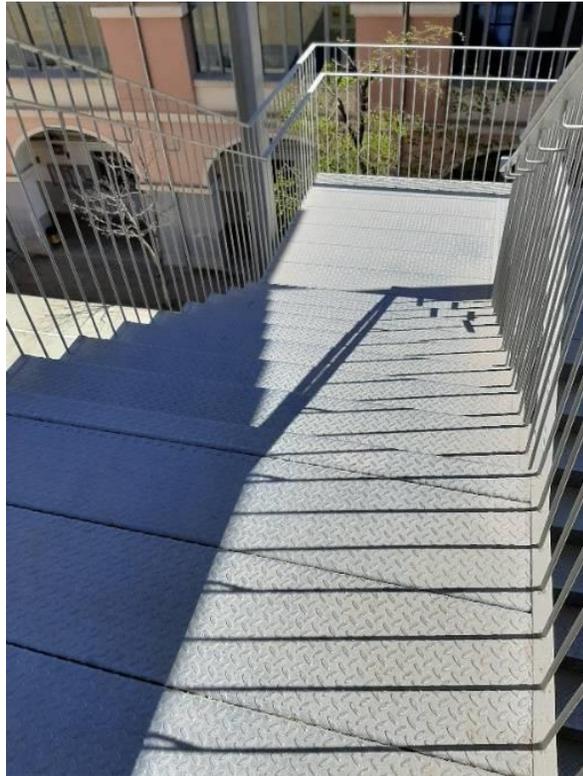
- Actividad planteada para reflexionar conceptos sobre triángulos.
- Esta actividad funcionó mucho mejor que las anteriores: el triángulo es posiblemente el polígono más conocido por los alumnos.
- Algunos alumnos afirmaron en las preguntas a) y b) que los triángulos que mostraban las fotografías no eran rectángulos porque no había ángulos de 90° (en la actividad 1 se había reflexionado sobre proyecciones).
- En la pregunta b) de si en la realidad son triángulos rectángulos, algún alumno contestó que «en la primera foto no y en la segunda sí (¿?)».

- En las cuestiones d) e) y f) el alumnado demostró solvencia respecto a los conocimientos sobre triángulos rectángulos, obtusángulos, isósceles y equiláteros.
- Se constata falta de precisión en las respuestas de algunos alumnos. Por ejemplo, en el apartado f) donde se preguntaba si alguno de los triángulos podía ser equilátero, un alumno respondió que "no, porque los ángulos del triángulo equilátero son demasiado pequeños para que lo puedan ser".

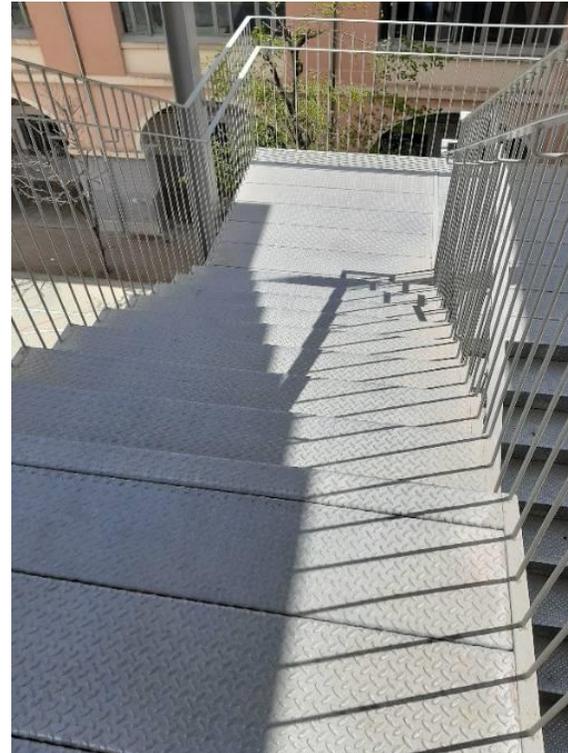
- Dificultades por parte del alumnado para visualizar en su entorno figuras geométricas: un triángulo dibujado en el papel es más reconocible como tal que un triángulo formado por una farola y su sombra.
- Trabajar con fotografías matemáticas como oportunidad para que el alumno eduque su ojo matemático en el entorno, en los objetos cotidianos→ le puede ayudar en su **proceso de abstracción.**
- Las expresiones del alumno muestran sus carencias a nivel de conceptos, principalmente en la ESO.

Actividad 4

Fíjate en estas escaleras. La sombra se va moviendo según la hora del día.



Escaleras 1



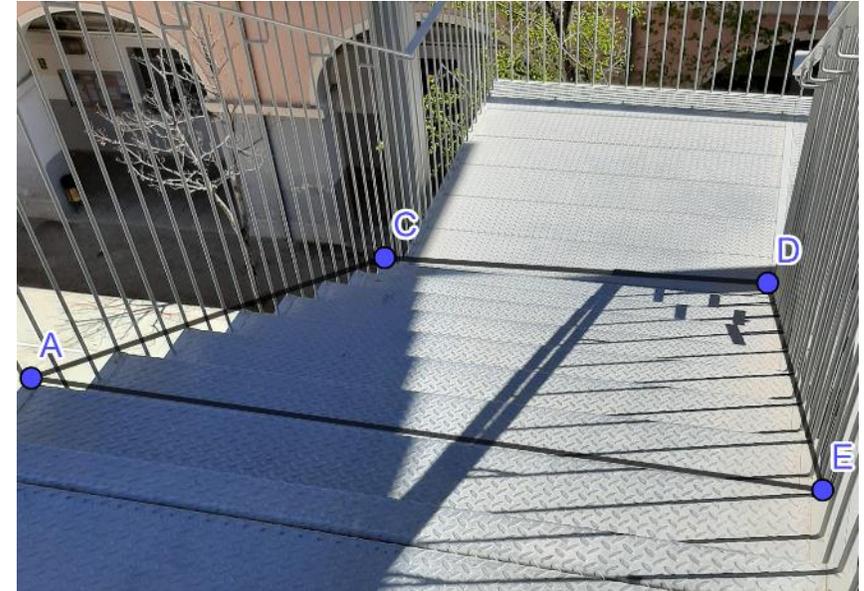
Escaleras 2

a) Considera el polígono ACDE construido a partir de la fotografía de la izquierda, la denominada Escaleras 1. ¿De qué polígono se trata?

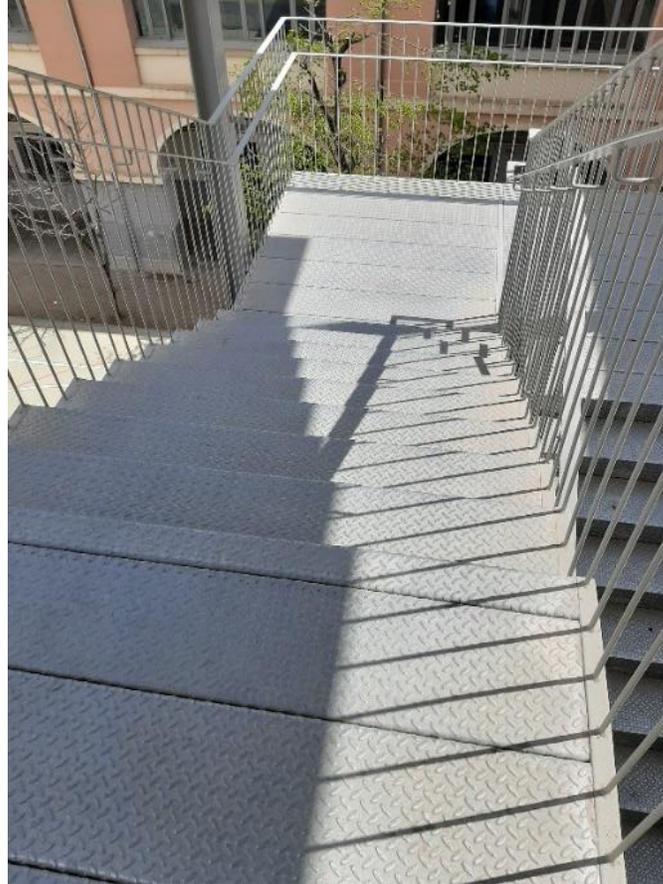
b) Halla su área.

c) Céntrate en este polígono ACDE y considera ahora el área que forma la sombra de la izquierda, la mayor, dentro de este polígono. Calcula su área.

d) ¿Qué porcentaje del polígono ACDE representa el área de la sombra que acabas de calcular?



Escaleras 3



e) Repite el procedimiento para encontrar qué porcentaje ocupa la mayor área de la sombra en la fotografía llamada Escaleras 2.

f) Sobre el polígono ACDE, dibuja cómo debería ser la sombra para que su área represente la mitad del área del polígono. Justifica la respuesta.

OBSERVACIONES y REFLEXIONES ACTIVIDAD 4

- Lo más habitual fue dar respuestas sin justificar (eran necesarios cálculos) o no suficientemente justificadas en algunos de los apartados.
- Por ejemplo: En las cuestiones c) y d) sobre el área del polígono ACDE y el porcentaje que representa, se dieron respuestas sin justificar: “el área es un tercio del polígono $5,43 \text{ cm}^2$ ”

Respuestas sin justificar suficientemente como "será un 40% ya que dividiéndolo en 5 partes, la sombra llenaría 2 partes".

The screenshot shows the GeoGebra Classic web interface. The browser tabs include "Caçadors d'...", "Escalaes 2.jpg", "Escalaes 1.jpg", "Pals de fusta", "Nueva tarea:", "Caçadors d'...", "GeoGebra Cl...", and "calculadora". The address bar shows "geogebra.org/classic?lang=ca".

The main workspace displays a photograph of a staircase with a geometric construction overlaid. The construction consists of several points labeled with letters: F, H, J, K, M, D, G, I, L, N, E. Lines connect these points to form a complex shape. A coordinate grid is visible on the right side of the workspace, with the y-axis ranging from 4 to 16 and the x-axis from 14 to 22.

The left sidebar shows the following objects:

- K = Punt(f) → (8.37, 11.2)
- L = Punt(h) → (7.35, 9.09)
- I = Segment(K, L) → 2.34
- M = Punt(f) → (9.27, 11.13)
- N = Punt(h) → (9.13, 8.92)
- m = Segment(M, N) → 2.21

The bottom of the interface shows a taskbar with various application icons and a system tray with the date and time: 14:25 19/10/2021.

- Este tipo de respuestas sin justificar fueron aprovechadas para «revisitar» la actividad:
- Considera el polígono ACDE construido a partir de la fotografía y el área que forma la sombra de la izquierda, la más grande, dentro de este polígono. Un grupo de alumnos ha respondido que su área es un tercio del polígono: $5,43 \text{ cm}^2$.

4.1. Justifica cómo se ha encontrado

- esta respuesta (procedimiento).

4.2. Justifica si el cálculo del área

- es correcto y por qué.



Repitiendo el procedimiento para encontrar qué porcentaje ocupa el área de la sombra más grande en la fotografía de la derecha, un grupo de alumnos ha dicho que un 40%.

4.3. Justifica cómo se ha encontrado esta respuesta (procedimiento) y si es correcta o no.



- Además de “revisitar” algunas de las actividades en las sesiones de problemas, los alumnos tuvieron que explicar sus respuestas al grupo clase. Que el alumno ofrezca el “Feedback” a sus compañeros es una dinámica en la gestión del aula que provoca que el alumno se sienta copartícipe y corresponsable en la tarea de resolver problemas, aumentando su motivación y adquiriendo más seguridad (Deulofeu Y Torres, 2019). De esta manera se le forzaba a justificar mucho mejor sus respuestas.

Actividad 5 (abierta-MPP)

A partir de estas fotografías:



Escaleras de madera



Escalera doble

- a) Plantéate una o dos preguntas.
- b) Busca las respuestas.

Actividad 6 (abierta MPP)

Espero que hayas descubierto unas cuantas cosas sobre sombras o relacionadas con ellas. Seguro que tienes ojos para encontrar nuevas. ¡Adelante!

Te propongo que busques sombras y hagas fotos, en diferentes momentos del día si puede ser. Intenta que aparezcan figuras planas distintas a las trabajadas anteriormente.

Hazte preguntas y, sobre todo, busca las respuestas.

OBSERVACIONES y REFLEXIONES ACTIVIDADES 5 y 6

- Objetivo: **introducir** al alumno en la invención de problemas de una manera más asequible a priori, a partir de fotografías.
- Experiencia de aula: compleja sobre todo en alumnos que presentan **dificultades en la resolución de problemas** y/o que tienen algunas **carencias en los conocimientos matemáticos** que se necesitan.
- Las investigaciones sobre la invención de problemas en matemáticas muestran que el alumno que es un buen “resolutor” de problemas se maneja bien en la invención de los mismos, y así se reflejó en sus fotos propuestas (Singer y otros, 2015).

- El alumnado con ciertas dificultades planteaba cuestiones muy **parecidas** a las de la actividad aquí presentada, a partir de **fotografías parecidas**, por mucho que se insistiera en proponer cuestiones distintas a las que habían salido en clase.
- También hubieron propuestas interesantes pero mal resueltas por el alumno.
- Las dificultades observadas en las propuestas del alumnado pueden deberse a lo **poco familiarizado** que está con este tipo de actividades (a partir de fotografías); o bien a su **inseguridad a proponer otras cuestiones por dominar poco los conceptos trabajados**; o simplemente a que prefiera situarse en una **zona de confort** y no ir más allá.

EJEMPLOS: Propuesta 1



- a) ¿Por qué la longitud de la sombra es más grande que la de la farola?
- b) Si la sombra está hacia la derecha, ¿en qué lado está el sol?
- c) ¿Qué longitud tiene la sombra y la farola?
- d) ¿De cuántos grados es el ángulo?

Observaciones

- Propuesta calcada de la actividad 3, en la que las dos primeras preguntas sorprenden por el **poco contenido matemático** que contienen en su formulación.
- Las dos siguientes porque **se reducen a hacer una medición**, con *geogebra*, por ejemplo. Además el alumno no resolvió las cuestiones.
- Este tipo de propuestas que ofrece el alumno le indican al profesorado, una vez más, todos los aspectos que hay que trabajar (conceptos, profundidad de los mismos, expresión...).

EJEMPLOS: Propuesta 2

Dibuja cómo tendría que ser la sombra del libro para que tenga la misma área que el libro. Ten en cuenta que la foto del libro está hecha desde otra perspectiva de manera que no es un rectángulo.



Observaciones

- Más interesante que la 1, si bien el tipo de pregunta no va más allá de las ya trabajadas.
- Sorprende el comentario sobre la perspectiva. No se sabe a priori a qué se refiere el alumno.
- El alumno no resolvió la cuestión planteada.

EJEMPLOS: Propuesta 3



a) ¿Qué forma tiene la sombra y la pelota?

Respuesta: La sombra es un óvalo y la pelota una circunferencia.

b) ¿Tiene la misma área?

Respuesta: No tienen la misma área ya que el área de la sombra es de 37,87cm² y la de la pelota 28,42cm².

Observaciones

- Propuesta distinta, interesante.
- Se barajan áreas y volúmenes aunque el alumno parece no distinguir ambos conceptos.
- Resuelve las preguntas que plantea poniendo directamente los resultados sin que se expliciten ni los procedimientos, ni los cálculos, etc.
- Se menciona que la sombra de la pelota es un óvalo, ¿cómo ha calculado el alumno su área?

Oportunidad para «**revisitar**» la actividad:

A partir de la fotografía, un grupo de alumnos ha planteado las preguntas siguientes que ha respondido como se muestra:



3.1. ¿Qué forma tienen la sombra y la pelota? Respuesta: la sombra es un óvalo y la pelota una circunferencia. Analiza esta respuesta y explica si es correcta o no y por qué.

3.2. ¿Tiene la misma área? Respuesta: No tienen la misma área ya que el área de la sombra es de $37,87\text{cm}^2$ y la de la pelota $28,42\text{cm}^2$. Analiza esta respuesta y justifica si es correcta o no y por qué.

Observaciones

- Esta reformulación generó en el aula actividades y reflexiones más productivas.
- Respecto al apartado 3.1, salieron los conceptos de elipse, circunferencia, círculo, esfera, perímetro, área y volumen, así como las diferencias entre ellos. Se trata de conceptos que a cierto alumnado todavía le cuesta distinguir en 4ESO (los de área y perímetro continúan siendo un clásico, ya no digamos el volumen).
- Y respecto al apartado 3.2, se utilizó el *geogebra* para hacer cálculos y justificar suficientemente que las respuestas dadas no eran correctas.

- Hubo una reflexión interesante respecto a las unidades de medida que utiliza el *geogebra*. Por ejemplo, si se mide la longitud de un segmento y el software te muestra en pantalla 3,72... ¿Qué son? ¿cm?, ¿dm?, ¿cómo saberlo?

EJEMPLOS: Propuesta 4



¿Qué tipo de triángulo es el que aparece como sombra?

Respuesta: El triángulo que aparece es isósceles



¿En qué momento del día, más o menos, crees que está hecha esta foto?

Respuesta: creo que está hecha hacia el mediodía ya que las sombras son bastante cortas.

Observaciones

- En la imagen de las escaleras de madera desconocemos a qué triángulo de los que aparecen en la imagen se refiere el alumno con su pregunta. La respuesta es una afirmación sin justificación.
- En la imagen de la escalera doble, que se prestaría incluso para visualizar una pirámide, la propuesta que se hace “¿En qué momento del día...?” sorprende por lo que respecta a su formulación y contenido.

CONCLUSIONES FINALES (1)

- La fotografía matemática: contexto excelente para **plantear** (y **generar**) preguntas con diversos niveles de profundización y para crear actividades ricas y abiertas (trabajo en grupo o individual).
- Muestra **los conocimientos de geometría plana** que el alumno tiene, revisitarlos y corregir errores.
- Útil para trabajar las competencias matemáticas de **justificar** las afirmaciones y los cálculos que se hacen, **expresarse oralmente y por escrito** con claridad y precisión “matemática” y **saber comunicar** a los compañeros del grupo los cálculos que se hacen.

CONCLUSIONES FINALES (2)

- Útil para introducir al alumno en la **generación de preguntas** de carácter matemático a partir de fotografías (n.4). Y que el alumno no se quede a un nivel superficial.
- Una fotografía matemática se puede “estirar” de múltiples maneras y desde diferentes ámbitos.

CONCLUSIONES FINALES-DIFICULTADES (3)

- Un curso escolar es poco tiempo para obtener avances significativos en todas las competencias matemáticas aludidas (además del tema COVID!!, que se ha notado).
- Las preguntas que generan los alumnos “replican” cuestiones que ya han surgido previamente→ Progresos al “revisitar” algunas actividades enriquecidas con las propuestas del alumnado.
- La dinámica de que el alumnado ofrezca a sus compañeros el “Feedback” de las actividades realizadas le permite mejorar en la competencia de saber comunicar lo que ha hecho (mucho más que cuando presenta por escrito al profesor el trabajo realizado).

CONCLUSIONES FINALES (y 4)

- La posibilidad de tener los mismos alumnos en dos cursos sucesivos permite obtener mejores resultados (Deulofeu y Torres, JAEM 2019):
 - 1) Objetivos ambiciosos a largo plazo (un mínimo de 2 o 3 cursos)
 - 2) Ser realista y durante un curso escolar, centrarse únicamente en una o dos competencias de las aludidas (sin descuidar las otras puesto que están relacionadas).
 -

- Continuar en la línea mostrada en esta comunicación y profundizar en la gestión de aula de que los alumnos planteen problemas a partir de fotografías para que mejoren al mismo tiempo sus competencias en la resolución de problemas de matemáticas.
- Las investigaciones recientes muestran las transferencias que se dan entre las tareas de inventar y resolver problemas (Singer y otros, 2015).
- El “método ideal” para que todo el alumnado quiera resolver problemas en el aula de matemáticas no existe, pero ello no significa que no debamos seguir ensayando y evaluando nuevos instrumentos, como el que nos ofrece la fotografía matemática, para avanzar en los objetivos marcados.