



Pensar antes de calcular, antes de actuar...
y volver a pensar después

Xavier Vilella Miró

xvilella@xtec.cat

Grup Vilatzara

ICE-Universitat Autònoma de Barcelona

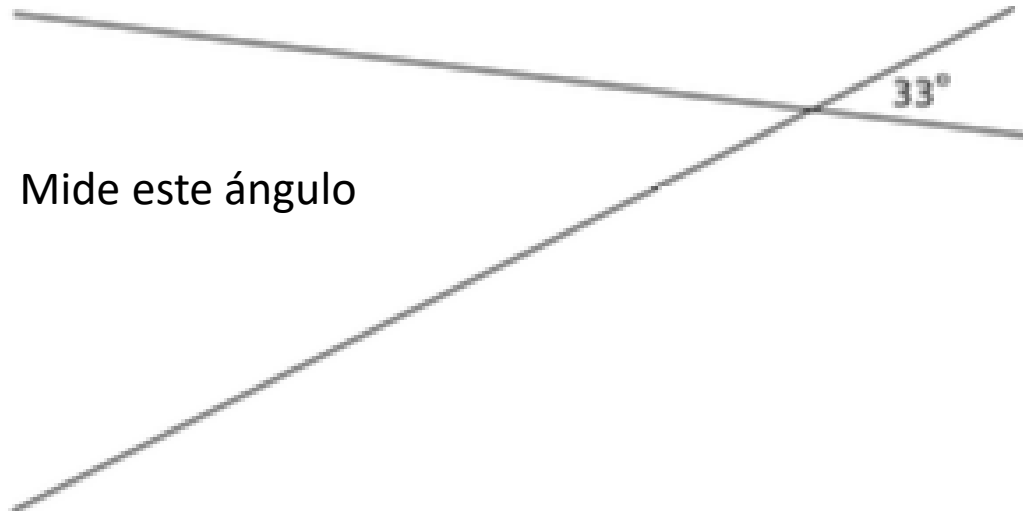
Aula de 1º de la ESO, primeras sesiones del curso

- Profesor: “Bien, ¿estáis a punto?”
- Alumnos: “Sí”
- P: “Resta 199 de 206”

23 alumnos de 28 se ponen a restar usando papel y lápiz

Cálculo mental
Cálculo estimativo
Cálculo con algoritmo tradicional
Cálculo por descomposición
Cálculo aproximado
Cálculo con calculadora y otras herramientas

Aula de 5º de primaria, 2º trimestre

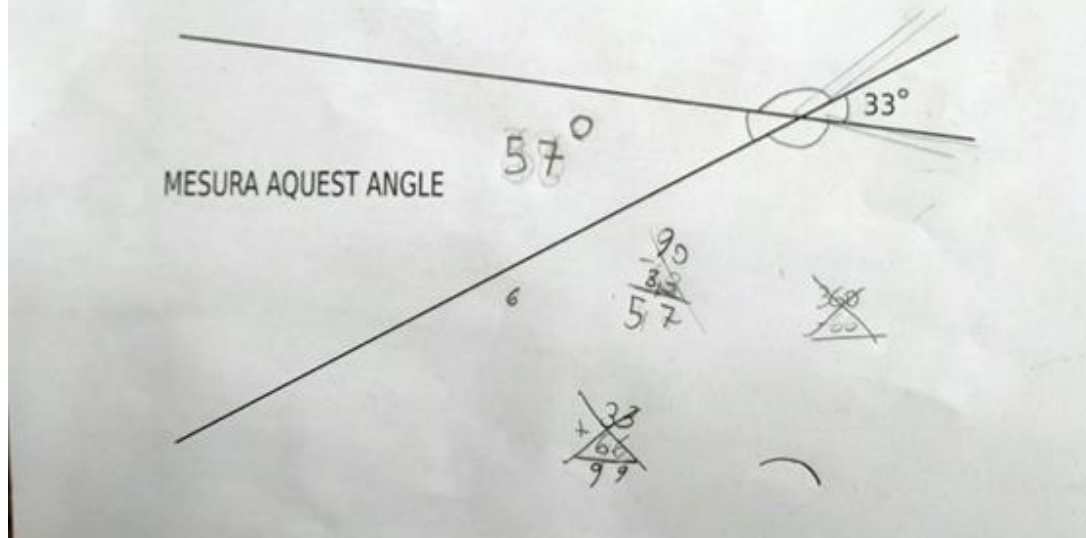


Se les pide que no utilicen el transportador de ángulos. Durante el 2º ciclo se les ha enseñado el concepto de ángulo y cómo medirlo, han realizado operaciones con grados, minutos y segundos de ángulo.

El maestro quiere comprobar qué han aprendido sobre el concepto de ángulo: les prepara una pequeña *trampa* dibujando uno de los ángulos bordeado por segmentos más largos que el otro

Un cálculo exacto les da seguridad

Amb restat $90 - 33$ hi ens a sortit 57 , després amb sumat $57 + 33$ i ens a sortit 90 . Amb restat $360 - 90$ i ens ha sortit 270 , després amb sumat $270 + 90$ i ens ha sortit 360 . I estam segures.

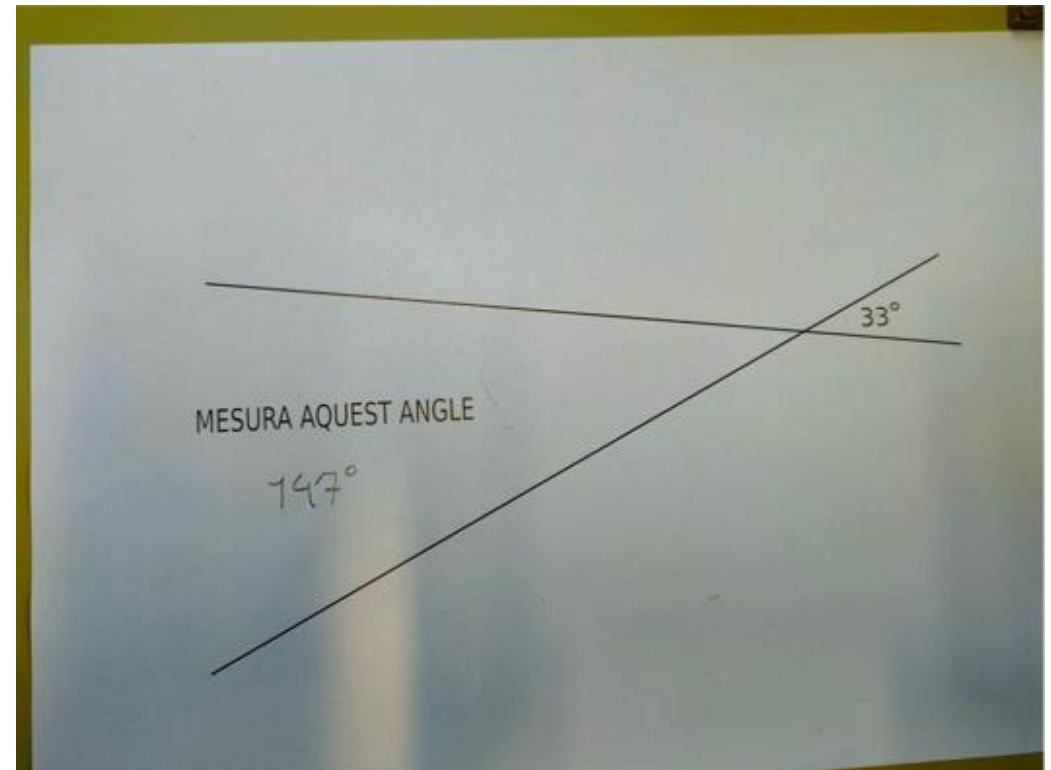


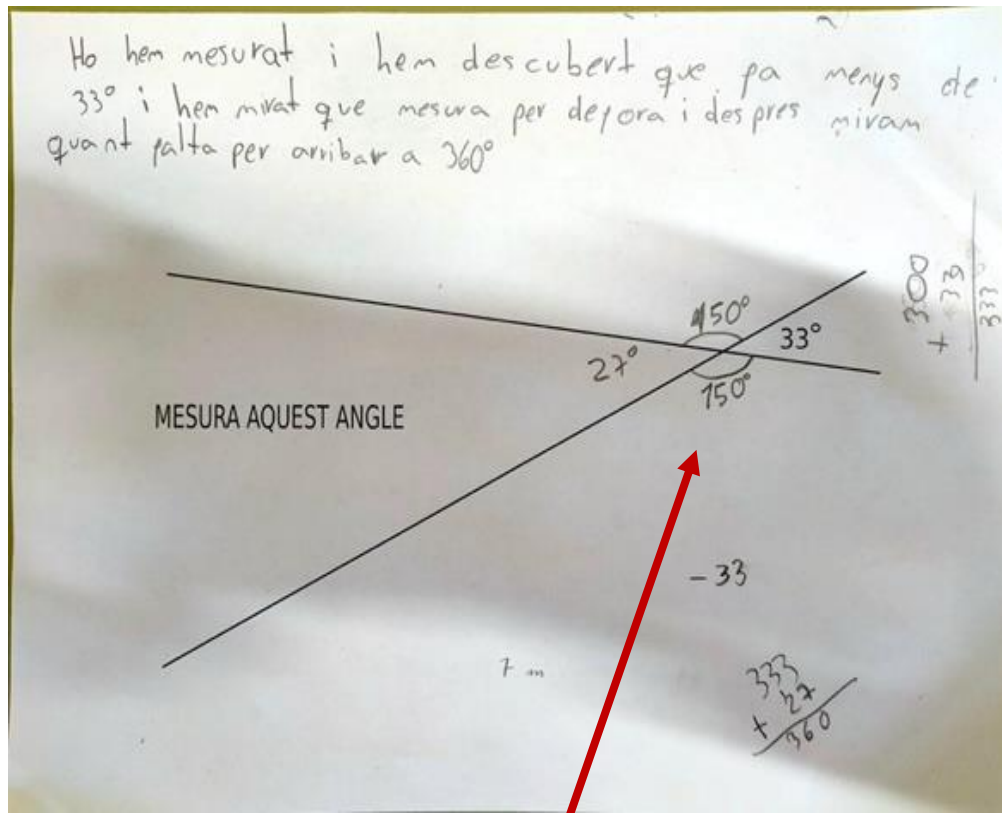
“Hemos restado $90 - 33$ y nos ha salido 57 , después hemos sumado $57 + 33$ y ha salido 90 . Hemos restado $360 - 90$ y ha salido 270 , después hemos sumado $270 + 90$ y **nos ha salido 360 . Y estamos seguras**”

Repiten el bucle dos veces (restan 33 y suman 33 , restan 90 y suman 90) y **como les da 360** , están seguras...

Si puedo hacer un cálculo exacto, el concepto no importa...

- Una resta, y resuelto:
 $180 - 33 = 147$
- Aplican una propiedad acertada los 180° del ángulo plano
- Dan por supuesto que el ángulo de la izquierda ha de ser mucho mayor que el de la derecha
- Confían en el cálculo: la operación les ofrece un resultado exacto, 180





Llama la atención que reconozcan que los opuestos por el vértice grandes miden lo mismo, 150, y no apliquen la misma propiedad a los opuestos por el vértice pequeños

“Lo hemos medido y hemos descubierto que mide menos de 33°, y hemos mirado qué mide por fuera y después cuánto falta para 360°”

Además de la falta de precisión en el método usado para medir el ángulo, no caen en la trampa del dibujo pues afirman que debe medir menos, y operan:

$$300 + 33 = 333$$

$$333 + 27 = 360$$

La confianza en las operaciones es total, aunque la respuesta sea totalmente errónea

¿Confías en el cálculo... o en lo que ven tus ojos?

- Dos de las conclusiones a las que llega el maestro, Joan Francesc, son las siguientes:
 - He notado que muchos alumnos dependen demasiado del cálculo y **confían antes en el cálculo que en la observación directa del problema**
 - **Se ha de potenciar primero la observación y el análisis crítico**

Conseguir competencia matemática implica...

Plantearse y resolver problemas

- Leer y entender el enunciado,
- *generar preguntas* relacionadas con una situación-problema,
- Plantear y resolver problemas análogos,
- *Planificar y desarrollar* estrategias de resolución,
- *verificar* la validez de las soluciones, *buscar* otras soluciones,
- *cambiar* las condiciones del problema,
- *Sintetizar* los resultados y métodos usados, y extender el problema, recogiendo los resultados que pueden ser útiles en situaciones posteriores

Pensar matemáticamente

Construir conocimientos matemáticos a partir de situaciones en las que tenga sentido, experimentar, intuir, formular, comprobar y modificar conjeturas, relacionar conceptos y realizar abstracciones

Razonar matemáticamente

Realizar inducciones y deducciones, particularizar y generalizar, reconocer conceptos matemáticos en situaciones concretas; argumentar las decisiones tomadas, así como la elección de los procesos seguidos y de las técnicas utilizadas

Verbos de acción

- *leer, entender,*
- *generar* (preguntas),
- *Plantear y resolver,*
- *Planificar y desarrollar* (estrategias),
- *verificar* (la validez),
- *buscar* (otras resoluciones),
- *cambiar* (condiciones),
- *sintetizar* (resultados y métodos),
- *extender*
- *construir* (conocimientos matemáticos),
- *experimentar,*
- *intuir,*
- *formular,*
- *comprobar*
- *modificar* (conjeturas),
- *relacionar* (conceptos)
- *realizar* (abstracciones)
- *realizar* (inducciones y deducciones),
- *particularizar*
- *generalizar,*
- *reconocer* (conceptos matemáticos),
- *argumentar* (decisiones)

Para desarrollar la competencia matemática...

Obtener, interpretar y generar

Información con contenido matemático

Utilizar

las técnicas matemáticas básicas (para contar, operar, medir, situarse en el espacio y organizar y analizar datos) y los instrumentos (calculadoras y recursos TIC, de dibujo y de medida) para hacer matemáticas

Interpretar y representar

(a través de palabras, gráficos, símbolos, números y materiales) expresiones, procesos y resultados matemáticos

Comunicar

a los demás el trabajo y los descubrimientos realizados, tanto oralmente como por escrito, utilizando el lenguaje matemático

Verbos de acción

- Obtener, interpretar, generar (información)
- Interpretar, representar (expresiones, procesos, resultados)
- Comunicar (trabajo, descubrimientos)
- Utilizar (técnicas matemáticas e instrumentos) para:
 - Contar
 - Operar
 - Medir
 - Situar en el espacio
 - Organizar
 - Analizar

El verbo indica la acción

El verbo calcular:

1 entre 36 verbos

¿Cuántos de ellos practicas
habitualmente en tus clases de
matemáticas?

Pensar antes de calcular y pensar después de calcular

¿Cómo podemos mejorar?

Unidades arbitrarias tradicionales, NO SMD

Una cana era 8 palmos, y cada palmo era 4 cuartos

56 cuartos, ¿cuántas canas eren?

La actividad que proponemos en el aula

En una escuela del área metropolitana de Barcelona:

¿Cuántas veces ha latido el corazón de una persona de 80 años en toda su vida, si suponemos una media de 72 latidos por minuto?

Gestión de la actividad:

5' reflexión individual

15' pequeños grupos: compartir, debate, consenso

Gran grupo

La actividad enriquecida

¿Cuántas veces ha latido el corazón de una persona de 80 años en toda su vida, si suponemos una media de 72 latidos por minuto?

Queda así:

¿Cuántas veces late el corazón de una persona en toda su vida?

Ahora no pueden lanzarse a realizar operaciones: se ven obligados a pensar antes de actuar

Actividad enriquecida => semilla de proyecto



Actividades ricas y actividades pobres

- Calcula el mcm de 40 i 100
- Por una parada del centro de València pasan dos líneas de autobuses, la línea A y la línea B. Ambas comienzan a funcionar a las 6 de la mañana. La primera línea, la A, hace un recorrido corto, y vuelve a pasar por la parada del centro a los 40 minutos. La línea B, en cambio, da una vuelta mucho más larga, y tarda 1 hora y 40 minutos en volver a la parada del centro. ¿A qué hora volverán a encontrarse ambos autobuses en la parada del centro? ¿Cuántas veces se encontrarán en toda una jornada, si pliegan a las 12 de la noche?

La actividad que proponemos en el aula es una de las claves

$$3x + 5 = 2 \cdot (x - 8)$$

- a) Explica por qué x no puede ser un número entre 0 y 8
- b) ¿Por qué x no puede ser 9?
- c) Mira qué ocurre cuando x vale 9 y cuando x vale 10 a cada lado.
Explica por qué es seguro que x no puede ser un número mayor que 9
- d) Explica ahora por qué x debe ser un número negativo

Algunas respuestas

- “Porque a un lado da números positivos y al otro da negativo **y además**, da números diferentes”
- “Que los dos números están muy lejos, por un *lado*, da 32, y en el otro da -7; por tanto, no puede ser mayor que 9 **porque se alejan mucho**”
- “**x** tiene que ser un número negativo pequeño **porque en un lado se multiplica por 3 y en el otro por 2**”

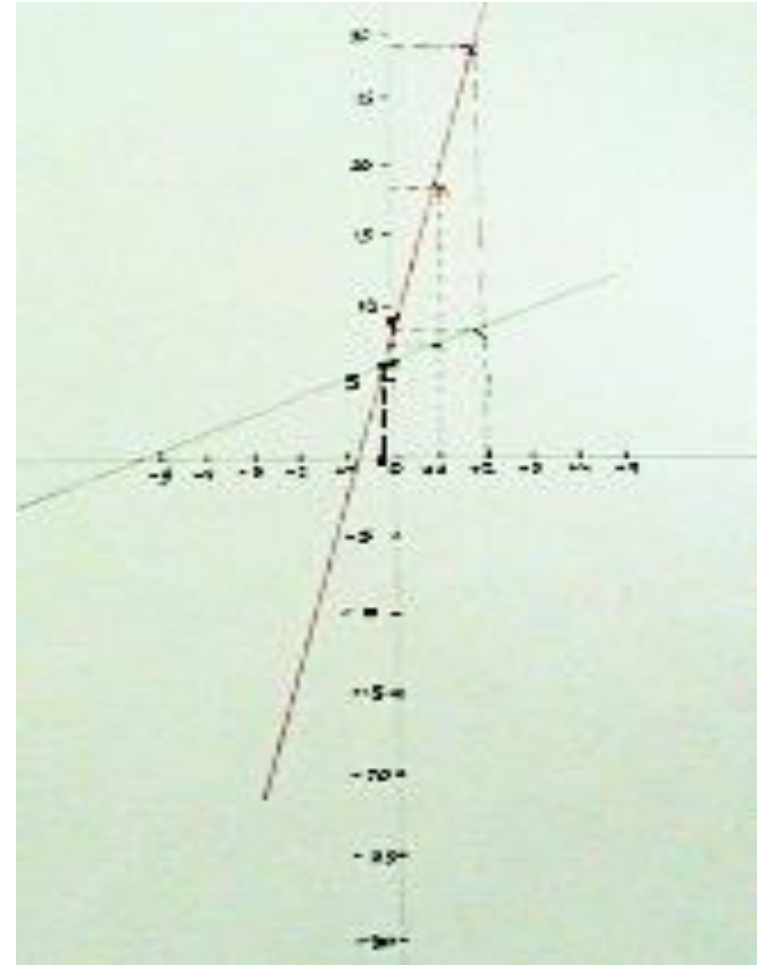
Pensar antes de calcular = razonamiento y prueba, argumentación, comunicación de ideas matemáticas

- Este tipo de propuestas hace pensar antes de actuar, antes de calcular: **antes de resolver la ecuación pensamos**, usando la lógica aplicada a este tipo de igualdades condicionadas. Damos valor a lo que es una igualdad en el álgebra.
- Además, conducimos al alumnado a analizar las expresiones antes de aplicar la mecánica de aislamiento de la x , incluso a acotar el resultado antes de calcularlo, lo que le permitirá darse cuenta de un posible error de cálculo: **pensar después de calcular**.

Dar sentido a las matemáticas que enseñamos

Este camino de acotación da sentido a la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de igualación

- **mediante el tanteo inteligente** lo que estamos haciendo es buscar el valor de x que satisface tanto un miembro de la igualdad (1a ecuación) como el otro miembro de la igualdad (2a ecuación)
- Y representando gráficamente los diferentes resultados de cada miembro para cada valor que probamos, nos dará el punto de intersección de las dos rectas que representan ambas ecuaciones.



Dos conclusiones

- Las actividades que proponemos en el aula **condicionan la respuesta inmediata del alumnado:** lanzarse a calcular sin pensar, o pensar antes de calcular
- Pensar antes de calcular debe ser un *hábito* desarrollado desde Infantil, pasando por Primaria, y ampliado en Secundaria