

# ¿Por qué entonan las guitarras sin trastes paralelos?

Miquel Albertí Palmer

20 JAEM

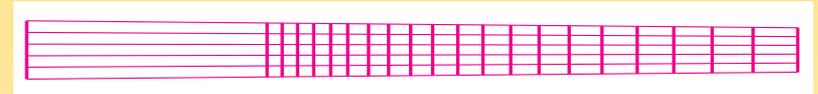
València 2022



# La guitarra



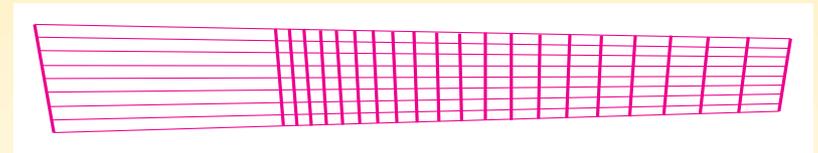
La retícula sonora de una guitarra de tiro único (con trastes paralelos) es trapezoidal.



Todas las guitarras se construyen con equidistancia de cuerdas en la cejuela y en la selleta.



La retícula sonora de una guitarra de tiro múltiple (con los trastes no paralelos) es cuadrilátera.



# Trastes paralelos no equidistantes

El sistema musical temperado divide el intervalo de octava (duplicación de la frecuencia sonora) en 12 semitonos. El aumento  $r$  de frecuencia de un semitono es:

$$2 = r \cdot r \cdot r \cdot \dots^{12 \text{ veces}} \cdot r = r^{12} \Rightarrow r = \sqrt[12]{2} \approx 1,06$$

Traste (n)	Frecuencia $f \cdot 2^{(n/12)}$	Recorte longitud de cuerda	Separación entre trastes	Intervalo musical
0	1,000	0,000	—	
1	1,059	0,056	0,056	2ª menor
2	1,122	0,109	0,053	2ª mayor
3	1,189	0,159	0,050	3ª menor
4	1,260	0,206	0,047	3ª mayor
5	1,335	0,251	0,045	4ª
6	1,414	0,293	0,042	4ª aumentada
7	1,498	0,333	0,040	5ª
8	1,587	0,370	0,037	6ª menor
9	1,682	0,405	0,035	6ª mayor
10	1,782	0,439	0,033	7ª menor
11	1,888	0,470	0,031	7ª mayor
12	2,000	0,500	0,030	8ª

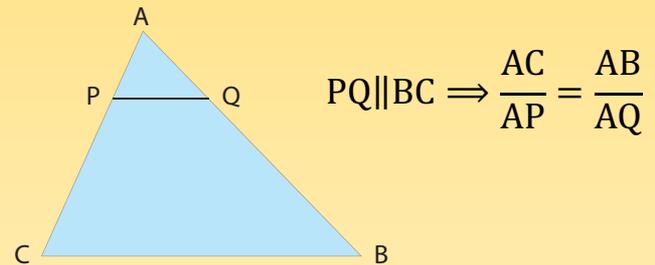
Traste de la guitarra (n)	Frecuencia	Recorte longitud de cuerda	Separación entre trastes
	$f \cdot 2^{(n/12)}$		
0	1,000	0,000	—
1	1,059	36,482	36,482
2	1,122	70,916	34,434
3	1,189	103,417	32,501
4	1,260	134,095	30,677
5	1,335	163,050	28,956
6	1,414	190,381	27,330
7	1,498	216,177	25,796
8	1,587	240,526	24,349
9	1,682	263,508	22,982
10	1,782	285,200	21,692
11	1,888	305,674	20,475
12	2,000	325,000	19,326
13	2,119	343,241	18,241
14	2,245	360,458	17,217
15	2,378	376,709	16,251
16	2,520	392,047	15,339
17	2,670	406,525	14,478
18	2,828	420,190	13,665
19	2,997	433,089	12,898
20	3,175	445,263	12,174
21	3,364	456,754	11,491
22	3,564	467,600	10,846
23	3,775	477,837	10,237
24	4,000	487,500	9,663

# Entonación con trastes paralelos

La guitarra entona si cada traste intercepta las cuerdas en puntos correspondientes a la misma sección de su longitud vibrante.

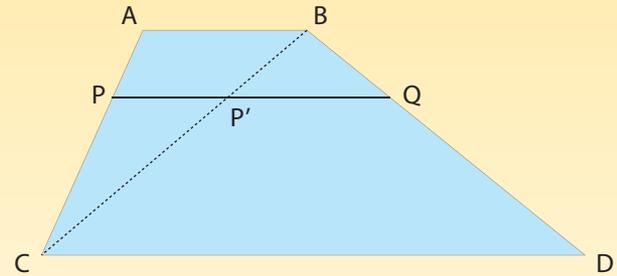
## Proposición VI.2 (Euclides, 1996, 58)

Si se traza una paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo.



## Teorema 1 (VI.2 generalizada al trapecio)

La paralela intermedia a los dos lados paralelos de un trapecio intercepta los lados no paralelos en puntos correspondientes a la misma sección de sus longitudes.

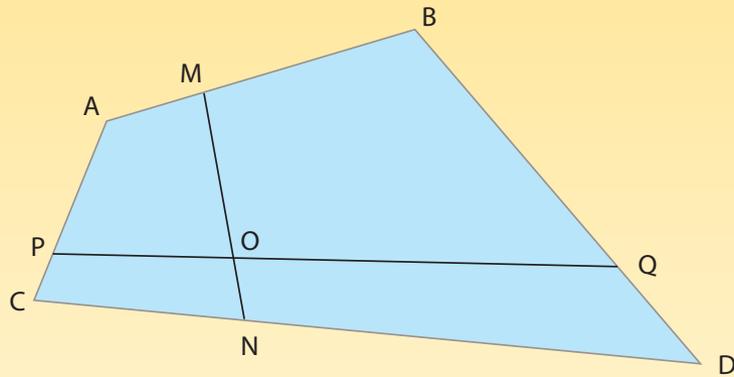


$$PQ \parallel AB \parallel CD \Rightarrow \frac{AC}{AP} = \frac{BD}{BQ}$$

# Entonación con trastes NO paralelos

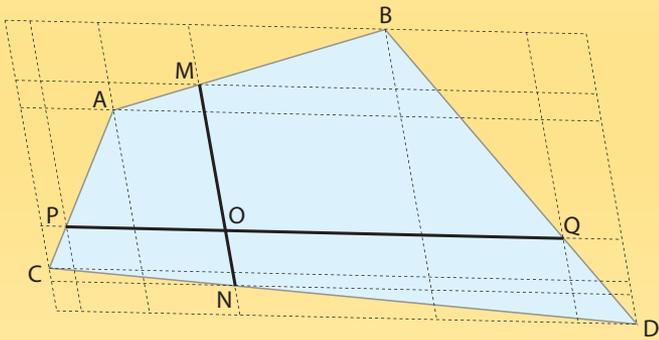
## Teorema de las divisorias

Sean  $M, N, P, Q$  puntos sobre los lados de un cuadrilátero  $ABCD$  tales que  $AC/AP=BD/BQ=r$  y  $AB/AM=CD/CN=s$ . Entonces, el punto de intersección  $O$  de  $PQ$  con  $MN$  es tal que  $PQ/PO=r$  y  $MN/MO=s$ .



Para la buena entonación deben conservarse las proporciones pese a la ausencia de paralelismos!

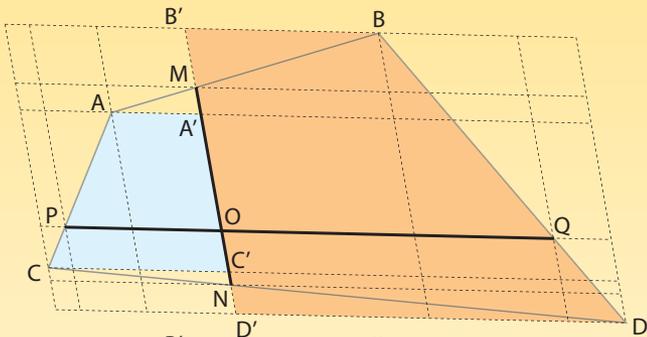
# Demostración del teorema de las divisorias



Con paralelas a PQ y MN el cuadrilátero se inscribe en una retícula de paralelogramos.

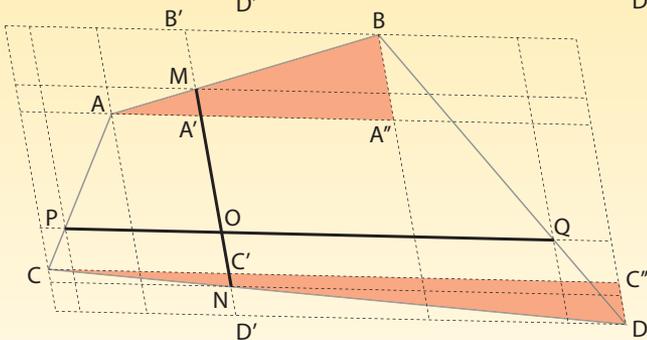
Aplicando el teorema 1 en AA'CC' y BB'DD':

$$\frac{A'C'}{A'O} = r = \frac{B'D'}{B'O}$$



Aplicando la preposición VI.2 en ABA'' y CDC'':

$$\frac{B'A'}{MA'} = s = \frac{C'D'}{C'N}$$



Descomponiendo B'D' de dos formas equivalentes:

$$B'D' = r \cdot B'O = r \cdot (s \cdot MA' + A'O)$$

$$B'D' = s \cdot MA' + r \cdot A'O + s \cdot C'N$$

⇒

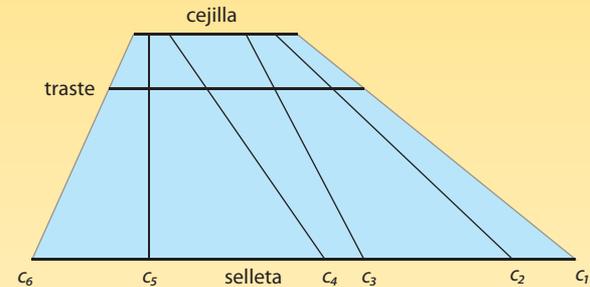
$$MN = r \cdot MO$$

Análogamente,  $PQ = s \cdot PO$

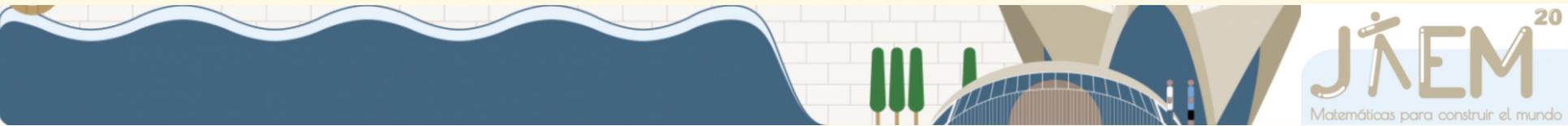
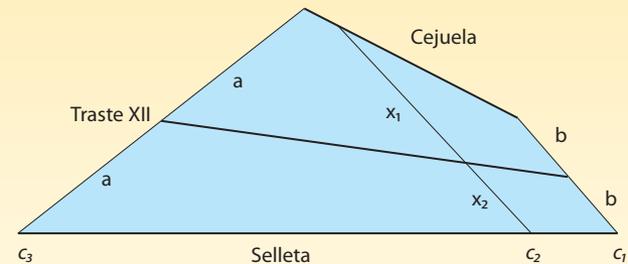
# Conclusiones (1ª parte)

- El teorema 1 justifica geoméricamente la entonación en guitarras de tiro único (trastes paralelos).
- El teorema de las divisorias (Albertí, 2022) justifica geoméricamente la entonación en guitarras de tiro múltiple (sin los trastes paralelos).

- Las guitarras de tiro único entonarían bien aun sin equidistancia de cuerdas.



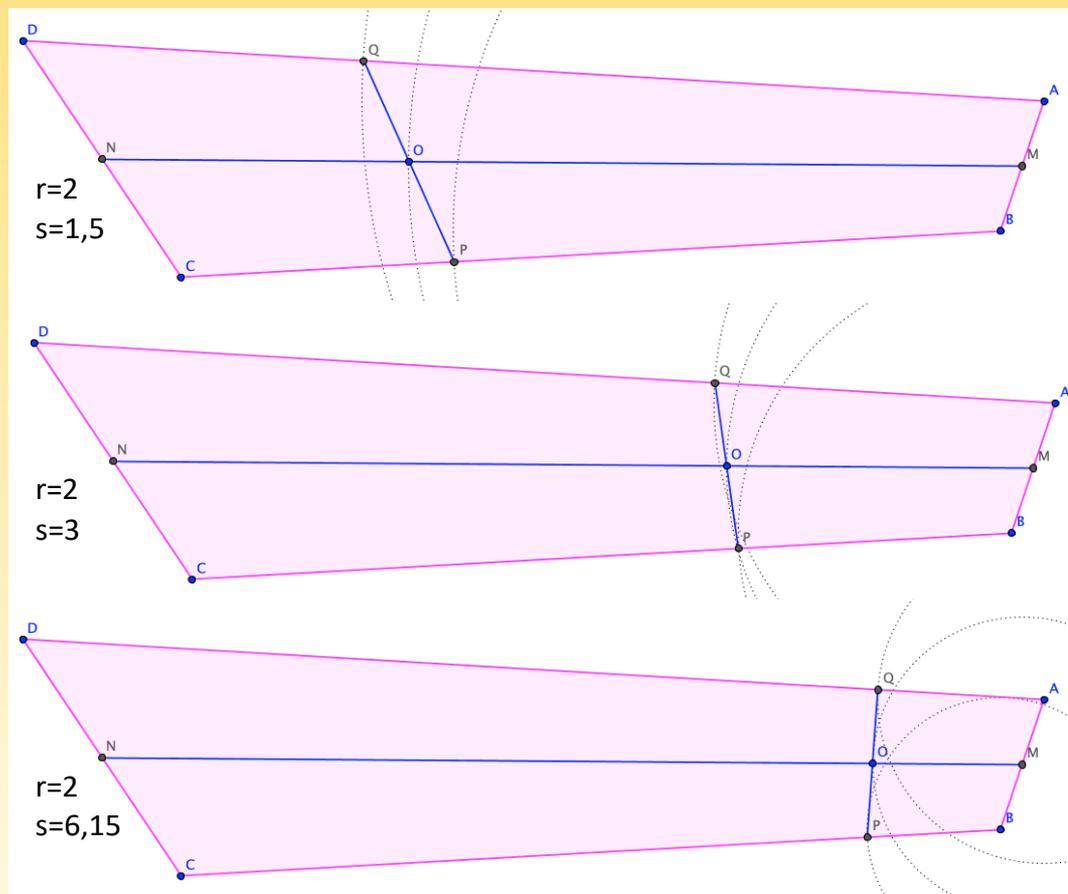
- Las guitarras de tiro múltiple no entonarían correctamente sin equidistancia de cuerdas.





# Y en GeoGebra, ¿cómo suena?

La experimentación dinámica digital (GeoGebra) aporta certeza al teorema de las divisorias.



# Ámbito laboral: inspiración matemática

- Lutería: labor profesional que ha inspirado el desarrollo de nuevo conocimiento matemático de acuerdo con Albertí (2009)
- Resolución de un problema planteado por De Villiers (2013) relativo a las bimedias de un cuadrilátero y llevada a cabo según la metodología de Pólya (1988).
- El conocimiento matemático desarrollado constituye una interpretación matemática situada de la «obra-acabada» de una labor artesanal (Albertí, 2007).
- Se hace necesario investigar la motivación de las equidistancias de las cuerdas en guitarras con trastes no paralelos: ¿obedece a la tradición constructiva de las guitarras con trastes paralelos o es un propósito para la correcta entonación?
- Para averiguarlo habría que indagar en la «obra-en-proyecto» (Albertí, 2007) interpelando a los luthiers que construyen guitarras de tiro múltiple.
- Esto afecta al aprendizaje matemático extracadémico de guitarreros y luthiers en general.

# La guitarra en el aula

- ESO 1

Proporcionar sentido y significado a un elemento común y cotidiano.

Conocimiento de cómo funciona una guitarra.

Modelización geométrica: retículas sonoras.

Interpretación geométrica y auditiva de los principales tastos (V, VII y XII) para relacionarlos con las correspondientes secciones de las cuerdas vibrantes ( $1/4$ ,  $1/3$  y  $1/2$ ).

- ESO 2

Interpretación geométrica de las guitarras de tiro único y de su relación con el teorema de Tales.

Enunciados de los teoremas necesarios para garantizar la entonación en ambos tipos de guitarras.

Teorema 1 como aplicación del teorema de Tales.



- ESO 3

Interpretación geométrica de las guitarras de tiro múltiple y su relación con el teorema de las divisorias.

Dinamización digital para garantizar su certeza: puede decirse que GeoGebra *demuestra* (Carrillo, 2012), aunque la experimentación no constituya una demostración matemática.

- ESO 4

Demostración euclidiana afín al planteamiento del teorema de las divisorias como punto final del proceso demostrativo (Orts, 2021) con el fin de hallar comprensión del fenómeno y validar el resultado matemático.

- Recapitulación del proceso educativo

Modelización, expresión matemática, experimentación (digital), certeza, comprensión, demostración y validación matemática.



# El tiempo... ¡es nuestro!

Nada de esto habría sido posible sin que el autor dispusiese del tiempo necesario para desarrollarlo.

Los tiempos de desarrollo y aprendizaje no son los mismos para todo el mundo.

El profesorado debe gestionar no solo el pensamiento de su alumnado, también su tiempo.

El profesorado es dueño del tiempo, del suyo y del de su alumnado.

¿Cuánto tiempo está dispuesto a conceder y de qué modo?

Depende de sus concepciones del aprendizaje y de lo que es una sesión de clase, pero sobre todo del conocimiento que tiene de su alumnado.

Solo asumiendo que es dueño del tiempo el profesorado puede asumir la responsabilidad de gestionarlo en beneficio del aprendizaje.



**Que el temps sigui vostre,  
xiquetes i xiquets!**

**Moltes gràcies!**

