¿CÓMO EXPLICAN LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO SU IMAGEN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO?

Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (20 JAEM)
València 3/6 de Julio de 2022

Joan Pons Tomàs
Julia Valls González

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

1. **Problemática**
2. **Diseño de la investigación**
3. **Resultados**
4. **Conclusiones y discusión**

- **Problemática**
- Método
- Resultados
- Conclusiones

Este trabajo se engloba en una problemática más amplia centrada en **comprender cómo los estudiantes aprenden el concepto de límite de una función en un punto**

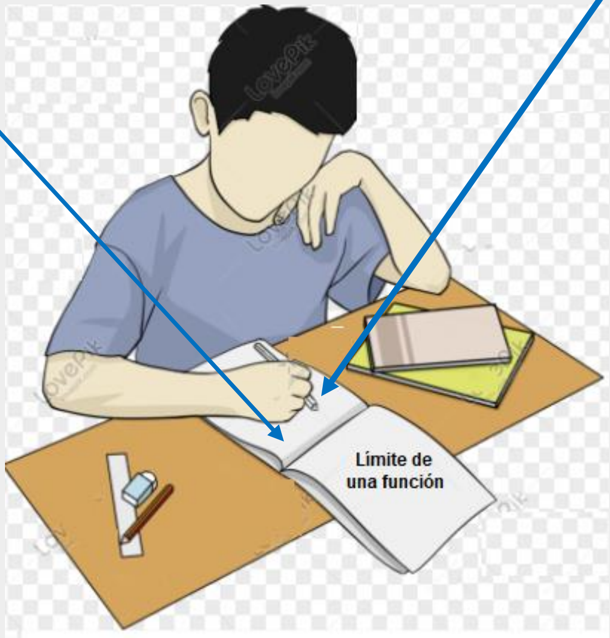
Aproximación al concepto de límite

Problemática
Método
Resultados
Conclusiones

Imagen del concepto
(Tall y Vinner,1981)

Ejemplos de tendencias dinámicas en **contextos algebraicos o gráficos**
(Pons, 2014)

Idea de aproximación
(Cornu, 1991)



La imagen de un concepto

La imagen de un concepto describe **la estructura cognitiva total asociada con el concepto**, incluye todas las imágenes mentales con propiedades y procesos asociados

(Tall y Vinner,1981)

La imagen de un concepto: características

Problemática
Método
Resultados
Conclusiones

- **Imagen eficiente** del concepto

- **Imagen clave** del concepto

  de límite:

  a) Las tendencias de los puntos de la gráfica

  b) Si el punto pertenece al dominio

  c) La tendencia de los valores de la función

  d) Conocer algoritmos de cálculo

  e) En términos de entornos

  f) El valor de la función en el punto

(Przenioslo, 2004)

Definición de un concepto

La definición de un concepto la veremos como **la definición formal**, tal como es comprendida y aceptada por la comunidad matemática

(Tall y Vinner,1981)

Objetivo

- **Problemática**
- Método
- Resultados
- Conclusiones

Analizar cómo explicarían los estudiantes de primero de bachillerato (16-17 años), si ostentaran el papel de profesor, **su imagen intuitiva de límite a un hipotético estudiante**

1. Problemática
2. **Diseño de la investigación**
3. Resultados
4. Conclusiones y discusión

Participantes y contexto

- Diez estudiantes de primero de bachillerato
- Fueron seleccionados de un grupo de 32 que **habían respondido a dos tareas opcionales** que formaban parte de un cuestionario, con otras seis tareas sobre la concepción dinámica de límite
- El cuestionario fue resuelto por 136 estudiantes

Descomposición genética límite de una función

• Sea f una función y x_0 un número real. El valor de la función f en $x=x_0$, $f(x_0)$ (E0)	
• Concepción dinámica de límite por la izquierda de una función	• Idea de tendencia ➢ $f(x)$ tiende a L_1 (E1I) ➢ x tiende, por la izquierda, al número a^- (E1I) • Coordinación en la concepción dinámica por la izquierda: las imágenes $f(x)$ tienden a L_1, cuando x tiende, por la izquierda, al número a^- (E2I)
• Concepción dinámica de límite por la derecha de una función	• Idea de tendencia ➢ $f(x)$ tiende a L_2, (E1D) ➢ x tiende, por la derecha, al número a^+, (E1D) • Coordinación en la concepción dinámica por la derecha: las imágenes $f(x)$ tienden a L_2, cuando x tiende, por la derecha, al número a^+, (ED2)
• Concepción dinámica de límite de una función	• Idea de tendencia ➢ $f(x)$ tiende a $L = L_1 = L_2$, (E1) ➢ x tiende al número a, (E1) • Coordinación en la concepción dinámica: las imágenes $f(x)$ tienden a L, cuando x tiende al número a, (E2) • Coordinación en la concepción dinámica: las imágenes $f(x)$ no tienden a L, cuando x tiende a a, al ser $L_1 \neq L_2$ (E2)
• Expresan la existencia del límite L de la función $f(x)$ en el punto a, (E3) • Expresan la existencia de límites laterales diferentes de la función $f(x)$ en el punto a, (E3)	

(Adaptación de Pons, 2011, **p. x**)

Instrumento de recogida de datos

- **Dos tareas** (opcionales del cuestionario) en modos algebraico-numérico (**AN)** y gráfico **(G)**

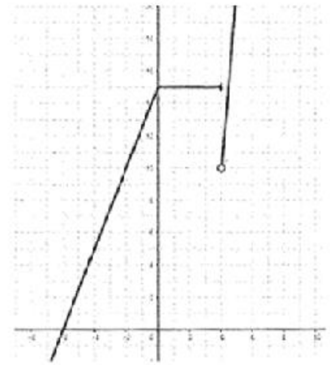
Tarea 7

Supón que tú fueras el profesor/a de matemáticas, ¿cómo le explicarías a un/a estudiante el significado de límite de la función f(x) cuando x tiende a 2?

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$$

Tarea 8

Supón que tú fueras el profesor/a de matemáticas, ¿cómo le explicarías a un/a estudiante el significado de límite de la función f(x) cuando x tiende a 4? Desde la función f(x) que se muestra en la figura



- **Entrevistas** a los diez participantes sobre sus respuestas a las dos tareas

Análisis de datos

Se ha realizado en tres fases:

- Primera fase: Análisis del cuestionario
- Segunda fase: Elección de los participantes en el estudio
- Tercera fase: Análisis de los datos del estudio

Análisis de datos: primera fase

Problemática
Método
Resultados
Conclusiones

Análisis de las respuestas de los 136 estudiantes al cuestionario

↓

Caracterización de los niveles de desarrollo del esquema (APOS)

(Dubinsky, 1991)

Análisis de datos: segunda fase

Problemática
Método
Resultados
Conclusiones

Caracterización de los niveles de desarrollo del esquema (APOS)

(Dubinsky, 1991)

	Nivel Intra	Nivel Inter	Nivel Trans
Estudiantes	4	1	5

Análisis de datos: tercera fase

Análisis de las respuestas a las dos tareas opcionales

Entrevistas

Caracterización de cómo explican los estudiantes de bachillerato su imagen intuitiva de límite de una función en un punto

1. Problemática
2. Diseño de la investigación
3. **Resultados**
4. Conclusiones y discusión

Resultados

Problemática
Método
Resultados
Conclusiones

Tienen **capacidad** para explicar a un hipotético estudiante el significado de límite de una función

C1: Desde la concepción dinámica en modo A-N y No en modo G	5 Estudiantes
C2: De forma procedimental en modo A-N Desde la concepción dinámica en modo G • Expresa los diferentes límites laterales (1) • Expresan los diferentes límites laterales e indican que no existe el límite (1)	2 Estudiantes
C3: Desde la concepción dinámica en modos A-N y G • Expresan los diferentes límites laterales e indican que no existe el límite	3 Estudiantes

Resultados

Problemática
Método
Resultados
Conclusiones

Tienen **capacidad** para explicar a un hipotético estudiante el significado de límite de una función

C1: Desde la concepción dinámica en modo A-N y No en modo G	5 Estudiantes
C2: De forma procedimental en modo A-N Desde la concepción dinámica en modo G • Expresa los diferentes límites laterales (1) • Expresan los diferentes límites laterales e indican que no existe el límite (1)	2 Estudiantes
C3: Desde la concepción dinámica en modos A-N y G • Expresan los diferentes límites laterales e indican que no existe el límite	3 Estudiantes

Desde la concepción dinámica en modo A-N y No en modo G

Problemática
Método
Resultados
Conclusiones

Tarea 7

Supón que tú fueras el profesor/a de matemáticas, ¿cómo le explicarías a un/a estudiante el significado de límite de la función f(x) cuando x tiende a 2?

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$$

1) El denominador no puede ser 0, así que resolvemos el denominador para ver sus valores no pueden ser.

$x^2-4=0$; $x^2=4$; $x=\pm\sqrt{4}$; $x=\pm 2$.

± 2, no pueden ser el denominador

2) Analizamos la función en el punto 2, tanto como cuando va por la izquierda como cuando va por la derecha

$\lim_{x\to 2^-} f(x)$ $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

3) Sustituimos valores en la función que se acerquen a 2^- y a 2^+ (1'999) / (2'001)

4) Cuando hacemos eso varias veces, notamos a su número tiende y obtenemos el número que tiende

Resolución de la T7 por EST34

Entrevista EST34

$\lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{x^2-4}$; $\lim_{x\to 1'999} \frac{x-2}{x^2-4} = 0'25$

$\lim_{x\to 1'9999} \frac{x-2}{x^2-4} = 0'25$

$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x^2-4}$; $\lim_{x\to 1'001} \frac{x-2}{x^2-4} = 0'249$

$\lim_{x\to 2'0001} \frac{x-2}{x^2-4} = 0'249$

El límite de la función es 0'25

Desde la concepción dinámica en modo A-N y No en modo G

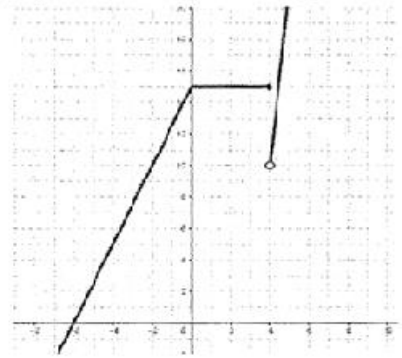
Por las respuestas dadas a la T7 y a la entrevista, podemos concluir que hay evidencias de que EST34:

- **tiene capacidad** para explicar a un hipotético estudiante el significado de límite de una función **desde la concepción dinámica**, **en modo AN,** con tendencias laterales coincidentes

Desde la concepción dinámica en modo A-N y No en modo G

Tarea 8

Supón que tú fueras el profesor/a de matemáticas, ¿cómo le explicarías a un/a estudiante el significado de límite de la función f(x) cuando x tiende a 4? Desde la función f(x) que se muestra en la figura



1) Miramos la función en (x=4) por la izquierda y miramos a que valor se aproxima
2) Hacemos lo mismo con la derecha.

Resolución de la T8 por EST34

Entrevista

Est34: A mi las gráficas se me dan un poco mal

T8.

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 15$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$$

Desde la concepción dinámica en modo A-N y No en modo G

Por las respuestas dadas a las T7 y T8 y a las entrevistas, podemos concluir que hay evidencias de que EST34:

- **tiene capacidad** para explicar a un hipotético estudiante el significado de límite de una función **desde la concepción dinámica**, **en modo AN,** con tendencias laterales coincidentes

- **no tiene capacidad** para explicar a un hipotético estudiante el significado de límite de una función, **en modo G**, con tendencias laterales no coincidentes

Resultados

Problemática
Método
Resultados
Conclusiones

Tienen **capacidad** para explicar a un hipotético estudiante el significado de límite de una función

C1: Desde la concepción dinámica en modo A-N y No en modo G

5 Estudiantes

C2: De forma procedimental en modo A-N
Desde la concepción dinámica en modo G

- Expresa los diferentes límites laterales (1)
- Expresan los diferentes límites laterales e indican que no existe el límite (1)

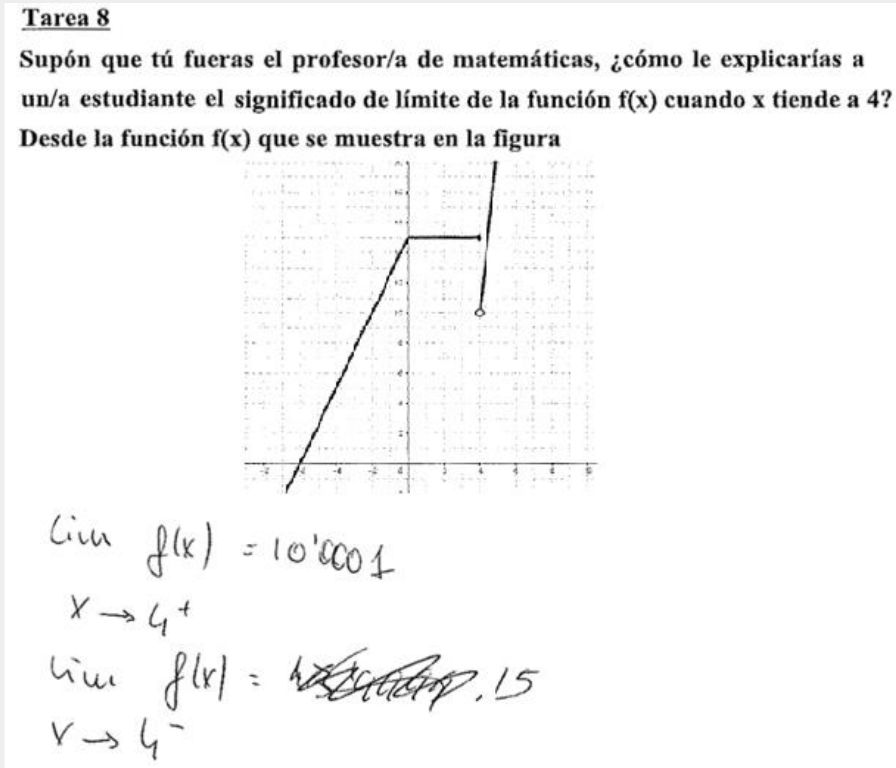
2 Estudiantes

C3: Desde la concepción dinámica en modos A-N y G

- Expresan los diferentes límites laterales e indican que no existe el límite

3 Estudiantes

De forma procedimental en modo A-N. Desde la concepción dinámica en modo G


Tarea 8

Supón que tú fueras el profesor/a de matemáticas, ¿cómo le explicarías a un/a estudiante el significado de límite de la función f(x) cuando x tiende a 4? Desde la función f(x) que se muestra en la figura

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 10'0001$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 15$$

Resolución de la T8 por EST18

Entrevista

EST18: **Empecemos con la T8, vamos a ver, cuando x tiende a 4, por donde se acerca la función por la izquierda y por la derecha, …por la derecha sería 10 con algo, ..., y por la izquierda 15**

Inv: ***¿En el punto 4, cual es el límite?***

EST18: **Que por la izquierda si que está, pero por la derecha no está**

De forma procedimental en modo A-N. Desde la concepción dinámica en modo G

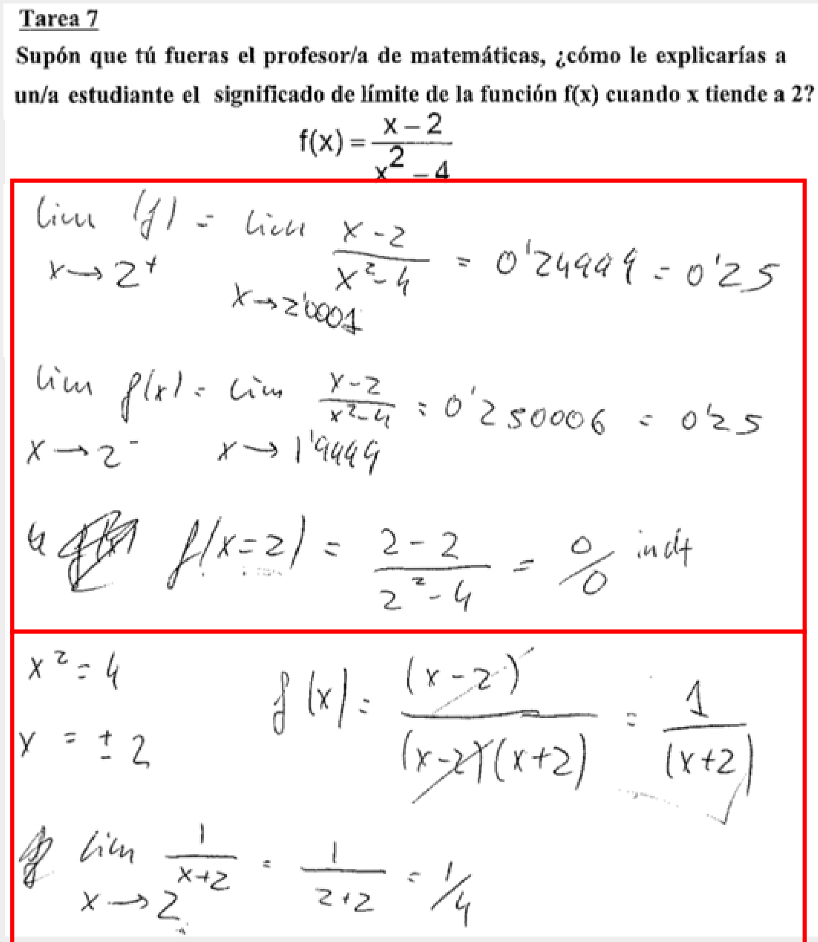
Problemática
Método
Resultados
Conclusiones

Por las respuestas dadas a la T8 y a la entrevista, podemos concluir que hay evidencias de que **EST18**:

- **tiene capacidad** para explicar a un hipotético estudiante el significado de límite de una función **desde la concepción dinámica**, **en modo G**, con tendencias laterales no coincidentes

De forma procedimental en modo A-N. Desde la concepción dinámica en modo G

- Problemática
- Método
- **Resultados**
- Conclusiones



Tarea 7

Supón que tú fueras el profesor/a de matemáticas, ¿cómo le explicarías a un/a estudiante el significado de límite de la función f(x) cuando x tiende a 2?

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 2^+} (f) = \lim_{x \to 2'0001} \frac{x-2}{x^2-4} = 0'24999 = 0'25$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 1'9999} \frac{x-2}{x^2-4} = 0'250006 = 0'25$$

$$f(x=2) = \frac{2-2}{2^2-4} = 0/0 \text{ indt}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

$$f(x) = \frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{(x+2)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = 1/4$$

Entrevista de la T7 por EST18

EST18: Para calcularlo tendríamos que ver por la izquierda y por la derecha, ..., por la derecha y por la izquierda vale 0.25, pero cuando x=2, ..., es una indeterminación

EST18: Esta función es la misma y el límite es 0.25, …, ah, es lo mismo

De forma procedimental en modo A-N. Desde la concepción dinámica en modo G

Por las respuestas dadas a las T7 y T8 y a las entrevistas, podemos concluir que hay evidencias de que **EST18**:

- **tiene capacidad** para explicar a un hipotético estudiante el significado de límite de una función **de manera procedimental**, **en modo AN,** con tendencias laterales coincidentes

- **tiene capacidad** para explicar a un hipotético estudiante el significado de límite de una función **desde la concepción dinámica**, **en modo G**, con tendencias laterales no coincidentes

La imagen clave del concepto de límite, en modo AN, es el procedimiento algorítmico de cálculo, aunque en modo G, la **imagen eficiente** son las coordinaciones dinámicas laterales

Resultados

Problemática
Método
Resultados
Conclusiones

Tienen **capacidad** para explicar a un hipotético estudiante el significado de límite de una función

C1: Desde la concepción dinámica en modo A-N y No en modo G

5 Estudiantes

C2: De forma procedimental en modo A-N Desde la concepción dinámica en modo G

- Expresa los diferentes límites laterales (1)
- Expresan los diferentes límites laterales e indican que no existe el límite (1)

2 Estudiantes

C3: Desde la concepción dinámica en modos A-N y G

- Expresan los diferentes límites laterales e indican que no existe el límite (3)

3 Estudiantes

Desde la concepción dinámica en modos A-N y G

Problemática

Método

Resultados

Conclusiones

Tarea 7

Supón que tú fueras el profesor/a de matemáticas, ¿cómo le explicarías a un/a estudiante el significado de límite de la función f(x) cuando x tiende a 2?

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$$

Cuando damos valores que se acercan a 2, un poco más grandes y un poco más pequeños, podemos observar que valores tiene la función.

No está acabado.

Resolución de la T7 por EST51 **Entrevista**

T.7

El valor 0,25 sería el límite de esa función ya que dando valores más pequeños a 2 la función tiende a 0,25 y dando valores un poco más grandes que 2 también tiende a 0,25. cuando el límite por ambos lados es igual la función tiene límite.

Ej: x = 1,99 ⟶ f(x) = 0,25063

Ej: x = 2,001 ⟶ f(x) = 0,24994

Desde la concepción dinámica en modos A-N y G

Por las respuestas dadas a la T7 y a la entrevista podemos concluir que hay evidencias de que **EST51**:

- **tiene capacidad** para explicar a un hipotético estudiante el significado de límite de una función **desde la concepción dinámica**, **en modo AN,** con tendencias laterales coincidentes

Problemática
Método
Resultados
Conclusiones

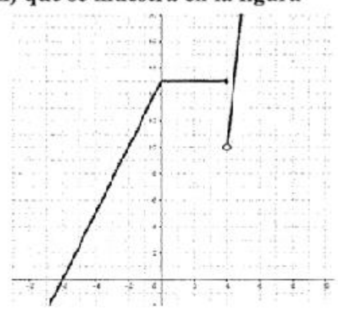
Entrevista

T. 8

Cuando x tiende a 4 por la derecha la función tiende a 10 y cuando tiene a 4 por la izquierda la función tiende a 15.
La función no tiene limite cuando x tiende a 4 porque el valor del limite por la izquierda y por la derecha es diferente.

Tarea 8

Supón que tú fueras el profesor/a de matemáticas, ¿cómo le explicarías a un/a estudiante el significado de límite de la función f(x) cuando x tiende a 4? Desde la función f(x) que se muestra en la figura



No me ha dado tiempo

Resolución de la T8 por EST51

Inv: Podrías explicar por la derecha y por la izquierda

EST51: Sí, por la derecha serían valores mayores que 4 y por izquierda serían valores menores que 4, que se acerquen a 4

Inv: **Estas utilizando el mismo criterio que, en la T7**

EST51: **Si, más o menos**

Desde la concepción dinámica en modos A-N y G

Por las respuestas dadas a las T7 y T8 y a las entrevistas, podemos concluir que hay evidencias de que **EST51**:

- **tiene capacidad** para explicar a un hipotético estudiante el significado de límite de una función **desde la concepción dinámica**, **en modo AN,** con tendencias laterales coincidentes

- **tiene capacidad** para explicar a un hipotético estudiante el significado de límite de una función **desde la concepción dinámica**, **en modo G**, con tendencias laterales no coincidentes

El elemento clave de la imagen del concepto de límite, en modo AN y en modo G, son las coordinaciones dinámicas laterales

1. Problemática
2. Diseño de la investigación
3. Resultados
4. **Conclusiones y discusión**

Como explican el significado de límite a un hipotético estudiante

Los estudiantes **inician su capacidad de explicar el significado de límite**, a un hipotético estudiante, con funciones **en modo algebraico-numérico, cuando coinciden los límites laterales,** de dos maneras

a) Concepción dinámica

b) Procedimentalmente

Los estudiantes **consolidan su capacidad** de explicar el significado de límite con funciones **en modo gráfico, cuando no coinciden los límites laterales** desde

a) Concepción dinámica

Los modos de representación en la comprensión del concepto de límite de una función

Nuestros resultados muestran que:

- **la comprensión de la imagen del límite en un modo de representación no necesariamente implica la comprensión en otra representación**
- **los estudiantes tienden a trabajar solamente con el modo de representación algebraico-numérico**

En línea con → Elia et al. (2009)

- **la vía de acceso a la concepción dinámica de límite no es uniforme**, tal como hemos observado, de ahí la necesidad de que los estudiantes sean capaces de relacionar los distintos modos de representación de un mismo concepto

En línea con → Duval (2006)

La imagen eficiente del concepto de Límite de una función

Nuestros resultados muestran que:

- **La imagen eficiente, en modo AN, es la explicación:**
  - **Desde la concepción dinámica**
  - **De forma procedimental**

- **La imagen eficiente, en modo G, es la explicación**
  - **Desde la concepción dinámica**

¿CÓMO EXPLICAN LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO SU IMAGEN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO?

Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (20 JAEM)
València 3 de Juliol de 2022

Joan Pons Tomàs

Julia Valls González

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Agradecimientos

Nuestro agradecimiento alumnado de primero de bachillerato que participó voluntariamente durante el curso 2018/2019; así como al profesorado que nos permitió el acceso a sus aulas:

- **Asun Goméz** (ies Enric Valor);
- **Conrad Gallent y Yolanda Villaverde** (ies Lloixa);
- **Cristina Carbonell y Fernando Arenas** (ies Allusser);
- **Consuelo Belmonte y Ana Sogorb** (ies Berlanga);
- **María Maestre** (ies Mutxamel);
- **Ximo Nebot, Víctor Cabrera, Juan Aurelio Pina y Fidel Pastor** (ies Gaia)