EL POTENCIAL DE LOS EJEMPLOS GENÉRICOS PARA DESARROLLAR DEMOSTRACIONES EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

GEORGINA CERQUEDA - YOLANDA COLOM - JORDI DEULOFEU

GEORGINA CERQUEDA
Profesora de matemáticas
EASEO
Profesora Universitat d'Andorra
gcerqueda@uda.ad

YOLANDA COLOM
Dra. Didáctica de las matemáticas
ycolom@uda.ad

JORDI DEULOFEU
Dr. Didáctica de las matemáticas
jordi.deulofeu@uab.cat

JULIO 2022

JAEM 20
Matemáticas para construir el mundo

INTRODUCCIÓN

- Motivación del trabajo
- Cambios en el sistema educativos

- Demostración en matemática escolar y ejemplos genéricos

MARCO ESCOLAR

ESCOLA ANDORRANA

EASE Ordino

PROBLEMA INVESTIGACIÓN

¿Los ejemplos genéricos pueden contribuir positivamente en la capacidad de producir demostraciones de propiedades numéricas en los alumnos de educación secundaria?

REFERENTES TEÓRICOS

DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICA ESCOLAR

Balacheff (1988),
Dreyfus, Nardi y Leikin(2012),
Hanna y Jahnke (1996),
Knuth (2002a),
Reid y Knipping (2010)
Stylianides, Bieda y Morselli (2016)

EJEMPLOS Y DEMOSTRACIONES GENÉRICAS

Leron y Zaslavsky (2014),
Mason y Pimm (1984),
Reid y Vallejo Vargas (2018)
Rowland (1998)

REFERENTES CURRICULARES

NCTM (2000)
Competencias Niss y Højgaard (2011)
Programas de matemáticas Escola Andorrana

¿POR QUÉ DEMOSTRAR EN SECUNDARIA (Y ANTES)?

- **FUNCIÓN DE LA DEMOSTRACIÓN - EXPLICACIÓN** (Hanna,2000)
  - Transmitir las ideas por las cuales la propiedad es cierta
  - Profundizar en la comprensión de los significados
  - ¿Por qué esto funciona?
- Es central en la disciplina matemática
- Los alumnos, incluso los más avanzados, muestran un bajo nivel debido a la introducción tardana sin progresión. (G. J. Stylianides et al., 2017)

DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICA ESCOLAR

Secuencia conectada de afirmaciones a favor de un enunciado matemático con las siguientes propiedades:

- Utiliza propiedades aceptadas por la comunidad de la clase que son ciertas y no necesitan justificación
- Utiliza métodos de razonamiento válidos y conocidos (o alcanzables) en la comunidad de la clase
- Se comunica con formas de expresión apropiadas y conocidas (o alcanzables) por la comunidad de la clase

A.J. STYLANIDES (2007)

EL ROL DEL PROFESOR EN EL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN

- **Representante de la comunidad matemática -** Ayuda a diferenciar los métodos / razonamientos / representaciones válidos.
- Diseño y aplicación de tareas para crear necesidad de demostración
- Establecer normas socio-matemáticas

EJEMPLOS GENÉRICOS

- Ejemplo presentado de manera que destaca su rol como portador de generalidad (Mason y Pimm, 1984)
- No recae en ninguna propiedad específica del objeto concreto, solo en las que son comunes de la clase que representa (Mason y Pimm, 1984)
- Se puede reproducir sobre cualquier otro ejemplo (Rowland, 1998)
- Se trata de la presentación del ejemplo, no del hecho de verificar la propiedad (Rowland, 1998)

EJEMPLOS GENÉRICOS

Los cuadrados perfectos tienen un número impar de divisores

VERIFICACIÓN EMPÍRICA

Divisores de 25:
Div(25) = {1,5,25} - 3 divisores

Divisores de 36: Div(36) =
{1,2,3,4,6,9,18,36} - 9 divisores

Divisores de 20: Div(20) =
{1,2,4,5,10,20} - 6 divisores

EJEMPLO GENÉRICO

36 = 1 x 36 → 2 divisores
= 2 x 18 → 2 divisores
= 3 x 12 → 2 divisores
= 4 x 9 → 2 divisores
= 6 x 6 → 1 divisor

EJEMPLOS GENÉRICOS

La suma de cinco números consecutivos es múltiplo de cinco

$$14 + 15 + 16 + 17 + 18$$

$$(16 - 2) + (16 - 1) + 16 + (16 + 1) + (16+2)$$

$$16 \times 5$$

DEMOSTRACIÓN GENÉRICA

EJEMPLO GENÉRICO

+

CONCIENCIA DE GENERALIDAD

MUESTRA LAS RAZONES POR LAS QUE LA PROPIEDAD ES CIERTA

(Reid y Vallejo Vargas, 2018)

EJEMPLOS GENÉRICOS COMO HERRAMIENTA PEDAGÓGICA

- Permite acceder a las ideas principales de la demostración reduciendo las dificultades del formalismo y de generalización total.
- Facilita ver la estructura general de la demostración
- Transición entre razonamiento empírico y demostración general.

(Leron y Zaslavsky, 2014, Reid y Vallejo Vargas, 2018; Dogan y Willams-Pierce, 2021)

REFERENTES CURRICULARES

COMPETENCIA DE RAZONAMIENTO

"Analizar o producir argumentos (cadenas de enunciados vinculados por inferèncias) de forma oral o escrita para justificar afirmaciones matemáticas" (Niss y Højgaard, 2019)

"Se trata en especial de conocer y comprender que es una prueba matemática y en qué se diferencia de otras formas de razonamiento matemático" (Niss y Højgaard, 2011)

PRINCIPIOS Y ESTÁNDARES (NCTM)

Actividades de construir y evaluar argumentos matemáticos en todos los cursos y bloques de contenidos

Mostrar a los alumnos las posibilidades y limitaciones del razonamiento inductivo

Demostraciones para responder a "¿Por qué funciona?"

PROGRAMAS ESCOLA ANDORRANA

"La conjetura, la argumentación y la demostración han de formar parte, de manera consciente y explícita, de la actividad que se desarrolle en en aula durante toda la primera enseñanza"

Razonamientos representados con argumentos narrativos, representaciones visuales o lenguaje simbólico, siempre que muestren generalidad

PRUEBA PILOTO - ESTRUCTURA Y OBJETIVOS

	PARTE 1	PARTE 2	PARTE 3
ACTITUDES RESPECTO LAS MATEMÁTICAS	DEMOSTRAR	EJEMPLOS GENÉRICOS / OTROS RAZONAMIENTOS	SIGNIFICADO DEMOSTRACIÓN
	DETERMINAR EL NIVEL DE DEMOSTRACIÓN	DETERMINAR SI EL EG OFRECE GENERALIDAD / CONVICCIÓN / EXPLICACIÓN	DETERMINAR CONCEPCIÓN DE DEMOSTRACIÓN
		DIFERENCIA EMPÍRICO - GENÉRICO	
DIAGNOSTICO INICIAL		PREFERENCIA DE RAZONAMIENTO	

JAEM 20
Matemáticas para construir el mundo

PRUEBA PILOTO - POBLACIÓN

- Grupo clase 17 alumnos heterogéneo
- Entrevista individual 2 alumnos

PARTE 1 - DEMOSTRAR

En Blai ha sumat alguns nombres amb el seu quadrat:

$2 + 2^2 = 2 + 4 = 6$

$5 + 5^2 = 5 + 25 = 30$

$6 + 6^2 = 6 + 36 = 42.$

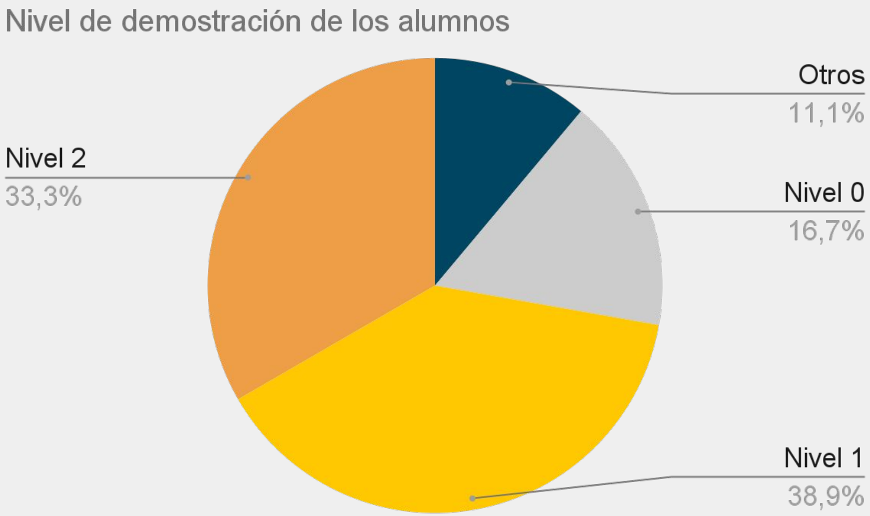
Ha observat que la suma és sempre parell.

Creus que la conjectura del Blai és sempre certa? Demostra-ho.

Consideres que el teu raonament demostra la propietat per tots els nombres? Per què?

NIVELES DE DEMOSTRACIÓN

La suma de un número y su cuadrado es siempre par



Nivel 0: Ignora la necesidad de demostración

Nivel 1: Ven la necesidad de demostración pero producen un argumento no general.

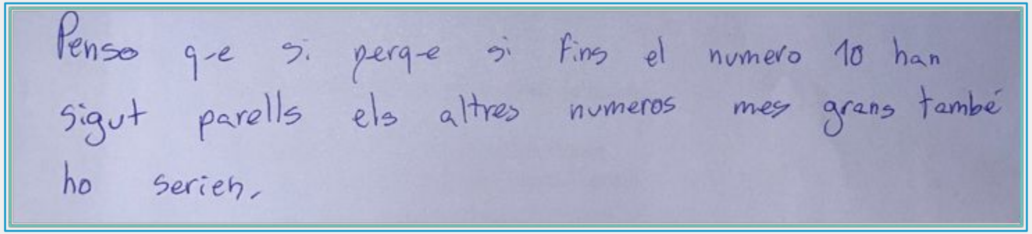
a. Testea algunos casos
b. Testea sistemáticamente
c. Testa casos extremos
d. Ejemplo genérico

Nivel 2: Son conscientes de que un argumento empírico no es general. Intentan producir un argumento general pero es incompleto o incorrecto.

Nivel 3: Argumento general, aunque le falte rigor. Incluyen referencias a las condiciones del enunciado. Cadena de deducciones con conclusión explícita

Knuth, Choppin y Bieda (2010)

NIVELES DE DEMOSTRACIÓN


Penso q-e si perq-e si fins el numero 10 han sigut parells els altres numeros mes grans també ho serien.

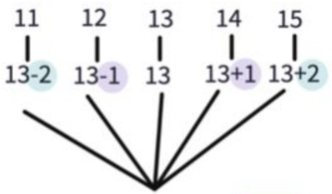
Nivel 1 - Testeo sistemático

6:02	Profesora: ¿Que el cuadrado de un número impar es un número impar es algo que te parezca evidente?
6:11	Alumna: Mm…
6:25	Alumna: No. Pero con los ejemplos que me vienen a la cabeza siempre pasa
6:29	Profesora: ¿Siempre pasa?
6:37	Alumna: O sea, porque es como… por ejemplo, con el 5,... Claro, si sumas 5 y 5 se queda par. Pero entonces haces 5 y 5 y sigue siendo par. Pero a la que añades 5 más, que es lo que hace que sea impar, te queda impar el resultado. ¿Sabes?

Nivel 1 - Ejemplo genérico

PARTE 2 - COMPRENSIÓN EJEMPLO GENÉRICO

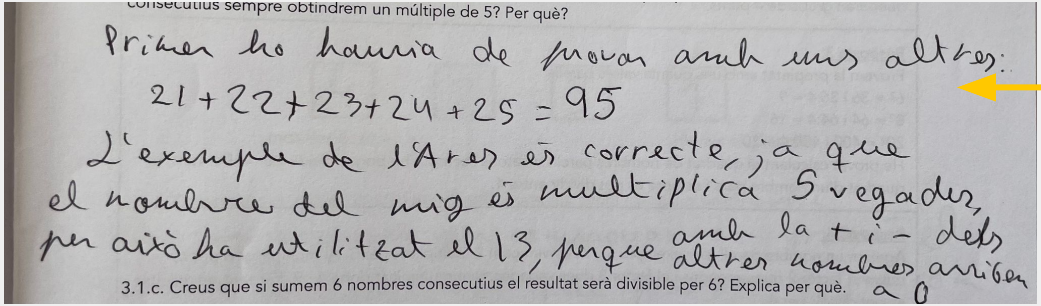
L'Ares ha observat que si sumes cinc nombres consecutius obtens un múltiple de 5. A més, ha realitzat aquest exemple i ha assegurat que aquesta propietat sempre serà certa:



$13\text{x}5 + 1 - 1 + 2 - 2 = \boxed{13\text{x}5}$

- Generalidad
- Explicación de una idea
- Aplicación a 6 números consecutivos

PARTE 2 - COMPRENSIÓN EJEMPLO GENÉRICO


consecutius sempre obtindrem un múltiple de 5? Per què?

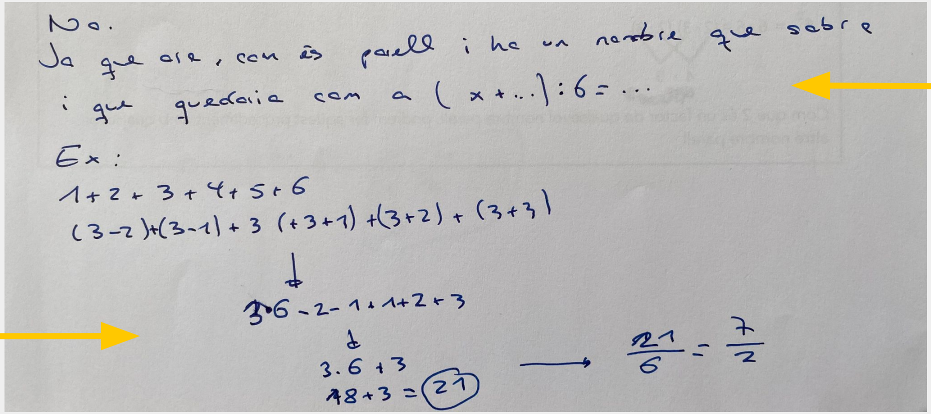
Primer ho hauria de provar amb uns altres:

$21+22+23+24+25=95$

L'exemple de l'Ares és correcte, ja que el nombre del mig és multiplica 5 vegades, per això ha utilitzat el 13, perque amb la + i - dels altres nombres arriben a 0

3.1.c. Creus que si sumem 6 nombres consecutius el resultat serà divisible per 6? Explica per què.

Necesidad de más ejemplos


No.

Ja que ara, com és parell i hi ha un nombre que sobre i que quedaria com a $(x+\ldots):6=\ldots$

Ex:

$1+2+3+4+5+6$

$(3-2)+(3-1)+3\,(+3+1)+(3+2)+(3+3)$

$\downarrow$

$3\cdot 6-2-1+1+2+3$

$\downarrow$

$3.6+3$

$18+3=21 \longrightarrow \frac{21}{6}=\frac{7}{2}$

Uso del àlgebra

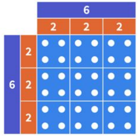
Repetición del razonamiento (incompleta)

PARTE 2 - COMPRENDER DISTINTOS RAZONAMIENTOS

Presentación distintos razonamientos

Resposta 1:
Si un nombre és parell, el podem escriure com 2n. Si l'elevem al quadrat, $(2n)^2 = 2n \cdot 2n = 4n^2$, que serà divisible per 4.

Resposta 2:
Agafem el nombre parell 6. Representem 6^2 com un quadrat de 6 columnes amb 6 punts a cada columna. Com que $6 = 3{\cdot}2$, podem dividir el quadrat en tres grups de dues columnes. A més, també podem dividir les files en tres grups de dos files. D'aquesta manera, obtenim grups de 4 punts, i podem dir que el total, 36, es pot dividir per 4.



Si fem servir qualsevol altre nombre parell, podrem fer la mateixa divisió en files i columnes i ens quedaran grups de 4 punts.

Resposta 3:
Provem la propietat amb uns quants valors parells:
$6^2 = 36$ i $36:4 = 9$
$8^2 = 64$ i $64:4 = 16$
$20^2 = 400$ i $400:4 = 20$
He provat calculant el quadrat de nombres parells aleatoris i sempre he pogut dividir per 4. Per tant, el quadrat d'un nombre parell sempre es pot dividir entre 4.

Resposta 4:
Agafem un nombre parell, per exemple 6, i l'escrivim com 2 multiplicat per 3. Al multiplicar 6 per 6, tenim el factor 2 dues vegades i el factor 3 dues vegades, que multiplicat dona $4 \cdot 9$. Per tant, el resultat es pot dividir per 4.

$$6^2 = 6 \cdot 6 = (2 \cdot 3)\,(2 \cdot 3)$$
$$4 \cdot 9$$

Com que 2 és un factor de qualsevol nombre parell, podrem fer aquest procediment amb qualsevol altre nombre parell.

3.2.a. Encercla, en cada cas, l'opció que correspongui a la teva opinió. Si no ho saps o no n'estàs segur, encercla NS.

	Entenc el raonament utilitzat en l'argument	Mostra que la conjectura serà certa per a **qualsevol nombre**	Serveix per **convèncer** de que la conjectura és certa sempre	Serveix per **explicar** perquè la conjectura és certa
Resposta 1	SI / NO / NS	SI / NO / NS	SI / NO / NS	SI / NO / NS
Resposta 2	SI / NO / NS	SI / NO / NS	SI / NO / NS	SI / NO / NS
Resposta 3	SI / NO / NS	SI / NO / NS	SI / NO / NS	SI / NO / NS
Resposta 4	SI / NO / NS	SI / NO / NS	SI / NO / NS	SI / NO / NS

Comprensión
Generalidad
Convicción
Explicación

3.2.b. Quina de les respostes prefereixes? Per què?

Preferencia razonamiento

3.2.c. Ordena les diferents respostes, de mes a menys, segons com t'ajuden a entendre perquè la conjectura és certa. Si creus que alguna resposta no explica els motius pels quals la conjectura és certa, no la posis.

☐ ☐ ☐ ☐

més explicació — menys explicació

Explicación del razonamiento

3.2.d. Demostra que, qualsevol nombre imparell al quadrat, tindrà residu 1 al dividir-lo entre 4.

Aplicación propiedad similar

Act 2.2 Un número par al cuadrado es divisible por 4
Act 2.3 La diferencia de dos cuadrados consecutivos es impar

RAZONAMIENTO PREFERIDO

PREFERENCIA POR RAZONAMIENTO ALGEBRAICO AUNQUE:

- No siempre produce convicción
- No es el que proporciona más explicación
- No son capaces de repetir el razonamiento a una propiedad similar

La 1ra ja que demostra que la teoria és certa gracant una fórmula que ens permet pedem comprovar-ho amb altres nombres, a més s'entén bastant bé però crec que no demostra perquè el resultat es pot dividir entre 4

Justificación preferencia

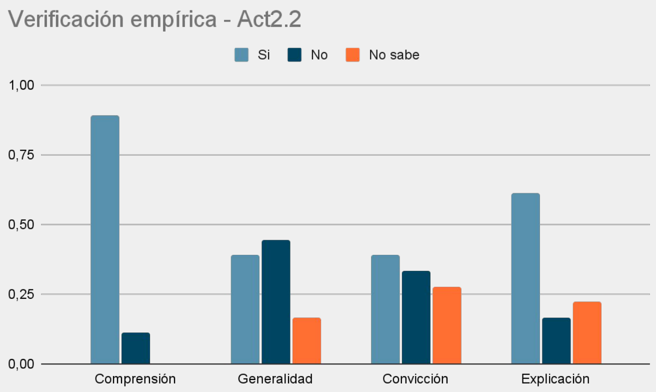
Pensa que la primera és la més adequada per mi, ja que amb factors algebràics ens assegurem que sempre sigui possible.

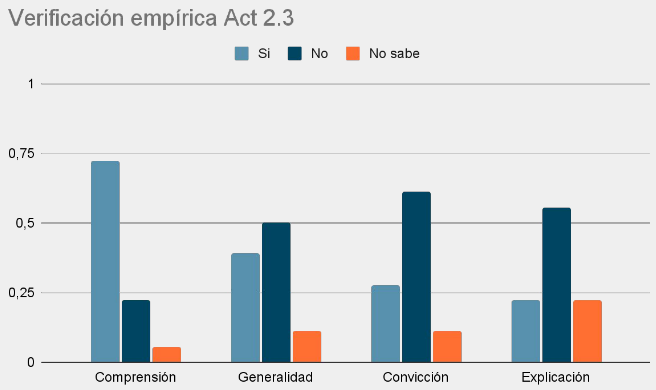
Justificación preferencia

$(x^2-1) : 4 =$ nombre amb residu 1

Intento demostración similar

VERIFICACIÓN EMPÍRICA

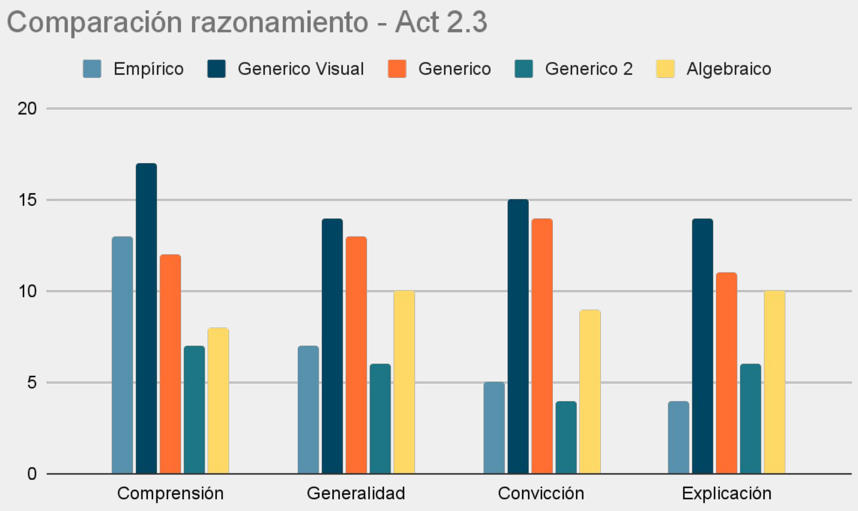




- Razonamiento más comprendido por los alumnos
- Aproximadamente la mitad de los alumnos son conscientes de que no es general.
- La convicción y explicación depende de la propiedad

JAEM 20
Matemáticas para construir el mundo

COMPARACIÓN RAZONAMIENTOS



- El ejemplo genérico genera ligeramente más comprensión, generalidad, convicción y explicación.
- Esto depende de la presentación, siendo preferido por los alumnos el ejemplo genérico visual.

CONCLUSIONES

- Los intentos de demostración general son incompletos.
  - Importància de justificar todos los pasos. Anàlisis preciso de sus razonamientos.
- Las demostraciones genéricas visuales son el razonamiento preferido por los alumnos y en general consideran que las entienden. Aún así, no la usan en sus razonamientos.
- Estudiar las distintas representaciones de los ejemplos genéricos para ver las diferencias en la comprensión

Muchas gracias